# Algunas Aplicaciones de la Transformada de Laplace

**Dr. Andrés Pérez**

Escuela de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad Central de Venezuela

11 de marzo de 2016

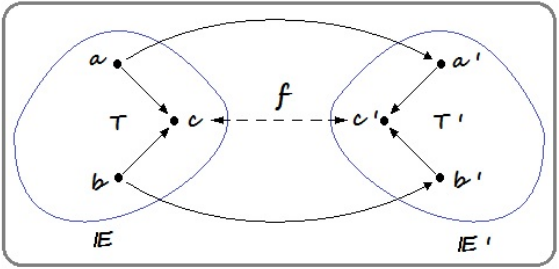
# Contenido

# ¿Qué es una Transformada?

Sean $\mathbb{E}$ y $\mathbb{E}'$ espacios vectoriales con leyes de composición interna (operaciones) $T$ y $T'$, las cuales conforman las estructuras $(\mathbb{E}, T)$ y $(\mathbb{E}', T')$.

## Definición

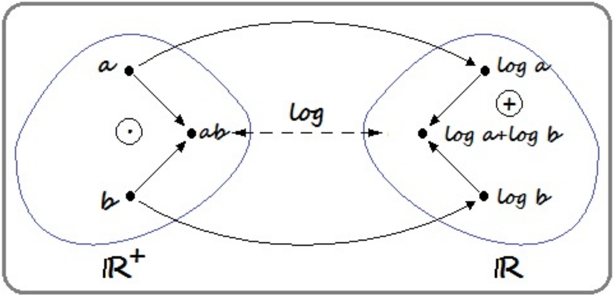
Una *transformada*, es una aplicación biyectiva $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$, que establece un isomorfismo entre $(\mathbb{E}, T)$ y $(\mathbb{E}', T')$.



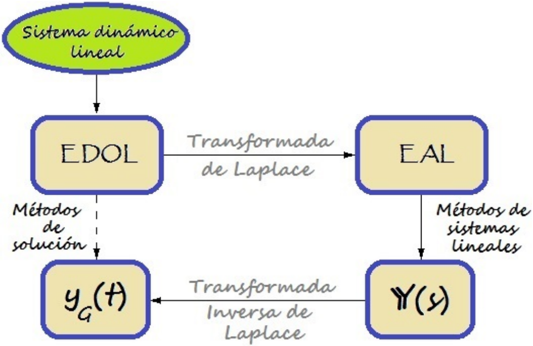
## Ejemplo

El cálculo del logaritmo del producto de dos números positivos.

En efecto, tomando al espacio $\mathbb{E} = \mathbb{R}^+$, con la operación del producto y al espacio $\mathbb{E}' = \mathbb{R}$, con la operación de la suma, obtenemos que:



En general, podemos establecer que la Transfromada de Laplace, es una aplicación entre espacios de funciones cuya utilidad principal, es la de reducir ecuaciones diferenciales ordinarias lineales o sistemas de ellas, en ecuaciones algebraicas lineales o sistemas de ellas, siendo una herramienta útil en el análisis de sistemas dinámicos lineales.



# Historia

- 1744, Leonhard Euler (1707 - 1783) investiga integrales de la forma:
$$z = \int \mathbb{X}(x)e^{ax}dx$$
como soluciones de EDO, pero luego abandona estas investigaciones.
- Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813), también investigó este tipo de integrales y las vinculó a la teoría de la probabilidad, en un trabajo sobre funciones de densidad de probabilidad, de la forma:
$$\int \mathbb{X}(x)e^{-ax}a^{x}dx$$
las que algunos interpretan como auténticas transformadas de Laplace.
- 1782, Pierre-Simon Laplace (1749 - 1827) siguiendo las ideas de Euler, emplea a estas integrales como solución de EDO.

# Historia

- 1785, Laplace da un paso más allá y refuerza el problema, usando integrales de la forma:

$$\int \mathbb{X}(x)\phi(s)dx \dashrightarrow \textbf{EDOL} \rightsquigarrow \textbf{EAL}$$

  dando pie a las transformadas de Laplace.
- Olivier Heaviside (1850 - 1925) ingeniero inglés, en la segunda mitad del siglo XIX intenta resolver problemas de ED en la teoría de vibraciones, retomando los trabajos de Laplace y dándole forma a la aplicación moderna de las Transformadas de Laplace.

