UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
COORDINACIÓN ACADEMICA
UNIDAD DE PROMOCIÓN, SELECCIÓN Y ADMISIÓN

GUÍA DE MATEMÁTICA

DRA. CONCEPCIÓN BALLESTER

Abriendo la puerta al conocimiento

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
COORDINACIÓN ACADEMICA
UNIDAD DE PROMOCIÓN, SELECCIÓN Y ADMISIÓN

GUÍA DE MATEMÁTICA

DRA. CONCEPCIÓN BALLESTER

Esta guía es un valioso aporte de la Doctora Concepción Ballester, profesora jubilada de nuestra Escuela de Matemática,a quien manisfestamos nuestro sincero agradecimiento en nombre de los estudiantes que hacen uso de ella.

REVISADO POR :
PROF. INES TOVAR

TRANSCRITO POR:
CARLOTA PETAQUERO
MILDRED GRATEROL

MARZO 2006

Contenido

Introducción

La Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela elaboró este folleto con el propósito fundamental de proporcionar al aspirante una orientación general sobre el proceso de Examen de Admisión.

Con el objeto de facilitar y orientar el estudio, esta guía presenta un programa que contempla los temas de Matemática sobre los que versará el examen, desarrollando, a su vez, algunos aspectos teóricos del programa con el propósito que el estudiante los repase.

Adicionalmente presenta un modelo de examen con sus soluciones, de manera que el estudiante se familiarice con el estilo de prueba de matemática que debe rendir y los métodos de razonamientos básicos requeridos. Asimismo, plantea algunos ejercicios a resolver, cuya ejecución le permitirá afianzar sus conocimientos.

Por otra parte, pretende sembrar inquietud acerca del uso racional de la calculadoras.

Finalmente, es importante recalcar que esta publicación es sólo una guía. Se recomienda consultar en sus libros de bachillerato los temas aquí tratados. Recuerde que en la medida en que resuelva correctamente un mayor número de ejercicios, mejor preparado estará no sólo para el examen sino también para proseguir sus estudios en la Facultad.

Orientación General sobre el Proceso de Examen de Admisión

La Prueba Interna tiene como objetivo seleccionar aquellos estudiantes que demuestran mayores posibilidades de cursar con éxito estudios en la Facultad de Ciencias, de acuerdo a criterios establecidos.

La presentación de la Prueba es voluntaria; quienes desean ingresar a la Facultad no están en la obligación de presentarla y quienes la presenten y no aprueben pueden tener la oportunidad de ingresar a través de la otra modalidad (**Índice Académico C.N.U.**).

En la Prueba Interna las calificaciones obtenidas en la educación media no se consideran en la evualuación, ofreciendo así una mayor posibilidad al aspirante de optar por la carrera de su preferencia.

La Prueba Interna se efectúa una vez al año en la sede de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela.

La Prueba Interna comprende dos sub-pruebas:

1. **Sub-prueba de Razonamiento verbal**, pretende evaluar el buen uso y manejo del lenguaje, lo cual es fundamental para un bachiller que aspire a continuar estudios en un Instituto de Educación Superior.

2. **Sub-prueba de Conocimiento**, pretende evaluar las nociones básicas en el área de Matemática. Todas las preguntas de la prueba son elaboradas al mismo nivel de conocimientos que se imparten en la educación media.

Estas pruebas son de selección múltiple, es decir, para cada pregunta se ofrece cuatro respuestas, de las cuales sólo una es la respuesta correcta. En la valoración de las pruebas se consideran las respuestas incorrectas, por tanto no es conveniente responder al azar.

Es importante leer y seguir cuidadosamente las instrucciones de las pruebas.

En cada prueba se entrega una hoja de respuestas que está diseñada para ser leída por una lectora óptica. Antes de comenzar la prueba se deben verficar los datos de indentificación impresos en cada planilla. Las operaciones que se realicen deben hacerse en el mismo cuestionario del examen y no en la hoja de respuesta.

Se debe usar solamente lápiz. Si se desea cambiar alguna respuesta hay que borrar muy bien antes de marcar de nuevo; toda pregunta marcada con más de una respuesta se considera incorrecta.

El día de la Prueba es imprescindible la presentación de la constancia de inscripción y la cédula de identidad laminada.

Los resultados se publicarán en las carteleras internas y en la página Web

(http:/www.ciens.ucv.ve/upsa), la tercera semana siguiente a la presentación de la prueba interna.

Importante:

1. Los alumnos selecionados por acta convenio, convenios institucionales, deportistas y artistas, deben presentar la prueba obligatoriamente
2. Toda inscripción será revisada para comprobar la veracidad de los datos y la certificación del depósito por parte del Banco.
3. Los estudiantes que están en Normas de Permanencia. No podrán presentar la Prueba Interna.

Para ingresar al nivel de Educación Superior es requisito indispensable tener la Prueba de Aptitud Académica vigente y cumplir con el proceso de **Pre-inscripción Nacional del CNU-OPSU.**

Programa de Matemática

Aritmética y Álgebra

Conjunto de número: N, Z, Q,y R. Operaciones con números.

Comparación de números.

Porcentajes.

Expresiones algebraicas. Ecuaciones de primer grado. Productos notables.

Ecuaciones de segundo grado. Raíces. Relación entre coeficientes y raíces.

Polinomios. Grado de polinomio de una variable. Operaciones. Teorema del Resto.

Logaritmos y antilogaritmos.

Sistema de 2 ecuaciones lineales de 2 incógnitas.

Geometría y Trigonometría:

Segmentos. Ángulos. Medida de un ángulo en grados y radianes.

Rectas paralelas y perpediculares.

Rectas paralelas cortadas por una secante. Ángulos alternos internos, alternos externos y correspondientes.

Triángulos. Medianas, mediatrices, alturas y bisectrices de un triángulo.

Congruencia y semejanza.

Triángulos rectángulos. Teorema de Pitágoras.

Cuadriláteros.

Área y perímetro.

Círculo trigonométrico. Seno, coseno, tangente de un ángulo. Cálculo de los elementos de un triángulo rectángulo dados dos de ellos.

Teorema del seno y del coseno.

Plano Coordenado y Vectores:

Coordenadas en el plano. Rectas paralelas a los ejes coordenados. Rectas: pendiente y ordenada al origen. Vectores en el plano.

Sobre el uso Racional de las Calculadoras

Si usted tiene una calculadora, no por ello debe saber menos álgebra y usar menos su raciocinio.

Suponemos que queremos resolver la ecuación:

$$\begin{aligned} 3x+\ 5 &= x-7 \\ 3x-x &= -7-5 \\ 2x &= -12 \\ x &= \frac{-12}{2}=-6 \end{aligned}$$

No necesitamos calculadora.
Si ahora tenemos:

$$\begin{gathered} 3,1509x+7,2145=12,5x-6,891 \\ 3,1509x-12,5x=7,2145-6,891 \\ x=\frac{-\left(7,2145+6,891\right)}{3,1509-12,5} \end{gathered}$$

Este es el momento de usar la calculadora. Pero observe que el conocimiento algebraico requerido en ambos ejemplos es el mismo. Además, también debe decidir el signo del resultado.

También, resulta más rápido sumar mentalmente $1, 3, 7,$ y 12; o dividir 31 entre 2 que sacar la calculadora del bolsillo.

Cuando realice algún cálculo debe estimar previamente el resultado, ello le ayudará a prevenir errores, pués a veces uno se equivoca con o sin calculadora.

Recuerde también que las calculadora tienen un error de redondeo interno que en los casos en que se requieren repuestas exactas pueden alterar el resultado.

Por ejemplo, si usted quiere calcular:

$\log 3-\log 12+\log 8-\log 2$; posiblemente obtendrá un número decimal si usted usa la calculadora para hallar los logaritmos y efectuar las operaciones correspondientes.

Pero si usted observa que:

$$\log 3 - \log 12 + \log 8 - \log 2 = \log \frac{3 \times 8}{12 \times 2} = \log 1 = 0$$

obtiene la respuesta correcta que es 0.

Las respuestas $0,0000013$ ó $1,9999985$ no son respuesta admisibles. Por lo tanto nuestra recomendación es: **Use la calculadora racionalmente. No abuse de ella.**

Parte I

Repaso de Algunos tópicos de bachillerato

Aritmética

Números

Suponemos conocidos los distintos tipos de números, que iremos recordando a medida que nos vayan apareciendo, y las operaciones elementales entre ellos.

Adición:	sumando	$+$	sumando	$=$	suma
Sustracción:	minuendo	$-$	sustraendo	$=$	diferencia
Multiplicación:	factor	$\times$	factor	$=$	producto
División:	dividendo	$\div$	divisor	$=$	cociente

Además recordamos que

sumando	$+$	0	$=$	sumando
1	$\times$	factor	$=$	factor
0	$\times$	factor	$=$	0

También sabemos que si tenemos dos números que llamamos $\underline{a}$ y $\underline{b}$, se cumple la ley de Tricotomía, esto es que debe cumplirse una de las tres aserciones: a igual b; a mayor que b; a menor que b, que escribimos con los símbolos matemáticos:

$$a = b \;\; ; \quad a > b \;\; ; \;\; a < b.$$

Por ejemplo, si nos dan los números $1/5$ y 3, se cumple que:

$$\frac{1}{5} < 3.$$

Números Naturales

Los números **naturales** son los números que utilizamos para contar:

$$1, 2, 3, 4, 5 \cdots$$

Llamamos $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$ al conjunto de todos los números naturales. N es un conjunto **infinito**.

Dados dos números naturales, n y m, si existe otro número natural k tal que $n = m \times k$ decimos que n es **divisible** por m; m y k son **factores de** n y n es múltiplo tanto de m como de k.

Por ejemplo:

12 es divisible por 1 porque $12 = 1 \times 12$; 1 y 12 son factores de 12.
12 también es divisible por 2 ya que $12 = 2 \times 6$; 2 y 6 son factores de 12.
Además como $12 = 3 \times 4, 3$ y 4 son factores de 12.
Todos los factores de 12 son $1, 2, 3, 4, 6$ y 12 y 12 es múltiplo de $1, 2, 3, 4, 6$ y 12.

Un número natural es **par** cuando uno de sus factores es 2.
Un número natural es **impar** si 2 no es factor.

$2, 4, 6, 8, 10m, \cdots$ son números pares
$1, 3, 5, 7, 9, 11, \cdots$ son números impares.

Un número es primo si sus únicos factores son 1 y él mismo.

Algunos números primos son:

$$2, 3, 5, 11, 13, 17, 19 \cdots$$

El único número par **primo** es naturalmente el 2. Todos los demás números primos son impares, aunque no todos los números impares son primos. Por ejemplo: $9, 15, 21, 25, 45, 63$, etc... no son números primos.

Pero hay infinitos números **primos**.

Ya vimos que 12 es múltiplo de 3, pero hay muchos más. Todos los números divisibles por 3 son múltiplos de 3.

Múltiplos de 3 son: $3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \cdots$

Múltiplos de 7 son: $7, 14, 21, 28, 35, 42, \cdots$

Un múltiplo **común** de dos o más números dados es múltiplo de cada uno de ellos. Así 12 es múltiplo de $2, 3, 4$ y 6; 42 es múltiplo de $2, 3, 6, 7, 14$ y 21.

El **mínimo común múltiplo (mcm)** de dos o más números enteros es el menor número entero que es múltiplo de cada uno de ellos.

Los múltiplos de 3 son: $3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, \cdots$
Los múltiplos de 5 son: $5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, \cdots$
Vemos que $15, 30, 45, 60, \cdots$, son múltiplos comunes de 3 y 5.

El menor de los múltiplos comunes es 15. Por lo tanto **mcm** $(3, 5) = 15$.
Verificar que:

a) $\mathbf{mcm}\,(4,6) = 12$

b) $\mathbf{mcm}\,(5,3,9) = 45$

El **mcm** se calcula tomando todos los factores primos de los números, elevados al mayor exponente.

Por ejemplo: los factores primos de 12 son 2 y 3. Es $12 = 2^2 \times 3$. En el caso de 45, sus factores primos son 3 y 5, y tenemos que $45 = 3^2 \times 5$. El **mcm** de 12 y 45 debe contener todos los factores primos que aparecen en ambos números, y con el mayor exponente con que aparecen. Los factores primos de 12 y 45 son $2, 3$ y 5. El mayor exponente con que aparece 2 es 2, el mayor exponente con que aparece el 3 es 2. El 5 sólo aparece con el exponente 1. Entonces el mínimo comun múltiplo de 12 y 45 es

$$\mathbf{mcm}\,(12,45) = 2^2 \times 3^2 \times 5 = 180.$$

Para hallar el **mcm** de $21, 30$ y 54, primero vemos que:

$$\begin{aligned} 21 &= 3 \times 7 \\ 30 &= 2 \times 3 \times 5 \\ 54 &= 2 \times 3^3 \end{aligned}$$

Los factores $2, 5$ y 7 aparecen con exponente 1.
El máximo exponente con que aparece 3 es 3.

Entonces , $\mathbf{mcm}\,(21,30,54) = 2 \times 3^3 \times 5 \times 7 = 1.890$

También, dos o más números pueden tener factores comunes, distintos de 1 que es factor de todo número. Por ejemplo ¿Cuáles son los factores comunes de $24, 36$ y 30?
Como $24 = 2^3 \times 3$ sus factores son:

$$1, 2, 2^2, 2^3, 3, 6, 12 \text{ y } 24.$$

$36 = 2^2 \times 3^2$, entonces los factores de 36 son:

$$1, 2, 2^2, 3, 3^2, 6, 12, 18, \text{ y } 36.$$

$30 = 2 \times 3 \times 5$, entonces los factores de 30 son:

$$1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 \text{ y } 30.$$

Los factores comunes de $24, 36$ y 30 son: $1, 2, 3$ y 6.

El **Máximo Común Divisor (MCD)** de dos o más números es el mayor de los factores comunes a todos ellos.

El **MCD** se calcula tomando todos los factores primos comunes a todos los números, con el menor exponente. Por ejemplo:

Si queremos el **MCD** de $24, 36$, y 60, como $24 = 2^3 \times 3$, $36 = 2^2 \times 3^2$ y $60 = 2^2 \times 3 \times 5$, tendremos que el **MCD** es $2^2 \times 3 = 12$.

Vamos a ver una aplicación de esto cuando hablemos de la reducción de fracciones y de la suma y resta de fracciones.

Fracciones

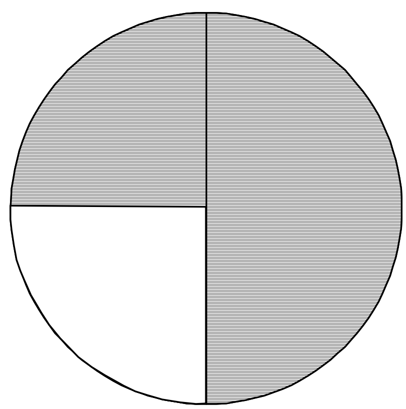
Recordamos que una fracción consiste en dos números separados por una barra. A veces la barra se pone horizontal $\left(\frac{3}{7}, \frac{11}{4}\right)$ y a veces oblícua $(3/7,\ 11/4)$. En los libros se encuentran en ambas formas. Significan lo mismo.

Una fracción es la división de un número, el **numerador** entre otro número, el **denominador**.

En la fracción $11/4$ el **numerador** es 11 y el denominador es 4.

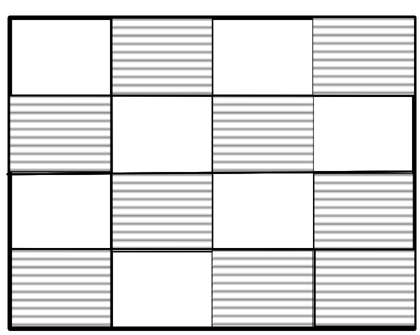
Las fracciones se pueden usar para representar partes de un todo.

En el diagrama adjunto la fracción $3/4$ representa la parte sombreada del círculo que ha sido dividido en 4 partes iguales.



Las fracciones también se utiliza para expresar razones, o comparaciones, entre dos cantidades.

En el diagrama, el cuadrado ha sido dividido en 16 cuadraditos iguales. La fracción $9/7$ expresa la razón entre los cuadraditos sombreados y los no sombreados.



Dada una fracción, nos interesa encontrar la correspondiente fracción reducida, esto es la fracción en la cual se han eliminado los factores comunes del numerador y el denominador. Por ejemplo la fracción reducida correspondiente a:

$$27/45 \text{ es } 3/5.$$

En efecto el **MCD** de 27 y 45 es 9. Dividiendo el numerador, 27, entre 9 obtenemos 3 y dividiendo 45, el denominador; entre 9 obtendremos 5

Obsérvese que $6/10, 15/25,\ 21/35,\ 36/60,\ 66/110$ etc. son todas expresiones de la fracción reducida 3/5

Operaciones con Fracciones

Multiplicación

Para multiplicar dos fracciones se multiplican los numeradores y los denominadores entre si. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \frac{4}{7} \times \frac{3}{5} &= \frac{4 \times 3}{7 \times 5} = \frac{12}{35} \\ 8/15 \times 5/12 &= \frac{8 \times 5}{15 \times 12} = \frac{40}{180} = 2/9 \\ 12 \times 5/7 &= 12/1 \times 5/7 = \frac{12 \times 5}{1 \times 7} = \frac{60}{7} \end{aligned}$$

El **recíproco multiplicativo** de una fracción, es la fracción que tiene como numerador al denominador de la fracción dada, y como denominador el numerador de la dada. El producto de una fracción por su recíproca es 1

Así, la fracción recíproca de 2/5 es 5/2; la de 9/31 es 31/9; la de $29 = 29/1$ es 1/29. En efecto:

$$\left(\frac{2}{5} \times \frac{5}{2} = 1,\ \frac{9}{31} \times \frac{31}{9} = 1 \text{ y } \quad 29 \times \frac{1}{29} = 1. \right)$$

División

Para dividir una fracción entre otra, se la multiplica por la recíproca de la otra. Por ejemplo:

$$3/5 \div 7/16 = 3/5 \times 16/7 = \frac{3 \times 16}{5 \times 7} = 48/35$$

Otro ejemplo:

$$19/8 \div 6 = 19/8 \div 6/1 = 19/8 \times 1/6 = 19/48.$$

Suma y resta

Para sumar o restar fracciones con el **mismo denominador**, se suma o restan los numeradores. Ejemplos:

$$\begin{aligned}
13/8+5/8 &= \frac{13+5}{8} = 18/8 = 9/4\,(\text{reducida})\\
15/7-8/7 &= \frac{15-8}{7} = 7/7 = 1\\
39/5+7/5-4/5 &= \frac{39+7-4}{5} = 42/5
\end{aligned}$$

Si se desean sumar o restar fracciones con **denominador distintos** habrá que buscar expresiones de ellas con el mismo denominador. Conviene el menor denominador común posible, que será el **mínimo común múltiplo** de los denominadores.

Por ejemplo, si se quieren sumar las fracciones $1/60$ y $5/72$ el denominador común más conveniente será el **mcm** $(60, 72)$, y como:

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5 \;\text{ y }\; 72 = 2^3 \times 3^2 \quad \text{resulta}$$
$$\textbf{mcm}\,(60,72) = 2^3 \times 3^2 \times 5 = 360$$

pero por ser: $1/60 = 6/360$ y $5/72 = 25/360$, entonces la suma es:

$$1/60+5/72 = 6/360+25/360 = \frac{6+25}{360} = \frac{31}{360} = 31/360$$

Otro ejemplo: efectuar $1/2 - 1/3 + 3/10$.

Primero buscamos el **mcm** $(2, 3, 10)$ que resulta 30 y las fracciones correspondientes con denominador 30, esto es:

$$1/2 = 15/30,\; 1/3 = 10/30 \text{ y } 3/10 = 9/30, \text{ y entonces:}$$

$1/2-1/3+3/10 = 15/30-10/30+9/30 = \dfrac{15-10+9}{30} = \dfrac{14}{30}$ que podemos reducir $\dfrac{14}{30} = \dfrac{7}{15}$ y el resultado es $7/15$

En el caso general:

a) $\dfrac{m}{n} \times \dfrac{p}{q} = \dfrac{mp}{nq}$

b) $\dfrac{m}{n} \div \dfrac{p}{q} = \dfrac{m}{n} \times \dfrac{q}{p} = \dfrac{mq}{np}$

c) $\dfrac{m}{n} \pm \dfrac{p}{q} = \dfrac{mq \pm np}{nq}$ ya que nq es múltiplo de n y q, aunque no sea el **mcm** (n, q)

!Cuidado¡

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} \quad \text{no es} \quad \frac{m+p}{n+q}.$$

Comparación de Fracciones.

¿Cómo comparamos las fracciones?. Esto es ¿Cómo decidimos cuál es mayor, igual o menor que otra?.

Si las tenemos con el mismo denominador basta comparar los numeradores.

Ejemplo: Comparar $4/17$ con $7/17$

Como $4 < 7$, entonces tendremos que $4/17 < 7/17$

Para comparar $4/7$ y $5/9$ no es tan evidente, pero si consideramos que:

$$4/7 = \frac{4 \times 9}{7 \times 9} = \frac{36}{63} \text{ y } 5/9 = \frac{5 \times 7}{9 \times 7} = \frac{35}{63}$$

Ya las tenemos con el denominador común 63 y como $35 < 36$ resulta que $5/9$ es menor que $4/7$.

Lo que hemos hecho es llevarlas a un denominador común multiplicando en cada una de ellas el numerador y el denominador por el denominador de la otra y comparar los numeradores de las fracciones equivalentes a las dadas así obtenidas. En la practica lo que se hace son los productos cruzados, numerador de una por denominador de la otra y comparar los resultados. En el caso anterior, comparar las fracciones $4/7$ y $5/9$, basta con ver que $4 \times 9 = 36$ y que $5 \times 7 = 35$ y como $36 > 35$, resulta que: $5/9 < 4/7$.

Otro ejemplo, ¿Cuál es la mayor entre las fracciones $2/5$, $3/7$ y $4/11$?

Consideremos dos de ellas, por ejemplo $2/5$ y $3/7$ y buscamos la mayor. Para ello hacemos $2 \times 7 = 14$ y $3 \times 5 = 15$ y como $14 < 15$, la mayor entre estas dos es $3/7$

Comparamos ahora $3/7$ con $4/11$.

Para ello hacemos $3 \times 11 = 33$ y $4 \times 7 = 28$, y como $33 > 28$ la mayor entre $3/7$ y $4/11$ es $3/7$.

Pruebe que la menor de las tres es $4/11$.

Decimales.

Una fracción también se puede escribir en forma decimal efectuando la división. Por ejemplo:

a) $30/8 = 3,75$

b) $5/12 = 0,4166\cdots = 0,41\hat{6}$ $\big(\hat{6}$ significa que se repite el $6\big)$

En este último caso al efectuar la división (hágala) se ve que el resto 8 se repite. El decimal es infinito periódico.

Todo decimal finito, o infinito periódico da origen a una fracción.

$$2,71 = \frac{271}{100} \quad 0,048 = \frac{48}{1000}.$$

Para obtener la fracción correspondiente, por ejemplo, a $x = 25,2\widehat{31}$ procedemos de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{lcl}
1000x &=& 25.231,3131\cdots \\
10x &=& 252,3131\cdots \\
990x &=& 29.979
\end{array}
\qquad \text{Restando, la parte decimales cancela y obtenemos}
$$

$$\text{y por lo tanto } x = 25,2\widehat{31} = \frac{24.979}{990}$$

Porcentajes

Los porcentajes son fracciones de denominador 100. También se pueden pensar como decimales. Un porcentaje p, se escribe $p\%$. Ejemplos:

Porcentaje	**Fracción**	**Decimal**
45%	$45/100$	$0,45$
7%	$7/100$	$0,07$
$12,9\%$	$12,9/100 = 129/1000$	$0,129$
141%	$141/100$	$1,41$

Si lo que nos interesa es conocer el número x que es el $p\%$ de una cantidad dada usamos la proporción:

$$\frac{x}{\text{cantidad}} = \frac{p}{100}$$

De donde

$$x = \frac{p \times \text{ cantidad}}{100}$$

Por ejemplo: el 25% de 32 se obtiene a partir de la proporción $\dfrac{x}{32} = \dfrac{25}{100}$, y resulta

$$x = \frac{25 \times 32}{100} = 8$$

así

8 es el 25% de 32.

El $42,5\%$ de 80 será $= \dfrac{42,5 \times 80}{100} = \dfrac{3.400}{100} = 34$.

El $66,\widehat{6}\%$ de 24 lo obtenemos de la siguiente manera:

Calculamos $66,\widehat{6}$ en forma de fracción: $66,\widehat{6} = 200/3$, y

$$x = \frac{200/3 \times 24}{100} = \frac{1.600}{100} = 16.$$

También podemos averiguar qué porcentaje de una cantidad dada es un número dado. Por ejemplo ¿Qué porcentaje de 36 es 27?.

Usando la proporción se tiene que

$$\frac{27}{36} = \frac{p}{100} \text{ de donde } p = \frac{27 \times 100}{36} = 75$$

Entonces, 27 es el 75% de 36.

Análogamente si nos interesa saber, por ejemplo, de qué cantidad es 54 el 9%, usamos la misma proporción

$$\frac{54}{\text{cantidad}} = \frac{9}{100} \text{ o sea } 54 \times 100 = 9 \times \text{ cantidad, y resulta}$$

$\text{cantidad} = \dfrac{54 \times 100}{9} = 600.$

Entonces, 54 es el 9% de 600.

Ejemplo de aplicación:
El Sr.García compró un producto a $Bs.$ 40 la unidad, una año después la vende a $Bs.$ 90 por unidad. ¿cuál es el porcentaje, $p\%$, de ganancia obtenido por el Sr. García?.

La Ganancia por unidad es de $90 - 40 = 50$ Bolívares. entonces

$$\frac{50}{40} = \frac{p}{100} \text{ y } p = \frac{50 \times 100}{40} = 125$$

En el denominador de la izquierda de la proporción pusimos 40, y no 90, ya que la ganancia se calcula sobre el precio de compra.

Álgebra

En álgebra usamos números y letras que representan números. Los números que usamos son:

Los números naturales $\mathbb{N}$ o sea $1, 2, 3, 4, \cdots$

Los números enteros $\mathbb{Z}$ o sea $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$

Los números enteros son los números naturales, más los negativos, más el cero, por lo tanto

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \ (\subset \text{ significa contenido en})$$

Los números racionales $\mathbb{Q}$ son las fracciones, o por lo que vimos, el conjunto de los decimales finitos y los decimales infinitos periódicos. Como los enteros son números racionales es $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ tenemos:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Definimos los **números reales** $\mathbb{R}$ como el conjunto de todos los anteriores más todos los decimales infinitos no periódicos. Tenemos así

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Cuando trabajamos con letras, en general indicamos la clase de números con que estamos trabajando.

Supongamos que $a, b, c, \cdots$ son números reales, y que estamos en presencia de un producto, entonces solemos omitir el signo por de la multiplicación.

Así, $a \times b$ lo escribimos ab, $5 \ \times a \times b \times c = 5abc$.

Las operaciones con números racionales ya las vimos numéricamente en el capítulo de Aritmética. Si m, n, ℓ, p, designan números naturales, tenemos

a) $\ell/m \times n/p = \dfrac{\ell \times n}{m \times p} = \dfrac{\ell n}{mp}$

b) $\ell/m \div n/p = \dfrac{\ell \times p}{m \times n} = \dfrac{\ell p}{mn}$

c) $\ell/m \pm n/p = \dfrac{(\ell \times p) \pm (n \times m)}{m \times p} = \dfrac{\ell p \pm nm}{mp}$

d) $\ell/m = n/p$ equivalente a $\ell p = mn$

e) $\ell/m < n/p$ equivalente $\ell p < mn$

¡Cuidado! $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} \neq \dfrac{1}{m+n}$

Operaciones con números reales

Con $a, b, c, d, \cdots x, y, z, u, \cdots$, designamos números reales
Con $m, n, \ell, \cdots$, designamos números naturales.
Los números reales pueden ser positivos, cero o negativos.

Recordamos las leyes de los signos en el producto y la división de números reales:
(con $(+)$ entendemos un número positivo y con $(-)$ un número negativo)

$$
\begin{array}{cc}
(+)\,(+) = (+) & (-)\,(-) = (+) \\
(+)\,(-) = (-) & (-)\,(+) = (-) \\
\dfrac{(+)}{(+)} = (+) & \dfrac{(-)}{(-)} = (+) \\
\dfrac{(+)}{(-)} = (-) & \dfrac{(-)}{(+)} = (-)
\end{array}
$$

También recordamos que para todo número real $\underline{a}$, es $a \times 0 = 0$.
Y que la división de un número $\underline{b} \neq 0$ por cero no tiene sentido.

