Introducción al análisis de Fourier y algunas aplicaciones

Dr. Cristina Balderrama
MSc. Alejandra Aguilera

Escuela de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Central de Venezuela

11 de mayo 2016

Series trigonométricas

Aproximar una función por polinomios trigonométricos

$$\sum_{k=0}^{N} (a_n \cos kt + b_n \operatorname{sen} kt)$$

Surge naturalmente al resolver EDP's por separación de variables

- 1747 D'Alambert: oscilación de la cuerda de un violín

$$u(x,t) = \text{desplazamiento en tiempo } t \text{ y posición } x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$$

Solución: $u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+t) - f(x-t)\right]$, $\quad f$ impar y periódica.

- 1753 Daniel Bernoulli, 1759 Lagrange: proponen

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen} k\pi x.$$

Series trigonométricas

- 1777 Euler: propone la misma representación con
$$b_k = 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{sen}\,k\pi x dx.$$
- J. Fourier: problema de propagación de calor
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$
  - Introduce las series de Fourier para resolver el problema.
  - 1807 Presenta resultados ante la Academia de Ciencias de París (Lagrange, Laplace, Legendre, Malus...).
  - 1811 ”Memoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides”.
  - 1822 ”Théorie analitique de la chaleur”.
  - Propone que cualquier función suave a trozos puede ser representada como una serie trigonométrica.
- 1829 Dirichlet, 1867 Riemann: dan presición y formalidad a la teoría.

Series de Fourier

Dada una función f 2π-periódica e integrable, consideremos los coeficientes de Fourier de f

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad n \geq 0, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\, nx dx, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

La serie de Fourier de f se define como

$$S[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \,\mathrm{sen}\, nx] .$$

$$S_N[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} [a_n \cos nx + b_n \,\mathrm{sen}\, nx] .$$

Problemas:

- Determinar cuando y en que sentido la serie representa a f.
- Determinar cuando y en que sentido esta serie converge.
- Si la serie converge en x_0, ¿cuándo converge a $f(x_0)$?

(Algunas) respuestas

Teorema (Criterio de Dini)

Si para algún x_0 existe $\delta > 0$ tal que $\int_{|t|<\delta} \left| \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} \right| dt < \infty$, entonces $S[f](x_0)$ converge a $f(x_0)$.

Teorema (Criterio de Jordan)

Si f es una función de variación acotada en un entorno de x_0, entonces $S[f](x_0)$ converge a $\frac{1}{2}\left[f(x_0^+) + f(x_0^-)\right]$.

- Si f satisface una condición de Lipschitz en x_0, i.e.
existen $a, c, \delta > 0$ tal que si $|t| < \delta$, entonces $|f(x_0+t) - f(x_0)| < c|t|^a$,
se puede aplicar el criterio de Dini.
- Si f es continua, los resultados no son necesariamente ciertos.
    - 1873 DuBois-Reymond construyó una función continua cuya SF diverge.
    - Duoandikoetxea (AMS 2001) muestra la existencia de una función continua cuya SF diverge, usando el Teorema de acotación uniforme de Banach-Steinhauss.

Representación exponencial

Usando la identidad de Euler $e^{inx} = \cos nx + i \operatorname{sen} nx$, podemos reescribir

$$S[f](x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

$$\text{donde} \qquad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

Tenemos que

$$a_n = c_n + c_{-n}, \ \ n \geq 0 \qquad \text{y} \qquad b_n = i(c_n - c_{-n}), \ \ n \geq 1.$$

Usualmente se escribe $c_n = c_n(f) = \hat{f}(n)$.

Coeficientes de Fourier

- Lema de Riemann-Lebesgue: Si f es integrable, entonces $c_n \to 0$ si $|n| \to \infty$.

- Si f es absolutamente continua, entonces $c_n(f') = in\, c_n(f)$.

- Si f es integrable y F es la integral indefinida de f, $F(t) = c + \int_0^t f(s)ds$,

$$F(t) - c_0(f)(0)t \sim d_0 + \sum_{n\neq 0} \frac{c_n(f)}{in} e^{int},$$

donde d_0 es una constante.

- Si f y g son integrables, entonces $c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g)$.

Teoría L^2

$$L^2[-\pi,\pi] = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f \text{ es } 2\pi\text{-periódica, medible y } \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

$L^2[-\pi,\pi]$ es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)} dx.$$

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si definimos $e_n(x) := e^{inx}, n \in \mathbb{N}$.

- $e_n \in L^2[-\pi,\pi]$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal completa de $L^2[-\pi,\pi]$.

Podemos aplicar la teoría de espacios de Hilbert.