**Observación**

Heaviside, descubre que los operadores diferenciales pueden ser tratados como variables algebraicas

# Ejemplo

$$y'(t) - ay(t) = f(t) \quad \underset{\text{Notación Operador}}{\Longrightarrow} \quad (D-a)y(t) = f(t)$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$y(t) = e^{at}\int e^{-at}f(t)dt + C_1e^{at} \qquad\qquad y(t) = \frac{1}{D-a}f(t)$$

(Solución General) (Obs. de Heaviside)

De donde obtenemos que:

$$\frac{1}{D-a}f(t) = e^{at}\int e^{-at}f(t)dt + C_1e^{at} \tag{1}$$

Usando estos argumentos, podemos entonces resolver la EDO dada por:

$$y'' - 5y' + 6y = 3e^{2t}$$

Veamos:

$$y'' - 5y' + 6y = 3e^{2t} \underset{\text{Notación Operador}}{\Longrightarrow} (D^2 - 5D + 6)y(t) = 3e^{2t}$$

de donde

$$y(t) = \frac{3e^{2t}}{D^2 - 5D + 6} \Longrightarrow y(t) = \frac{3e^{2t}}{(D-3)(D-2)}$$

Finalmente,

$$y(t) = \frac{1}{D-3}\left(3e^{2t}\right) - \frac{1}{D-2}\left(3e^{2t}\right)$$

Al sustituir (1) en la expresión anterior, nos queda:

$$\begin{aligned} y(t) &= \left(3e^{3t}\int e^{-3t}e^{2t}dt + C_1e^{3t}\right) - \left(3e^{2t}\int e^{-2t}e^{2t}dt + C_2e^{2t}\right) \\ &= 3e^{3t}\int e^{-t}dt + C_1e^{3t} - 3e^{2t}\int dt - C_2e^{2t} \\ &= -3e^{2t} + C_1e^{3t} - 3te^{2t} - C_2e^{2t} = C_1e^{3t} + \widetilde{C}_2e^{2t} - 3te^{2t} \end{aligned}$$

Sea $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Una integral definida de $f$, con respecto a una de las variables produce una función de la otra variable. A saber,

$$\int_a^b f(x,y)dx = \mathbb{F}(y) \qquad \text{o bien} \qquad \int_c^d f(x,y)dy = \mathbb{F}(x)$$

En efecto,

$$\int_1^2 2xy^2 dx = 3y^2$$

Más aún,

$$\int_a^b k(s,t)f(t)dt$$

transforma a una función $f$ de variable $t$, en una función $\mathbb{F}$ de variable $s$.

Nuestro interés, se centra en los procesos dinámicos y al depender de variables temporales, buscamos transformadas integrales definidas en $[0, \infty)$, donde si $f$ está definida para $t \geq 0$, entonces,

$$\int_0^{\infty} k(s,t)f(t)dt = \lim_{a \longrightarrow \infty} \int_0^{a} k(s,t)f(t)dt$$

Escogemos entonces,

$$k(s,t) = e^{-st}$$

la cual nos garantiza la existencia del límite anterior en un espectro más amplio de casos, para valores de $s$. En especial, para funciones $f$ de la forma:

$$e^{kt} \quad , \quad \mathrm{sen}(kt) \quad , \quad p(t)[\text{polinomios}]$$

## Definición

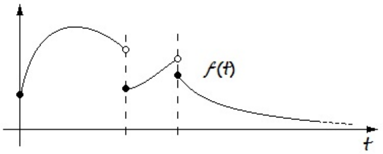
Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Entonces, la integral

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \mathbb{F}(s) \quad , \quad (s > 0)$$

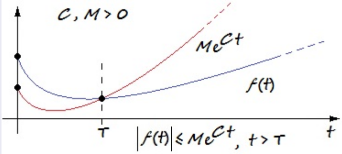
se denomina, *Transformada de Laplace* de $f$, siempre y cuando la integral converja.

En realidad, las condiciones suficientes para que la transformada de Laplace de una función converja son justamente:

## Continua a Trozos




## Orden Exponencial




En efecto,

## Teorema

*Si $f$ es continua a trozos y de orden exponencial $C$ en $[0,\infty)$, entonces, $\mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para todo $s > C$.*

¿Será cierto el recíproco del Teorema? Respuesta: **NO!**

## Contraejemplo

Sea $f(t) = e^{-t^2}$, entonces, $\mathcal{L}\{f(t)\}$ existe. Veamos,

$$\mathcal{L}\{e^{-t^2}\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{-t^2}dt = e^{\frac{s^2}{4}}\int_0^\infty e^{-\left(t+\frac{s}{2}\right)^2}dt$$

la cual existe para todo $s \in \mathbb{R}$. Ahora bien, la función $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ no es de orden exponencial pero,

