Funciones definidas positivas a valores complejos: ejemplos y teoremas de representación

Alejandra Patricia Aguilera
Escuela de Matemática, Facultad de Ciencias UCV
Seminario de Análisis

Jornadas de Investigación y Extensión
Facultad de Ciencias 2016
9 al 13 de Mayo. Universidad Central de Venezuela.

Motivación

Sea A una matriz simétrica 2×2 general con entradas reales

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

La matriz A induce la forma cuadrática

$$Q(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

Definición: A es semidefinida positiva si $Q(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Ejemplos

1. La matriz identidad es semidefinida positiva. Para $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene

$$Q(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2 \geq 0.$$

2. La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ no es semidefinida positiva, ya que

$$Q(-1,1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 < 0.$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad Q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

- $Q(1,0) = a$.
  A semidefinida positiva $\Rightarrow a \geq 0$.

- $Q(x,1) = ax^2 + 2bx + c$
  A semidefinida positiva $\Rightarrow ax^2 + 2bx + c \geq 0 \Rightarrow ac - b^2 = \det(A) \geq 0$.

Conclusión. A es semidefinida positiva si y solo si $a \geq 0$ y $\det(A) \geq 0$.

Otras caracterizaciones:

A es una matriz simétrica 2×2 con coeficientes reales.

1. A es definida positiva si $Q(x, y) > 0$ para todo $x, y \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.
2. A es definida negativa si $Q(x, y) < 0$ para todo $x, y \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.
3. A es indefinida si $Q(x, y) < 0$ para algunos $x, y \in \mathbb{R}$ y $Q(x, y) > 0$ para otros $x, y \in \mathbb{R}$.

En otras palabras:

1. A es definida positiva si y solo si $a > 0$ y $\det(A) > 0$.
2. A es definida negativa si $a < 0$ y $\det(A) > 0$.
3. A es indefinida si $\det(A) < 0$.

Una aplicación: Criterio del Hessiano en dos variables

Sean $D \subset \mathbb{R}^2$ abierto y $f : D \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$. La matriz Hessiana de f es

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

Sea $(x_0, y_0) \in D$ un punto crítico de f.

1. Si $H_f(x_0, y_0)$ es definida positiva, entonces f alcanza un mínimo local en (x_0, y_0).
2. Si $H_f(x_0, y_0)$ es definida negativa, entonces f alcanza un máximo local en (x_0, y_0).
3. Si $H_f(x_0, y_0)$ es indefinida, entonces (x_0, y_0) es un punto de ensilladura de f.

Si el determinante de la matriz $H_f(x,y)$ es

$$\Delta(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2$$

1. Si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0$ y $\Delta(x_0,y_0) > 0$, f alcanza un mínimo local en (x_0,y_0).
2. Si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) < 0$ y $\Delta(x_0,y_0) > 0$, f alcanza un máximo local en (x_0,y_0).
3. Si $\Delta(x_0,y_0) < 0$, (x_0,y_0) es un punto de ensilladura de f.

Ejemplo

Sea $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$. El único punto crítico de f es $(0,0)$. Su matriz Hessiana en $(0,0)$ es

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{2} > 0,$$

o bien

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 > 0 \quad \text{y} \quad \Delta(0,0) = 3 > 0,$$

$$\Downarrow$$

f alcanza un mínimo local en $(0,0)$.

Caso complejo

Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se dice semidefinida positiva si $A = A^*$ y $\xi A \xi^* \geq 0$ para todo $\xi \in \mathbb{C}^{1\times n}$. Esto es,

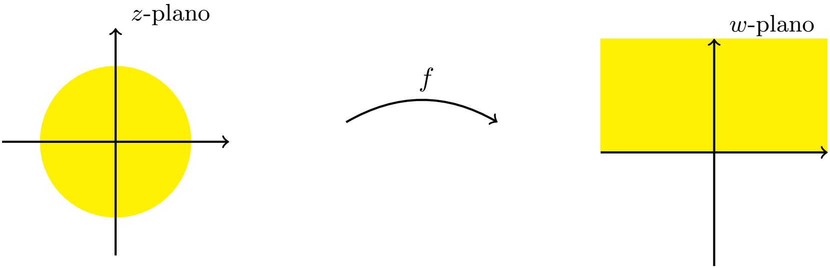
$$\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\xi_1} \\ \overline{\xi_2} \\ \vdots \\ \overline{\xi_n} \end{pmatrix} \geq 0$$

o equivalentemente,

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \xi_j \overline{\xi_k} \geq 0$$