Teoría L^2

- Los coeficientes de la SF de f son

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt = \langle f, e_n\rangle.$$

- Convergencia en L^2

$$S[f] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, e_n\rangle e^{inx} = f \qquad \text{en} \quad L^2[-\pi,\pi].$$

- Identidad de Parseval

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\overline{c_n(g)}.$$

$$\|f\|_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

- Teorema de Plancherel

Si $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$, entonces existe $f \in L^2[-\pi,\pi]$ tal que $c_n = c_n(f)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

- La aplicación $f \mapsto \{c_n(f)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una isometría entre $l^2(\mathbb{Z})$ y $L^2[-\pi,\pi]$.

Teoría L^p

Para $1 \leq p < \infty$

$$L^p[-\pi,\pi] = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f \text{ es } 2\pi\text{-periódica, medible y } \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

Ya no hay estructura de espacio de Hilbert, pero si de Banach, con la norma

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

¿Qué podemos decir en este espacio de las series de Fourier?

- ¿$S[f]$ converge a f en normal p?
- ¿$S[f]$ converge a f en casi todo punto?

- ¿$S[f]$ converge a f en normal p?

Lemma (Duoandikoetxea AMS 2001)

Si $1 \leq p < \infty$ y $f \in L^p[-\pi, \pi]$, entonces $S[f]$ converge a f en norma L^p si, y solo si, existe una constante C_p tal que para todo $N \in \mathbb{N}$

$$\left\| \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n \right\|_p \leq C_p \|f\|_p.$$

Respuesta:

- Si $1 < p < \infty$, se puede demostrar que la condición del Lemma se satisface.
- Si $p = 1$ La respuesta es negativa.

• ¿$S[f]$ converge a f en casi todo punto?

Esta pregunta es un poco más difícil de responder y tomo muchos años responderla.

• $p = 1$ No. En 1926 Kolmogorov construyó una función integrable tal que su serie de Fourier diverge en todo punto.

• $p = 2$ Si. Demostrado por L. Carleson en 1965.

• $p > 1$ Si. Demostrado por R. Hunt en 1967.

Antes de la demostración de Carleson no se sabia la respuesta ni siquiera para funciones continuas.

Análisis armónico: estudio de las series de Fourier y sus generalizaciones.

• Transformada de Fourier. Para funciones en $\mathbb{R}$ no periódicas. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$

$$\tilde{f}(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-iyt} dt.$$

• Para funciones generalizadas $\sim$ distribuciones. Generalizar la teoría sobre objetos que no son funciones.

• Series y transformadas de Fourier en grupos compactos. Se trata de preservar la propiedad de pasar de la convolución al producto. Teoría de Fourier en $L^2(G)$.

• Variedades Rimanneanas. Con el operador de Laplace-Beltrami se puede definir una ecuación del calor. Para resolverla, se ¨crea¨ una teoría de Fourier.

•Grupos no abelianos localmente compactos. Caracterizaciones de las representaciones irreducibles del grupo.

Aplicaciones

Evaluación de series no triviales

$$\text{Problema de Basilea} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

- Relacionado con problemas de teoría de números. Función Zeta de Riemann.
- 1735 (1741) Euler: resuelve usando desarrollos de Taylor.

Evaluación de series no triviales

$$\text{Problema de Basilea} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

Ceros de $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ en $x_n = n\pi$, $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = c \prod_{n \in \mathbb{Z}-\{0\}} (x_n - x) = \prod_{n \in \mathbb{Z}-\{0\}} \left(1 - \frac{x}{x_n}\right) = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \cdots$$

Comparando los coeficientes de x^2

$$-\tfrac{1}{6} = -\tfrac{1}{3!} = a_2 = -\tfrac{1}{\pi^2} - \tfrac{1}{4\pi^2} - \tfrac{1}{9\pi^2} = -\tfrac{1}{\pi^2} \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n^2}.$$

$$\text{Así} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Evaluación de series no triviales

Se puede resolver el problema de Basilea usando desarrollos de Fourier.
Consideremos la extensión periódica de $f(x) = x$, $x \in [-\pi, \pi]$.
Sus coeficientes de Fourier vienen dados por

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} xdx = 0.$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}dx$$

Por la identidad de Paseval

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}.$$

$$\text{Así} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Evaluación de series no triviales

Queremos ahora evaluar $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

¿Podemos hacerlo usando desarrollos de Taylor?