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} \quad \text{converge} \Longrightarrow \int_0^1 \frac{e^{-st}}{\sqrt{t}}dt \quad \text{también converge}$$

para $s > 0$. Ahora consideremos,

## Contraejemplo

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{e^{-st}}{\sqrt{t}}dt &= \lim_{\substack{a\to\infty\\ \varepsilon\to 0^+}} \int_\varepsilon^a \frac{e^{-st}}{\sqrt{t}}dt = \lim_{\substack{a\to\infty\\ \varepsilon\to 0^+}} \frac{2}{\sqrt{s}}\int_\varepsilon^a e^{-(\sqrt{st})^2}\frac{\sqrt{s}}{2\sqrt{t}}dt \\
&= \lim_{\substack{a\to\infty\\ \varepsilon\to 0^+}} \frac{2}{\sqrt{s}}\int_{\sqrt{s\varepsilon}}^{\sqrt{sa}} e^{-v^2}dv = \frac{2}{\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-v^2}dv \\
&= \frac{2}{\sqrt{s}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{s}} \Longrightarrow \mathcal{L}\{t^{-1/2}\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}
\end{aligned}$$

Además, una condición importante viene dada por

## Teorema

*Si $f$ es continua a trozos en $[0,\infty)$ y de orden exponencial para $t>T$, entonces*

$$\lim_{s\to\infty}\mathcal{L}\{f(t)\}=0$$

El operador de Laplace, entre otras propiedades, satisface que es un operador lineal e invertible, pero por no abordar fórmulas complicadas en variable compleja, no presentaremos la transformada inversa (*Fórmula de Mellin* o *integral de Bromwich*). Ahora bien, la unicidad de la fórmula inversa de Mellin, está garantizada por:

### Teorema (Lerch)

*Si $f$ y $g$ son funciones continuas a trozos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial y además, existe $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que, $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g(t)\}$, para todo $s > s_0$. Entonces, $f(t) = g(t)$ para todo $t > 0$, salvo en los puntos de discontinuidad.*

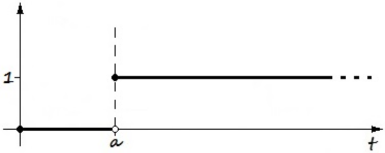
### Observación

En virtud del Teorema de Lerch, usaremos la tabla de transformadas para revertir los procesos

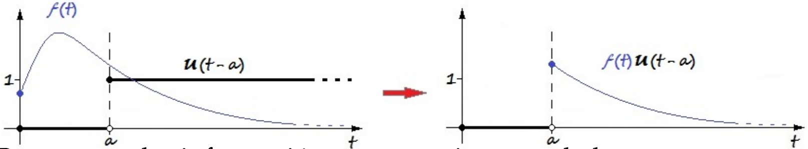
# Función de Heaviside

La *Función de Heaviside* o *Función de Paso unitario*, la denotaremos por $\mathfrak{U}(t-a)$ y se define por:

$$\mathfrak{U}(t-a) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{si } 0 \leq t < a \\ 1 & , \quad \text{si } t \geq a \end{cases}$$

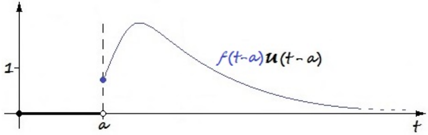



Pero,




Para no perder información, es conveniente trasladar

$$f(t-a)\mathfrak{U}(t-a) = \begin{cases} 0\,,\, 0 \leq t < a \\ f(t-a)\,,\, t \geq a \end{cases}$$



# Teoremas Importantes

## Teorema (Traslación en $t$)

*Si $f(t)$ es tal que, $\mathbb{F}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ existe y $a > 0$, entonces, se tiene que:*

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\mathfrak{U}(t-a)\} = e^{-as}\mathbb{F}(s)$$

## Teorema (Traslación en $s$)

*Si $f(t)$ es tal que, $\mathbb{F}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ existe y $a \in \mathbb{R}$, entonces, se tiene que:*

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \mathbb{F}(s-a)$$

¿Utilidad?

## Ejemplo

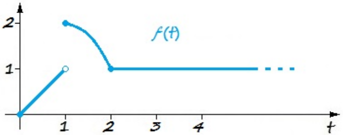
Consideremos la función

$$f(t) = \begin{cases} t & , \quad 0 \leq t < 1 \\ 1 - t^2 + 2t & , \quad 1 \leq t < 2 \\ 1 & , \quad t \geq 2 \end{cases}$$

¿Cuál será la Transformada de $f$?