Ejemplo:

$$
(-2)\,(-3) = +6; \qquad (+2)\,(-3) = -6; \qquad \frac{(-3)}{(-2)} = +\frac{3}{2}
$$

$$
\frac{(-3)}{2} = -\frac{3}{2}; \qquad (-2)\,(3)\,(-5) = +30; \quad (-2)\,(3)\,(5) = -30
$$

Definimos:

$$
a \times a = aa = a^2,
$$

$$
\underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a \times a}_{n \text{ veces}} = aaa \cdots aa = a^n
$$

De acuerdo con las reglas de los signos un número negativo elevado a una potencia par da un resultado positivo y elevado a una potencia impar da un resultado negativo.

Así:
$$
\begin{aligned}
(-5)^2 &= 25 \\
(-2)^3 &= -8 \\
(-3)^4 &= 81.
\end{aligned}
$$

Recordamos las reglas para operar con potencias:

a) $z^m \times z^n = z^m z^n = z^{m+n}$

b) $(x^m)^n = x^{mn}$

c) $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$

d) $\dfrac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$

e) $y^0 = 1$ para cualquier número real, y distinto de 0

También se tiene que si $a^2 = b^2$, entonces debe ser $a = b$ o bien $a = -b$.

Un **monomio** es una expresión algebraica que consiste en el producto de un número y una o varias letras que pueden estar elevadas a alguna potencia.

Ejemplos de monomios:

$$3a; \quad 4x^2\ y; \quad -5a^2b^5; \quad 20xy^3z^2$$

Se llaman **términos** o **monomios semejantes** a los que contienen las mismas letras elevadas a las mismas potencias.

Así, $4a^2$; $-3/5a^2$; $21a^2$ son términos semejantes.

En cambio $3a$, $3a^2$, $4a^3$ no son términos semejantes, las potencias de a son distintas.

$$3x^2yz^5 \quad ; \quad -4yx^2z^5 \quad ; \quad \frac{5}{9}x^2z^5y$$

son monomios semejantes. Cada uno de ellos contiene las variables elevadas a las mismas potencias:

$$x^2 \quad ; \quad y \quad ; \quad z^5$$

Las leyes asociativas, conmunativa y distributiva permiten sumar y restar monomios

Por ejemplo:

$$3abc^2 + 2abc^2 - abc^2 = (3 + 2 - 1)\left(abc^2\right) = 4abc^2.$$

Si queremos realizar la suma:

$$\left(5x^2 - 10x + 2\right) + \left(-x^2 + 2x + 1\right)$$

1. Eliminamos los paréntesis y obtenemos:

$$5x^2 - 10x + 2 - x^2 + 2x + 1$$

2. Agrupamos los términos semejantes:

$$\left(5x^2 - x^2\right) + (-10x + 2x) + (2 + 1)$$

3. Efectuamos en cada paréntesis las operaciones entre monomios semejantes y obtenemos:

$$4x^2 - 8x + 3$$

resulta que:

$$\left(5x^2 - 10x + 2\right) + \left(-x^2 + 2x + 1\right) = 4x^2 - 8x + 3.$$

Resolvamos otro ejemplo, siguiendo los mismos pasos:

$$\begin{aligned} &\left(8x^2y - xy - x - y - 1\right) - \left(2x^2y - 2xy - 2y - 5\right) = \\ &8x^2y - xy - x - y - 1 - 2x^2y + 2xy + 2y + 5 = \\ &\left(8x^2y - 2x^2y\right) + (-xy + 2xy) - x + (-y + 2y) + (-1 + 5) = 6x^2y + xy - x + y + 4. \end{aligned}$$

Este tipo de sumas nos aparece por ejemplo al hacer un producto como

$$(2a + b)(3a - 2b).$$

$$\begin{aligned} (2a + b)(3a - 2b) &= 2a(3a - 2b) + b(3a - 2b) = (2a)(3a) + (2a)(-2b) + b(3a) + b(-2b) \\ &= 6a^2 - 4ab + 3ab - 2b^2 = 6a^2 - ab - 2b^2 \end{aligned}$$

Ecuaciones de Primer Grado de una variable.

Una ecuación es una expresión matemática en la que dos cantidades son iguales. Las ecuaciones que sólo contienen números son verdaderas o falsas.

Así:

$$\begin{array}{ll} 3 + 5 = 8 & \text{Es verdadera} \\ 3 + 5 = 6 & \text{Es falsa.} \end{array}$$

Las ecuaciones que contienen una o más variables no son verdaderas ni falsas.

Pero al reemplazar las variables por valores numéricos específicos la ecuación numérica resultante puede ser verdadera o falsa.

Por ejemplo, si en la ecuación

$$5x + 4 = 14$$

reemplazamos x por 3 resulta

$$5.3 + 4 = 14$$

que es falsa, ya que $15 + 4 = 19$.

Si damos a x el valor 2 tenemos

$$5.2 + 4 = 14 \text{ que es verdadera}$$

Los valores, como $x = 2$ en el ejemplo anterior, que hacen que una ecuación sea verdadera se llaman **soluciones o raíces** de la ecuación.

Resolver una ecuación significa hallar sus soluciones o raíces, esto es, aquéllos valores numéricos de la variable que la hacen verdadera.

El método de probar valores, como hicimos, no es suficiente. Vamos a dar un método más razonable de trabajo.

Teníamos la ecuación $5x + 4 = 14$.

Dejamos el término en x a la izquierda, y agrupamos los números a la derecha:

$$5x = 14 - 4$$

Efectuamos las operaciones que aparecen y obtenemos:

$$5x = 10$$

y dividiendo ambos lados de la igualdad por 5, obtenemos:

$$\frac{5x}{5} = \frac{10}{5}$$

y efectuando queda $x = 2$, que ya sabíamos es la solución.

Si tenemos $5x - 8 = 2x + 1$, la resolvemos de la misma manera.
Agrupamos las x en un lado, y los números en el otro

$$5x - 2x = 1 - (-8)$$

Efectuamos:

$$3x = 9$$

y nos queda:

$$x = \frac{9}{3} = 3.$$

Si queremos resolver la ecuación:

$$5\,(x - 4) - 2x = 3$$

empezamos por eliminar paréntesis:

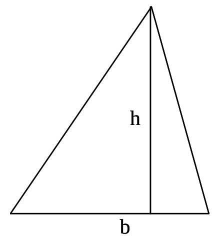
$$5x - 4.5 - 2x = 3.$$

Efectuamos las operaciones y seguimos como en el caso anterior:

$$\begin{aligned} 5x - 2x &= 3 + 20 \\ 3x &= 23 \\ x &= \frac{23}{3} \quad \text{que es la solución.} \end{aligned}$$

A veces aparecen ecuaciones en que los coeficientes son letras.

Por ejemplo:
El área de un triángulo de base b y altura h es



$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{b.h}}{\mathbf{2}}$$

Supongamos que nos dan la base y el área del triángulo y nos piden determinar la altura h en función de A y B ¿qué debemos hacer?

Despejar h de la ecuación $A = \dfrac{bh}{2}$.

Multiplicamos por 2 y obtenemos $2A = b.h$ Dividiendo ambos miembros por b, resulta

$$\frac{2A}{b} = \frac{bh}{b} \text{ y queda } h = \frac{2A}{b}.$$

En general si tuviéramos que resolver la ecuación

$$ax + b = cx + d$$

lo que debemos hacer es obtener un valor de x en términos de los coeficientes que haga verdadera la ecuación. Procedemos igual que antes.

Agrupamos por una parte los términos en x y por la otra los números:

$$ax - cx = d - b$$

Sacamos x factor común

$$(a - c)\, x = d - b$$

Si $a \neq c$, o sea $a - c \neq 0$, dividimos por $a - c$ y obtenemos la solución

$$x = \frac{d - b}{a - c}$$

Obsérvese que por ejemplo:

$2x - 7 = 2x + 1$ es una contradicción pues $2x - 2x = 1 + 7$ nos daría $0 = 8$. Esto se debe a que en este caso es $a = c$

Identidades.

Como

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a(a+b) + b(a+b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2$$

obtenemos la identidad:

1. $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$

   Análogamente:

2. $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$

3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

¡Cuidado!

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &\text{ es distinto de } a^2 + b^2 \\ (a-b)^2 &\text{ es distinto de } a^2 - b^2 \end{aligned}$$

Sabemos que un producto es nulo si al menos uno de sus factores es cero. Así en la ecuación $2(x-5) = 0$ deducimos que $x - 5 = 0$ ya que el otro factor, 2, es distinto de cero y por lo tanto la soluciónes $x = 5$.

Consideremos ahora la ecuación

$$(2y-3)\left(y-\sqrt{5}\right) = 0$$

Esta ecuación se satisface si alguno de los factores es cero.
Esto es si

$$a) \qquad 2y - 3 = 0 \quad \textbf{ó} \quad b) \qquad y - \sqrt{5} = 0.$$

O sea que hemos llevado el problema de resolver nuestra ecuación original a resolverlas dos ecuaciones más simples $a)$ y $b)$

La solución de $a)$ es $y = \dfrac{3}{2}$ que hace cero el primer factor aunque el segundo sea $\dfrac{3}{2} - \sqrt{5}$ que es distinto de cero.

La solución de $b)$ es $y = \sqrt{5}$, y al hacer cero el segundo factor no importa que el primero sea $2\sqrt{5} - 3$

La ecuación

$$(2y-3)\left(y-\sqrt{5}\right) = 0$$

tiene dos soluciones

$$y = 3/2, \qquad y = \sqrt{5}$$

Otro ejemplo:

La ecuación $x\,(y-1)\,(z+1/5)=0$ se satisface cuando se cumpla al menos una de las tres igualdades

$$x=0 \quad \text{ó} \quad y=1 \quad \text{ó} \quad z=-1/5$$

Resolver:

a) $(x-11)\,(x-5)=0$
b) $x-11\ \ (x-5)=0$
c) $(x-11)+(x-5)=0$

Raíces

Sabemos que $3^2=9$ y $(-3)^2=9$

Si tengo $a^2=9$ ¿cuál es el valor de a? Puede ser tanto 3 como -3.
Esto se expresa a $=\pm\sqrt{9}=\pm 3$. Para $x^2=a$, si $a\geq 0$ definimos la raíz cuadrada $x=\pm\sqrt{a}$.
Escribimos $-\sqrt{a}$ y $\sqrt{a}$ para la raíz negativa y positiva de a respectivamente.
En general, definimos raíz enésima de un número a al número x tal que
$x=\sqrt[n]{a}$ siempre que $a=x^n$, donde n es un número natural.

Si $a\geq 0$ la definición tiene sentido para todo n.

Si $a<0$ la definición sólo tiene sentido si n es impar.

Ejemplos:

$$\sqrt{81}=9 \quad ; \quad \sqrt[3]{-27}=-3 \quad ; \quad \sqrt[5]{32}=2.$$

La raíz cuadrada de 3, simplemente la dejamos indicada: $\sqrt{3}$ es el número x tal que $x^2=3$
También recordamos que

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$$

Es fácil probarlo utilizando la definición:
Si $x=\sqrt{a},\ \ y=\sqrt{b}$ esto quiere decir que $a=x^2$ y que $b=y^2$, por lo tanto $ab=x^2y^2=(xy)^2$, o sea que es $xy=\sqrt{ab}$, y entonces $\sqrt{a}\sqrt{b}=xy=\sqrt{ab}$.

Así, $\sqrt{12}=\sqrt{4.3}=\sqrt{4}\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

¡Cuidado!

$$\sqrt{-4} \text{ no existe } \ (n=2 \text{ es par})$$

$$\sqrt{a+b} \text{ es distinto de } \sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

esto último se ve en el ejemplo en que $a=9$ y $b=16$

$$\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5 \text{ y } \sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7 \text{ y claramente } 5\neq 7$$

Ecuaciones de segundo grado

La forma general de la **ecuación de segundo grado** es:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{con} \quad a \neq 0$$

a, b, c, se llaman los **coeficientes** de la ecuación y x es la **variable**.

Resolver una ecuación de este tipo significa encontrar el valor de la variable que la satisface. Ejemplo:

$$7x^2 - 12x + 3 = 0$$

Aquí $a = 7, = -12$, y $c = 3$, entonces aplicando la resolvente:

$$b^2 - 4ac = 144 - 84 = 60 = (4)(15) = \left(2^2\right)(15)$$

y

$$\pm\sqrt{b^2 - 4ac} = \pm 2\sqrt{15} \quad \text{y las soluciones son:}$$

$$x_1 = \frac{12 + 2\sqrt{15}}{14} \qquad\qquad x_2 = \frac{12 - 2\sqrt{15}}{14}$$

simplificando:

$$x_1 = \frac{6 + \sqrt{15}}{7} \qquad\qquad x_2 = \frac{6 - 2\sqrt{15}}{7}$$

Si $b^2 - 4ac > 0$ la ecuación tiene dos raíces reales:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si $b^2 - 4ac = 0$, estas dos raíces son iguales. La solución es una raíz doble:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Si $b^2 - 4ac < 0$ no hay raíces reales.

En el caso en que la ecuación tiene raíces reales

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - b\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a}$$

o sea:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

Además:

$$\begin{aligned} x_1x_2 &= \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) \\ &= \frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{(2a)^2} \end{aligned}$$

El numerador es de la forma:

$$(m+n)(m-n) = m^2 - n^2, \text{ haciendo } m = -b, n = \sqrt{b^2-4ac}$$

queda:

$$x_1x_2 = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Hemos probado que dada la ecuación de segundo grado de coeficientes a, b y c la suma de sus raíces, es $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ y el producto $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

Ejemplos:

En la ecuación $7x^2 - 12x + 3 = 0$, la suma de las raíces es $x_1 + x_2 = \frac{12}{7}$ y el producto es $x_1x_2 = \frac{3}{7}$.

Hallar m para que la ecuación $3x^2 - 4x = m - 5$, tenga solución única, (raíz doble)

La ecuación es equivalente a:

$$3x^2 - 4x - (m-5) = 0$$

por lo tanto:

$$a = 3 \quad b = -4 \quad c = 5 - m \qquad \text{y}$$

$$b^2 - 4ac = 16 - 4.3\,(5-m) = 16 - 60 + 12m = -44 + 12m.$$

La condición para que haya una raíz doble es $b^2 - 4ac = 0$.

Debe ser:

$$-44 + 12m = 0, \quad 12m = 44$$

y por lo tanto:

$$m = \frac{44}{12} = \frac{11}{3}$$

Si $m = \frac{11}{3}$ la solución de la ecuación es única.

Polinomios.

Recordamos que un monomio es una expresión algebraica que es un número, o una variable o un producto de números y variables.

Ejemplos:

$$3 \quad ; \quad 5ab \quad ; \quad x^3 \quad ; \quad 3.5xy^2 \quad ; \quad b^2$$

Un polinomio es una suma algebraica de varios monomios.

Ejemplos:

$$\begin{array}{ccc} 3xy-5 & ; & 4x^2-6x+3 \\ 3-ab+2a^2-b^2 & ; & 2+3xy-x^2+4xy \end{array}$$

Términos semejantes de un polinomio son aquellos monomios que contienen las mismas variables con los mismos exponentes.

En $2+3xy-x^2+5x^3+4xy$, $3xy$ y $4xy$ son términos semejantes.

Polinomios de una variable.

Un polinomio en x es una suma de monomios de la forma $a_n x^n$ en que los coeficientes a_n son números reales y los exponentes n son números naturales.

$$p(x) \equiv a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

es un polinomio en x de grado n. El grado de un polinomio es el más alto exponente de la variable

Los polinomios se pueden sumar y restar, multiplicar y dividir.

Para sumar y restar podemos agrupar los término semejantes.

Ejemplo:

a) $(x^2+5x+3)+(3x^2-4x+5) = x^2+5x+3+3x^2-4x+5 =$
$(1+3)x^2+(5-4)x+(3+5) = 4x^2+x+8$

b) $(4x^3+5x^2-6)-(2x^2+x) = 4x^3+5x^2-6-2x^2-x =$
$4x^3+(5-2)x^2-x-6 = 4x^3+3x^2-x-6$

Multiplicación

La multiplicación se realiza utilizando **reiteradamente** las leyes distributiva, asociativa y conmutativa.

Ejemplo:

$$
\begin{aligned}
&(2x^2+6x-1)\,(3x^2+6x) = 2x^2\,(3x^2+6x) + 6x\,(3x^2+6x) - (3x^2+6x) \\
&= 6x^4+12x^3+18x^3+36x^2-3x^2-6x = 6x^4+30x^3+33x^2-6x.
\end{aligned}
$$

¿Cuál de los siguientes monomios **no** es un término del siguiente producto:

$$(x+1)\ \left(3x^2+6x\right)\ \left(2x^2+6x-1\right)$$

a) $6x^5$ b) $36x^4$ c) $63x^3$ d) -1

Efectuaremos el producto:

$$
\begin{aligned}
&(x+1)\,(3x^2+6x) = x\,(3x^2+6x) + (3x^2+6x) \\
&= 3x^3+6x^2+3x^2+6x = 3x^3+9x^2+6x
\end{aligned}
$$

y ahora este resultado lo multiplicamos por $2x^2+6x-1$.

$$
\begin{aligned}
&(3x^3+9x^2+6x)\,(2x^2+6x-1) = \\
&3x^3\,(2x^2+6x-1) + 9x^2\,(2x^2+6x-1) + 6x\,(2x^2+6x-1) = \\
&6x^5+18x^4-3x^3+18x^4+54x^3-9x^2+12x^3+36x^2-6x = 6x^5+36x^4+63x^3+27x^2-6x
\end{aligned}
$$

-1 no aparece por lo tanto la respuesta a la pregunta es D.

Obsérvese que podíamos haber obtenido la respuesta sin efectuar la multiplicación, ya que siendo un factor $(3x^2+6x)$ en el resultado no podrá haber términos que sean números, pues todos los términos deben contener x.

El grado del polinomio producto es la suma de los grados de los polinomios factores. En el ejemplo anterior

$$
\begin{array}{cl}
x+1 & \text{es de grado 1.} \\
3x^2+6x & \text{es de grado 2.} \\
2x^2+6x-1 & \text{es de grado 2.}
\end{array}
$$

El producto es de grado $1+2+2=5$, como hemos obtenido al hacer la multiplicación.

División

Podemos dividir un polinomio $P_1(x)$, de la variable x, que llamamos **dividendo** entre otro polinomio $P_2(x)$ llamado el **divisor** P_1 **debe ser de grado mayor o igual a** P_2**.**

Para hacer la división escribimos P_1 y P_2 en orden decreciente de los exponentes de la variable. Si falta alguna potencia escribimos el término correspondiente a dicha potencia con el coeficiente cero.

Ejemplo:

Si tenemos $6x^5 + 53x^3 - 3x$, escribimos $6x^5 + 0x^4 + 53x^3 + 0x^2 - 3x + 0$.

Luego dividimos el término de mayor grado de P_1 por el de mayor grado de P_2, el resultado será el término de mayor grado del polinomio cociente $Q(x)$. Multiplicamos P_2 por ese primer término de cociente y lo escribimos debajo de P_1 poniendo en columna los términos de exponentes iguales que salen al hacer las multiplicaciones sucesivas del primer término del cociente por los otros términos de P_2

Restamos de P_1 el polinomio así obtenido (los términos de mayor grado se cancelan) y si el grado del polinomio obtenido es mayor o igual al de P_2 repetimos lo anterior para obtener el segundo término del cociente.

Seguimos hasta obtener un polinomio de menor grado que el divisor. Este polinomio es el **Resto** de la división

Ejemplo: Dividir $(2x^4 - 7x^2 - 1 - 3x^3)$ por $(3x - 1 - x^2)$.
Primero ordenamos los polinomios

$$\begin{aligned} P_1 &: 2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 0x - 1 \\ P_2 &: x^2 + 3x - 1. \end{aligned}$$

Escribimos:

$$\begin{array}{crcrcrcrcrl|ccccccc}
 & 2x^4 & - & 3x^3 & - & 7x^2 & + & 0x & - & 1 & & x^2 & + & 3x & - & 1 \\ \cline{12-16}
- & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & 2x^4 & + & 6x^3 & - & 2x^2 & & & & & & 2x^2 & - & 9x & + & 22 \\ \cline{1-10}
 & 0x^4 & - & 9x^3 & - & 5x^2 & + & 0x & - & 1 & & & & & & \\
- & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & - & 9x^3 & - & 27x^2 & + & 9x & & & & & & & & \\ \cline{3-10}
 & & + & 0x^3 & + & 22x^2 & - & 9x & - & 1 & & & & & & \\
- & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & 22x^2 & + & 66x & - & 22 & & & & & & \\ \cline{5-10}
 & & & & & 0x^2 & - & 75x & + & 21 & & & & & &
\end{array}$$

que es de grado menor que el de P_2

El **cociente** es: $2x^2 - 9x + 22$

El **resto** es: $-75x + 21$

Teorema del residuo.

Si dividimos un polinomio entre un binomio (que es un polinomio de primer grado) el resto o residuo, debe ser un número, ya que el grado del resto debe ser menor que el del dividendo.

Si en el binomio el coeficiente de la variables es 1, por ejemplo $x - a$, entonces el resto de dividir $P_1(x)$ entre $x - a$ es $P_1(a)$, el número que corresponde al valor de P_1 cuando se reemplaza la variable x por a.

Ejemplo: $\begin{array}{l} P_1 = 3x^3 - 2x^2 + 17x - 1 \\ P_2 = x + 2 \quad \text{(binomio)} \end{array}$

$$\begin{array}{crrrrrrr|l}
 & 3x^3 & - & 2x^2 & + & 17x & - & 1 & x \quad + \quad 2 \\ \cline{9-9}
- & & & & & & & & 3x^2 \quad - \quad 8x \quad + \quad 33 \\
 & 3x^3 & + & 6x^2 & & & & & \\ \cline{1-8}
 & & - & 8x^2 & - & 17x & - & 1 & \\
 & - & & & & & & & \\
 & & - & 8x^2 & - & 16x & & & \\ \cline{3-8}
 & & & 33x & - & 1 & & & \\
 & & - & & & & & & \\
 & & & 33x & + & 66 & & & \\ \cline{3-8}
 & & & & - & 67 & & &
\end{array}$$

El resto -67 es el valor que toma el polinomio $P_1(x)$ para $x = -2$. Verificarlo.

Logaritmos

Sean dos números $\mathbf{a} > 0$ y $\mathbf{b} > 0$. Se define

$$y = \log_a b \quad \text{siempre que} \quad a^y = b$$

a es la **base**, **y** es el logaritmo de **b** en la base **a**

Ejemplos:

$$\log_{10} 10.000 = 4 \qquad \text{ya que} \quad 10^4 = 10.000$$

$$\log_2 32 = 5 \qquad \text{ya que} \quad 2^5 = 32$$

$$\log_{3/2}(27/8) = 3 \qquad \text{ya que} \quad (3/2)^3 = 27/8$$

$$\log_{10} 0,00001 = -5 \qquad \text{ya que} \quad 10^{-5} = \frac{1}{100.000} = 0,0001$$

Además recordamos que se cumple:

$$\begin{array}{rcl}
\log_{\mathbf{a}}\mathbf{xy} & = & \log_{\mathbf{a}}\mathbf{x} + \log_{\mathbf{a}}\mathbf{y} \\
\log_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}/\mathbf{y}) & = & \log_{\mathbf{m}}\mathbf{x} - \log_{\mathbf{m}}\mathbf{y} \\
\log_{\mathbf{m}}\mathbf{x}^n & = & \mathbf{n}\log_{\mathbf{m}}\mathbf{x}
\end{array}$$

¡Cuidado!

$$\log_m(x + y) \text{ es distinto de } \log_m x + \log_m y$$

Los logaritmos más usados son:

Los logaritmos en base 10, ó logaritmos decimales, y escribimos $\log_{10} z = \log z$ (sin especificar la base). Asi $\log z = y$ significa $10^y = z$.

Los logaritmos naturales o neperianos cuya base es el número real trascedente $e = 2,718...$

En este caso escribimos

$$\log_e x = \ln_x \qquad \ln x = y \qquad \text{significa} \quad e^y = x$$

En el caso de los logaritmos decimales, obsérvese que si

$$\begin{array}{lllllll} x & = & 1 = 10^0 & \log x & = & 0 & \text{O sea} \ \ \log 1 = 0 \\ x & = & 10^{0,5} & \log x & = & 0,5 & \text{O sea} \ \log 10^{0,5} = 0,5 \\ x & = & 10^1 & \log x & = & 1 & \text{O sea} \ \log 10 = 1 \\ x & = & 10^2 & \log x & = & 2 & \text{O sea} \ \log 10^2 = 2 \end{array}$$

Y también si, $1 = 10^0 \leq x < 10^1$, el logartimo de x es un número decimal de parte entera 0. Por ejemplo:

$$\log 2 = 0,30103 \cdots$$

Si $10^1 \leq y < 10^2$ el logaritmo decimal de y es de la forma $\log y = 1, \cdots$, o sea es un número decimal de parte entera 1. Por ejemplo: $\log 20 = 1,30103, \cdots$

Si $10^2 \leq z < 10^3$, entonces $\log z = 2, ...$, un número decimal de parte entera 2, si $z = 200$, $\log 200 = 2,30103 \cdots$

En general si $10^m \leq w < 10^{m+1}$, entonces la parte entera de $\log w$ es m, y $\log w = m, \cdots$

Si $w = 2\,(10^m)$ tenemos que $\log w = m, 30103 \cdots$

La parte entera del número decimal es la **característica** del logaritmo. La parte decimal es la **mantisa.**

Si $10^{-1} \leq u < 0$, entonces la parte entera o característica es -1. La mantisa es siempre positiva

Ejemplo:

$$\log 0,2 = \log\left(2/10\right) = \log 2 - \log 10 = -1 + 0,03103 \cdots$$

y lo escribimos:

$$\log 0,2 = \bar{1}, 30103.$$

La parte entera con la raya arriba significa que la característica es negativa, pero la mantisa es positiva

Si consideramos $u = 0,00002$ como $0,000020 : \dfrac{2}{100.000}$ tendremos:

$$\log 0,00002 = \log 2 - \log 100.000 = \log 2 - \log 10^5 = -5 + 0,30103 = \bar{5}, 30103 \cdots$$

El valor numérico del logaritmo decimal con el que se trabaja suele ser el número considerado negativo en su totalidad. En caso anterior

$$\log 0,00002 = \bar{5},30103 = -5 + 0,30103 = -4,69897$$

Sistemas de 2 ecuaciones lineales con dos incógnitas

Una ecuación lineal de dos variables tiene una expresión de la siguiente forma:

$$ax + by + c = 0.$$

Si $a = 8; \quad b = -3 \quad \text{y} \quad c = -25$
se tiene:

$$8x - 3y - 25 = 0$$

En general si $b \neq 0$ se puede despejar y en función de x. En el ejemplo $b = -3 \neq 0$, entonces,

$$\begin{aligned} 3y &= 8x - 25 \\ y &= \frac{8}{3}x - \frac{25}{3} \end{aligned}$$

Para cada valor de x se obtiene un valor de y

si $x = 3$ resulta $y = \dfrac{8}{3} \times 3 - \dfrac{25}{3} = \dfrac{24 - 25}{3} = -\dfrac{1}{3}$ el par $x = 3, y = \dfrac{1}{3}$ satisface la ecuación.

Si $a \neq 0$ también podemos despejar x en función de y. Obtenemos:

$$\begin{aligned} 8x &= 3y + 25 \\ x &= \frac{3}{8}y + \frac{25}{8} \end{aligned}$$

y para cada valor de y obtenemos un valor de x.
Si $y = -3$

$$x = \frac{3}{8}(-3) + \frac{25}{8} = \frac{-9 + 25}{8} = \frac{16}{8} = 2$$

El par $x = 2$, $y = -3$ satisface la ecuación.

Dada una ecuación lineal $ax + by + c = 0$, si $m \neq 0$ la ecuación $max + mby + mc = 0$, tiene las mismas soluciones que la dada. Decimos que ambas son **equivalentes.**

Así, $8x - 3y - 25 = 0$ es equivalente a $2x - \dfrac{3}{4}y - \dfrac{25}{4} = 0$. También a $-8x + 3y + 25 = 0$.

Todas ellas tienen el mismo conjunto de soluciones.

Consideramos ahora 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas. Si existen hallaremos valores de x e y que satisfacen ambas ecuaciones.

Supongamos que tenemos el sistema siguiente

$$\begin{cases} \quad 2x + y = 6 & (1) \\ -x + 3y = 4 & (2) \end{cases}$$

Si en (1) despejamos $y = 6 - 2x$, vemos que los pares:

$x = 0,\ y = 6;\ \ x = 1,\ y = 4;\ \ x = \dfrac{7}{2},\ \ \ y = -1$ satisfacen la ecuación

$$2x + y = 6$$

En $(2):\quad 3y = 4 + x;\quad y = \dfrac{4+x}{3};$ y los pares:

$x = -1,\quad y = 1;\ \ x = 0,\ \ y = \dfrac{4}{3};\ \ x = 1,\ \ y = \dfrac{5}{3};\ \ x = 2,\ \ y = 2;\quad x = \dfrac{1}{2},\quad y = \dfrac{3}{2};$

satisfacen la ecuación $-x + 3y = 4$.