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots$$

Comparando los coeficientes de x^4

$$\frac{1}{5!} = a_4 = \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k^2\pi^2} + \cdots = \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}.$$

Si en lugar de $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, consideramos $\frac{\operatorname{sen} x}{x^3}$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x^3} = \frac{1}{x} - \frac{1}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \frac{x^4}{7!} + \cdots$$

Evaluación de series no triviales

Se puede resolver usando desarrollos de Fourier.
Consideremos la extensión periódica de $f(x) = x^2$, $x \in [-\pi, \pi]$.
Sus coeficientes de Fourier vienen dados por

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}. \\ c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-inx}dx = \frac{2(-1)^n}{n^2}, \quad n \neq 0. \end{aligned}$$

Por la identidad de Parseval

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = \frac{\pi^4}{9} + \sum_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}} \frac{4}{n^4} = \frac{\pi^4}{9}\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{4}{n^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^4} = \frac{\pi^4}{9} + 8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{\pi^4}{5}.$$

Así $\qquad \dfrac{\pi^4}{9} + 8\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{5}, \qquad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$

Desigualdad de Wirtinger

Si $[a,b]$ es un intervalo acotado y $f \in C^1[a,b]$ es tal que $f(a)=f(b)=0$, entonces

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \le \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2 \int_a^b |f'(x)|^2 dx.$$

Simplificación del problema: basta considerar $a=0, b=\pi$.
Sino, sea $h(x) = \frac{\pi(x-a)}{b-a}$ y $g = f \circ h^{-1}$.
Por el teorema de cambio de variable

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f(x)|^2 dx &= \int_0^\pi |g(y)|^2 \left(\frac{b-a}{\pi}\right) dy \\
&\le \left(\frac{b-a}{\pi}\right) \int_0^\pi |g'(y)|^2 dy = \left(\frac{b-a}{\pi}\right) \int_0^\pi |f'(h^{-1}(y))|^2 |(h^{-1})'(y)|^2 dy \\
&= \left(\frac{b-a}{\pi}\right) \int_a^b |f'(x)|^2 \left(\frac{\pi}{b-a}\right) \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2 dx \\
&= \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2 \int_a^b |f'(x)|^2 dx.
\end{aligned}$$

Desigualdad de Wirtinger

Vemos entonces que $$\int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_0^{\pi} |f'(x)|^2 dx.$$

Sea $\tilde{f}$ la extensión impar de f a $[-\pi, \pi]$.

Como $f \in C^1[0, \pi]$, entonces $\tilde{f}, \tilde{f}' \in L^2[-\pi, \pi]$.

Por la identidad de Parseval para $\tilde{f}$ y $\tilde{f}'$ ($c_0(\tilde{f}) = c_0(\tilde{f}') = 0$)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}'(x)|^2 dx = \sum_{n\neq 0} |c_n(\tilde{f}')|^2 = \sum_{n\neq 0} |inc_n(\tilde{f})|^2 \geq \sum_{n\neq 0} |c_n(\tilde{f})|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}(x)|^2 dx.$$

Como $\tilde{f}$ y $\tilde{f}'$ son impares, lo anterior implica que

$$\int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_0^{\pi} |f'(x)|^2 dx.$$

El teorema de aproximación de Weierstrass

Teorema (de aproximación de Weierstrass)

Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado se puede aproximar uniformemente por polinomios.

Formulado por Karl Weierstrass en 1885. Lo demostró usando la transformada de Weierstrass.

Demostración sencilla usando usando teoría de Fourier

Teorema (de Fejer)

Sea f una función 2π-periodica y sea $S_n[f]$ la n-ésima suma parcial de la serie de Fourier de f y

$$\sigma_n[f] = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} S_j(f).$$

Entonces $\lim \sigma_n[f] = f$ *uniformemente en* $\mathbb{R}$.

El problema isoperimétrico

Determinar de entre todas las curvas planas cerradas de perímetro fijo la que encierra la mayor área.

Respuesta: la circunferencia. Conocido desde la grecia antigua.

La primera demostración rigurosa se obtiene a mediados del siglo XIX.

Teorema (Desigualdad isoperimétrica)

Si C es una curva cerrada, suave y simple de longitud L, entonces el área A encerrada por C satisface

$$4\pi A \leq L^2.$$

La igualdad se satisface si, y solo si, C es una circunferencia.

- Ligado con problemas de la física: principio de acción estacionaria.
- Hay muchas demostraciones, usando técnicas varidas.
- En 1902 Hurwitz lo demuestra usando series de Fourier.

El problema isoperimétrico

Sea C una curva cerrada, suave y simple con parametrización $(x(t), y(t)), t \in [0, 1]$.

- Cerrada: $x(0) = x(1)$, $y(0) = y(1)$.
- Suave: $x, y \in C^1[0, 1]$.
- Simple: $(x(t_1), y(t_1)) \neq (x(t_2), y(t_2))$ si $t_1, t_2 \in (0, 1)$, $t_1 \neq t_2$.
- Longitud: $\int_0^1 [(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{\frac{1}{2}} dt$.