# Uso de Teoremas de Traslación

$$f(t) = \begin{cases} t & , \quad 0 \leq t < 1 \\ 2-(t-1)^2 & , \quad 1 \leq t < 2 \\ 1 & , \quad t \geq 2 \end{cases}$$




Reescribiendo la función, en términos de la función de Heaviside, nos queda:

$$\begin{aligned} f(t) &= t - t\mathfrak{U}(t-1) + [2-(t-1)^2]\mathfrak{U}(t-1) - [2-(t-1)^2]\mathfrak{U}(t-2) \\ &\quad +\mathfrak{U}(t-2) \\ &= t - t\mathfrak{U}(t-1) + 2\mathfrak{U}(t-1) - (t-1)^2\mathfrak{U}(t-1) - 2\mathfrak{U}(t-2) \\ &\quad +(t-1)^2\mathfrak{U}(t-2) + \mathfrak{U}(t-2) \\ &= t - (t-1)\mathfrak{U}(t-1) + \mathfrak{U}(t-1) - (t-1)^2\mathfrak{U}(t-1) + (t-2)^2\mathfrak{U}(t-2) \\ &\quad +2(t-2)\mathfrak{U}(t-2) \end{aligned}$$

# Uso de los Teoremas de Traslación

Sabiendo que $\mathcal{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, nos queda:

$$\mathbb{F}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}e^{-s} + \frac{1}{s}e^{-s} - \frac{2}{s^3}e^{-s} + \frac{2}{s^3}e^{-2s} + \frac{2}{s^2}e^{-2s}$$

O bien,

## Ejemplo

Sabiendo que $\mathcal{L}\{\cos(kt)\} = \dfrac{s}{s^2+k^2}$ y que $\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(kt)\} = \dfrac{k}{s^2+k^2}$.

Determine: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+3}{s^2+4s+7}\right\}$.

$$\frac{s+3}{s^2+4s+7} = \frac{(s+2)+1}{(s+2)^2+3} = \frac{s+2}{(s+2)^2+3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{(s+2)^2+3}$$

de donde

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{s^2+4s+7}\right\} = e^{2t}\cos(\sqrt{3}t) + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{2t}\operatorname{sen}(\sqrt{3}t)$$

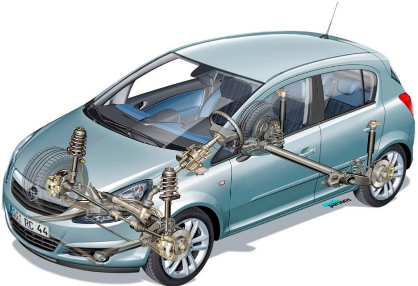
## Observación (Transformada del $\operatorname{sen}(kt)$)

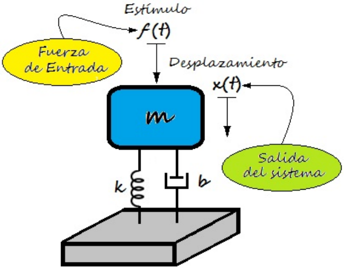
Una forma de obtener la transformada de la función $\operatorname{sen}(kt)$, sin usar de forma directa la definición de la transformada de Laplace sobre ella, puede ser la siguiente:

Sabemos que: $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta)$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(kt)\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2i}\right\} = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{s-ik} - \frac{1}{s+ik}\right] \\
&= \frac{1}{2i}\left[\frac{s+ik-s+ik}{(s-ik)(s+ik)}\right] = \frac{1}{2i}\left[\frac{2ik}{s^2-i^2k^2}\right] = \frac{k}{s^2+k^2}
\end{aligned}$$

# Sistema de suspensión de un automóvil



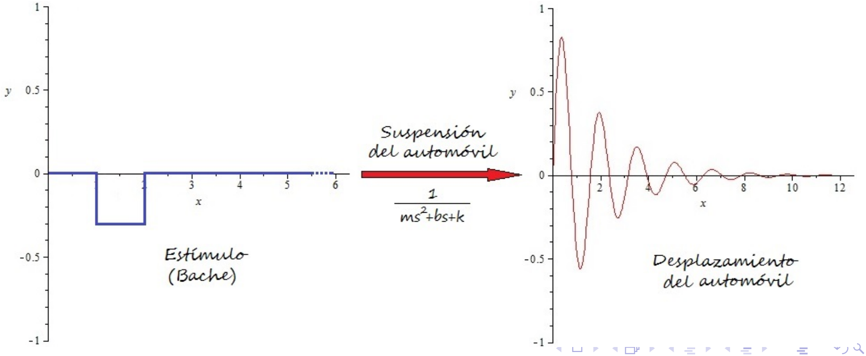



Entonces, $m \cdot \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = f(t) - kx(t) - b\dfrac{dx(t)}{dt}$. Partiendo del reposo y aplicando Laplace,nos queda:

$$ms^2\mathbb{X}(s) + bs\mathbb{X}(s) + k\mathbb{X}(s) = \mathbb{F}(s) \Longrightarrow \frac{\mathbb{X}(s)}{\mathbb{F}(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