Vemos que ambas ecuaciones se satisfacen para $x = 2,\quad y = 2$.

¿Cómo hacemos para obtener los valores de x e y que satisfacen un sistema de ecuaciones lineales sin tener que recurrir a pruebas sucesivas que puede que no nos lleven a una solución aunque esta exista?

Un método para hacerlo es el de sustitución.

Consiste en lo siguiente:
a) Se despeja en cualquiera de las dos ecuaciones una variable en función de la otra.
b) Se sustituye en la otra ecuación y resolvemos la ecuación resultante que ahora es de una sola variable.
c) El valor obtenido se reemplaza en cualquiera de las dos ecuaciones y se despeja el valor de la otra variable.
Por ejemplo resolver el sistema:

$$\begin{cases} 3x - y = 15 & (1) \\ 2x + y = 10 & (2) \end{cases}$$

De (2) resulta $y = -2x + 10$. Se reemplaza en (1) y se obtiene

$$3x - (-2x + 10) = 15$$

o sea:

$$3x + 2x = 15 + 10\ \ ,\ \ 5x = 25\quad \text{y}\quad x = 5.$$

Sustituyendo en (1), $3.5 - y = 15$ queda $y = 0$
Si lo hubiéramos sustituido en (2), $\quad 2.5 + y = 10$ que también nos da $y = 0$

Siempre es buena idea reemplazar en ambas ecuaciones el valor obtenido como acabamos de hacer. Si los resultados son distintos es que algo falló en las cuentas anteriores.

También podíamos haber despejado x en una de la ecuaciones, sustituirla en la otra para obtener una ecuación en y. Resolverla en y para finalmente obtener también la x.

Pero existen casos en que el sistema no tienen solución, o que tiene infinitas soluciones.
Consideramos el sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 15 = 0 & (1) \\ x - \dfrac{3}{2}y - 8 = 0 & (2) \end{cases}$$

En este caso si despejamos x en (2), $x = \dfrac{3}{2}y + 8$ y lo reemplazamos en (1) obtenemos

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{3}{2}y + 8\right) - 3y + 15 &= 0 \\ 3y + 16 - 3y + 15 &= 0 \\ 31 &= 0 \end{aligned}$$

y este resultado es claramente falso. Es una contradicción. Nos indica que el sistema no tiene solución.
Consideramos ahora el sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 8 = 0 & (1) \\ x - \dfrac{3}{2}y + 4 = 0 & (2) \end{cases}$$

Observamos que multiplicando (2) por 2 obtenemos (1). Las dos ecuaciones son equivalentes.
Tienen las mismas soluciones, y hay infinitas.
También se puede utilizar el método de eliminación de variables.
Para ello utilizamos que las ecuaciones equivalentes tienen las mismas soluciones.
Consideramos el sistema:

$$\begin{cases} 3x + y = 7 & (1) \\ -x + 3y = -1 & (2) \end{cases}$$

Al multiplicar (2) por 3 obtendremos

$$3\,(-x + 3y) = -3$$

$-3x + 9y = -3$. Que es equivalente a (2). Las soluciones del sistema dado coinciden con las de

$$\begin{cases} 3x + y = 7 \\ -3x + 9y = -3 \end{cases}$$

Si sumamos las dos ecuaciones se elimina la variable x. Obtenemos una ecuación en y

$$y + 9y = 7 - 3, \qquad 10y = 4, \qquad y = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Reemplazando en (1)

$$3x + \frac{2}{5} = 7, \qquad 3x = 7 - \frac{2}{5} = \frac{35-2}{5} = \frac{33}{5}$$

$$x = \frac{33}{3.5} = \frac{11}{5}$$

El par $x = \dfrac{11}{5}$, $y = \dfrac{2}{5}$ es la solución del sistema.

Siempre que tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas resulta:

a) Hay un único par de valores x, y que satisface las dos ecuaciones.

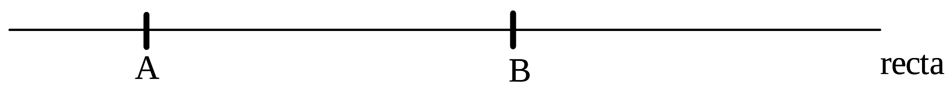
b) No hay solución

c) Hay infinitas soluciones que son los pares que satisfacen una de las ecuaciones. Este caso se da cuando las ecuaciones son equivalentes.

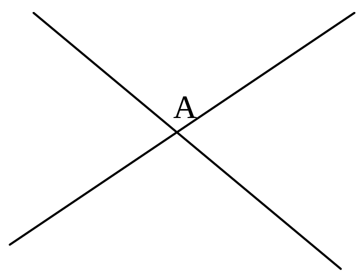
Geometría

Rectas, Semirectas y Segmentos

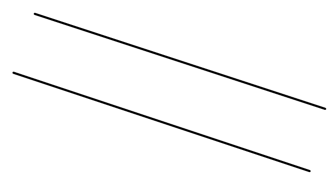
Las **rectas** son ilimitadas, y dos puntos del plano determinan una única recta.



Esto nos dice que dos rectas distintas tienen a la sumo un punto común. Este punto, cuando existe, es el **punto de intersección**, o de corte, de las dos rectas.

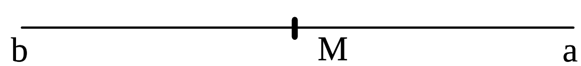


Las dos rectas se cortan en A



Las rectas no se cortan

Un punto de una recta nos determinan dos **semirectas**



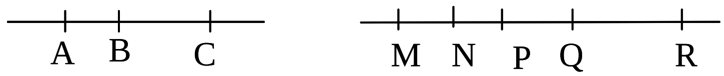
Ma y Mb son las semirrectas que determina M.

Un **segmento** es la porción de recta comprendida entre dos puntos de ella.

Segmento A B

Dos segmentos son iguales si podemos superponerlos.

También podemos sumar segmentos consecutivos

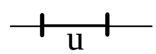


$$AB + BC = AC \qquad MN + NP + PQ + QR = MR$$

Podemos medir segmentos. Para ello debemos elegir una unidad. La medida depende de la unidad.

Las unidades más comunes son: metro, centímetro, pulgada, yarda, kilómetro, etc...

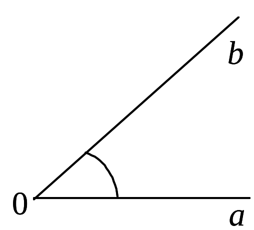
También podemos elegir un segmento cualquiera, $\underline{u}$ que nos convenga.



Ángulos

Un **ángulo** es la figura por dos semirrectas del mismo origen.

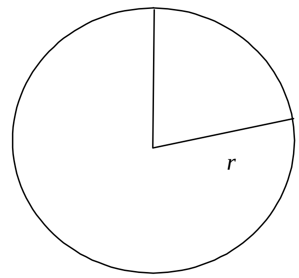
0 es el vértice del ángulo $a0b$
$0a$ es el lado inicial
$0b$ es el lado final



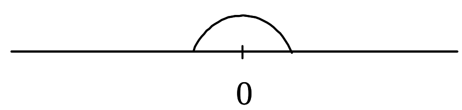
Los ángulos también se puede medir, las medidas de ángulos suelen ser el grado y el radián

A un ángulo de un giro completo de una semirrecta alrededor de su origen, en el sentido positivo(contrario al de las agujas del reloj) les asignamos la medida 360 grados, que escribimos 360^o. Además del grado usaremos otra unidad de medida de ángulo, el radián que definimos como al giro completo en el sentido positivo la medida 2π radianes

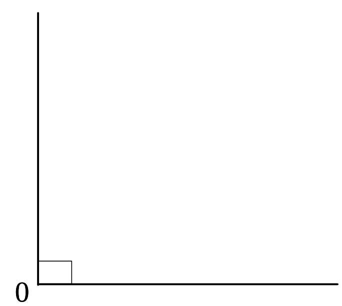
El radian es el ángulo limitado por dos radios de una circunferencia que cortan sobre la circunferencia un arco de longitud igual al radio de la circunferencia



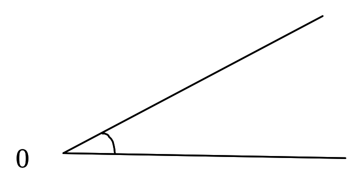
Un ángulo **llano** mide la mitad de un giro completo , o sea 180^o o π radianes



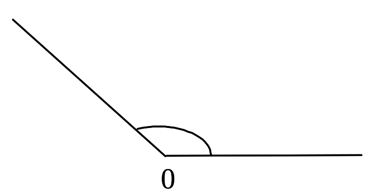
La mitad del ángulo llano es un ángulo **recto** y mide 90^o o $\pi/2$ radianes



Un ángulo de medida menor que la del ángulo recto (90^o) se llama **agudo**.



Un ángulo cuya medida esta comprendida entre 90^o y 180^o se llama **obtuso**



Un grado se divide en 60 minutos (60') y un minuto en 60 segundos (60")
Podemos así hablar de un ángulo de $37^o 54' 15"$.

Un ángulo dado en grados, minutos y segundos puede llevarse a la forma decimal. Usando el ejemplo anterior ¿qué fracción de grado representan $54'$?

$60'$	————————	1°
$1'$	————————	$(1/60)^\circ$
$54'$	————————	$(54/60)^\circ = (9/10)^\circ = 0,9$ grados

$15''$ representa $1/4$ minutos, y $(1/240)^\circ = 0,004\cdots$ grados.

Por lo tanto el ángulo de $37^\circ 54' 15''$ en forma decimal se escribe $37,904\cdots$ grados.

Es importante saber convertir un ángulo dado en grados a su valor en radianes y recíprocamente.
¿Cómo lo hacemos? otra vez con una regla de tres simple, si un ángulo mide α grados, entonces:

360 grados	————————	2π radiantes
1 grado	————————	$(2\pi/360)$ radiantes
α grados	————————	$\dfrac{2\pi\alpha}{360}$ radiantes

O sea:

$$\alpha^o = \frac{2\pi\alpha}{360} \text{ radianes}$$

Recíprocamente, si un ángulo mide x radiantes, entonces

2π radiantes	————————	360 grados
1 radian	————————	$(360/2\pi)$ grados
x radiantes	————————	$\dfrac{360}{2\pi}$ grados

O sea:

$$x \text{ radianes } = \frac{360}{2\pi} \text{ grados}$$

Ejemplos:

Si $\hat{A}$ mide 30 grados, en radiantes mide $\pi/6$
Si $\hat{B}$ mide 24 grados, resulta $\hat{B} = (2\pi/15)$ radiantes.

Si $\hat{C}$ mide 234 grados, en radiantes resulta $\dfrac{2\pi \times 234}{360} = \dfrac{13\pi}{10}$

Si $\hat{D}$ mide $121,14$ grados, resulta $D = \dfrac{2\pi \times 121,14}{360} = 0,673\pi$

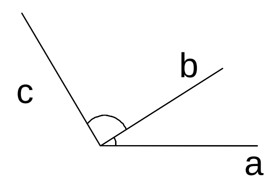
Si $\hat{E} = (5\pi/6)$ radianes resulta $\hat{E} = \dfrac{360 \times \dfrac{5\pi}{6}}{2\pi} = \dfrac{360 \times 5}{6 \times 2} = \dfrac{60 \times 5}{2} = 150^\circ$

Si $\hat{F} = 1$ radián, entonces $\hat{F} = 360/2\pi$ grados

Si $\hat{G} = 4\pi/15$ radianes, es $\hat{G} = \dfrac{(4\pi/15)\,360}{2\pi} = \dfrac{2 \times 360}{15} = 48°$.

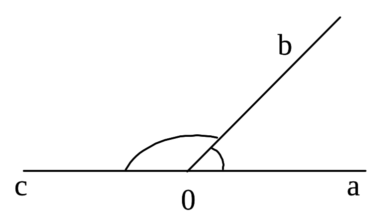
Definición: Dos ángulos son **adyacentes** si el lado final de uno es lado inicial del otro.

Los ángulos $\widehat{a0b}$ y $\widehat{b0c}$ son ángulos adyacentes. El lado $0b$ es el lado final de $\widehat{a0b}$ y el lado inicial de $\widehat{b0c}$.



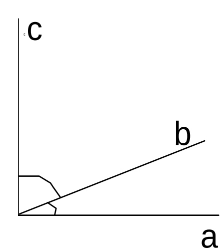
Dos ángulos adyacentes cuya suma es $180° = \pi$ radianes son **suplementarios**

$$\widehat{a0b} + \widehat{b0c} = 180°$$



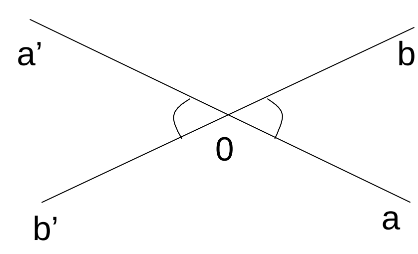
Dos ángulos adyacentes cuya suma es $90° = \dfrac{\pi}{2}$ radianes son **complementarios**

$$\widehat{a0b} + \widehat{b0c} = 90°$$



Dos ángulos se llaman **opuestos por el vértice** si los lados de uno son prolongación de los lados del otro.

$\widehat{a0b}$ y $\widehat{a'0\,b'}$ son opuestos por el vértice



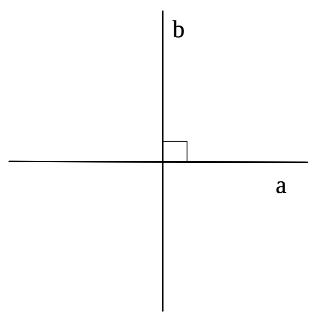
$\widehat{b0a'}$ y $\widehat{b'0\,a}$ también son ángulos opuestos por el vértice.

Como $\widehat{a0b}+\widehat{b0a'} = 180°$ y $\widehat{b0a'}+\widehat{a'0\,b'} = 180°$ vemos que es $\widehat{a0b} = \widehat{a'0\,b'}$.

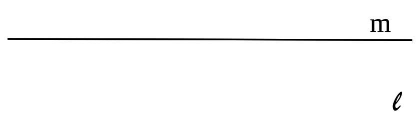
Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

Rectas Perpendiculares y Paralelas

Dos rectas son **perpendiculares** si se cortan y uno de los ángulos que forma es recto. En este caso, los cuatro ángulos son rectos. Escribimos $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$. Tenemos una propiedad importante: dada una recta y un punto del plano, por el punto se puede trazar una única perpendicular a la recta dada.

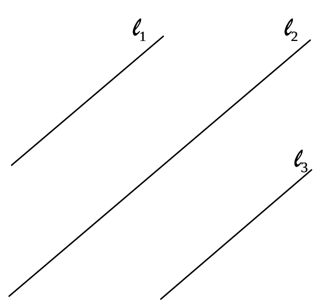


Dos rectas son **paralelas** si no se cortan (aunque se la prolongue) ℓ y m son paralelas. Escribimos $\ell||\mathbf{m}$ y el postulado de Euclides nos dice: por un punto del plano exterior a una recta dada se puede trazar una única paralela a la recta dada.

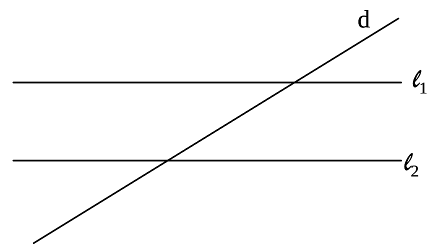


Si $\ell_1||\,\ell_2$ tenemos las propiedades:

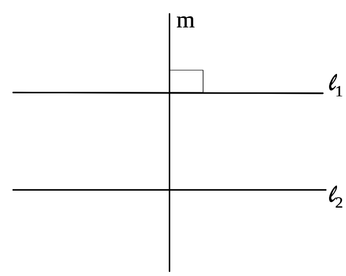
a) Toda recta paralela a una de ellas es paralela a la otra. O sea si $\ell_1 \,||\, \ell_2$ y $\ell_3 \,||\, \ell_2$, entonces $\ell_3 \,||\, \ell_1$



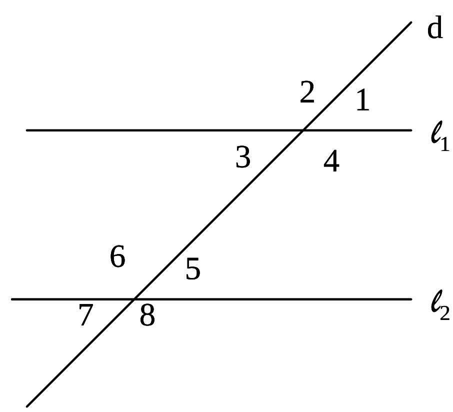
b) Toda recta que corta a una de ellas, corta a la otra. O sea: si d corta a ℓ_1, entonces d corta a ℓ_2



c) Toda recta perpendicular a una de ellas es perpendicular a la otra. Esto es: si $m \perp \ell_1$, entonces $m \perp \ell_2$



Consideremos $\ell_1 || \ell_2$ y d secante, se forman los ocho ángulos indicados en la figura



$\hat{3}$ y $\hat{5}$ son ángulos **alternos internos**. También $\hat{4}$ y $\hat{6}$.
$\hat{1}$ y $\hat{7}$ son ángulos **alternos externos**. También $\hat{2}$ y $\hat{8}$.
$\hat{1}$ y $\hat{5}$ son ángulos **correspondientes**. También $\hat{2}$ y $\hat{6}$; $\hat{3}$ y $\hat{7}$; $\hat{4}$ y $\hat{8}$ lo son.

Dos ángulos alternos internos son iguales. También son iguales dos ángulos alternos externos y dos correspondientes. Esto nos dice que

$$\hat{1} = \hat{3} = \hat{5} = \hat{7}$$

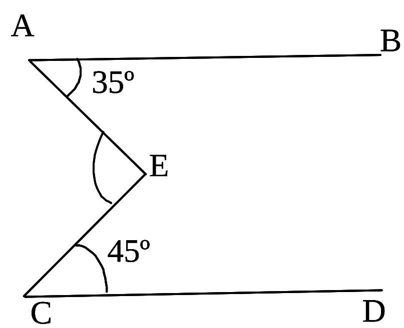
y

$$\hat{2} = \hat{4} = \hat{6} = \hat{8}$$

Si $\hat{1} = 43°30'$ entonces $\hat{3} = \hat{5} = \hat{7} = 43°30'$ y como $\hat{2} = 180° - \hat{1} = 180° - 43°30' = 136°30'$ entonces $\hat{4} = \hat{6} = \hat{8} = 136°30'$.

Tres ó más rectas que pasan por un punto se llama **concurrentes.**
Ejemplos de aplicaciones:

1. Si $AB||CD$, $\hat{A} = 35°$, $\hat{C} = 45°$. Calcular $\hat{E}$

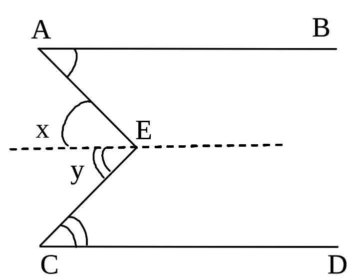


Para calcularlo trazamos por E una paralela a AB, se forma los ángulos $\hat{x}$ e $\hat{y}$

$\hat{x} = \hat{A} = 35°$ por alternos internos

$\hat{y} = \hat{C} = 45°$ por alternos internos

$\hat{E} = 35° + 45° = 80°$

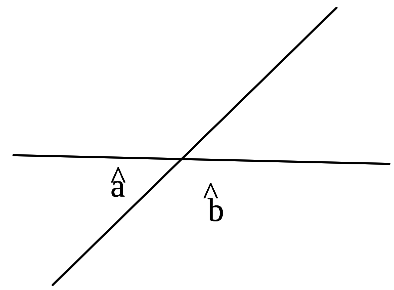


2) Si los ángulos $\hat{a}$ y $\hat{b}$ están en la relación $2:3$ hallar las medidas de $\hat{a}$ y $\hat{b}$

Sabemos que $\hat{a} + \hat{b} = 180°$ y

$\dfrac{\hat{a}}{2} = \dfrac{\hat{b}}{3}$, o sea $3\hat{a} = 2\hat{b}$ $\hat{a} = \dfrac{2\hat{b}}{3}$

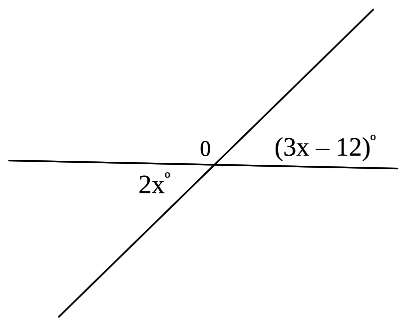
$\dfrac{2\hat{b}}{3} + \hat{b} = 180^\circ$, $2\hat{b} + 3\hat{b} = 3.180^\circ$ $5\hat{b} = 540^\circ$



entonces:

$\hat{b} = \dfrac{540}{5} = 108^\circ$ y $\hat{a} = 180^\circ - 108^\circ = 72^o$,

3) Hallar el valor de x si estamos en la situación de la figura



Como los dos ángulos son opuestos por el vértice, son iguales. Por lo tanto

$$\begin{aligned} 2x &= 3x - 12 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

Triángulos

Tres puntos no alineados de un plano, A, B y C determinan un **triángulo** ABC
Un triángulo tiene:

3 vértices, los puntos A, B y C.

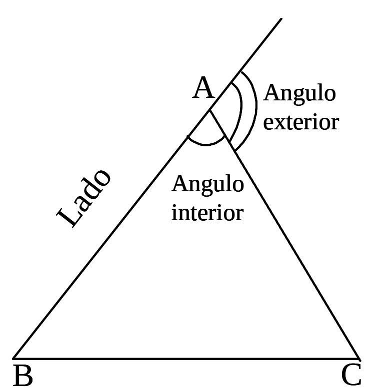
3 lados, los segmentos AB, BC y AC

3 ángulos interiores

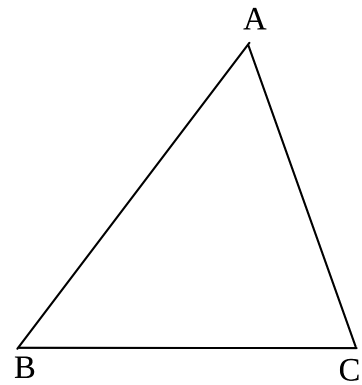
$\hat{A} = B\hat{A}C$ $\hat{B} = A\hat{B}C$ y $\hat{C} = A\hat{C}D$

3 ángulos exteriores.

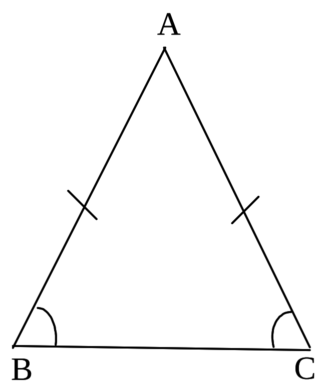
$\hat{A}$ es el ángulo opuesto al lado BC.



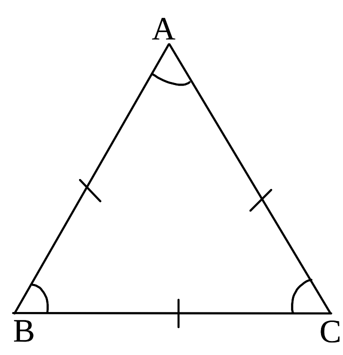
Un triángulo es **escaleno** si sus tres lados son distintos. En este caso los ángulos trambién lo son



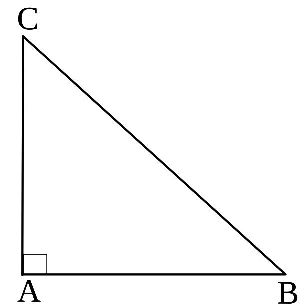
Un triángulo ABC es isósceles si tiene dos lados iguales, $AB = AC$. Los ángulos $\hat{C}$ y $\hat{B}$ opuestos a los lados iguales, son iguales



Un triángulo es **equilátero** si tiene sus tres lados iguales. En este caso sus tres ángulos son iguales.



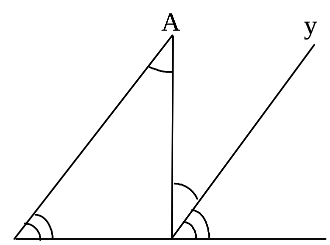
Un triángulo es **rectángulo** si uno de sus ángulos es recto.



Un triángulo es **acutángulo** si sus tres ángulos son agudos.

Suma de los ángulos de un triángulo

La suma de los ángulos de un triángulo es un ángulo llano, $180°$

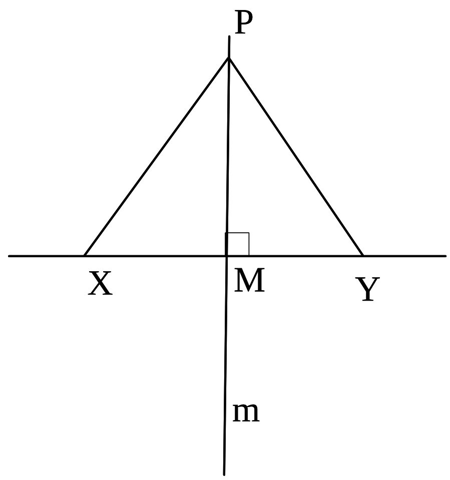


Demostración:
Prolongamos BC en Cx y trazamos $Cy\ ||AB$
Tenemos que:
$x\hat{C}y = \hat{B}$ por correspondientes
$A\hat{C}y = \hat{A}$ por alternos internos.
Como $x\hat{C}y + y\hat{C}A + A\hat{C}B = 180°$ resulta que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$

La suma de los ángulos exteriores de un triángulos es $360°$
Esto nos dice que:
En un triángulo equilátero cada ángulo interior mide $60°$ y cada ángulo exterior $120°$.
En un triángulo rectángulo los dos otros ángulos son agudos y complementarios.
En un triángulo rectángulo e isósceles los ángulos iguales miden $45°$

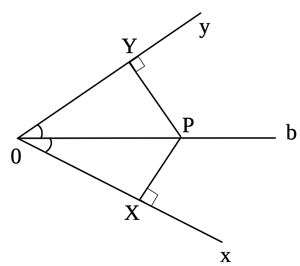
Mediatriz de un segmento y bisectriz de un ángulo

Dado un segmento XY, llamamos **mediatriz** a la recta **m** perpendicular al segmento en su punto medio **M**.



Se prueba que para todo punto P perteneciente a m, se cumple $PX = PY$. Además si un punto Z del plano es tal que $ZX = ZY$, entonces Z debe estar sobre la mediatriz del segmento XY.

Dado un ángulo $x\hat{0}y$ llamamos **bisectriz** a la recta $0b$ tal que $x\hat{0}b = b\hat{0}y$
o sea, la bisectriz divide al ángulo en dos ángulos iguales.

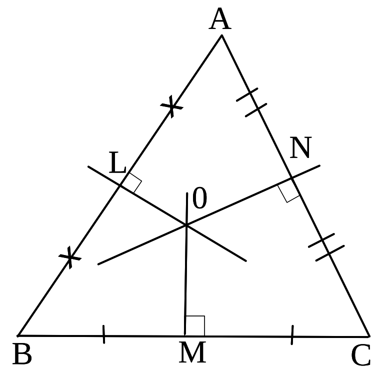


Se demuestra que si P pertenece a $0b, PX \perp 0x$ y $PY \perp 0y$, entonces $PX = PY$.

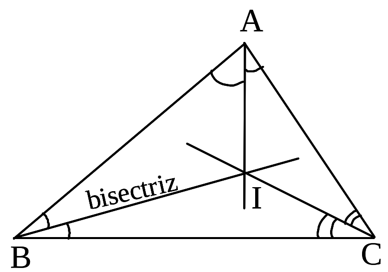
Además si Q es un punto del plano $QU \perp 0x, QV \perp 0y$ y $QU = QV$, entonces Q esta sobre la bisectriz del ángulo.

Mediatrices, bisectrices, medianas y alturas de un Triángulo

Llamamos **mediatriz** de un triángulo a la mediatriz de un lado. Un triángulo tiene tres mediatrices. Se prueba que las tres mediatrices son concurrentes en un punto 0, que puede ser interior, exterior o estar sobre un lado del triángulo.

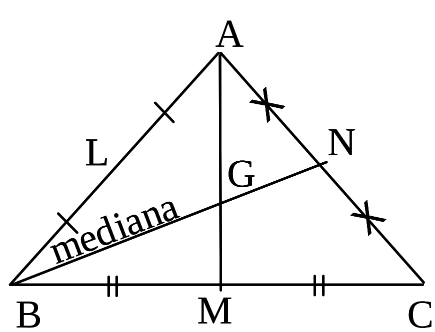


Llamamos **bisectrices** de un triángulo a las 3 bisectrices de cada uno de sus ángulos. Las tres bisectrices son concurrentes en un punto I, que siempre es interior al triángulo.