Usamos la parametrización por longitud de arco, por lo que

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 1 \qquad \text{y} \qquad L = 1.$$

Por el Teorema de Green

$$A = \frac{1}{2} \int_C (xdy - ydx) = \frac{1}{2} \int_0^1 [x(t)y'(t) - y(t)x'(t)]\, dt.$$

El problema isoperimétrico

Consideremos las series de Fourier de x e y,

$$x(t) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2\pi int}, \qquad c_n = \int_0^1 x(t)e^{-2\pi int}dt,$$

$$y(t) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n e^{2\pi int}, \qquad d_n = \int_0^1 y(t)e^{-2\pi int}dt.$$

Por Parseval

$$\begin{aligned} 1 = L &= \int_0^1 (x'(t))^2 dt + \int_0^1 (y'(t))^2 dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |2\pi inc_n|^2 + \sum_{n\in\mathbb{Z}} |2\pi ind_n|^2 \\ &= 4\pi^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2[|c_n|^2 + |d_n|^2]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 x(t)y'(t)dt - \int_0^1 y(t)x'(t)dt\right] = \frac{1}{2}\left[\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\overline{(2\pi ind_n)} - \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n\overline{(2\pi inc_n)}\right] \\ &= \pi\sum_{n\in\mathbb{Z}} in\left[\overline{c_n}d_n - c_n\overline{d_n}\right]. \end{aligned}$$

El problema isoperimétrico

Así,

$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{4\pi} - A\right] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[n^2(|c_n|^2 + |d_n|^2) - in(\overline{c_n}d_n - c_n\overline{d_n})\right].$$

Escribiendo $c_n = \alpha_n + i\beta_n$ y $d_n = \gamma_n + i\delta_n$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{4\pi} - A\right] = \sum_{n\neq 0} \left[(n\alpha_n + \delta_n)^2 + (n\beta_n - \gamma_n)^2 + (n^2 - 1)(\delta_n^2 + \gamma_n^2)\right].$$

Esta última suma es no negativa, por lo que

$$4\pi A \leq 1 = L.$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{4\pi}-A\right]=\sum_{n\neq 0}\left[(n\alpha_n+\delta_n)^2+(n\beta_n-\gamma_n)^2+(n^2-1)(\delta_n^2+\gamma_n^2)\right].$$

Esta suma se anula si

$$\alpha_n=\beta_n=\gamma_n=\delta_n=0,|n|\geq 2,\quad \alpha_{\pm 1}=-\delta_{\pm 1},\quad \beta_{\pm 1}=\gamma_{\pm 1}.$$

Pero

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= Re\left[\int_0^1 x(t)e^{-2\pi int}dt\right]=\int_0^1 x(t)\cos 2\pi nt dt = Re\left[\int_0^1 x(t)e^{2\pi int}dt\right]=\alpha_{-1},\\
\beta_1 &= Im\left[\int_0^1 x(t)e^{-2\pi int}dt\right]=\int_0^1 x(t)\,\mathrm{sen}\, 2\pi nt dt = -Im\left[\int_0^1 x(t)e^{2\pi int}dt\right]=-\beta_{-1},\\
\gamma_1 &= \gamma_{-1}, \qquad\qquad \delta_1=-\delta_{-1}.
\end{aligned}$$

El problema isoperimétrico

Así, se satisface la igualdad si

$$\begin{aligned}
x(t) &= c_0 + c_{-1}e^{-2\pi it} + c_1 e^{2\pi it} \\
&= c_0 + (\alpha_1 - i\beta_1)(\cos 2\pi t - i \operatorname{sen} 2\pi t) + (\alpha_1 + i\beta_1)(\cos 2\pi t + i \operatorname{sen} 2\pi t) \\
&= c_0 + 2\alpha_1 \cos 2\pi t - 2\beta_1 \operatorname{sen} 2\pi t, \\
y(t) &= d_0 + d_{-1}e^{-2\pi it} + d_1 e^{2\pi it} \\
&= d_0 + 2\beta_1 \cos 2\pi t + 2\alpha_1 \operatorname{sen} 2\pi t.
\end{aligned}$$

Tenemos que

$$(x(t) - c_0)^2 + (y(t) - d_0)^2 = 4(\alpha_1^2 + \beta_1^2).$$

Pero

$$1 = (x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 4(\alpha_1^2 + \beta_1^2)4\pi^2.$$

Así

$$(x(t) - c_0)^2 + (y(t) - d_0)^2 = \frac{1}{4\pi^2}.$$

Por lo tanto, $(x(t), y(t))$ parametriza a una circunferencia.