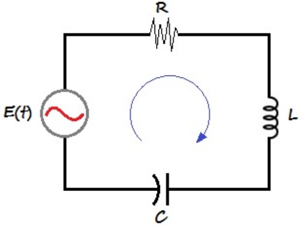
# Sistema de suspensión de un automóvil


Al aplicar la transformada inversa, obtenemos:



# Circuitos RLC

Consideremos un circuito RLC, con condiciones inicales en la carga nulas:




Relaciones Importantes
(1) $\frac{dq(t)}{dt} = i(t)$
(2) Segunda Ley de Kirchhoff

Entonces, la EDOL que modela el circuito es:

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}q(t) = E(t), \text{ o bien, } L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C}q(t) = E(t)$$

Aplicando Laplace, nos queda:

$$Ls^2\mathbb{Q}(s) + Rs\mathbb{Q}(s) + \frac{1}{C}\mathbb{Q}(s) = \mathbb{E}(s) \Longrightarrow \mathbb{Q}(s) = \frac{\mathbb{E}(s)}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}}$$

# Fuente Discontinua

## Ejemplo

Consideremos a un circuito RLC cuya inductancia es $L = 1\,\text{h}$, $R = 4\,\Omega$ y $C = \frac{1}{4}$ f, la variación inicial de la corriente es nula y el voltaje viene dado por la función:

$$E(t) = \begin{cases} t & , \quad 0 \le t < 1 \\ 2 - (t-1)^2 & , \quad 1 \le t < 2 \\ 1 & , \quad t \ge 2 \end{cases}$$

El modelo viene dado por:

$$\frac{di(t)}{dt} + 4i(t) + 4\int_0^t i(\tau)d\tau = E(t) \quad \underset{\text{Laplace}}{\overset{\text{Aplicando}}{\Longrightarrow}} \quad s\mathbb{I}(s) + 4\mathbb{I}(s) + 4\frac{\mathbb{I}(s)}{s} = \mathbb{E}(s)$$

O bien,

$$\mathbb{I}(s) = \frac{s\mathbb{E}(s)}{(s+2)^2}$$

$$\mathbb{I}(s) = \frac{1}{s(s+2)^2} - \frac{e^{-s}}{s(s+2)^2} + \frac{e^{-s}}{(s+2)^2} - \frac{2e^{-s}}{s^2(s+2)^2} + \frac{2e^{-2s}}{s^2(s+2)^2} + \frac{2e^{-2s}}{s(s+2)^2}$$

Para recuperar $i(t)$, usaremos el recurso de la integral y los teoremas de traslación. Veamos un ejemplo de como usarlo.

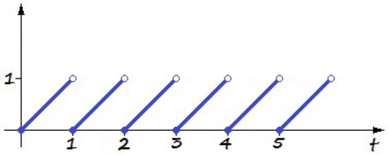
$$\frac{1}{s(s+2)^2} = \frac{\frac{1}{(s+2)^2}}{s} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t \tau e^{-2\tau} d\tau\right\} = \mathcal{L}\left\{-\frac{-te^{-2t}}{2} - \frac{e^{-2t}}{4} + \frac{1}{4}\right\}$$

Además,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(s+2)^2}\right\} = \left[-\frac{-(t-1)e^{-2(t-1)}}{2} - \frac{e^{-2(t-1)}}{4} + \frac{1}{4}\right]\mathfrak{U}(t-1)$$

# Fuente Discontinua Periódica

Si ahora para un circuito como el anterior, consideramos una fuente como la de la figura




Debemos usar el siguiente teorema:

**Teorema**

*Sea $f$ una función continua a trozos en $[0, \infty)$, de orden exponencial y periódica de período $T$. Entonces,*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt$$

Por tanto, la transformada de Laplace está dada por:

$$\begin{aligned}\mathbb{F}(s) &= \frac{1}{1-e^{-s}}\int_0^1 e^{-st}t\,dt = \frac{1}{1-e^{-s}}\left|-\frac{te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{1-e^{-s}}\left[-\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{1}{s^2}\right]\end{aligned}$$

# Gracias!