Llamamos **mediana** de un triángulo al segmento que une un vértice al punto medio del lado opuesto.

Se demuestra que las tres medianas de un triángulo concurren en un punto interior al triángulo, G, llamado **baricentro**

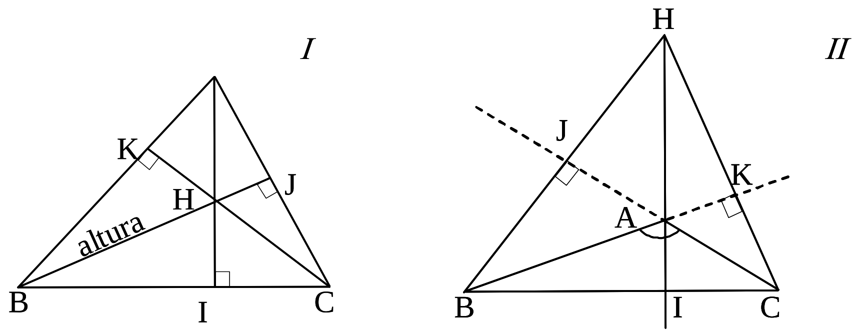


El segmento perpendicular trazado desde un vértice al lado opuesto se llama **altura** del triángulo.

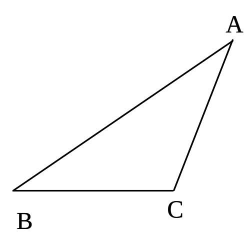
Si el triángulo es acutángulo, como el de la figura I, las tres alturas se cortan en un punto interior al triángulo H, llamado **ortocentro**.

Si el triángulo es rectángulo en A el ortocentro coincide con A.

Si el triángulo tiene un ángulo obtuso ($\hat{A}$ en la fig. II)H es exterior al triágulo.



En un triángulo el mayor lado está opuesto al mayor ángulo y el menor lado está opuesto al menor ángulo

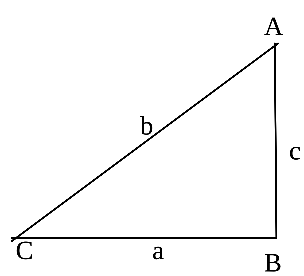


Si $\hat{B} < \hat{A} < \hat{C}$, entonces $AC < BC < AB$ y recíprocamente.

También se satisface siempre la desigualdad triangular.

Si a, b, c son las longitudes de los lados BC,AC y AB, entonces

$$a \leq b + c; \; b \leq a + c \quad \text{y} \quad c \leq a + b$$



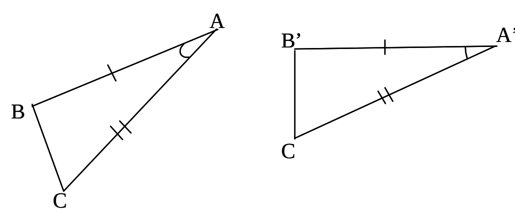
Congruencia y semejanza de Triángulos.

Congruencia

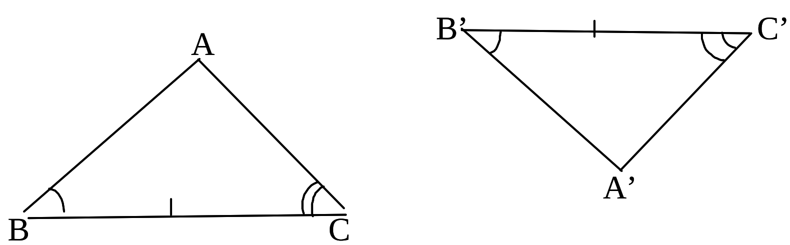
Dos triángulos son **congruentes** si se pueden superponer.

Para ver que son congruentes no es necesario superponerlos efectivamente. Se pueden probar las reglas siguientes:

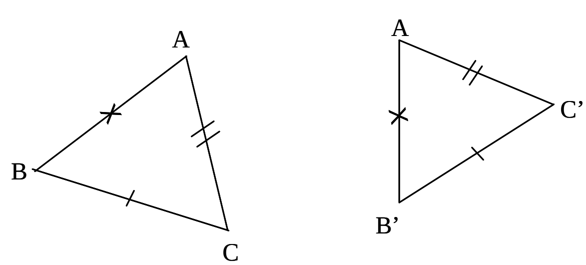
I. Dos triángulos que tienen un ángulo igual comprendido entre dos lados iguales son congruentes.



II. Dos triángulos que tienen un lado igual comprendido entre dos ángulos iguales son congruentes

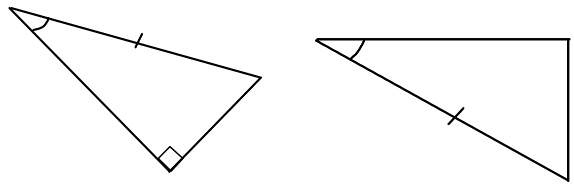


III. Dos triángulos que tienen los tres lados iguales son congruentes.

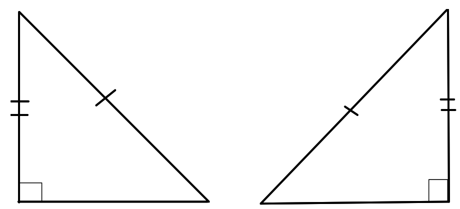


Existen otras dos reglas para el caso específico de los triángulos rectángulos:

Dos triángulos rectángulos son congruentes si tienen un ángulo agudo y la hipotenusa iguales.



Dos triángulos rectángulos que tienen la hipotenusa y un cateto iguales son congruentes.

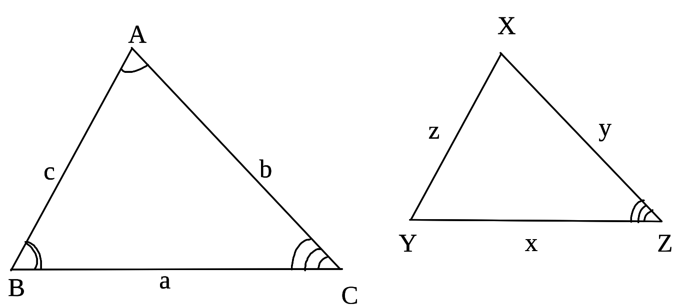


Si dos triángulos ABC y MNL son congruentes escribimos $ABC \cong MNL$.

Semejanza

Dos triángulos ABC y XYZ son **semejantes** si tienen dos ángulos iguales, y escribimos $ABC \sim XYZ$.

Puesto que la suma de los tres ángulos de un triángulo es 180°, esto significa que triángulos semejantes tienen los tres ángulos iguales.



Los triángulos ABC y XYZ son semejantes. Si sus lados tienen longitudes $a, b, c,\ x, y, z$ como en el dibujo se cumple que:

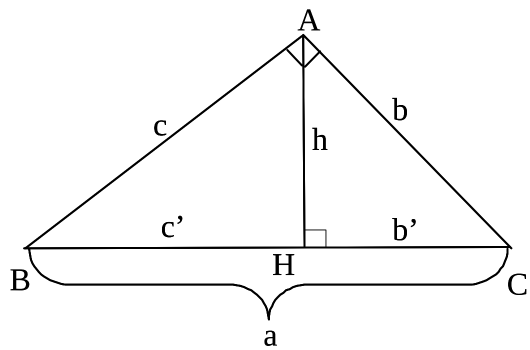
$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

También todas sus partes correspondientes son proporcionales (perímetros, alturas, medianas,$\cdots$).

Aplicación importante:

Sea ABC un triángulo rectángulo en A, $BC = a$ es la hipotenusa, $AC = b$ y $AB = c$ son los catetos.

Llamamos $AH = h$ a la altura correspondiente a A y llamamos $BH = c', HC = b'$



ABC es rectángulo en A, por lo tanto $A\hat{B}C + B\hat{C}A = 90°$
AHC es rectángulo en H, por lo tanto $H\hat{A}C + A\hat{C}H = 90°$
HBA es rectángulo en H, por lo tanto $H\hat{B}A + H\hat{A}B = 90°$

Como $A\hat{C}H$ coincide con $A\hat{C}B$ y $A\hat{B}H$ con $A\hat{B}C$ resulta que

$$A\hat{B}C = H\hat{A}C \quad \text{y} \quad A\hat{C}B = H\hat{A}B$$

De esto se deduce que los triángulos HAC y HBA son semejantes. Por lo tanto:

$$\frac{HA}{HB} = \frac{HC}{HA}, \quad \text{o sea} \quad \frac{h}{c'} = \frac{b'}{h} \quad \text{o} \quad h^2 = b'c' \tag{1}$$

También:

$$ABC \sim HAC \text{ nos dice que } AC^2 = HC \cdot BC \;\text{ ó } b^2 = a \cdot b' \tag{2}$$

y de:

$$ABC \sim HAC \text{ obtenemos } AB^2 = BC \cdot BH \;\text{ ó } c^2 = a \cdot c' \tag{3}$$

Si sumamos (2) y (3) obtenemos:

$$b^2 + c^2 = a \cdot b' + a \cdot c' = a\,(b' + c') = a \cdot a = a^2$$

Con esto hemos demostrado el **Teorema de Pitágoras**: en un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

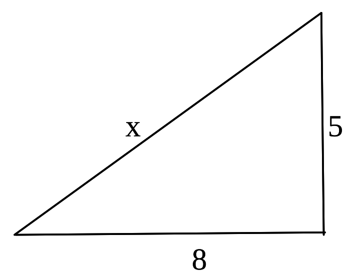
Ejemplos de aplicación:

a) Los catetos de un triángulo rectángulo miden 5 y 8. Calcular la hipotenusa.

Solución:

Sabemos por el Teorema de Pitágoras que $x^2 = 5^2 + 8^2 = 25 + 64 = 89$

Por lo tanto la hipotenusa mide $x = \sqrt{89}$

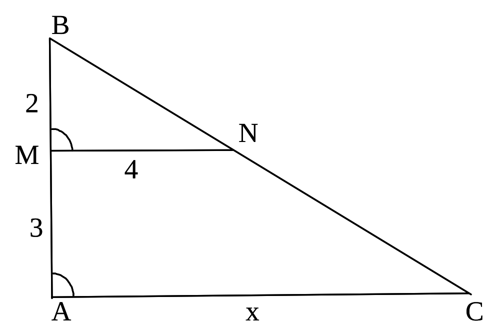


b) En el triángulo ABC, $MN \parallel AC$, $BM = AM = 3$ y $MN = 4$.

Calcular $x = AC$

Solución:

La situación es la de la figura $MN \parallel AC$ nos dice $B\hat{M}N = B\hat{A}C$ correspondientes. Por lo tanto los triángulos BAC y BMN son semejantes pues tienen dos águlos iguales, $\hat{B}$ es común y $\hat{M} = \hat{A}$.

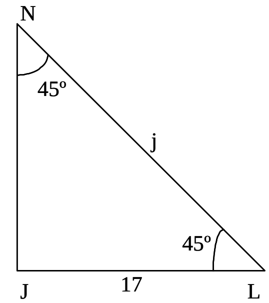


También sabemos que $BA = 2 + 3 = 5$. Los lados de los dos triángulos son proporcionales.

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{x} \text{ de donde } x = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$

C) Dado el triángulo NJL como en la figura, hallar j

Solución:
El triángulo es isósceles, por lo tanto
$JN = JL = 17$
Como $45° + 45° = 90°$ también es rectángulo
Por el Teorema de Pitágoras
$j^2 = 17^2 + 17^2 = 2 \cdot 17^2$
$j = 17\sqrt{2}$



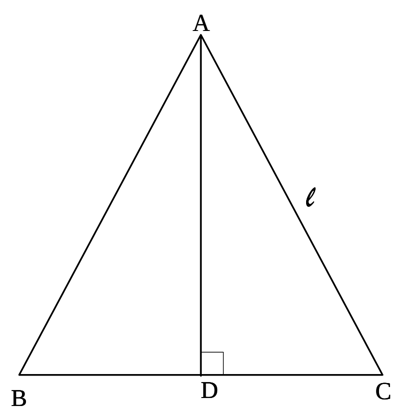
D) Dado el triángulo ABC, equilátero, de lado ℓ, calcular su altura AD.

Solución:

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60°$$

Como $AB = AC$, A está sobre la mediatriz de BC y $BC = DC = \dfrac{\ell}{2}$

Aplicando en ADC el Teorema de Pitágoras:



$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$

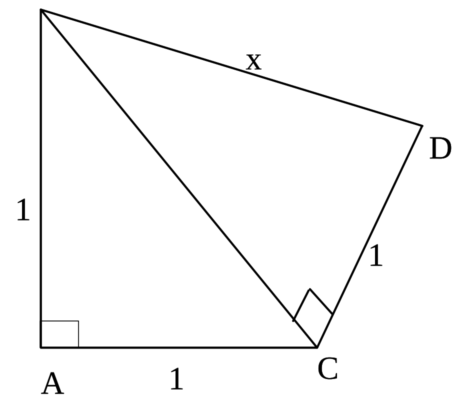
tenemos que:

$$\ell^2 = AD^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

y

$$\begin{aligned} AD^2 &= \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} = \frac{3\ell^2}{4} \\ AD &= \frac{\ell}{2}\sqrt{3} \end{aligned}$$

E) Dada la figura adjunta, calcular



Solución:
ABC es rectángulo.

$$BC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

BCD es rectángulo

$$x^2 = 1^2 + BC^2 = 1 + 2 = 3$$

Por lo tanto

$$x = \sqrt{3}$$

F) Si los ángulos de un triángulo están en la relación 2 : 3 : 4 ¿qué tipo de triángulo es?

Solución:
La hipótesis nos dice que si los ángulos miden α, β y γ se cumple

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{3} = \frac{\gamma}{4} = x$$

o sea: $\alpha = 2x \quad \beta = 3x \quad \gamma = 4x$
Como los ángulos son distintos, los lados también.
El triángulo es escaleno.
Además, sabemos que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

$$\begin{aligned} 2x + 3x + 4x &= 180° \\ 9x &= 180° \\ x &= 20° \end{aligned}$$

y

$$\alpha = 40° \qquad \beta = 60° \quad \gamma = 80°$$

El triángulo es acutángulo, y escaleno.

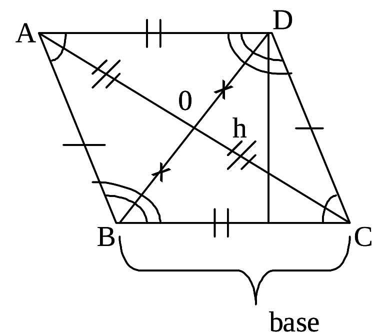
Cuadriláteros

Un **paralelogramo** es un cuadrilátero que tiene sus lados paralelos dos a dos

$$AB \mid\mid CD \text{ y } BC \mid\mid AD$$

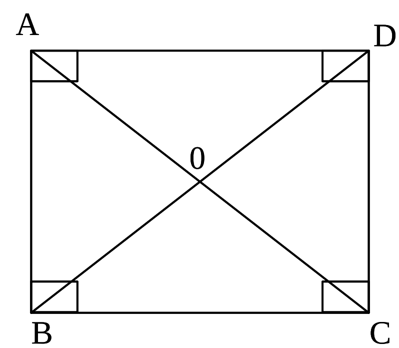
Propiedades de los paralelogramos:
Los lados opuestos son iguales y paralelos.
Los ángulos opuestos son iguales.
Dos ángulos consecutivos son suplementarios.
Las diagonales se cortan en su punto medio.

$$A0 = 0C \quad \text{y} \quad B0 = 0D$$

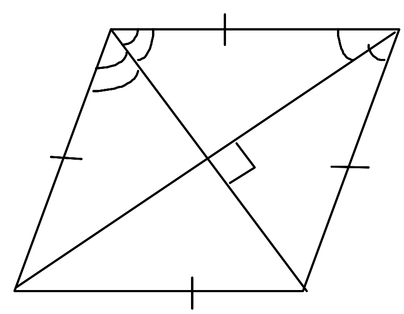


Un **rectángulo** es un paralelogramo que tiene un ángulo recto.
Además de las propiedades de los paralelogramos, tiene las propiedades:
Todos sus ángulos son rectos.
Las diagonales son iguales.

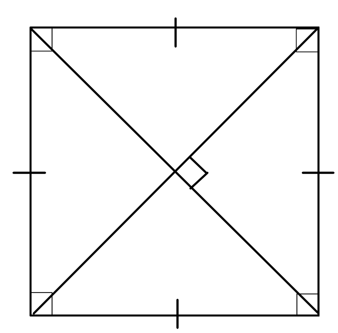
$$AC = BD$$



Un **rombo** es un paralelogramo que tiene dos lados consecutivos iguales.
Además de las propiedades de los paralelogramos, tiene las siguientes:
Todos sus lados son iguales.
Las diagonales son perpendiculares.
Las diagonales son bisectrices de los ángulos.

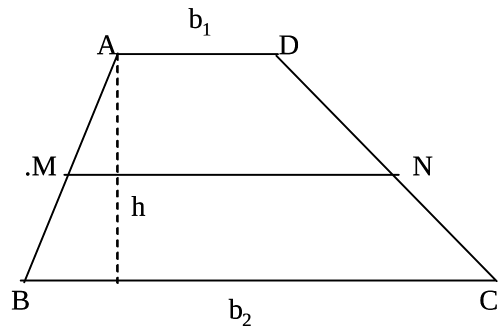


Un **cuadrado** es a la vez un rombo y un rectángulo.
Tiene todas las propiedades de los rectángulos y los rombos.

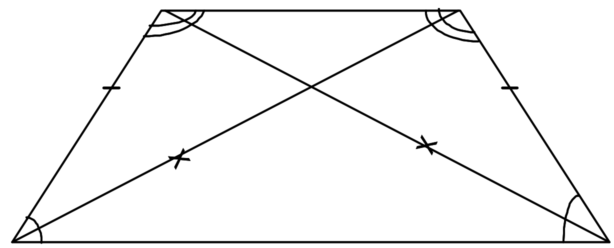


Un **trapecio** es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos.
Sus bases, b_1 y b_2 son sus lados paralelos.
La altura h, es la longitud del segmento perpendicular a la bases.
Si M y N son los puntos medios de los lados no paralelos, se prueba que

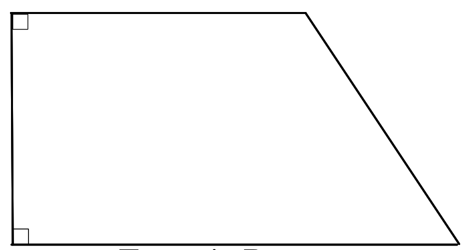
$$MN = \frac{b_1 + b_2}{2}$$



Un trapecio con los ángulos de la base iguales se llama **isósceles**
Los lados no paralelos son iguales y las diagonales también


Trapecio Isósceles

Un trapecio que tiene un ángulo de la base recto se llama **trapecio recto**

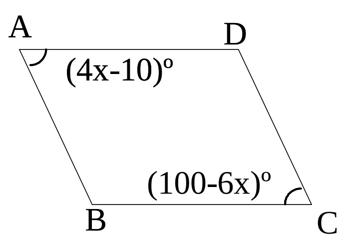

Trapecio Recto

Ejemplos:

A) En el paralelogramo $ABCD$

$$\hat{A} = 4x - 10 \quad \text{y} \quad \hat{C} = 100 - 6x$$

Calcular los ángulos.



Solución:

Los ángulos A y C son opuestos, por lo tanto

$$\hat{A} = \hat{C}$$

O sea

$$\begin{aligned} 4x - 10 &= 100 - 6x \\ 10x &= 110 \\ x &= 11 \end{aligned}$$

$$\hat{A} = \hat{C} = 4 \cdot 11 - 10 = 44 - 10 = 34$$

y

$$\hat{B} = \hat{D} = 180^{\circ} - \hat{A} = 180^{\circ} - 34^{\circ} = 146^{\circ}$$

B) Los ángulos de un cuadrilátero $ABCD$ están en la relación $1 : 3 : 5 : 6$. Hallar las medidas de los ángulos.

Solución:

La hipótesis nos dice

$$\frac{\hat{A}}{1} = \frac{\hat{B}}{3} = \frac{\hat{C}}{5} = \frac{\hat{D}}{6} = x, \text{ entonces:}$$

$$\hat{A} = x;\ \hat{B} = 3x;\ \hat{C} = 5x;\ \hat{D} = 6x$$

Como la suma de los ángulos de un cuadrilátero es 360°, tenemos:

$$\begin{aligned} x + 3x + 5x + 6x &= 360 \\ 15x &= 360 \\ x &= 24 \end{aligned}$$

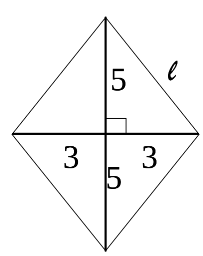
por lo tanto

$$\hat{A} = 24^{\circ} \quad \hat{B} = 3.24 = 72^{\circ} \quad \hat{C} = 5.24 = 120^{\circ} \quad \hat{D} = 6 \cdot 24 = 144^{\circ}$$

C) Si las diagonales de un rombo miden 6 y 10, hallar la medida del lado

Solución:

Sabemos que las diagonales de un rombo son perpendiculares.



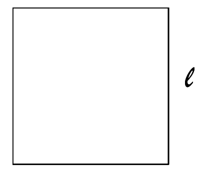
El lado del rombo es la hipotenusa de cualquiera de los triángulos rectángulos determinados por las diagonales.

$$\begin{aligned} \ell^2 &= 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34 \\ \ell &= \sqrt{34} \end{aligned}$$

Perímetro y Area de algunos polígonos

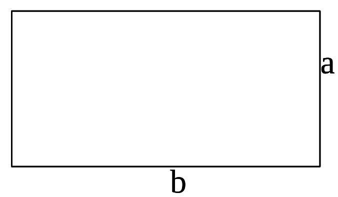
El **perímetro** es la suma de las longitudes de los lados. Lo llamamos ρ
El área es la medida de la superficie del polígono. La llamamos S
Tenemos las fórmulas siguientes:
Cuadrado de lado ℓ

$$S = \ell^2$$
$$\rho = 4\ell$$



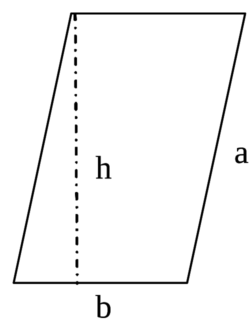
Rectángulos de lados $\underline{a}$ y $\underline{b}$

$$S = a.b$$
$$\rho = 2a + 2b$$



Paralelogramo de lados $\underline{a}$ y $\underline{b}$, y altura $\underline{h}$ correspondiente a $\underline{b}$

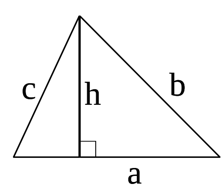
$$S = b \cdot h$$
$$\rho = 2a + 2b$$



Triángulo de lados $\underline{a}, \underline{b}$ y $\underline{c}$ y altura $\underline{h}$ correspondiente a $\underline{a}$

$$S = \frac{a \cdot h}{2}$$

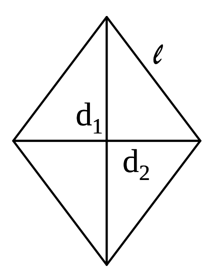
$$\rho = a + b + c$$



Rombo de lado ℓ y diagonales d_1 y d_2

$$S = \frac{d_1 d_2}{2}$$

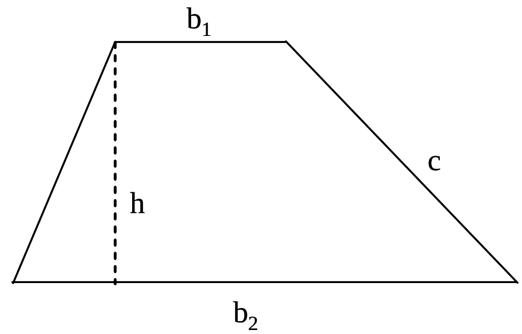
$$\rho = 4\ell$$



Trapecio de bases b_1 y b_2 y altura $\underline{h}$

$$S = \frac{(b_1 + b_2)\,h}{2}$$

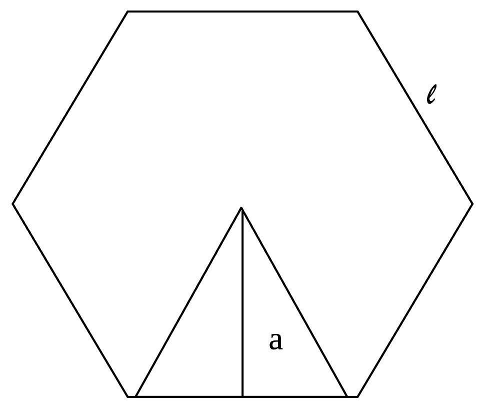
$$\rho = a + c + b_1 + b_2$$



Polígonos regulares de $\underline{n}$ lados, de lado $\underline{\ell}$ y apotema $\underline{a}$

$$S = n\left(\frac{a \cdot \ell}{2}\right)$$

$$\rho = n\ell$$

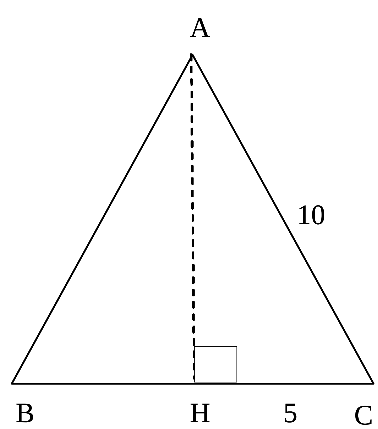


Ejemplos:

A) Hallar el área de un triángulo equilátero de lado 10.

AHC es rectángulo en H

$$10^2 = h^2 + 5^2$$
$$h^2 = 100 - 25 = 75 = 3 \cdot 5^2$$
$$h = 5\sqrt{3}$$
$$S = \frac{10 \cdot 5\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}$$



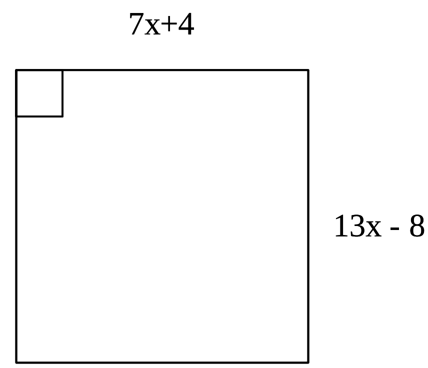
B) Si los lados consecutivos de un cuadrado se pueden representar en términos de x como $7x+4$ y $13x-8$, calcular el área del cuadrado.

Solución:

Como se trata de un cuadrado sus lados son iguales.

Debe ser:

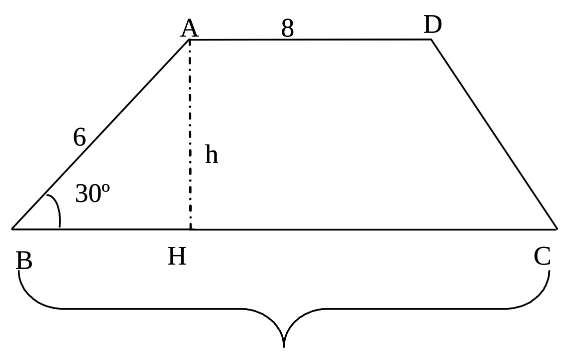
$7x + 4 = 13x - 8$
$4 + 8 = 13x - 7x$
$12 = 6x$
$x = \dfrac{12}{6} = 2$



El lado de cuadrado es: $\ell = 7 \cdot 2 + 4 = 18$ y el área $S = 18^2 = 324$.

C) Hallar el área del trapecio $ABCD$ de la figura.

Solución:
Trazamos la altura AH.
Como $B = 30°$ observamos que $\widehat{BAH} = 60°$ o sea ABH es la mitad de un triángulo equilátero de lado 6.



Por lo tanto

$$h = \frac{6}{2} = 3$$

y el área es

$$S = \frac{(b_1 + b_2) \cdot h}{2} = \frac{(8 + 16) \cdot 3}{2} = \frac{24 \cdot 3}{2} = 36$$

Círculos

Una cuerda es un segmento que une dos puntos de una circunferencia. CD es una cuerda.

El perímetro de la circuferencia de radio R es:

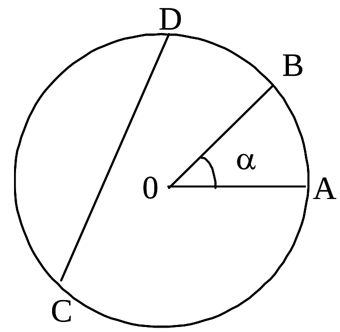
$$p = 2\pi R$$

El área del círculo de radio R es

$$A = \pi R^2$$

La longitud del arco de ángulo al centro α (medido en radianes) es

$$\widehat{AB} = \alpha R$$



Si α está medido en grado es $\widehat{AB} = \dfrac{\alpha}{360} 2\pi R$

El área del sector OAB es $S = \alpha R^2/2$

Si α está medido en grados, área $OAB = \dfrac{\alpha}{360}\pi R^2$

Ejemplos:

A) Dado un círculo de radio 3, hallar la longitud del arco que corresponde a un ángulo central de 30°.