La historia de las funciones definidas positivas comenzó en 1907, cuando Carathéodory estudió funciones de la forma

$$f(z) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} (a_r + ib_r) z^r.$$



En 1911, Toeplitz notó que las condiciones de Carathéodory podían ser reformuladas en términos de la no negatividad de las formas hermitianas:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{j-k} \xi_j \overline{\xi_k} \geq 0, ,$$

para $n = 1, 2, ...,$ y $\xi_1, ..., \xi_n \in \mathbb{C}$; donde $c_0 = 2$, $c_r = a_r - ib_r$, $c_{-r} = a_r + ib_r$.

Sucesiones definidas positivas

Una sucesión doblemente infinita de números complejos $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ es *definida positiva* si para cada $n \in \mathbb{N}$ y cualesquiera números complejos $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$.

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{j-k}\xi_j\overline{\xi_k} \geq 0,$$

Equivalentemente, la matriz $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & \cdots & a_{-(n-1)} \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_{-(n-2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

es semidefinida positiva.

Si $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión definida positiva, entonces

$$a_0 \geq 0, \quad a_{-j} = \overline{a_j}, \quad |a_j| \leq a_0.$$

- Si tomamos $n = 1$, $\xi_1 = 1$, si sigue $a_0 \geq 0$.

- Suponemos $\xi_1 \neq 0$, $\xi_j = 0$ para $2 \leq j \leq n-1$ y $\xi_n = 1$. Entonces

$$a_0(1 + |\xi_1|^2) + a_n\overline{\xi_1} + a_{-n}\xi_1 \geq 0$$

lo que implica $\mathrm{Im}(a_n\overline{\xi_1} + a_{-n}\xi_1) = 0$.
Si $\xi_1 = 1$, se tiene $\mathrm{Im}(a_n) = -\mathrm{Im}(a_{-n})$. Si ahora $\xi_1 = i$, $\mathrm{Re}(a_n) = \mathrm{Re}(a_{-n})$.
Concluimos $a_{-n} = \overline{a_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

- Si escribimos $\xi_1 = |\xi_1|e^{i\theta}$, $\xi_j = 0$ para $2 \leq j \leq n-1$ y $\xi_n = 1$,

$$a_0|\xi_1|^2 + 2|a_n||\xi_1| + a_0 \quad \geq \quad a_0|\xi_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(a_n e^{-i\theta}\right)|\xi_1| + a_0 \quad \geq \quad 0$$

Así, $|a_n| \leq a_0$.

Funciones definidas positivas

M. Mathias, en 1923 fue el primero en definir y estudiar las propiedades de las funciones definidas positivas de variable real. Motivado por los resultados de Caratheodory y Toeplitz expresó:

Una función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se dice *definida positiva* si la desigualdad

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi(x_j - x_k)\xi_j\overline{\xi_k} \geq 0$$

se satisface para cualquier elección de $n \in \mathbb{N}$, $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ y $\xi_1, ..., \xi_n \in \mathbb{C}$.

Para cada $n = 1, 2, ...$, la matriz cuadrada

$$A = \begin{pmatrix} \varphi(0) & \varphi(x_1 - x_2) & \cdots & \varphi(x_1 - x_n) \\ \varphi(x_2 - x_1) & \varphi(0) & \cdots & \varphi(x_2 - x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(x_n - x_1) & \varphi(x_n - x_2) & \cdots & \varphi(0) \end{pmatrix}$$

es semidefinida positiva.

De esta condición se sigue que

$$\varphi(0) \geq 0, \quad \varphi(-x) = \overline{\varphi(x)}, \quad |\varphi(x)| \leq \varphi(0).$$

Si $n = 1$ y $x \in \mathbb{R}$ se obtiene

$$\varphi(0) \geq 0$$

Tomando ahora $n = 2$, $x_1 = x$ y $x_2 = 0$, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \varphi(0) & \varphi(x) \\ \varphi(-x) & \varphi(0) \end{pmatrix}$$

debe ser semidefinida positiva, de donde

$$\varphi(-x) = \overline{\varphi(x)}$$

y

$$|\varphi(x)| \leq \varphi(0).$$

Algunas propiedades

- Si φ es definida positiva, entonces $\overline{\varphi}$ es definida positiva. Para todo número real t, $\varphi(tx)$ es definida positiva.
- Si φ_1 y φ_2 son funciones definidas positivas, entonces $\varphi_1\varphi_2$ también lo es.
- Si $\varphi_1, ..., \varphi_n$ son definidas positivas y $a_1, ..., a_n$ son números reales positivos, entonces $a_1\varphi_1 + \cdots + a_n\varphi_n$ es definida positiva.
- Si φ es definida positiva, entonces $|\varphi|^2$ y Re φ son definidas positivas.

Ejemplos

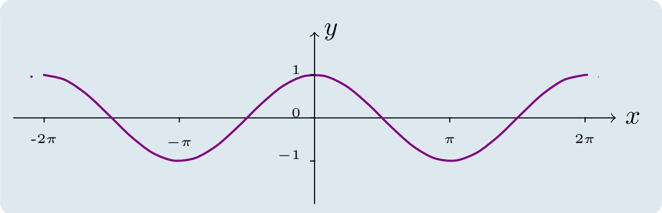
- $\varphi(x) = e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$

  Sean $n \in \mathbb{N}$, $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ y $\xi_1, ..., \xi_n \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} e^{i(x_j - x_k)} \xi_j \overline{\xi_k} = \left| \sum_{j=1}^{n} e^{ix_j} \xi_j \right|^2 \geq 0.$$

- $\varphi(tx) = e^{itx}$, $t \in \mathbb{R}$.

- Re $\varphi(x) = \cos(x)$

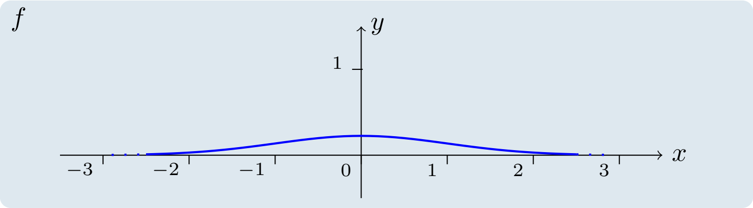


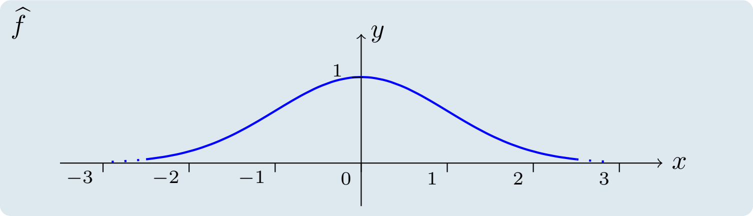
- Otro ejemplo de función definida positiva es la transformada de Fourier de una función positiva e integrable. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $f \geq 0$, entonces la transformada de Fourier de f,

$$\widehat{f}(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ixt}\, dt \quad (x \in \mathbb{R})$$

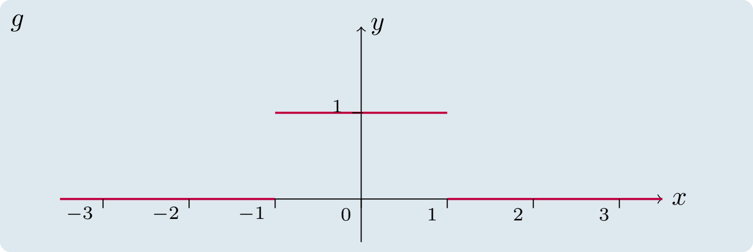
es definida positiva.