Solución:

Como 30° es $\dfrac{\pi}{6}$ radianes tendremos que

$$\ell = \alpha R = \frac{\pi}{6} \cdot 3 = \frac{\pi}{2}$$

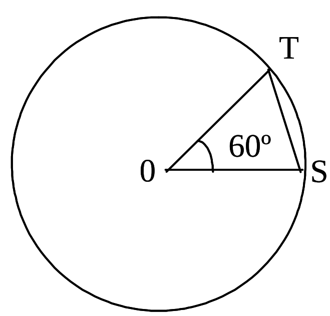
La longitud del arco es $\dfrac{\pi}{2}$

B) En una circunferencia un arco de 60° intercepta una cuerda de longitud 12. Calcular el radio.

Solución:

Como $OS = OT$; OST es isósceles.

$\hat{S} = \hat{T} = \dfrac{1}{2}(180° - 60°) = \dfrac{120°}{2} = 60°$



o sea el triángulo es equilátero y

$$R = 12$$

C) Hallar el área de un círculo cuyo perímetro es 18π.

Solución:

Sabemos que $p = 2\pi r = 18\pi$ entonces,

$$\begin{aligned} 2r &= 18 \\ r &= 9 \end{aligned}$$

y entonces:

$$S = \pi r^2 = \pi\,(9)^2 = 81\pi$$

D) Hallar el área del sector del círculo de radio 5 y ángulo al centro 72°.

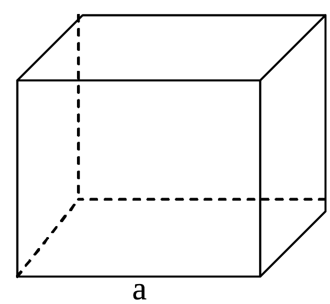
Solución:

Area sector $= \dfrac{\alpha}{360}\pi r^2$
En este caso

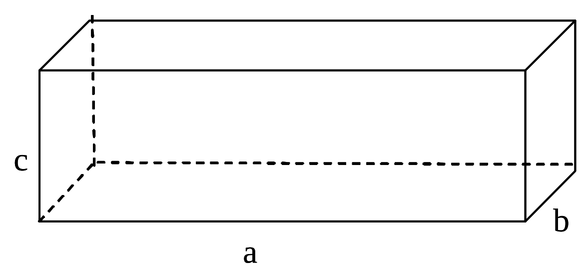
$$S = \frac{72}{360} \cdot \pi 5^2 = \frac{1}{5} \cdot \pi 5^2 = 5\pi$$

Sólidos

Volumen del **cubo** de longitud de arista a es: $V = a^3$



El área total del cubo es: $A = 6a^2$ Volumen del **paralelepípedo** de longitud de aristas a, b y c es: $V = abc$

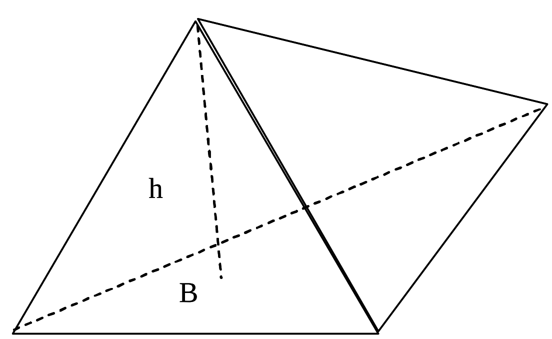


El área total del paralelepípedo es

$$A = 2\,(ab + ac + bc)$$

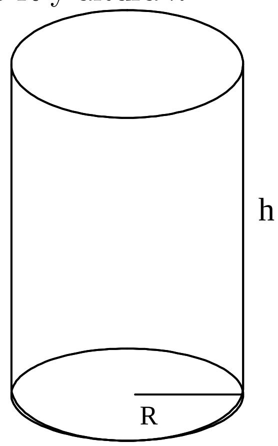
Volumen de una **pirámide** de área de base B y altura h es

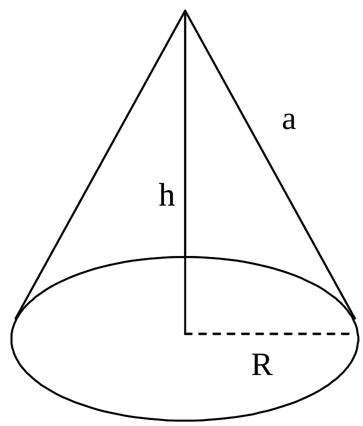
$V = (1/3)\,Bh$



Cilindro de radio de la base R y altura h

Volumen
$V = \pi R^2 h$
Area lateral
$A_1 = 2\pi R h$
Area total
$A_t = 2\pi R h + 2\pi R^2$
$= 2\pi R\,(R + h)$

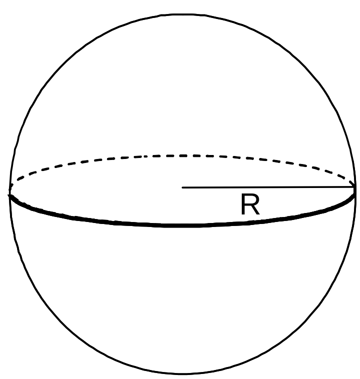




Cono de radio de la base R y altura h
Volumen $\quad V = (1/3)\,\pi R^2 h$
$S = \pi R a$

Esfera de radio R

$S = 4\pi R^2$
$V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$



Ejemplos:

A) El área total de un cubo es 36. Calcular su volumen.

Como un cubo tiene 6 caras iguales, el área de cada cara es $\dfrac{36}{6} = 6$.

Como cada cara es un cuadrado cada arista mide $\sqrt{6}$.

El volumen es $V = \left(\sqrt{6}\right)^3 = 6\sqrt{6}$.

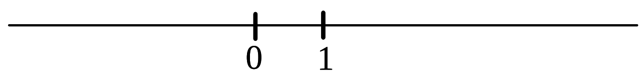
B) Hallar el área total de un cilindro de radio 3 y altura 10.

Area lateral: $2\pi.3.10 = 60\pi$
Area base: $\pi.3^2 = 9\pi$
Area total: $60\pi + 9\pi + 9\pi = 78\pi$

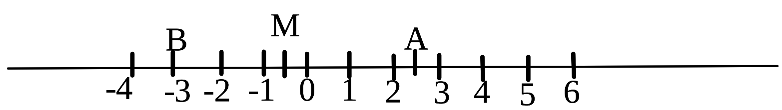
Geometría Analítica

Recta Real

LLamamos **recta real**, 0 **eje** a una recta sobre la cuál elegimos un punto 0 y, a la derecha de 0 otro punto que marcamos 1, y que es la unidad



Luego vamos marcando los puntos $2, 3, 4$ ... hacia la derecha y $-1, -2, -3$... hacia la izquierda, respetando la unidad.



Cada punto de la recta se corresponde con un número real, su distancia a 0. Los números positivos están a la derecha de 0. Los negativos a la izquierda. El número es la coordenada del punto. En general se los identifica así, A es $\frac{5}{2}$y B es -3.

La distancia entre A y B es el valor absoluto de la diferencia de sus coordenadas.

$$AB = \left|\frac{5}{2} - (-3)\right| = \frac{5}{2} + 3 = \frac{5+6}{2} = \frac{11}{2}$$

El punto medio de AB, M, tiene como coordenada la semisuma de las coordenadas de A y B

$$M = \frac{5/2 - 3}{2} = \frac{5/2 - 6/2}{2} = -\frac{1}{4}$$

En general si a es la abscisa de A, b la de B el punto medio M es $\frac{a+b}{2}$

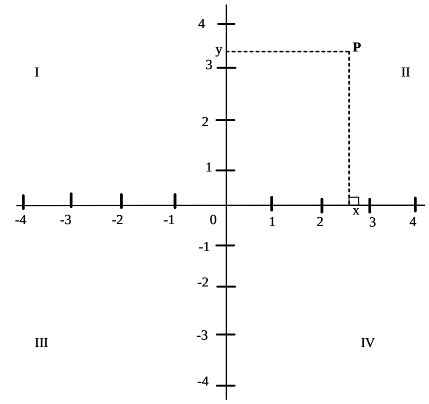
Plano coordenado.

Trazamos dos rectas perpendiculares, una horizontal y una vertical que se cortan en 0, y marcamos una unidad 1 sobre cada eje. En el vertical consideramos positivo hacia arriba

El eje horizontal es el eje x. El eje vertical es el eje y

Estos dos ejes nos dividen el plano en cuatro cuadrantes

Dado un punto **P**, lo proyectamos sobre los ejes y obtenemos x e y



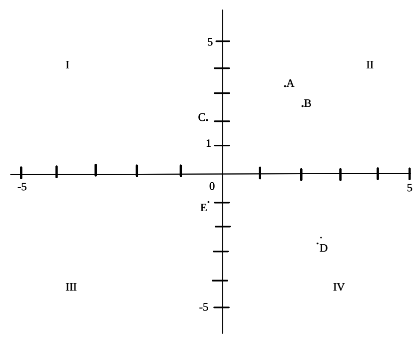
Si dados x e y trazamos por x la paralela al eje y, y por y la paralela al eje x, ellas se cortan precisamente en el punto **P** o sea que a cada punto asociamos un par ordenado de números, sus coordenadas, y escribimos

$$\mathbf{P}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \qquad \text{ó} \qquad \mathbf{P}(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

Ejemplo:

En el gráfico adjunto hemos marcado los puntos A, B, C, D y E

Decidir a que cuadrante corresponde cada uno de los pares dados a continuación y a qué punto corresponden



1. $(-1,2)$ 2. $(3,2)$ 3. $(4,-2)$ 4. $(2,3)$ 5. $(-1,1)$

Solución:

1. Tiene abscisa negativa y ordenada positiva. Está en II. Corresponde al punto C.

2. Tiene ambas coordenadas positivas. Está en I. Corresponde a B.

3. Tiene abscisa positiva y ordenada negativa. Está en IV. Corresponde a D.

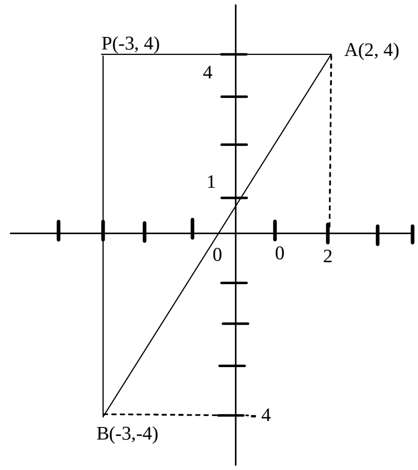
4. Tiene ambas coordenadas positivas. Está en I. Corresponde a A.

5. Ambas coordenadas son negativas. Está en III. Corresponde a E.

Distancia entre dos puntos

Para hallar la distancia entre dos puntos del plano coordenado utilizamos el Teorema de Pitágoras.

Supongamos que tenemos
$A\,(2,4)$ y $B\,(-3,-4)$ y nos interesa calcular la distancia AB



Trazamos la perpendicular por A al eje y, y la perpendicular por B al eje x (o al revés). Estas dos rectas se cortan en $P\,(-3,4)$.
PAB es un triángulo rectángulo, $PA = 5$ y $PB = 8$
Por lo tanto $AB^2 = 5^2 + 8^2 = 25 + 64 = 89$

$$AB = \sqrt{89}$$

Repitiendo el razonamiento en general, si $S\,(x_1, y_1)$ y $T\,(x_2, y_2)$ entonces su **distancia** es

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplos:

A) Hallar la distancia de $(-5, 9)$ al origen.

Como las coordenadas del origen son $0\,(0,0)$

$$d = \sqrt{5^2 + 9^2} = \sqrt{25 + 81} = \sqrt{106}$$

B) ¿Cuál de los puntos siguientes está más alejado de $P\,(2,2)$.

$$A\,(8,8)\,;\quad B\,(-6,2)\,;\quad C\,(4,-6)\,;\quad D\,(-5,-5)$$

$$\begin{aligned}
d\,(PA) &= \sqrt{(8-2)^2 + (8-2)^2} = \sqrt{2 \cdot 6^2} = \sqrt{72} \\
d\,(PB) &= \sqrt{(-6-2)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{(-8)^2} = \sqrt{64} \\
d\,(PC) &= \sqrt{(4-2)^2 + (-6-2)^2} = \sqrt{2^2 + 8^2} = \sqrt{4 + 64} = \sqrt{68} \\
d\,(PD) &= \sqrt{(-5-2)^2 + (-5-2)^2} = \sqrt{2 \cdot 49} = \sqrt{98}
\end{aligned}$$

Como $64 < 68 < 72 < 98$ el punto más alejado de P es D.

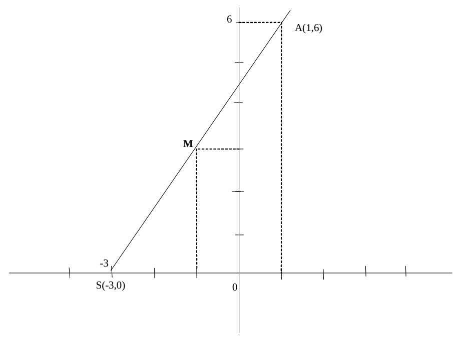
Punto medio de un segmento

Dado dos puntos $A\left(x_1, y_1\right)$ y $B\left(x_2, y_2\right)$ el punto medio M de AB es

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

Ejemplos:

A) Dados $A\left(1,6\right)$ y $B\left(-3,0\right)$
Hallar su punto medio M.
M es el punto de coordenadas.
$\left(\frac{1-3}{2}, \frac{6+0}{2}\right)=\left(-1,3\right)$



B) Si $A\left(1,3\right)$ y $M\left(4,1\right)$ es el punto medio de AB.

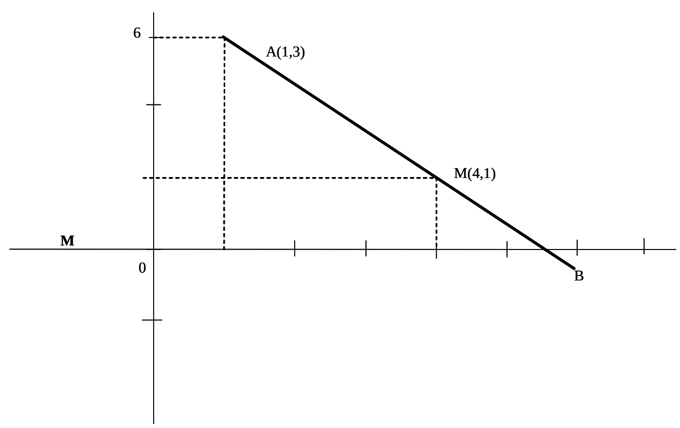
Encontrar las coordenadas de B.

Solución:

Si $B\left(x, y\right)$,

El punto medio de AB,
tiene coordenadas

$\left(\frac{1+x}{2}, \frac{3+y}{2}\right)=\left(4,1\right)$



Debe ser

$$\frac{1+x}{2}=4 \qquad 1+x=8 \qquad x=7$$

y

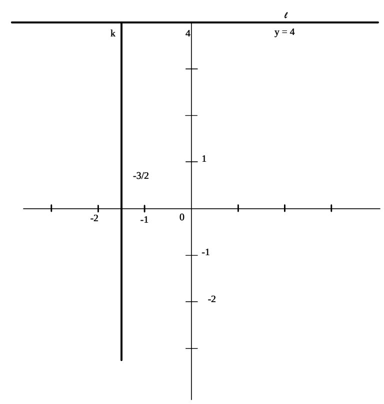
$$\frac{3+y}{2}=1 \qquad 3+y=2 \qquad y=-1$$

Resulta $B\left(7,-1\right)$

Ecuaciones de una recta

Todos los puntos de una recta horizontal del plano tienen la misma ordenada.

En el gráfico todos los puntos de la recta ℓ tiene ordenada 4. Decimos que la ecuación de ℓ es $y = 4$



Análogamente todos los puntos de una recta vertical tienen la misma abscisa. En la recta k la del gráfico esta abscisa es $-\dfrac{3}{2}$.

Decimos que la ecuación de la recta k es

$$x = -\frac{3}{2}$$

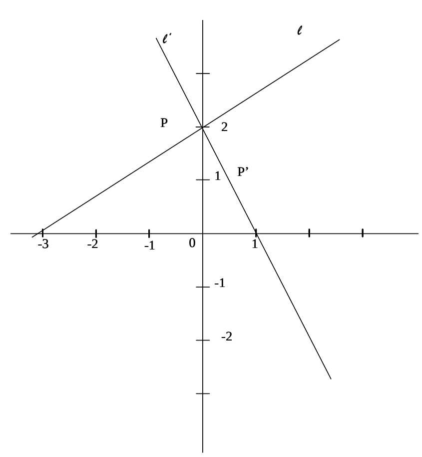
El punto de intersección de estas dos rectas tiene abscisa $-3/2$, ordenada 4. Es $P\,(-3/2, 4)$.

Dada una recta que no es vertical su ecuación es de la forma:

$$y = mx + p$$

m se llama la **pendiente** de la recta y p la **ordenada al origen** p es la ordenada del punto de intersección de la recta con el eje y.

La **pendiente** m significa geométicamente que cuando un punto **P** se desliza sobre la recta de modo que su abscisa se mueve hacia la derecha en **una** unidad, entonces la ordenada "crece" en m unidades.



En la gráfica se ve que al deslizarse $\mathbf{P}$ sobre ℓ entre $(-3,0)$ y $(0,2)$, la abscisa se ha desplazado en 3 unidades y su ordenada se ha elevado en dos unidades. Aquí $m = \dfrac{2}{3}$ y $p = 2$.

La ecuación de ℓ es $y = \dfrac{2}{3}x + 2$.

Al deslizarse P' sobre ℓ', cuando su abscisa va de 0 a 1, vemos que la ordenada decrece de 2 hasta 0. Aquí $m = -2$.

La ecuación de ℓ' es $y = -2x + 2$

En general: $m > 0$ significa que al moverse la abscisa de un punto de la recta hacia la derecha, la ordenada crece efectivamente.

Si $m = 0$ la recta es horizontal, $y = p$.

$m < 0$ significa que al moverse la abscisa de un punto hacia la derecha, la ordenada decrece.

Dada una recta, $y = mx+b$ y dos puntos de ella (x_1, y_1), (x_2, y_2), que estos puntos pertenecen a la recta, significa:

$$\begin{cases} y_1 = \quad mx_1 + b & (1) \\ y_2 = \quad mx_2 + b & (2) \end{cases}$$

Si restamos (2) de (1) obtenemos:

$$y_2 - y_1 = mx_2 + b - (mx_1 + b) = m\,(x_2 - x_1)$$

o sea, que dado dos puntos de una recta la pendiente es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Esta fórmula nos da la pendiente de una recta determinada por dos puntos, siempre que $x_1 \neq x_2$. Esto es, siempre que la recta no sea vertical.

Obsérvese que toda ecuación de la forma $ax + by + c = 0$, representa una recta.

Si $b \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} by &= -ax - c \\ y &= -\frac{\alpha}{b}x - \frac{b}{c} \end{aligned}$$

Su pendiente es $-\dfrac{a}{b}$, su ordenada al origen $-\dfrac{c}{a}$

Si $b = 0$ y $a \neq 0$ queda,

$$\begin{aligned} ax &= -c \\ x &= -\frac{c}{a}, \quad \text{que es una recta vertical.} \end{aligned}$$

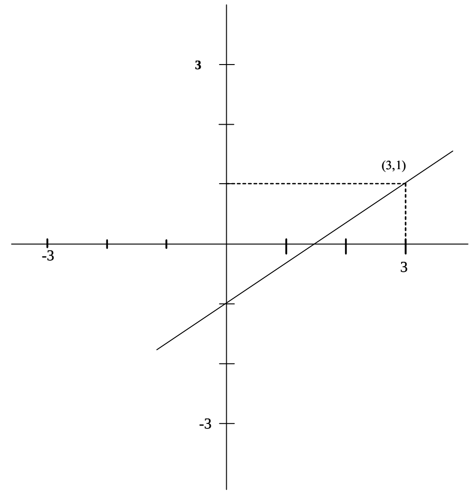
Ejemplos:

Determinar la ecuación de una recta de pendiente $0,6$ y que pasa por el punto $(3,1)$.

Sabemos que:
$\dfrac{y-1}{x-3} = 0,6$

o sea
$y - 1 = 0,6(x-3)$
$y - 1 = 0,6x - 1,8$
$y = 0,6x - 1,8 + 1 = 0,6x - 0,8$

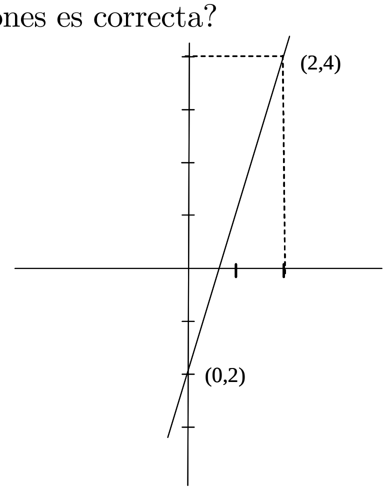
Como:
$0,6 = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5} \quad 0,8 = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$



También podemos escribir:

$$y = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5} \text{ ó } 3x - 5y = 4.$$

Dada la recta del gráfico adjunto.
¿Cuál de las siguientes aserciones es correcta?



A) $m < p$
B) $m = p$
C) $2m = 3p$
D) $2m + 3p = 0$

Como la recta pasa por los puntos $(2,4)$ y $(0,-2)$ su pendiente es

$$m = \frac{4-(-2)}{2-0} = \frac{6}{2} = 3.$$

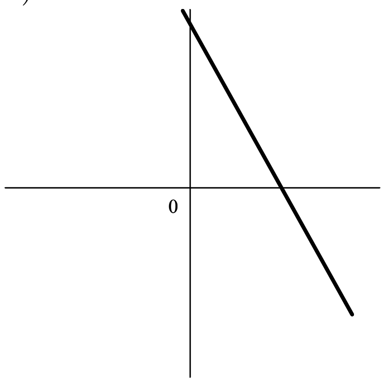
como la recta pasa por el punto $(0,-2)$ su ordenada al origen es $p = -2$, y como

$$2m + 3p = 2.3 + 3\,(-2) = 0$$

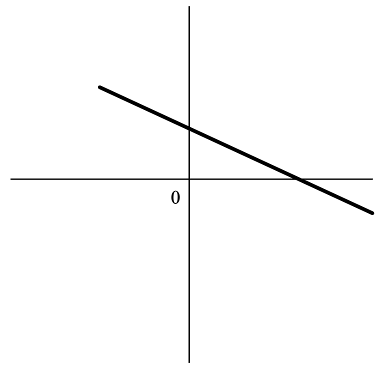
La respuesta correcta es D.

¿Cuál de las siguientes podría ser la gráfica de $2\,(y+1) = -6\,(x-2)$?

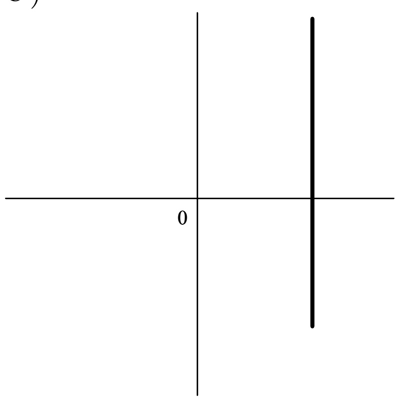
$A)$



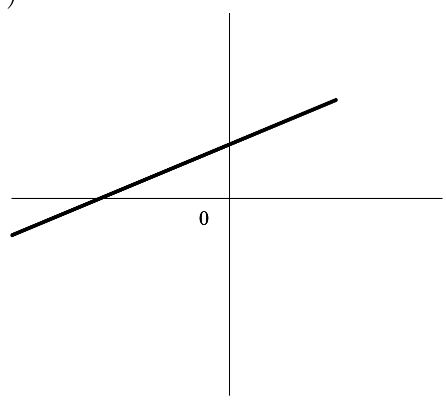
$B)$



$C)$



$D)$



Observamos primero que la pendiente es negativa, -6
Por lo tanto descartamos $C)$ y $D)$.

Además para $\quad x = 0 \quad$

$$2y + 2 = 12$$
$$2y = 10$$
$$y = 5$$

y para $\quad y = 0$

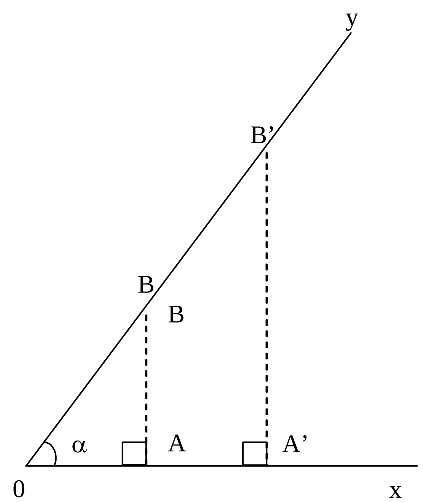
$$2 = -6x + 12$$
$$6x = 10$$
$$x = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

Como $\dfrac{5}{3} < 5$ la respuesta correcta es A.

Trigonometría

Si tenemos un **ángulo agudo** $\alpha = x\,0\,y$

Observamos que si B es un punto cualquiera de $0y$, A es su proyección sobre $0x$, los cocientes $\dfrac{0A}{0B}$; $\dfrac{BA}{0B}$ y $\dfrac{AB}{0A}$



permanecen constantes al variar B sobre $0y$.

En efecto si B' es otra posición, A' su proyección sobre $0x$, los triángulos $0AB$ y $0A'B'$ son semejantes y esto nos da:

$$\frac{0A}{0B} = \frac{0A'}{0B'} \quad ; \quad \frac{AB}{0B} = \frac{A'B'}{0B'} \quad \text{y} \quad \frac{AB}{0A} = \frac{A'B'}{0A'}$$

Esto nos dice que esos cocientes son independientes de la posición del punto B sobre $0y$. Dependen solo del ángulo α, y lo caracterizan totalmente.

Los llamamos coseno, seno y tangente de α respectivamente.

$$\cos\alpha = \frac{0A}{0B} \quad \sin\alpha = \frac{AB}{0B} \quad \tan\alpha = \frac{AB}{0A}$$

Resulta entonces que:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

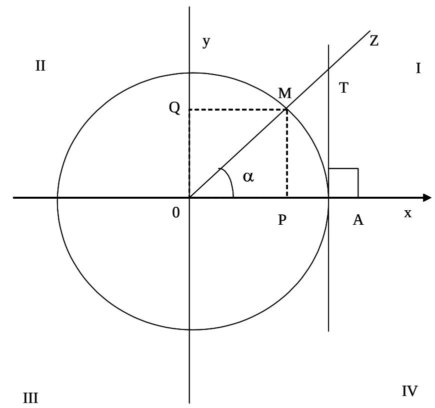
en efecto:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{AB}{0B}}{\frac{0A}{0B}} = \frac{AB}{0A} = \tan\alpha$$

Círculo Trigonométrico

Consideramos ahora un sistema de ejes coordenadas $x0y$, y una circunferencia de radio 1 y centro al origen

Sea $x0z$ un ángulo agudo, $0 \leq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$
La circunferencia corta $0x$ en A y $0z$ en M.
P es la proyección de M sobre $0x$
Q es la proyección de M sobre $0y$



T es la intersección de la tangente a la circunferencia en A (perpendicular a $0x$ en A) con $0z$. Como en $0MP$, rectángulo en P es $0M = 1$, resulta

$$\cos\alpha = 0P \quad \text{y} \quad \sin\alpha = MP = 0Q.$$

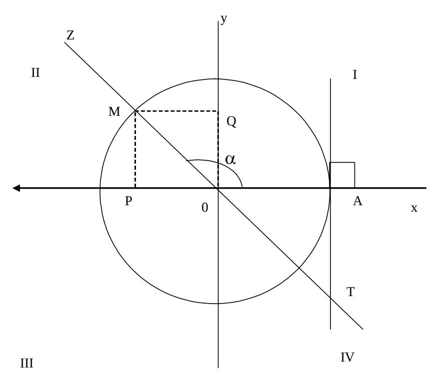
Y en $0AT$, rectángulo en A es $0A = 1$, resulta

$$\tan\alpha = \frac{TA}{0A} = TA$$

Para $\alpha = 0 \qquad \cos 0 = 1, \quad \sin 0 = 0 \quad \text{y} \quad \tan 0 = 0$

Esto lo extendemos a ángulo no agudos.