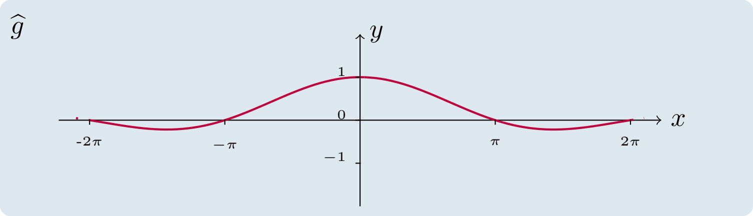
- $f(t) = \dfrac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \widehat{f}(x) = e^{-x^2/2}$



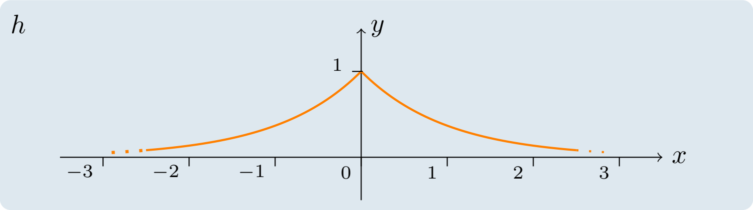


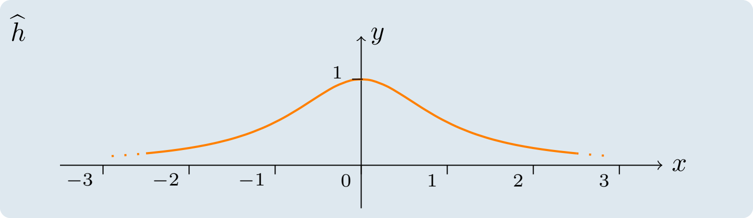
- $g(t) = \dfrac{1}{2}\chi_{[-1,1]}(t), \quad \widehat{g}(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$





- $h(t) = e^{-|t|}, \quad \widehat{h}(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$





Conexiones con otras áreas de la matemática

- (1911) F. Riesz vió una aplicación a la resolución de sistemas de ecuaciones integrales.
- (1911) G. Herglotz estableció la conexión con el problema trigonométrico de momentos.
- (1946) K. Fan estableció otras propiedades de las funciones definidas positivas representándolas como sucesiones estacionarias de vectores en un espacio de Hilbert.
- (1958, 1962, 1965) N. Akhiezer, M. Krein y G. Szëgo estudiaron algunas aplicaciones de las funciones definidas positivas en análisis y probabilidades.

Teoremas de representación

Los siguientes teoremas caracterizan las sucesiones y las funciones definidas positivas.

Teorema (Herglotz, 1911)

Una sucesión de números complejos $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *es definida positiva si, y solo si, existe una medida de Borel finita* μ *en* $[-\pi,\pi]$ *tal que*

$$a_j = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ijt}\, d\mu(t) \quad (j\in\mathbb{Z}) \tag{1}$$

Teorema (Bochner, 1932)

φ *es una función continua y definida positiva en* $\mathbb{R}$ *si, y solo si, existe una medida de Borel positiva y finita* μ *en* $\mathbb{R}$ *tal que* φ *es la transformada de Fourier-Stieltjes de* μ*:*

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\, d\mu(t), \qquad (x\in\mathbb{R}). \tag{2}$$

- Generalización a varias variables reales: Bochner, 1933.

- Aplicación del Teorema de Bochner: Teorema de Stone que establece un resultado sobre grupos uniparamétricos de operadores unitarios.

- La transformada de Fourier-Stieltjes de la función de distribución de una variable aleatoria es llamada función característica.
  f es una función característica si, y solo si, f es continua, definida positiva y $f(0) = 1$.

- El problema de extensión: M. Krein, 1940.
  Si f es una función continua y definida positiva en $[-A, A]$ ¿Existe una función g en $\mathbb{R}$ definida positiva tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in [-A, A]$?
  La respuesta es afirmativa.

Referencias

- R. Bhatia, Positive Definite Matrices, Princeton Series in applied mathematics, 2007.
- M. Reed and B. Simon, Methods of modern mathematical physics I, Academic Press, INC.
- J. Stewart, Positive definite funtions and generalizations, an historical survey, Rocky Mountain J. Math., 6 (1976) 409-434.
- R.E. Williamson, R.H. Crowell and H.F.Trotter , Calculus of vector functions, Pentice Hall, 1968.

¡Gracias por su atención!