Por ejemplo:
Si $0z$ está en el segundo cuadrante
$\dfrac{\pi}{2} \leq \alpha < \pi$, definimos



$$\cos\alpha = 0P \quad sen\ \alpha = 0Q \quad \tan\alpha = AT$$

vemos que:

$$\cos\alpha < 0, \quad sen\ \alpha > 0, \quad \tan\alpha \leq 0.$$

En particular:

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0 \quad sen = \frac{\pi}{2} = 1 \quad \tan\frac{\pi}{2} \quad \text{decimos que es infinito y escribimos } \infty.$$

Estas definiciones las extendemos a los otros cuadrantes y tenemos:

si $0z$ pertenece al tercer cuadrante, resultará

$$\cos\alpha < 0, \quad \sin\alpha < 0 \quad \text{y} \quad \tan\alpha > 0$$

Si $0z$ pertenece al cuarto cuadrante será

$$\cos\alpha > 0, \quad \sin\alpha < 0 \quad \text{y} \quad \tan\alpha < 0$$

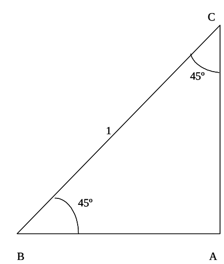
Otras funciones trigonométricas son: secante, cosecante, y contagente de un ángulo que definimos.

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \quad \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}, \quad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Ejemplos:

A) Sea un triángulo rectángulo cuyos ángulos

agudos miden 45° y la hipotenusa 1. El triángulo es isósceles, sus catetos son iguales, podemos calcularlos por el Teorema de Pitágoras.



$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$AB = AC \quad \text{y} \quad BC = 1$$

entonces:

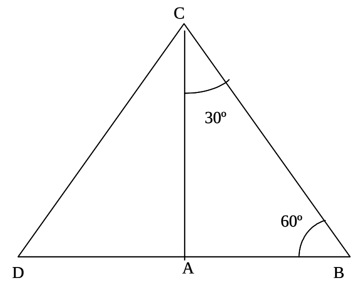
$$2AB^2 = 1 \quad AB^2 = \frac{1}{2} \quad AB = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

por lo tanto:

$$\cos 45^\circ = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sin 45^\circ = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \tan 45^\circ = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

B) Si ahora tenemos un triángulo rectángulo ABC cuyos ángulos agudos son:

30° y 60° y su hipotenusa 1 observamos que es la mitad del triángulo equilátero BCD, de lado 1. Por lo tanto $AB = \dfrac{1}{2}$



y por Pitágoras $CA^2 = CB^2 - AB^2 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$

$$CA = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

entonces:

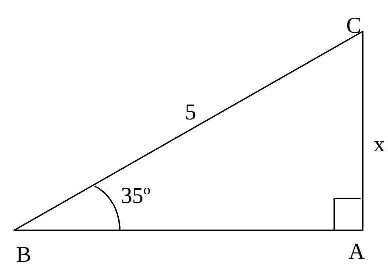
$$\cos 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \sin 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}, \qquad \tan 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}, \qquad \sin 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \tan 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

C) Supongamos que tenemos el triángulo rectángulo ABC de la figura.

Calcular x.
Nos dan $\hat{B} = 35^\circ$ y $BC = 5$

Sabemos que:
$$\sin 35^\circ = \frac{x}{5}$$
Por lo tanto $x = 5.\sin 35^\circ$



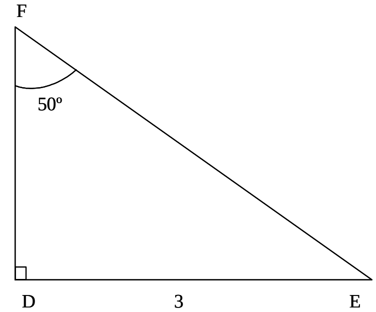
$\sin 35^\circ$ lo obtenemos en una tabla o en una calculadora, es $\sin 35^\circ = 0,5736$

Resulta que:

$$x = 2,8679$$

D) Si ahora tenemos el triángulo DEF de la figura. Calcular FE.

Nos dan $DE = 3 \qquad \widehat{F} = 50^\circ$
Entonces, $\widehat{E} = 40^\circ$
$tg\widehat{E} = \dfrac{DF}{DE} = \dfrac{DF}{3}$, o sea:
$DF = 3\tan 40^\circ = 3.\,0,839 = 2,52$



como:

$$FE^2 = DE^2 + DF^2 = 9 + 9\tan^2 40^o = 15,34$$

y FE será la raíz cuadrada del número obtenido

$$FE = \sqrt{15,34} = 3,92$$

Esto que hemos hecho se llama **resolver** el triángulo rectángulo.

No hay ninguna ambiguedad ya que los ángulo son agudos (excepto el recto).

E) Si $\sin x = 0,707$ ¿Cuánto vale $\sin x \cdot \cos x . \tan x$?

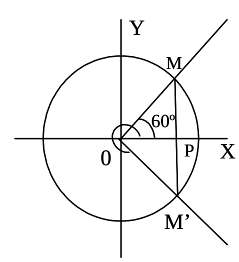
Esto es en apariencia complicado, pero sabemos que $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \sin x \cdot \cos x \cdot \tan x &= \sin x \cdot \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \sin^2 x = (0,707)^2 \\ &= 0,499 \end{aligned}$$

F) Si $\cos 60^\circ = \cos z$, entonces z podría ser

a) 30^o b) 120^o c) 240^o d) 300^o

Dibujemos el ángulo de 60° en el círculo trigonométrico $\cos 60^\circ = 0P$
El ángulo z debe ser tal que la proyección del punto de intersección del círculo trigonométrico con $0z$ sea P.
Si prolongamos PM obtenemos M' sobre el círculo y $\cos \widehat{X0M} = 0P$



Los triángulos $0PM$ y $0PM'$ son iguales, el ángulo buscando es $360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$ la respuesta correcta es D).

G) Si $0 \leq \theta \leq 360^\circ$ y $\sin\theta \cos\theta < 0$

¿Cuáles de las siguientes aserciones nos darán valores posibles de θ?

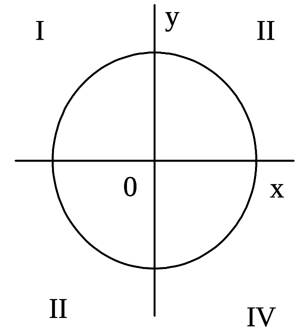
A) $0 < \theta < 180^\circ$

B) $90^\circ < \theta < 270^\circ$

C) $90° < \theta < 180°$ ó $\;\; 270° < \theta < 360°$

D) $0 < \theta < 180°$ ó $\;\; 270° < \theta < 360°$

Para que $\sin\theta . \cos\theta < 0$,
si recordamos el círculo trigonométrico
vemos que como $\sin\theta$ y $\cos\theta$ deben tener
signos distintos, debemos estar en el segundo o en el cuarto
cuadrante. Esto es la respuesta correcta es C)



Trigonometría en Triángulos cualesquiera

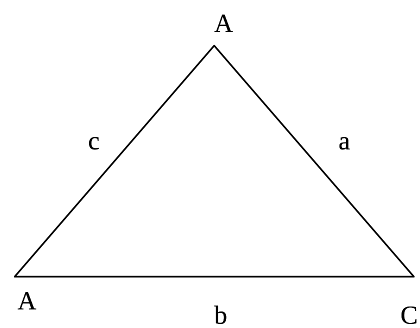
Hasta ahora todo ha sido basado en triángulos rectángulos. Hay reglas que pueden usarse en triángulos no rectángulos.

Son ellas:

Teoremas del Seno:

Los lados de un triángulo son proporcionales
a los senos de los ángulos opuestos
Esto es:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$



Teorema del Coseno:

El cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble de estos lados multiplicado por el coseno del ángulo comprendido entre ellos.

O sea:

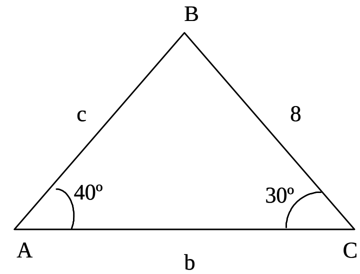
$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\ \cos C \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\ \cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\ \cos B \end{aligned}$$

Ejemplos:

A) Consideramos el triángulo ABC de la figura

en que $\hat{A} = 40°$ $\hat{C} = 30°$ $a = 8$
Podemos resolver el triángulo, esto es calcular el resto de sus elementos.

$$\hat{B} = 180° - 40° - 30° = 110°$$



y por la ley de senos

$$\frac{\sin 40°}{8} = \frac{\sin 110°}{b} = \frac{\sin 30°}{c}$$

$$\frac{0,643}{8} = \frac{0,940}{b} = \frac{0,5}{c} \quad \text{de donde}$$

$$b = \frac{0,940 \times 8}{0,643} = 11,7$$

y

$$c = \frac{0,5 \times 8}{0,643} = 6,22$$

B) En el triángulo dado ABC, calcular los ángulos

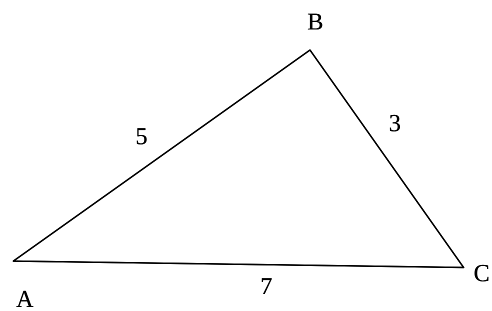
Para calcular $\widehat{A}$, por la ley del coseno

$$3^2 = 5^2 + 7^2 - 2.5.7 \cos \hat{A}$$

$$9 = 25 + 49 - 70 \cos \hat{A}$$

$$-65 = -70 \cos \hat{A}$$

$$\cos \widehat{A} = \frac{-65}{-70} = \frac{65}{70} = \frac{13}{14}$$



.

Haciendo las cuentas dara $\widehat{A} = 21,79$ grados.

Análogamente resultan:

$$\widehat{B} = 120 \text{ grados}$$

y

$$\widehat{C} = 38,21 \text{ grados}$$

C) En el triángulo ABC dado. Calcular a.

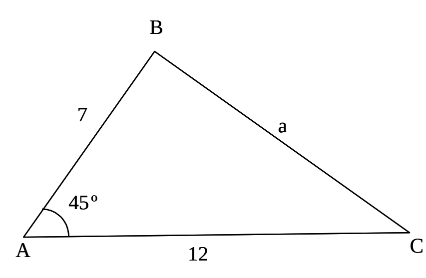
$a^2 = 7^2 + 12^2 - 2.7.12\ \cos 45°$, como:

$\cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$a^2 = 49 + 144 - \dfrac{168.\sqrt{2}}{2} = 193 - 84.\sqrt{2} = 193 - 118,79$

y

$a = \sqrt{193 - 84\sqrt{2}} = \sqrt{74,21} = 8,61.$



Identidades Fundamentales

$$\cos^2 + \sin^2 \alpha = 1 \qquad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} \qquad \sin^2 \alpha = \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$\begin{array}{ccc}
\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha & \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha & \cos(-\alpha) = \cos \alpha \\
\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha & \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha & \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \\
\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha & \tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha & \tan(-\alpha) = -\tan \alpha
\end{array}$$

Todas ellas se deducen del círculo trigonométrico.

Fórmulas:

Si α y β son ángulos cualesquiera

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$

$\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$

De las cuales se deducen:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \qquad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \qquad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

Ejemplos:

A) $\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = \cos^2 x \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = \cos^2 x$ ya que

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

B) Despejar $\sin x$ en $8 \sin^2 x + 2 \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) - 3 = 0$

Como $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos x \cos \dfrac{\pi}{2} - \sin x \sin \dfrac{\pi}{2} = -\sin x$ queda

$$8 \sin^2 x - 2 \sin x - 3 = 0$$

y resolvemos la ecuación de segundo grado en sen x

$$\sin x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 96}}{16} = \frac{2 \pm 10}{16}$$

y

$$\sin x = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

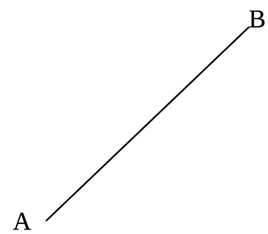
ó

$$\sin x = -\frac{8}{16} = -\frac{1}{2}.$$

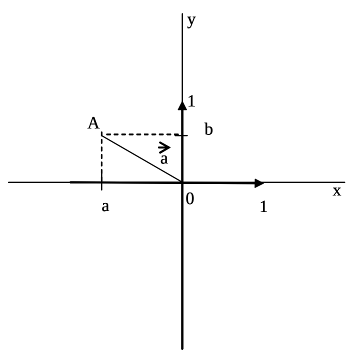
Vectores en el Plano

Llamamos **vector** al segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$.

A es el punto inicial, B el final.



Dado un plano coordenado y un punto A, $\overrightarrow{0A}$ es un vector. Llamamos **componentes** del vector $\vec{a} = \overrightarrow{0A}$ a las proyecciones a y b sobre los ejes coordenados,



y escribimos $\overrightarrow{0A} = a\ \hat{\imath} + b\ \hat{\jmath}$

Donde $\hat{\imath}$ es el vector unidad sobre el eje x, $\hat{\jmath}$ el vector unidad sobre el eje y.

A veces también escribimos $\vec{a} = (a, b)$ donde $\vec{a} = \overrightarrow{0A}$, a y b las componentes del vector.

Si nos dan:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{a}} &= \overrightarrow{0A} = x_1\hat{\imath} + y_1\hat{\jmath} \\ \overrightarrow{\mathbf{b}} &= \overrightarrow{0B} = x_2\hat{\imath} + y_2\hat{\jmath} \end{aligned}$$

Definimos

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{a}} \pm \overrightarrow{\mathbf{b}} &= (x_1 \pm x_2)\,\hat{\imath} + (y_1 \pm y_2)\,\hat{\jmath}. \\ \lambda\overrightarrow{\mathbf{a}} &= \lambda x_1\hat{\imath} + \lambda x_2\hat{\jmath} \qquad\qquad \lambda \in R \end{aligned}$$

Asi, si tenemos

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{a}} &= 3\hat{\imath} + \sqrt{2}\hat{\jmath} \\ \overrightarrow{\mathbf{b}} &= 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} 2\,\overrightarrow{\mathbf{b}} &= 4\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} \\ \overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}} &= (3+2)\,\hat{\imath} + \left(\sqrt{2} - 3\right)\hat{\jmath} = 5\hat{\imath} + \left(\sqrt{2} - 3\right)\hat{\jmath} \\ \overrightarrow{\mathbf{a}} - \overrightarrow{\mathbf{b}} &= (3-2)\,\hat{\imath} + \left(\sqrt{2} + 3\right)\hat{\jmath} = \hat{\imath} + \left(\sqrt{2} + 3\right)\hat{\jmath} \\ 2\overrightarrow{\mathbf{b}} - \overrightarrow{\mathbf{a}} &= (4-3)\,\hat{\imath} + \left(-6 - \sqrt{2}\right)\hat{\jmath} = \hat{\imath} - \left(6 + \sqrt{2}\right)\hat{\imath} \end{aligned}$$

Llamamos $\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|$ al módulo del vector $\overrightarrow{\mathbf{a}}$. Es la longitud del segmento $0A$.
En el ejemplo anterior

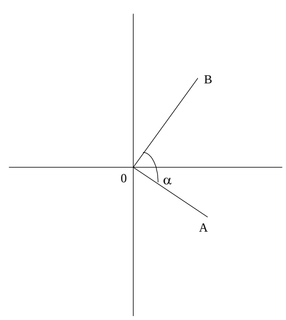
$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{3^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{9+2} = \sqrt{11} \\ \left|\vec{b}\right| &= \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \end{aligned}$$

Dado dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ llamamos producto escalar, que escribimos $\vec{a} \cdot \vec{b}$ al número real

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

Si α es ángulo formado por $\overrightarrow{0A}$ y $\overrightarrow{0B}$ también es

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\overrightarrow{\mathbf{a}}||\overrightarrow{\mathbf{b}}|\cos\alpha$$



Ejemplos:

A) Sean $\vec{a} = 3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$, $\vec{b} = \left(1 - 2\sqrt{2}\right)\hat{\imath} + \left(\dfrac{1}{2} + 2\sqrt{2}\right)\vec{j}$

Entonces

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}} &= 3\left(1 - 2\sqrt{2}\right) + 4\left(\frac{1}{2} + 2\sqrt{2}\right) \\ &= 3 - 6\sqrt{2} + 2 + 8\sqrt{2} = 5 + 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Como

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

y

$$\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| &= \sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}+2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{1-2\sqrt{2}+2+\frac{1}{4}+2\sqrt{2}+8} \\
&= \sqrt{11+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{44+1}{4}} = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{5}
\end{aligned}$$

Podemos calcular $\cos\alpha$.

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|} = \frac{5+2\sqrt{2}}{5\cdot\frac{3}{2}\sqrt{2}} = \frac{5}{5\cdot\frac{3}{2}\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}}{5\cdot\frac{3}{2}\sqrt{2}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{4}{15}
\end{aligned}$$

B) Si $\vec{u} = \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\imath} + \frac{1}{2}\hat{\jmath}$ y $\vec{v} = \hat{\imath} + \sqrt{3}\hat{\jmath}$, calcular el ángulo que forman.

Primero observamos que ambos vectores están en el primer cuandrante, por lo tanto su ángulo debe ser agudo.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathbf{u}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{v}} &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{3} \\
\left|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right| &= \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1 \\
\left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| &= \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y esto nos dice que $\alpha = 30°$.

Parte II

Modelo de Examen de Admisión

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA FACULTAD DE CIENCIAS COORDINACION ACADEMICA EXAMEN UNIDAD DE PROMOCIÓN. SELECCIÓN Y ADMISIÓN EXAMEN DE ADMISIÓN 2003.

Cédula:________________________ Licenciatura:________________________

____________________________________ ______________________________________

Primer Apellido e Inical Del Segundo Primer Nombre e Incial del Segundo

La prueba consta de 45 ejercicios de Matemática. Para cada ejercicio hay 4 opciones de repuestas: A, B, C y D. Sólo una opción es la correcta. En la hoja especial para respuestas usted debe rellenar el círculo correspondiente a la letra seleccionada por ud.

Ejemplo:
$\frac{6}{4} + \frac{3}{4} - \frac{2}{4}$ es igual a:

A) $\frac{7}{12}$

B) $\frac{7}{16}$

C) $\frac{7}{4}$

D) Ninguna de las anteriores

La respuesta correcta es $\frac{7}{4}$. Por tanto en la hoja de respuestas rellenaremos el círculo correspondiente a la letra C. Así:

La respuesta correcta es $\frac{7}{4}$. Por tanto en la hoja de respuestas rellenaremos el círculo correspondiente a la letra C. Así:

A B ● D

Dispone de dos horas para realizar la prueba. Antes de comenzar a responder escriba con letra clara los datos que se le soliciten en la hoja de respuestas. No se permite el uso de calculadoras. Realice los cálculos en los espacios sobrantes del cuestinario.

No se comunique, la copia conlleva a la anulación de la prueba.

1. $(\cos^2\theta)(tg^2\theta+1)=$

   A) 1
   B) $1+\cos^2\theta$
   C) $sen^2\theta$
   D) 2

2. El punto medio del segmento de extremos (x, y) y $(9, 13)$ tiene coordenadas $(6, 9)$. El punto (x, y) es:

   A) $(3, 5)$
   B) $(15, 22)$
   C) $(5, 3)$
   D) $(3, 4)$

3. Juan y Luís tienen cada uno cierta cantidad de dinero. Luís tiene 21 Bs., Juan tiene $\frac{2}{7}$ más que el dinero que tiene Luís. ¿Cuánto dinero tiene Juan?

   A) 6 Bs.
   B) 27 Bs.
   C) 15 Bs.
   D) 31 Bs.

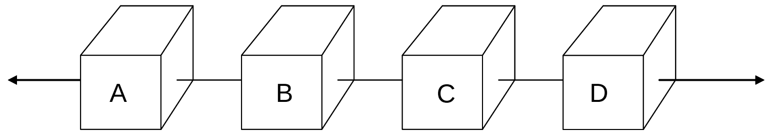
4. p, q, r y s son números distintos de cero. Si $\frac{p}{r}=\frac{q}{s}$. ¿Cuál de las siguientes aserciones es verdadera?

   A) $\frac{p}{s}=\frac{q}{r}$
   B) $\frac{p+q}{q}=\frac{r+s}{s}$
   C) $\frac{p-q}{q}=\frac{s-r}{r}$
   D) $\frac{q}{p-q}=\frac{r}{s-r}$

5. Si la base de un rectángulo se aumenta en 10 metros y su altura se disminuye en 5 metros, el área no se altera. Asimismo, el área no se altera si se disminuye la base en 5 metros y se aumenta la altura en 4 metros ¿Cuál es el área del rectángulo?

   A) $300\ m^2$
   B) $600\ m^2$
   C) $450\ m^2$
   D) $800\ m^2$

6. Una "máquina transformadora de números" está diseñada según el siguiente esquema:



Todo número que pasa por A se le suma -2, todo número que pasa por B es multiplicado por -8, el que pasa por C es dividido entre 12 y el que pasa por D es elevado a la 3. Este proceso se puede representar por la expresión:

A) $\dfrac{8\,(2-x)^3}{12}$

B) $-\dfrac{(8\,(2-x))^3}{12}$

C) $\left(\dfrac{-8\,(x-2)}{12}\right)^3$

D) $\left(\dfrac{-8\,(x+2)}{-12}\right)^3$

7. Se venden mandarinas a 1600 Bs. la docena. Mirna compra únicamente 3 mandarinas y paga con un billete de 2000 Bs. Si no hay IVA en la compra ¿Qué vuelto debe recibir Mirna?

A) 1200 $Bs.$

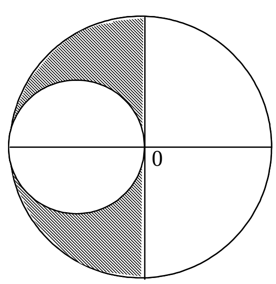
B) 400 $Bs.$

C) 1600 $Bs.$

D) 1800 $Bs.$

8. El radio del círculo de centro O es 8. Calcular el área rayada.

A) 16π
B) 32π
C) 8π
D) 24π



9. Si $\log_{\sqrt{2}}(x-1)=4$, entonces x es:

A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

10. Si $h = 2,5 \times 10^{25}$, entonces $\sqrt{h}$ es:

    A) $0,5\ \times 10^{5}$

    B) $5 \times 10^{\sqrt{24}}$

    C) 5×10^{12}

    D) $0,5 \times 10^{12}$

11. El número x de la sucesión $2, 6, 12, 20, x, 42, 56$ es:

    A) 36

    B) 24

    C) 38

    D) 30

12. El área del triángulo equilátero ABC es $12cm^2$. Si D es el punto medio de AB y E es el punto medio de AC, entonces el área de ADE es:

    A) $2cm^2$

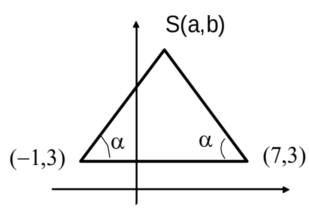
    B) $3cm^2$

    C) $4cm^2$

    D) $6cm^2$

13. En la figura adjunta ¿Cuál de los siguientes pares ordenados podrían ser las coordenadas del punto S?

    A) $(2, 9)$
    B) $(3, 9)$
    C) $(4, 8)$
    D) $(5, 10)$



14. Un camión de transporte de mercancías parte hacia Mérida a una velocidad promedio de $60Km/hora$. Se nota un error en la mercadería enviada y 24 minutos después de su partida se envía un carro a alcanzarlo con la carga que faltaba. Si el carro viaja a un promedio de $80Km/hora$ ¿Cuánto tardará en alcanzar al camión?

    A) 1 hora y 12 minutos

    B) 1 hora y 20 minutos

    C) 1 hora y 30 minutos

    D) 1 hora y 50 minutos

15. Para que $x^2 - px + 3p$ sea divisible por $x + 3, p$ debe ser:

    A) -1

B) $\frac{3}{2}$

C) $-\frac{3}{2}$

D) Ningún valor real

16. En el triángulo ABC la medida del ángulo $\hat{B}$ es el doble de la medida del ángulo $\hat{A}$, si además restamos la medida del ángulo $\hat{A}$ de la medida del ángulo $\hat{C}$ obtenemos 20° ¿Cuál es la medida del ángulo mayor del triángulo?

A) 100°

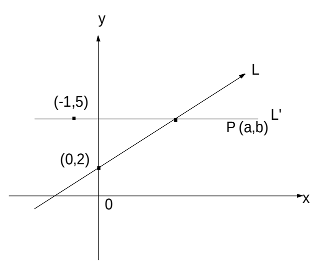
B) 80°

C) 40°

D) 60°

17. En la figura: la pendiente de la recta L es $\frac{1}{4}$ y L' es una recta paralela al eje x. Las coordenadas (a, b) del punto P son:

A) $(12, 5)$
B) $(8, 5)$
C) $(5, 9)$
D) $(12, 8)$



18. Si $x^2y^3z^5$ es negativo ¿Cuál de los productos es siempre negativo?

A) xy

B) y^2z

C) xz

D) yz

19. Tenemos tres números impares consecutivos. Si el triple del primero es igual al doble del tercero más tres ¿Cuál es la suma de los tres números impares consecutivos?

A) 39

B) 21

C) 11

D) 27

20. Si $senx > 0$ y $\cos x = -\frac{4}{5}$, entonces $tgx =$

A) $-\frac{3}{4}$

B) $-\frac{4}{3}$

C) $-\frac{3}{5}$

D) $-\frac{5}{3}$

21. La suma de dos números es 120. El mayor de ellos supera en 12 al triple del menor. El número menor es:

A) 27

B) 33

C) 15

D) 29

22. Si en la expresión xy^2, los valores de x, y se disminuyen cada uno un 25%, el valor de la expresión queda:

A) Disminuido en $\frac{27}{64}$ de su valor

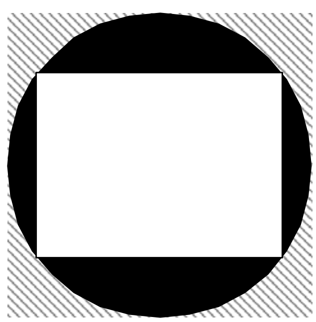
B) Disminuido en 75%

C) Disminuido en 50%

D) Disminuido en $\frac{37}{64}$ de su valor

23. Tenemos un círculo de radio 6 y le cortamos un cuadrado como muestra la figura ¿Cuál es el área que nos queda?

A) $12\pi - 18$
B) $12\pi - 36$
C) $36\pi - 60$
D) $36\pi - 72$



24. Calcular $\left(5 + \frac{3}{4}\right) + \left(2 + \frac{11}{6}\right) + \left(7 + \frac{1}{8}\right)$

A) $\frac{103}{18}$

B) $\frac{301}{24}$

C) $\frac{401}{24}$

D) $\dfrac{267}{18}$

25. Coromoto tiene 5 reglas de $30cm$ cada una y 3 de $20cm$ ¿Cuál es el promedio de las longitudes de las reglas de Coromoto?

A) $6,25cm$

B) $105cm$

C) $26,25cm$

D) $25cm$

26. $10^3 + 10^5$ es:

A) 10^8

B) 101000

C) 10^{15}

D) 150000

27. $\left(\dfrac{1}{10}\right)^3 + \left(\dfrac{2}{10}\right)^3 + \left(\dfrac{3}{10}\right)^3 =$

A) $0,006$

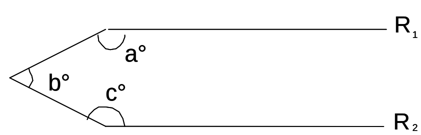
B) $0,036$

C) $0,00036$

D) $0,216$

28. En la figura las semirectas R_1 y R_2 son paralelas, entonces $a^\circ + b^\circ + c^\circ =$

A) 360°
B) 270°
C) 300°
D) 180°



29. ¿Cuántos segmentos determinan 6 puntos distintos pertenencientes a una recta?

A) 15

B) 12

C) 4

D) 5

30. Clara ya ha leido $\dfrac{5}{8}$ de las páginas de un libro. Si le faltan 120 páginas para terminarlo ¿Cuántas páginas tiene el libro

A) 200

B) 320

C) 240

D) 280

31. Si 10 cm^3 de sangre contienen $1,2$ gr de hemoglobina ¿Cuántos gramos de hemoglobina están contenidos en 35 cm^3 de la misma sangre?

    A) $3,0$

    B) $3,6$

    C) $4,2$

    D) $4,8$

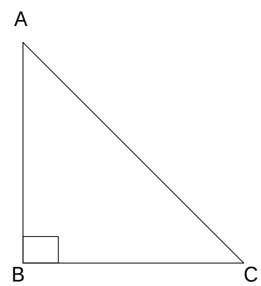
32. En la figura si $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{1}{2}$, entonces $\sin \hat{A} =$

    A) $\dfrac{1}{2}$

    B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

    C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

    D) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$



33. $\cos 2\theta + \tan\theta \sin 2\theta =$

    A) $\cos^2\theta$

    B) $1 + 2\sin^2\theta$

    C) 1

    D) $\dfrac{1}{\cos\theta}$

34. Sean a, b dos números reales tales que $a > b > 0$. Sabiendo que $\log_2(a+b) = t$ y $(a-b) = 16$ ¿Cuál es el valor de $\log_2(a^2 - b^2)$ en función de t?

    A) $4 + t$

    B) $2^t - 16$

    C) $32 - t$

    D) $8 + t$

35. Tenemos un cuadrado de $16cm$ de lado ¿Cuántos cuadraditos de $2cm$ necesitaremos para cubrirlo sin superposiciones?

    A) 48

    B) 16

C) 32

D) 64

36. La mitad de los trabajadores de una fábrica salen de vacaciones en Julio, una tercera parte sale de vacaciones en Agosto. Los 30 trabajadores restantes salen de vacaciones en alguna otra época ¿Cuántas personas trabajan en la fábrica?

A) 180

B) 135

C) 90

D) 215

37. Si $\log\left(4^3x^25^3\right)^{-3} = -9$ los valores de x que satisfacen esta relación son:

A) $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

B) $\dfrac{\sqrt{10}}{20}$

C) $\pm\dfrac{\sqrt{15}}{20}$

D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

38. Una simplificación de la expresión $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)^{-1}(x+y)$ es

A) x^2+y^2

B) xy

C) $(x+y)^2$

D) $\dfrac{(x+y)^2}{xy}$

39. Hace 4 años la edad de Beatriz era el doble de la edad de Luisa. Si Beatriz tiene ahora 3 años más que Luisa ¿Cuántos años tiene Beatriz actualmente?

A) 10

B) 20

C) 15

D) 25

40. Se tienen dos cuadrados diferentes. El área del mayor es 4 veces la del menor ¿Cómo es el perímero del cuadrado menor respecto al perímetro del cuadrado mayor?

A) 2 veces mayor

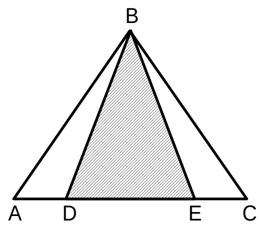
B) 2 veces menor

C) 4 veces mayor

D) 4 veces menor

41. En la figura adjunta el cociente del área del triángulo ABC entre el área del triángulo rayado DBE es 16. Si $\overline{AC} = 48$ entonces $\overline{AD} + \overline{EC} =$

A) 24
B) 30
C) 39
D) 45



42. Si $\dfrac{x^2 - y}{x + z} = x - z$, entonces $\dfrac{y}{z}$ es igual a:

A) z^2

B) 1

C) z

D) No se puede determinar

43. Tenemos los números $5, 10, 14, 16, 20$ y 23. Si añadimos x a cada uno de ellos, el promedio de los 6 números resultantes es 15. El valor de x es:

A) 3

B) $\dfrac{1}{3}$

C) $\dfrac{1}{2}$

D) 2

44. $\left(\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}\right)^4 =$

A) 9

B) $2\sqrt{2} + 3$

C) $\sqrt{2} + 1$

D) 3

45. Una nave extraterrestre llega a la Tierra con 12 tripulantes. Si debido a un curioso sistema de reproducción cada media hora se duplica el número de extraterrestres ¿Cuántos seres extraterrestres habrá después de 3 horas?

A) 236

B) 528

C) 734

D) 768

Respuestas de la Prueba:

1.	A	11.	D	21.	A	31.	C	41.	D
2.	A	12.	B	22.	D	32.	B	42.	C
3.	B	13.	B	23.	D	33.	C	43.	B
4.	B	14.	A	24.	C	34.	A	44.	B
5.	B	15.	C	25.	C	35.	D	45.	D
6.	C	16.	B	26.	B	36.	A		
7.	C	17.	A	27.	B	37.	A		
8.	A	18.	D	28.	A	38.	B		
9.	D	19.	A	29.	A	39.	A		
10.	C	20.	A	30.	B	40.	B		

Parte III

Ejercicios

Aritmética y Álgebra

1. Efectuar:

   a) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{7}+\dfrac{8}{3}$

   b) $0,675+\dfrac{7}{5}+3$

   c) $4,41 \div 0,175$

   d) $\dfrac{0,36 \times 1,47}{28}$

   e) $\left(\dfrac{2}{7}\right)^2 \dfrac{8}{3}$

2. Expresar en potencias de 10 con una cifra entera los números:

   a) 541

   b) $0,000541$

   c) $0,078 \times 10^5$

   d) 383×10^{-10}

3. Ordenar de menor a mayor los números siguientes:

   a) $0,3891;\ 0,042; 0,\ \ 410\ y\ 0,40$

   b) $0,389719048; 0,3897189048$ y $0,389721435$

   c) $\dfrac{0,078}{0,13}; \dfrac{78}{0,13}; \dfrac{7,8}{13}; \dfrac{0,0078}{0,0000013}$

4. Obtener un número r tal que

   a) $\dfrac{10}{51} < r < \dfrac{21}{100}$

   b) $\dfrac{15}{44} < r < \dfrac{44}{121}$

   c) $3 < r < \dfrac{37}{10}$

5. Efectuar

a) $\dfrac{2}{5}\left[\left(\dfrac{2}{4}+\dfrac{21}{8}\right)\dfrac{1}{3}+\dfrac{2+\dfrac{1}{5}}{\dfrac{30}{17}}\right]$

b) $\dfrac{\dfrac{21}{4}+\dfrac{31}{5}+\dfrac{37}{8}}{\dfrac{5}{8}}$

c) $0,328[(2,41+8,45)-(2,1\times 0,3)]$

d) $10^{-1}\left(\dfrac{0,250}{0,000005}+\dfrac{1}{2}\right)$

e) $\dfrac{1}{4}\left[\left(\dfrac{2}{5}\right)^2+\left(\dfrac{5}{2}\right)^2-1\right]$

6. Eliminar paréntesis y reducir términos semejantes

   a) $(a+b)+3\,(c-2a+3)+\dfrac{1}{2}\,(2a-c+1)+\dfrac{3}{2}\left(b-\dfrac{2}{3}c+5\right)$

   b) $(x-y)\,(a+b)-2\,(x+3y)\,(b-a)+x\,(a-3b)+2by$

   c) $m\,(n+p)-n\,(m-p)+p\,(n-m)$

   d) $(-2)\left\{3-(a+b)+c\left[\dfrac{1}{2}-2\dfrac{1}{5}\left(3-\dfrac{11}{2}\right)\right]+\dfrac{a}{5}\right\}-\left(b+\dfrac{c}{10}\right)$

7. Escribir una lista de 10 números naturales obtenidos de la manera siguiente:

   El primero y segundo número se eligen al azar; el tercero es la suma del primero y del segundo; el cuarto es la suma del segundo y el tercero y así siguiendo hasta el décimo que es la suma del octavo y el noveno.

   Calcular la suma de estos diez números y verificar que es igual al séptimo número de la lista multiplicado por 11.

   Demostrar que esta propiedad vale cualesquiera sean los naturales a y b elegidos como primero y segundo respectivamente.

8. El 70% de los habitantes de un país habla un idioma y el 60% de la misma población habla otro idioma. ¿Qué porcentaje de la población habla los dos idiomas, sabiendo que cada habitante habla al menos un idioma?

9. Un bastón se rompe en tres pedazos, de modo que el primer fragmento es tres veces más largo que el segundo, y el segundo fragmento es tres veces más largo que el tercero. ¿Qué fracción del bastón es el más corto de los tres segmentos?

10. Calcular:

    a) $\sqrt{32}+\sqrt{8}$

    b) $\sqrt{12}-2\sqrt{3}$

c) $9\sqrt{75}/6\sqrt{3}$

d) $\sqrt{48}-\sqrt{12}$

e) $\sqrt{\dfrac{1}{0,25}}$

f) x si $2^x=\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{81}}$

11. ¿Cuáles de las expresiones siguientes tienen sentido?

a) $\sqrt{-23.7}$

b) $\sqrt{8}$

c) $\sqrt[3]{8}$

d) $-\sqrt{-1}$

e) $\sqrt[3]{-27}$

f) $\sqrt[4]{(-3)^2}$

g) $\sqrt{-3^2}$

h) $\sqrt{1}$

12. a) Sean $x=\sqrt{2}-\sqrt{5}$ y $y=\sqrt{7-2\sqrt{10}}$

$$\text{¿Es } x^2=y^2\text{? ¿Es } x \text{ igual a } y\text{?}$$

b) Las mismas preguntas si es posible: $x=2\sqrt{3}-\sqrt{7}$ $y=\sqrt{19-4\sqrt{21}}$

13. Efectuar y simplificar donde haya lugar

a) $2^5\cdot 2^3\cdot 3^{-3}\cdot 3^2$

b) $(3x^2y+x)(4x^2-y^2+xy)$

c) $(a^2\cdot b^3\cdot c)^5$

d) $\sqrt{9a^2b^4}$

e) $\sqrt{441a^4b^3}$

f) $\sqrt[3]{27x^3y^6}$

g) $\sqrt[4]{x^4y^4}$

h) $\sqrt[4]{x^4+y^4}$

i) $\left(2\sqrt{15}\right)\sqrt{6}\left(\sqrt[4]{9}\right)$

j) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{8}\right)$

k) $\dfrac{2a^3\sqrt{a^3b}}{-\sqrt{ab^2}}$

l) $\dfrac{\left(a^2bc\right)^3\,\sqrt[3]{54a^2b^4}}{a^5\cdot b^2\cdot c}$

14. Racionalizar y calcular:

    a) $\dfrac{\sqrt{20}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

    b) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

    c) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

    d) $\dfrac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

    e) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)}$

15. Comparar

    a) $\sqrt{4}+\sqrt{9}$ y $\sqrt{4+9}$

    b) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ y $\sqrt{2+3}$

    c) en general $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ con $\sqrt{a+b}$ donde: $a>0, b>0$.

16. Dados los números reales positivos $\sqrt{12}; \sqrt{9}+\sqrt{3}; \sqrt{10}+\sqrt{2}; \sqrt{6}+\sqrt{6}; \sqrt{7}+\sqrt{5}; 1+\sqrt{11}$

    a) Sin calcular sus valores aproximados ordenarlos de mayor a menor.

    b) Intercalar $\sqrt{4}+\sqrt{8}$

17. Desarrollar $\left(1-\sqrt{5}\right)^2$.

    a) Hallar las características de los siguientes logaritmos (los logaritmos dados son decimales, o sea en base 10)

        1) $\log 7,23$
        2) $\log 0,708$
        3) $\log 0,00057$
        4) 4678,000

    b) Sí $\log 604 = 2,7810$ y $\log 603 = 2,7803$ hallar, interpolando, $\log 603,2$. Análogamente si $\log 0,01700 = \bar{2},2304$ y $\log 0,01609 = \bar{2},2279$. Hallar $\log 0,016094$.

18. Aplicando las propiedades de los logaritmos escribir:

    a) $\log 3ab^2$

    b) $\log x^3y^2$

    c) $\log \dfrac{xy}{z}$

d) $\log \frac{x^3 z^2 \sqrt{y}}{25}$

e) $\log \frac{x+y}{z}$

f) $\log \sqrt[3]{y^2} \cdot \sqrt{z^3}$

19. Calcular, sin usar tablas

a) $\log 10$

b) $\log_2 2^3$

c) $\ln e$

d) $\log 0,01$

e) $\log_a \sqrt{a}$

f) $\ln e^{10}$

g) $\log 10^n$

h) $\log \frac{1}{10^n}$

i) $\log_a 1$

20. Sabiendo que

$$\begin{array}{ll} \log 2 = 0,3010 & \ln 2 = 0,6931 \\ \log 3 = 0,4771 & \ln 3 = 1,0986 \\ \log 5 = 0,6990 & \ln 5 = 1,6094 \end{array}$$

Calcular (sin usar tabla ni calculadora):

a) $\log 6$

b) $\log 10$

c) $\log 800$

d) $\ln \frac{6}{5}$

e) $\log 0,006$

f) $\ln \frac{1}{30}$

21. Usando tablas o calculadoras encontrar:

a) $\log 71$

b) $\log 0,71$

c) $\log 7100$

d) $\log 0,00071$

e) $\log 800$

f) $\log (71)^2$

g) $\log \sqrt{254}$

h) $\log \sqrt[3]{71} \cdot (2m54)^4$

i) $\ln 3,4$

j) $\ln 10^2$

k) $\ln 340$

l) $\ln 0,034$

22. Calcular $n \log A$ si:

a) $\log A = 1,3521 \quad n = 3$

b) $\log A = \bar{1},4771 \quad n = 2$

c) $\log A = \bar{1},6990 \quad n = 2$

d) $\log A = \bar{2},3010 \quad n = \dfrac{1}{3}$

23. Expresar con matisa positiva los logaritmos decimales siguientes:

a) $-0,35148$

b) $-3,2081$

c) $-1,3741$

24. Utilizando tablas, calcular los antilogaritmos siguientes (usamos la notación $\log^{-1}$ en el caso de logaritmos decimales y $\ln^{-1}$ en el caso neperiano).

a) $\log^{-1} 3,3432$

b) $\ln^{-1} 2,0432$

c) $\log^{-1} 0,03432$

d) $\log^{-1} \bar{2},3208$

e) $\ln^{-1} 1,8245$

f) $\log^{-1} 5,3208$

25. Utilizando logaritmos calcular:

a) $x = \sqrt[3]{341}$

b) $x = \dfrac{23 \times 0,71}{13}$

c) $x = \dfrac{3 \times 29^{10} \times 2,5}{2 \times 10}$

d) $x = \left(\sqrt[4]{23}\right)^5$

26. Si r es el resultado de duplicar tanto la base como el exponente de $a^b, b \neq 0$ y $r = a^b x^b$ calcular x.

27. Si $\dfrac{4^x}{2^{x+y}} = 8$ y $\dfrac{9^{x+y}}{3^5 y} = 243$, donde x e y son números reales. ¿Cuál es el valor de xy?

28. Si $\log x = \dfrac{1}{2}\log a - \log b$ y $a = 4b^2$, calcular x.

29. Si $\log_{\sqrt{2}}(x-1) = 4$, calcular x.

30. Si $\log(x+4) + \log(x-4) = 1$, calcular x.

31. Si $\log_2 k^3 = 6$, calcular k.

32. Resolver en $\mathbb{R}$ las ecuaciones de primer grado.

    a) $18x - 9 = 5x - 1 + 3x$

    b) $6y - 3 + 2y + \dfrac{1}{3} + \dfrac{4y}{3} = 0$

    c) $z + 3,5 = z - 0,35$

    d) $\dfrac{2}{3} - 2\left(z - \dfrac{1}{5}\right) = 4z$

    e) $\dfrac{2u-1}{3} - \dfrac{4(3-u)}{5} - \dfrac{u+4}{6} = \dfrac{5(u+2)}{2}$

    f) $\dfrac{x-1}{5} - \dfrac{2-x}{3} = \dfrac{3x}{4}$

    g) $0,5(3t-5) = 0,25(6t-10)$

    Los problemas siguientes (34 a 38) conducen a ecuaciones de primer grado. Plantear la ecuación y resolverlas.

33. Si calculo el doble del número obtenido restando 6 a mi edad obtengo el mismo número que cuando añado 25 a mi edad. ¿Cuál es mi edad?

34. a) ¿Se pueden obtener 4 números naturales consecutivos tales que la suma de 50? Si se puede, calcularlos.

    b) La misma pregunta con 48.

    c) ¿Cómo hay que elegir un número natural S para que se puedan obtener cuatro números naturales consecutivos cuya suma sea S?

35. Si aumentamos en $4cm$ el lado de un cuadrado, su superficie aumentará en $72cm^2$ ¿Cuál es la medida del lado del cuadrado?

36. Un comerciante que tenía tres hijos dejó el testamento siguiente: "Mi fortuna se repartirá entre mis tres hijos de modo que mi mayor hijo tenga la cuarta parte de lo que le toca a mi hijo menor. En cuanto al segundo tendrá 25.000,00 bolívares más que el mayor". Si el día de su muerte su fortuna ascendía a 4.450.000,00 bolívares ¿Cuánto le tocó a cada hijo?

37. De un texto antiguo (traducción libre)

"Un día el cocinero de un poderoso señor, para contentar a 3 mozas del lugar que le pidieron huevos, les dió los que tenía, y lo hizo así:

Dió a la primera mitad de los que tenía, y como gracia le añadió medio huevo. La mitad de lo que queda más la gracia de medio huevo, tomó la segunda y dió a la tercera la mitad de lo que quedaba y la gracia de medio huevo.

Así los repartió todos y sin quebrar uno solo de los huevos que tenía." ¿Cuántos huevos tenía el cocinero y cuántos le dio a cada moza?

38. Sea $P(x) = x^2 + x - 10$; $\quad Q(x) = 2x^3 - 8x + 3$; $\quad T(x) = 2x + 3$. Calcular:

a) $T(5) \cdot P(4)$

b) $T(-2) \cdot Q(3)$

c) $T(1/2) \cdot Q\left(\dfrac{1}{2}\right)$

d) $P(x) - 2T(x)$

e) $(P(x))^2 - xQ(x)$

f) $3P(x) - xQ(x) - 2T(x)$

g) $\dfrac{P(5) + Q(-2) - 3T(1)}{T(2)}$

39. Efectuar:

a) $(x+y)^2$

b) $(x-y)^2$

c) $(x+y)(x-y)$

d) $(x+y)^3$

e) $(x-z)^3$

f) $(3a+2b)^3$

g) $(a^3 - 4a^2 + 6a) \cdot (3ab)$

h) $(a^m - a^{m-1} + a^{m-2})(-2a)$

i) $(x^{m+1} + 3x^m - x^{m-1})\, 3x^2$

j) $(m^4 + m^2n^2 + n^2)(m^2 - n^2)$

k) $(a^2 + a - 1)(a^2 - a - 1)$

l) $(x^2 + xy + y^2)(x - y)$

m) $(x^{n+1} + 2x^{n+2} + x^{n+3})(x^2 - x)$

n) $(a^{n+2} - 2a^n + 3a^{n+1})(a^n + a^{n+1})$

o) $(a-b)(a^2 - 2ab + b^2)(a+b)$

p) $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)(x - 2)$

q) $(a^m - 3)(a^{m-1} + 2)(a^{m+1} - 1)$

r) $(x^{n+1} + y^{n-2})^2$

s) $(a^m + b^m)(a^m - b^m)$

40. Factorizar:

a) $(x^2 - 1)$

b) $x^2 + 4x + 4$

c) $a^2 - 3a^4 + 2a^3$

d) $0,001x^2 - 0,2x + 1$

e) $2x^2 + 4x + 4$

f) $x^2 - 9$

g) $(x-1)^3 - 3(x^2 - 1) + (x+1)$

41. Resolver la siguientes ecuaciones de segundo grado

a) $x^2 - x - 2 = 0$

b) $2x^2 + x - 2 = 0$

c) $3x^2 + 1 = 6x$

d) $21x^2 + 16x - 5 = 0$

e) $\dfrac{x}{(x-1)} + 2x = 1$

f) $\dfrac{2}{x+2} - \dfrac{3}{2x+1} = 1$

42. Determinar m de modo que la ecuación $x^2 - x + m = 0$ tenga raíz doble.

43. Determinar m de modo que si x_1 y x_2 son las raíces de $3x^2 - mx + (m-1) = 0$, se cumpla $x_1 + x_2 = 4$

44. Hallar, por factorización y simplificación, el cociente de:

a) $\dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

b) $\dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$

c) $\dfrac{1 - x^2}{1 - x}$

d) $\dfrac{y^2 - x^2}{y - x}$

e) $\dfrac{a^2 - 4ab^2}{a + 2b}$

f) $\dfrac{25-36x^4}{5-6x^2}$

g) $\dfrac{4x^2-9m^2n^4}{2x+3mn^2}$

h) $\dfrac{a^4b^6-4x^8y^{10}}{a^2b^3+2x^4y^5}$

i) $\dfrac{1-(a+b)^2}{1+(a+b)}$

j) $\dfrac{4-(m+n)^2}{2+(m+n)}$

k) $\dfrac{x^2-(x-y)^2}{x+(x-y)}$

l) $\dfrac{(a+x)^2}{(a+x)+3}$

45. Dividir

a) $\dfrac{x^4-1}{1+x^2}$

b) $\dfrac{8m^3+n^6}{2m+n^2}$

c) $\dfrac{(a+x)^2-y^2}{(a+x)-y}$

d) $\dfrac{x^8-256}{x-2}$

e) $\dfrac{x^6+6x^3+6-4x-2x^5-7x^2}{2+x^4-3x^2}$

f) $\dfrac{(x^3+8x^2-3x+1)}{(x-2)}$

g) $\dfrac{(4y^3+2y^2-y+1)}{2y+2}$

h) $\dfrac{a^4-11a^2+34}{a^2-3}$

i) $\dfrac{x^6-x^5+x^4+x^3-x^2+1}{x+1}$

46. Determinar el residuo de los siguientes cocientes (Utilizar el teorema del residuo).

a) $(x^7-x^6+x^5-x^4+x^3-x^2+x-1)\div(x-1)$

b) $(x^3+8x^2-3x+1)\div(x-2)$

c) $(a^4-11a^2+25)\div(a^2-3)$

d) $(16x^4 - 24x^3 + 73x^2 - 24x + 4) \div (4x - 1)$

47. Hallar el valor de la constante k para que:

    a) $7x^2 - 5x + k$, sea divisible por $x - 2$

    b) $x^3 - 3x^2 + 4x + k$, sea divisible $x - 2$

    c) $20x^3 - 7x^2 + 29x + k$, sea divisible por $4x + 1$

48. Si $xy = a$, $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = b$. Calcular $(x + y)^2$

49. Sabiendo que $\dfrac{3x - 4}{y - 15}$ es constante, y además $y = 3$ cuando $x = 2$, entonces si $y = 12$ ¿cuánto vale x?

50. ¿Cuántas horas demora un autobus que viaja a una velocidad de $60km/h$ entre las paradas, para recorrer un total de x kilómetros si hace m paradas de n minutos cada una?

51. Si la base de un rectángulo se aumenta en 10 metros y su altura se disminuye en 5 metros el área no se altera. El área tampoco se altera si disminuye la base en 5 metros y se aumenta la altura en 4 metros. Calcular el área.

52. ¿Cuáles son las raíces de la ecuación $x^2 + 3kx + 2k^2 - 1 = 0$ si el producto de las mismas es 7 y k es negativo?

53. Si $(m - n)^2 = 16$ y $mn = 21$. Calcular $m^2 + n^2$.

54. Una pieza de tela mide m metros de largo. Se le cortan x decímetros de un extremo e y centímetros del otro extremo.

    ¿Cuánto mide el resto de la tela en decímetros, y en función de m, x e y?

55. Expresar matemáticamente:

    a) La fuerza F es directamente proporcional a la aceleración a.

    b) El desplazamiento d, es proporcional al cuadrado del tiempo t.

    c) La presión gaseosa P es inversamente proporcional al volumen v.

56. En un mercado hay bolsas de cítricos que contienen 40 toronjas y 60 naranjas. Se desea preparar bolsas de 40 cítricos manteniendo la misma proporción. ¿Cuántas toronjas y cuántas naranjas hay que poner en cada bolsa?

57. En un corral hay 15 gallinas y 24 conejos. ¿Cuántas gallinas hay que añadir (ó quitar) para que la proporción gallina/conejos sea $\dfrac{3}{4}$?

58. a) Calcular el número cuyo 8% es 40.

    b) Calcular el número cuyo 5% es 850.

59. ¿Qué tanto por ciento de descuento tuvo una factura de 200.000 bolívares si se pagó 175.500 bolívares?

60. Se tiene $500gr$ de una solución de ácido clorídrico de 35% de pureza. ¿Cuántos gramos de ácido hay en la solución?

61. Se tiene $1500grs$ de solución ácida al 30%, ¿cuántos gramos de ácido puro habrá que añadir para que la mezcla resulte ácida al 45%?

62. Las medidas de los lados de un rectángulo se designan por u y v respectivamente

    a) ¿Cómo se expresa el área A del rectángulo?

    b) Si u aumenta en 1 y v en 2 entonces A aumenta en 38, si u aumenta en 2 y v en 1 entonces A aumenta en 35. Hallar u y v.

63. Tenemos una fracción $\dfrac{m}{n}$, m y n enteros, que reducida es igual $\dfrac{5}{3}$.
    Si en la fracción dada sumamos 2 al numerador y 2 al denominador la fracción obtenida es igual a $\dfrac{3}{2}$. Calcular m y n.

64. ¿En cuál de las siguientes ecuaciones, x no es directa ni inversamente proporcional a y?

    a) $\dfrac{x}{y} = \sqrt{3}$

    b) $3xy = 10$

    c) $x + y = 10$

    d) $3x + y = 10$

65. Si los valores x e y se disminuyen en 25% ¿En cuánto queda disminuido el valor de la expresión xy^2?

66. ¿Cuál de las siguientes fórmulas

$$y = 20 + x - x^2; \quad y = 100 - 5x - 5x^2; \quad y = 100 - 5x^2 \quad \text{ó} \quad y = 100 - 10x$$

expresa la relación entre x e y en la siguiente tabla?

x	0	1	2	3	4
y	100	90	70	40	0

67. a) En el triángulo ABC, A es el doble de B y B el triple de C. Calcular los ángulos $\hat{A}, \hat{B}$ y $\hat{C}$.

    b) La misma pregunta si A es el triple de B y B el doble de C.

68. Un tren recorre $200km$, a la velocidad media v y en cierto tiempo t. Para haber hecho el recorrido en una hora menos, la velocidad v debía haber sido $10km/hora$ más. Hallar v.

69. Al multiplicar dos números, uno de los cuales es mayor que el otro en 10 unidades, el escolar cometió un error disminuyendo en 4 cifras de las decenas del producto. Al dividir el producto obtenido por el menor de los factores (para comprobar el resultado) obtuvo 39 en el cociente y resto 22. Hallar los dos factores.

70. Hallar un número de cuatro cifras que cumple las condiciones siguientes: la suma de los cuadrados de las dos cifras extremas es igual a 13, la suma de los cuadrados de las cifras del medio es 85; si del número buscado se resta 1.089 se obtiene un número que se escribe con las mismas cifras pero en orden contrario.

71. A una reunión acudieron 10 personas. Cada persona estrechó la mano de cada una de las demás personas una vez. ¿Cuántos apretones de mano hubo en la reunión?

72. El promedio de 20 números es p. ¿Qué porcentaje de la suma de los 20 números es p?

73. Si $3x^3 + 4x = m - 5$ calcular m para que la ecuación tenga solución única.

74. Calcular el producto

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)$$

75. Calcular k para que el producto de las raíces de la ecuación $3x^2 + kx + 4k = 0$ sea 8.

76. ¿Entre que par de dígitos consecutivos está $\log_4 62$?

77. Diez barcos necesitan diez días para consumir diez tanques de aceite. ¿Cuántos días necesita un barco para consumir un tanque de aceite?

78. Hallar el dominio de la función real

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$$

79. Dada la ecuación $3x^2 - 10x + R = 0$, determinar R para que el producto de las raíces de la ecuación sea 1.

Geometría y Trigonometría

1. Según que sean agudos, rectos, obtusos o llanos. Clasificar los ángulos siguientes

   a) $15°$

   b) $100°$

   c) $170°31'$

   d) $\dfrac{\pi}{3}$

   e) $\dfrac{3\pi}{4}$

   f) $\dfrac{2\pi}{4}$

   g) 2π

   h) $89°59'30''$

2. La bisectriz de un ángulo aOb es la recta Oc tal que $aOc = cOb$.

   Dibujar y recortar un ángulo aOb. Obtener su bisectriz mediante un doblez.

3. a) Completar la Tabla:

Medida en grados	x	$180°$	$90°$	$30°$	$135°$	$120°$	$45°$	$60°$
Medida en radianes	y	π						

   Observar que $\dfrac{x}{y} = \dfrac{180}{\pi}$.

   b) Completar:

   1 grado = radianes, 1 radian = grados, a grados = radianes, b radianes = grados.

   c)

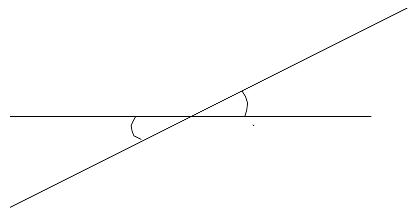
   I) Un ángulo mide $22°30'$ ¿cuál es la medida en radianes?

   II) Un ángulo mide $\dfrac{\pi}{12}$ radianes ¿Cuál es la medida en grados?

   III) Un ángulo mide 0,3 radianes ¿Cuál es la medida en grados?

   IV) Un ángulo mide $78°30'$ ¿Cuál es su medida en radianes?

4. Dos ángulos opuestos por el vértice son como los marcados en la figura



Sabiendo que dos ángulos llanos son iguales, probar que los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

5. Calcular el complementario de:

   a) $48°32'$

   b) $\dfrac{2\pi}{5}$

   c) $9°15'55"$

   d) $75°15'20"$

6. Calcular el suplementario de:

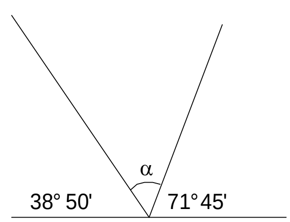
   a) $23°15'$

   b) $\dfrac{3\pi}{5}$

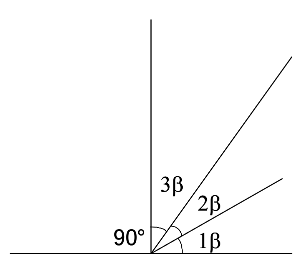
   c) $\dfrac{7\pi}{12}$

   d) $90°10'$

7. Encontrar el ángulo α indicado en la figura:

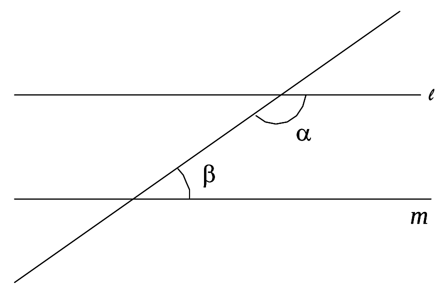


8. Encontrar el ángulo β indicado en la figura:



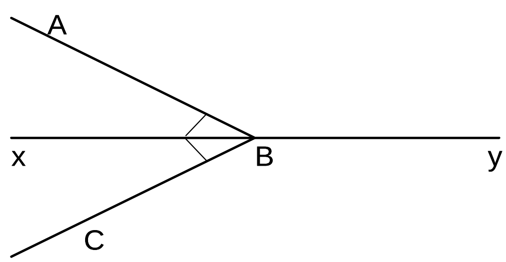
9. Sean 4 puntos A, B, C Y D en el plano de modo que las rectas AC y BD se cortan en E. ¿Qué podemos decir de los ángulos AED y CED? Hacer todos los casos posibles de posición de A, B, C y D.

10. En la figura $m \parallel \ell$ y $\alpha = (3x+1)^\circ$; $\beta = (2x-6)^\circ$. Calcular el menor de los dos ángulos.



11. Dos ángulos complementarios miden en grados $x + 20$ y $2x + 1$. Calcular x.

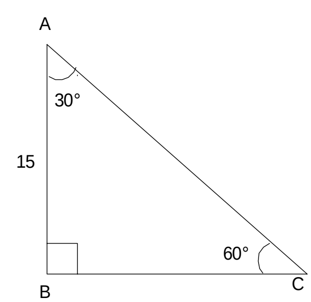
12. En el diagrama ABC es un ángulo recto xBy es una recta que pasa por B. Si $x\hat{B}C = 37°$. Calcular la medida de $y\hat{B}A$.



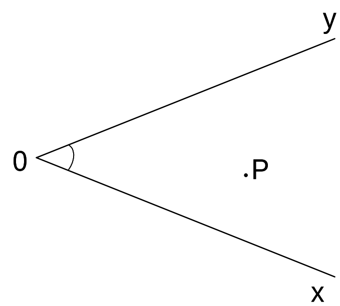
13. Si las medidas de los ángulos de un triángulo están en la relación 1 : 5 : 6, el triángulo es:

   a) Rectángulo
   b) Acutángulo
   c) Obtusángulo
   d) Isósceles

14. En el triángulo ABC, rectángulo en B, hallar la longitud del cateto BC.



15. Dados un ángulo $x\hat{O}y$ y un punto P, construir un triángulo isósceles OAB, $OA = OB$, tal que A está sobre Oy y AB pasa por P.



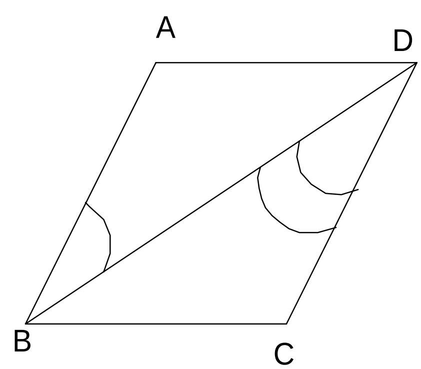
16. Hallar la altura de un triángulo equilátero de lado 20.

17. ¿Cuáles de los conjuntos de los números siguientes pueden representar las medidas de los lados de un triángulo?

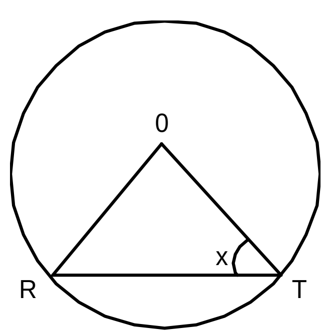
$$\{7,8,9\}\,; \quad \{3,5,8\}\,; \quad \{3,3,7\}\,; \quad \{3,10,6\}\,; \quad \{4,5,8\}$$

18. Hallar el área y el perímetro del rombo cuyas diagonales miden 10 y 12.

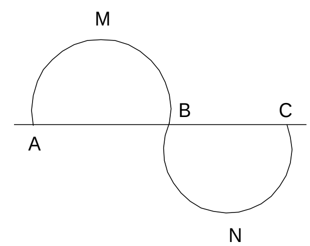
19. En el paralelogramo dado $ABCD$, los ángulos señalados tienen medidas representadas por $A\hat{B}D = 2x+2; \quad B\hat{D}C = 7x-8$. Calcular x.



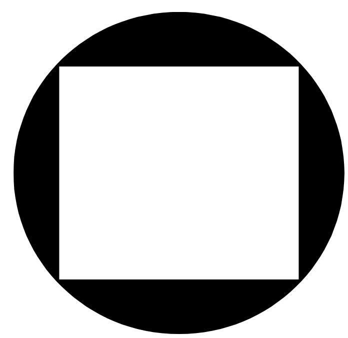
20. En la figura la circunferencia tiene un radio 1, y la longitud del arco RT es $\dfrac{2\pi}{9}$. Calcular el ángulo x en grados.



21. Si $AC = 12$ y B es el punto medio de AC, hallar la longitud de la curva $AMBNC$.



22. Un cuadrado está inscripto en un círculo de radio 4. Hallar el área sombreada.



23. Demostrar que las mediatrices de un triángulo ABC se cortan en un punto O. La circunferencia de centro en O y radio OA contiene los otros dos vértices del triángulo y se llama la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.

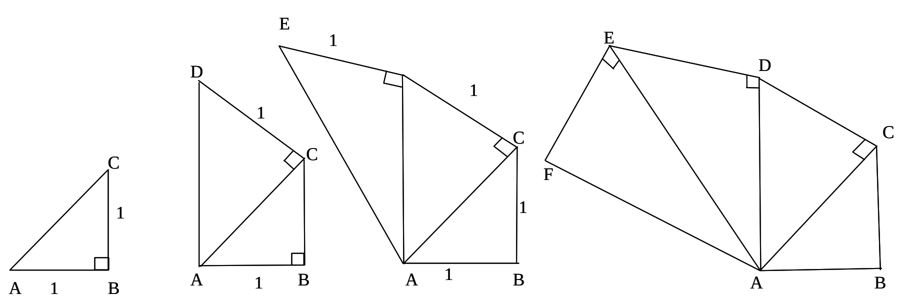
24. Sea una recta en la que se ha elegido un orígen O y una unidad 1. Construir con regla y compás un punto X sobre la recta tal que en la medida elegida sea:

a) $\overline{OX} = \dfrac{2}{7}$ b) $\overline{OX} = \dfrac{13}{6}$

25. Observando el dibujo

a) Calcular las longitudes de AC, AD, AE, AF.

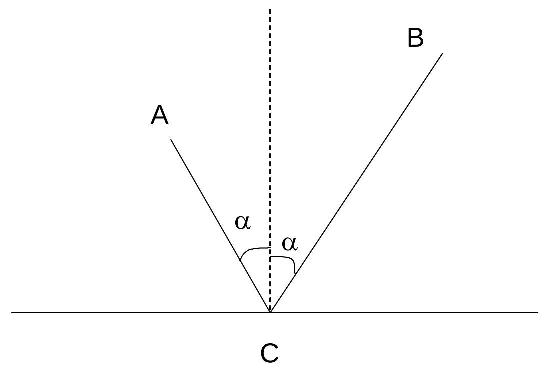
b) Construir un segmento de longitud $\sqrt{7}$



26. Construir un segmento de longitud

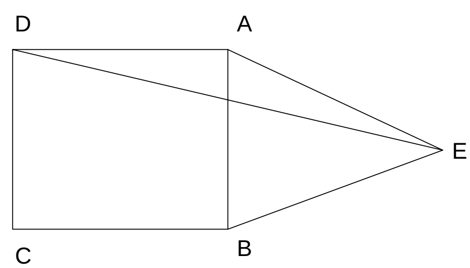
    a) $\sqrt{34}$ b) $\sqrt{113}$

27. Se supone que cuando se lanza una bola de billar, esta rebota en la banda en dirección simétrica respecto de la perpendicular a la banda, como en la figura.

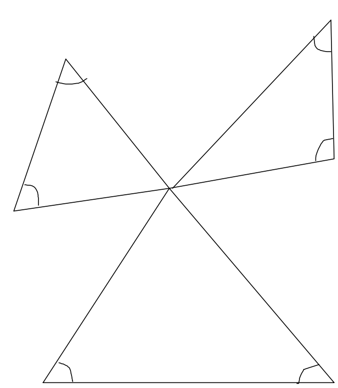


Se quiere que la bola A toque la banda en un punto C, antes de tocar la bola B. Determinar la posición del punto C y explicar las construcciones.

28. En la figura $ABCD$ es un cuadrado y ABE es un triángulo equilátero. ¿Cuál es la medida del ángulo $A\hat{E}D$?

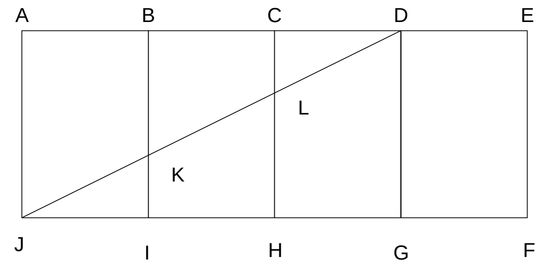


29. ¿Cuánto vale la suma de los ángulos marcados en la figura?

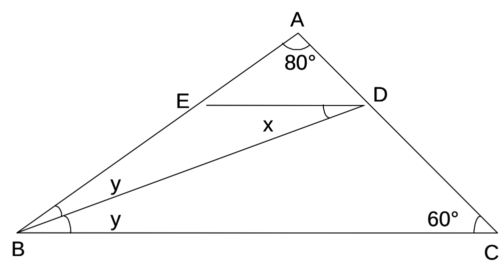


30. En un plano se tienen tres rectas L_1, L_2 y L_3 tales que $L_1 \parallel L_2$ y L_3 corta a L_1 y L_2. ¿Cuántos puntos del plano equidistan de las rectas?. Construirlos

31. En la figura $ABIJ, BCHI, CDGH$ y $DEFG$ son rectángulos congruentes. Si $AJ = 21$, ¿cuánto vale KI?



32. En el triángulo ABC trazamos la bisectriz de B que corta AC en D. Por D trazamos $ED \parallel BC$. ¿Cuánto mide el ángulo x?



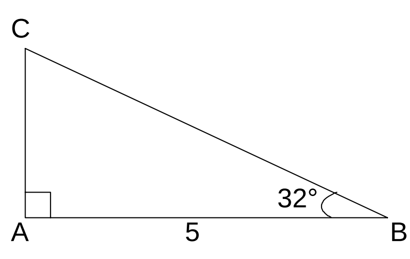
33. El área total de un cubo es 36. Calcular su volumen.

34. El volumen de una esfera es 64π. Hallar su área.

35. La altura y el radio de un cilindro tienen la misma medida y su volumen es 125π. Hallar su altura (y por lo tanto su radio).

36. El radio de la base de un cono recto es 8 y su altura 15. Hallar su volumen.

37. En el triángulo rectángulo $ABC, AB = 5$ y $\hat{B} = 32°$. Calcular sus demás elementos

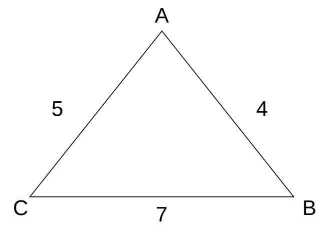


a) Obtener usando tabla o calculadora $sen 23°, \cos 50°, tg 74°$

b) Obtener por medio de la tabla o calculadora el ángulo agudo α, tal que:

a) $sen\alpha = \dfrac{1}{5}$ b)$\cos\alpha = 0,3$ c) $tg\alpha = 0,35$

38. Calcular los cosenos de los ángulos del triángulo adjunto



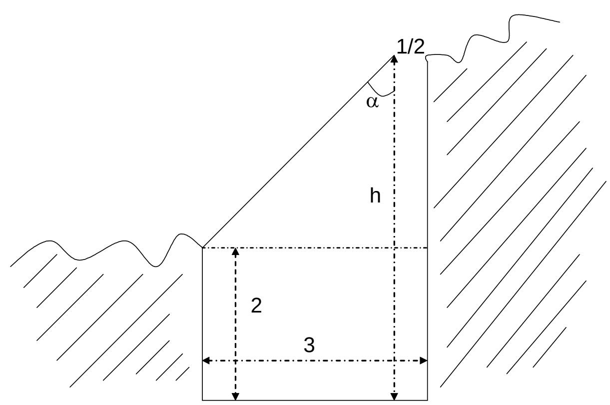
39. Sin usar transportador, construir un triángulo KMN, rectángulo en M y tal que

$$\cos K = 0,78.$$

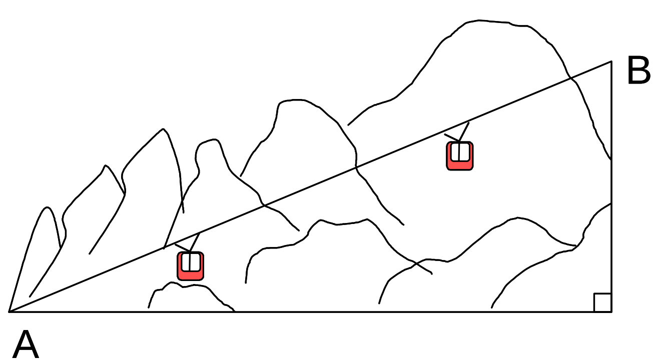
40. FAC es un triángulo tal que $FA = 12cm, AC = 9cm, FC = 15cm$. Construirlo. ¿Por qué es rectángulo?, ¿cuál es el ángulo recto?, ¿cuál la hipotenusa?. Calcular tgC y tgF.

41. El ángulo agudo α tiene tangente $1,6$. Sin transportador construir un ángulo de medida α.

42. Se construye una pared sobre una base de cemento. Las dimensiones están dadas en metros $\alpha = 30^o$. Calcular la altura h del muro.



43. Se construye un teleférico entre dos puntos A y B. La altura del punto A es $1.850m$, la altura del punto B es $2.500m$. Sabiendo que la recta AB forma un ángulo de $15°$ con la horizontal, hallar la distancia entre A y B.



44. Construir un ángulo β que cumpla las condiciones siguientes

   a) $\cos\beta > 0, \sin\beta > 0$
   b) $\cos\beta < 0, \tan\beta > 0$
   c) $\tan\beta < 0, \sin\beta > 0$
   d) $\tan\beta < 0, \sin\beta < 0$

45. Teniendo en cuenta los valores de los ángulos $45°, 30°, 60°$ que ya calculamos, hallar los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos:

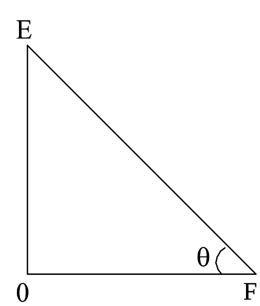
$$135°, 225°, 315°, 120°, 150°, 210°, 240°, 300^o.$$

46. Expresar cada una de las siguientes razones en función de $\sin\alpha$ y $\cos\alpha$.

   a) $\sin(-\alpha)$
   b) $\cos(-\alpha)$
   c) $\tan(-\alpha)$
   d) $\sin(\alpha + \pi)$
   e) $\sin(\alpha - \pi)$
   f) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$
   g) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$
   h) $\sin(a + 2\pi)$
   i) $\cos(\alpha - 2\pi)$
   j) $\cos(2\pi - \alpha)$

47. Donde está definido calcular $\dfrac{\cos\theta}{\tan\theta\sin\theta}$

48. En la Figura, $\theta = 61°$ y $ED = 14$. Calcular DF



49. Sabiendo que:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta. \end{aligned}$$

Calcular:

a) $\sin(\alpha - \beta)$

b) $\cos(\alpha - \beta)$

c) $\cos 2\alpha$

d) $\sin \dfrac{\alpha}{2}$(en función de $\cos\alpha$)

50. Sabiendo que:

a) $\sin\alpha = 0,27$. Calcular $\tan\alpha$

b) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \qquad 0 < \alpha < \pi$. Hallar $\cot\dfrac{\alpha}{2}$

c) $\sin\ 6° = 0,1045$ y $\cos 37° = 0,7986$. Calcular $\tan 31°$

d) $\cos\alpha = 0,28$. Hallar $\cos 2\alpha$

e) $\sin\alpha = \dfrac{15}{17}, \qquad 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Hallar $\cos\dfrac{\alpha}{2}$

f) $\tan\alpha = 0,25, \qquad 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Hallar $\sin 2\alpha$

51. Conociendo los valores de las funciones trigonométrica de $60° = \dfrac{\pi}{3}, \quad 45° = \dfrac{\pi}{4}, \quad 30° = \dfrac{\pi}{6}$. Calcular:

a) $\cos 105°$

b) $\cos 160°$

c) $\cos\dfrac{5\pi}{6}$

d) $\sin 105°$

e) $\sin 75°$

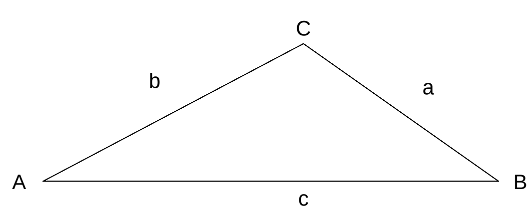
f) $\cos\dfrac{17\pi}{12}$

g) $\sin\dfrac{\pi}{12}$

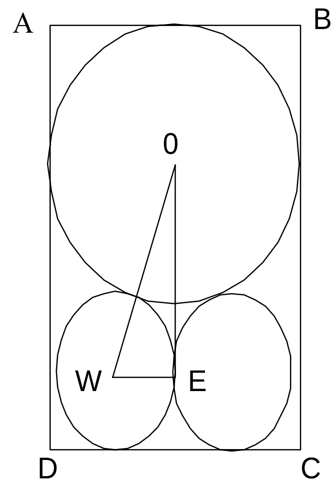
h) $\tan\dfrac{5\pi}{12}$

52. Dado un triángulo cualquiera ABC. Deducir la ley de los senos.

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$$

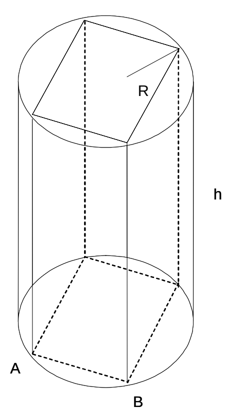


53. Observe la figura:

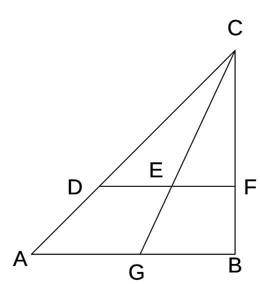


Los dos círculos pequeños tienen el mismo radio R, y $ABCD$ es un retángulo. Calcular AB y BC en función de R aplicar al caso $R = 12cm$.

54. Una caja rectangular está inscrita en un cilindro de $5cm$ de altura y $2,5$ radio de la base, y $AB = 4$. Calcular el volumen de la caja.



55. En el dibujo $DF || AB$ y $BC \perp AB$

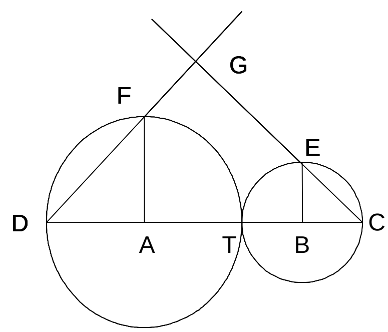


Además $BC = 5$, $BG = 4$, $BA = 12$ y $DA = 3$. Calcular CE.

56. Dos circunferencias tangentes exteriormente de centros A y B tienen radios 5 y 3 respectivamente. Son tangentes en T y los otros extremos del diámetro común son C y D.

Las perpendiculares a ese diámetro en A y B cortan las circuferencias en E y F.

CE y DF se cortan en G. Calcular el perímetro del triángulo DCG.



57. Para qué valores de α se cumple la ecuación

$$1 + \cos\alpha + \sin^2\alpha = 0$$

Plano coordenado y vectores.

1. Dado un sistema de ejes cartesianos, dibujar los puntos

   a) $(3,4)\,;$

   b) $(-5,2)\,;$

   c) $\left(-\dfrac{1}{2},-4\right)$

   d) $\left(\dfrac{1}{3},-1\right);$

   e) $\left(-1,\sqrt{2}\right).$

2. Construir 3 puntos distintos cuyas coordenadas satisfagan la ecuación $2x-y=1$.

3. Construir la recta $y=2x+5$

   ¿Los puntos $A\left(0,\dfrac{1}{5}\right)$, $B\left(-\dfrac{1}{2},4\right)$ y $C\,(-1,5)$ están sobre la recta?.

4. Represente gráficamente cada una de las funciones y determine, tanto gráfica como analíticamente los puntos de corte con los ejes y la pendiente.

   a) $y=-3x+8$

   b) $y=2\sqrt{3}x+\sqrt{2}$

   c) $y=\dfrac{4}{5}$

   d) $3x-2y-2=0$

   e) $-x-y=0$

   f) $3x-y=6$

5. Construir en la misma gráfica las rectas:

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{l}_1 : x=y & \mathrm{l}_6 : -x+2y=4 \\
\mathrm{l}_2 : y=2x & \mathrm{l}_7 : x=0 \\
\mathrm{l}_3 : y=3x & \mathrm{l}_8 : x-y=3 \\
\mathrm{l}_4 : y=4x & \mathrm{l}_9 : 2y-2x+5=0 \\
\mathrm{l}_5 : 2x-4y=6 & \mathrm{l}_{10} : 8x=16
\end{array}
$$

a) Observe cuáles pares de rectas son parelelas.

b) Pruébelo.

6. ¿Como hay que elegir los coeficientes, a, b y c, para la recta $ax + by + c = 0$

   a) Contenga al origen.

   b) Sea paralela al eje x.

   c) Sea paralela al eje y.

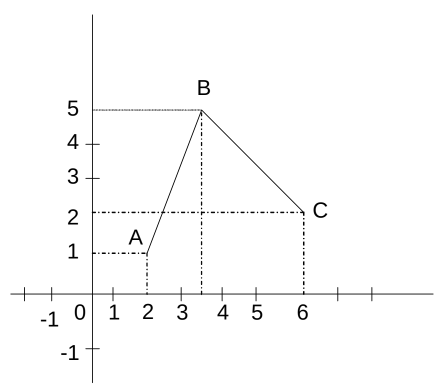
   d) Sea paralela a la recta $y = x$

7. Sea la ecuación $3x - 3y + c = 0$. Determinar c sabiendo que el pundo $(-2, 3)$ pertenece a la recta.

8. Sea la ecuación $Ax + By = -3$. Encuentre los coeficientes A y B. sabiendo que la pendiente es -4 y el punto $(-2, 3)$ pertenece a la recta.

9. Obtener la ecuación de la recta paralela a $2x + 3y = 6$ y que pasa por el punto $(4, 2)$.

10. Calcular la pendiente de los segmentos AB y BC indicados en la figura.



11. Sean las rectas $\begin{cases} 2x - 3y &= 5 \\ 2x + 3y &= 3 \end{cases}$

    Dibujarlas. ¿Se cortan en algún punto?. Verificar que el punto de intersección es $I\left(2, -\dfrac{1}{3}\right)$.

12. Resolver analíticamente y gráficamente, los sistemas.

    a) $\begin{cases} 2x + 3y - 8 &= 0 \\ x + y &= 0 \end{cases}$

    b) $\begin{cases} 3x - 4y + 9 &= 0 \\ x - 2y - 5 &= 0 \end{cases}$

    c) $\begin{cases} 7x + 14y &= 3 \\ 6y = 4 - 3x \end{cases}$

    d) $\begin{cases} 10x + 7 &= 2y - 1 \\ y - x + 8 &= 3y - 11 \end{cases}$

13. Construir un par de rectas que se cortan en el punto $(6, -7)$. Escribir las ecuaciones y graficarlas. Verificar que $(6, -7)$ es efectivamente el punto de intersección.

14. Marcar cuatro puntos A, B, C, D en el plano. Elegir un punto 0. Construir representantes de origen 0 de los vectores

$$\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{CD},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{BD},\ \overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{CD}$$

15. Sean A, B, C, D, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t}, \vec{s}$ vectores, x e y números reales

a) Si $\vec{w} = \dfrac{2}{3}\vec{v};\ \ \vec{v} = -\dfrac{6}{7}\vec{u}$ expresar $\vec{w}$ en función de $\vec{u}$

b) Si $(y - x)\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$ qué se puede deducir?. $\vec{0}$ es el vector cero.

c) ¿Tienen sentido las expresiones siguientes? ¿Por qué?

$$\overrightarrow{AB} + \vec{t}$$

$$\overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}$$

$$\vec{s} + 3 = \vec{w}$$

$$\vec{u} + 1$$

16. M, N, P son tres puntos no alineados de un plano. Construir el punto A definido por $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{NP}$, el punto B definido por $\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{NP}$, y el punto C definido por $\overrightarrow{NC} = -2\overrightarrow{NP}$

¿Es $AMNC$ un paralelogramo?¿Porqué?

¿Es $MBPN$ un paralelogramo?¿Porqué?

17. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de un vector si sus componentes x e y son de -45 unidades y -30 unidades respectivamente?

18. Dados dos vectores $\vec{a} = 4\hat{\imath} - 3\hat{\jmath}$ y $\vec{b} = 6\hat{\imath} + 8\hat{\jmath}$. Encontrar: la magnitud y dirección de $\vec{a}$, de $\vec{b}$, de $\vec{a} + \vec{b}$, de $\vec{b} - \vec{a}$ y de $\vec{a} - \vec{b}$

19. Dados los vectores: $\vec{u} = 6\hat{\imath} + 8\vec{\jmath};\ \ \vec{v} = \hat{\imath} - \sqrt{3}\hat{\jmath};\ \ \vec{w} = -2\hat{\imath} + \hat{\jmath}$

a) Calcular: $\vec{u}.\vec{v};\ \vec{u}.\vec{w};\ \vec{v}.\vec{w}$

b) Encontrar las longitudes de $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$

c) Obtener $\vec{s} = \vec{u} - \vec{v},\ \vec{t} = \vec{u} + \vec{v}$ y sus magnitudes.

d) Calcular el ángulo que forman $\vec{s}$ y $\vec{t}$

20. Dados $\vec{a} = 6\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k};\ \ \vec{b} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 5\hat{k};\ \ \vec{c} = -\hat{\imath} + \hat{\jmath}$

Calcular:

a) $\vec{a}.\vec{b};\ \vec{b}.\vec{a}$

b) $\vec{a}.\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$

c) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right).\left(\vec{b}-\vec{c}\right)$

21. Un hombre recorre $6\sqrt{2}km.$ hacia el noreste y luego $8\sqrt{2}km$ hacia el sureste. Calcular el vector desplazamiento total.

22. Sea un cubo de vértices A, B, C, D, E, F, G, H

    a) ¿Cuántos segmentos con extremos en los vértices del cubo pueden encontrarse?

    b) Si a es la longitud de una arista, ¿Cuántos segmentos de longitud $\underline{a}$ hay?.

    Si b es la longitud de la diagonal de una cara ¿Cuántos segmentos de longitud $\underline{b}$ hay?

    Si c es la longitud de una diagonal del cubo, ¿Cuántos segmentos de longitud $\underline{c}$ hay?

    c) Calcular b y c si se sabe que $a=\sqrt{2}$

    d) Calcular a y c si se sabe que $b=\sqrt{2}$

    e) Calcular a y b si se sabe que $c=\sqrt{3}$.