UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
POSTGRADO EN MATEMATICA

PROBLEMAS DE INTERPOLACIÓN EN ESPACIOS DE SOBOLEV

Proyecto de Trabajo de Grado

Maestría en Matemática

A ser desarrollado por: Lic. Maicol Ochoa.

Cédula de identidad: 16.085.364.

Firma: ______________________

Tutor: Dra. Marisela Domínguez.

Lugar de trabajo: Universidad Central de Venezuela.

No C.I.: 5.299.337.

Firma: ______________________

Caracas, Venezuela

Marzo de 2009

Índice general

CAPíTULO 1

El problema

Motivación del problema

Espacios de Sobolev. Existen muchos criterios matemáticos de suavidad para las funciones. El criterio más básico podría ser el de la continuidad. Un noción más fuerte de suavidad es la diferenciabilidad, una noción aún más fuerte de suavidad es la continuidad de la derivada (se dice que estas funciones están en la clase C^1). Funciones diferenciables son de especial importancia en muchas áreas, en particular para las ecuaciones diferenciales.

Sin embargo en el siglo XX, se observó que el espacio C^1 (o el C^2, etc.) no era exactamente el espacio más apropiado para estudiar las soluciones de las ecuaciones diferenciales.

Los espacios de Sobolev son los espacios naturales de funciones en los que se encuentran las soluciones de las ecuaciones diferenciales.

Un espacio de Sobolev es un espacio vectorial de funciones equipado con una norma que es una combinación de normas en L^p de la función misma y de sus derivadas hasta un orden dado. Las derivadas se entienden en un sentido débil que permite que el espacio sea completo, es decir que el espacio sea un espacio de Banach.

Intuitivamente, un espacio de Sobolev es un espacio de Banach de funciones con suficientes derivadas en un cierto dominio, apropiado para considerar un determinado problema, equipado con una norma que mide tanto el tamaño como la suavidad de la función.

Los espacios de Sobolev llevan este nombre en honor al matemático ruso Sergei L. Sobolev. Su importancia yace en el hecho que las soluciones de las ecuaciones diferenciales parciales están de manera natural en espacios de Sobolev en lugar de estar en los espacios clásicos de funciones continuas, además las derivadas de las soluciones se entienden en el sentido clásico.

Interpolación. En el sentido clásico más simple interpolación es la reconstrucción constructiva (posiblemente aproximada) de una función de cierta clase a partir de sus propios valores, o a partir de valores conocidos de sus derivadas, en puntos dados.

El problema de interpolación de Nevanlinna y Pick. Sean $z_1, z_2, \ldots, z_n$ puntos fijos en el disco unitario $\mathbb{D}$. El conjunto $\mathcal{D}$ de los puntos $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ en $\mathbb{C}^n$, tales que existe una función $\phi \in H^\infty$ tal que $|\phi| \leq 1$ y $\phi(z_j) = w_j$, para $1 \leq j \leq n$ fue descrito independientemente por Nevanlinna [**18**] y por Pick [**20**]. Para resolver este problema de interpolación Nevanlinna y Pick usaron técnicas completamente diferentes y encontraron condiciones de interpolación completamente diferentes.

En este trabajo estamos interesados en la condición de Pick: la matriz de tamaño $n \times n$ dada por

$$\left\{ \frac{1 - \overline{w}_j w_k}{1 - \overline{z}_j z_k} \right\}_{j,k=1,\ldots,n}$$

es definida positiva.

Esta matriz está relacionada con el núcleo de Szegö

$$k(\lambda, z) = \frac{1}{1 - \overline{\lambda} z}$$

para $\lambda, z \in \mathbb{D}$. Esta k es la función núcleo del espacio H^2 (ver [**3**]).

Desde que apareció el artículo de Sarason [**23**] la influencia del problema de interpolación de Nevanlinna-Pick ha sido extraordinaria en teoría de operadores.

H^∞ visto como el conmutante del shift en H^2. Tal como veremos a continuación el problema de interpolación clásico de Nevanlinna y Pick está muy relacionado con los espacios de Hardy, especialmente con los espacios H^∞ y H^2.

Sea $S : H^2 \to H^2$ el shift unilateral, esto es, el operador dado por

$$Sf(z) = zf(z)$$

para $f \in H^2$ y $z \in \mathbb{D}$. Resulta que S es una isometría. Se puede probar que T es un operador acotado en H^2 que conmuta con S si y sólo si existe $\phi \in H^\infty$ (ϕ es única) tal que

$$T(f)(z) = \phi(z) f(z)$$

para todo $f \in H^2$ y $z \in \mathbb{D}$. Más aún, si T y ϕ están relacionadas como antes entonces

$$\|T\| = \|\phi\|_\infty.$$

Por lo tanto, si S es el operador de multiplicación por z en H^2 entonces el espacio H^∞ puede ser interpretado como el conmutante de S.

El espacio de Sobolev H(0,1). Sea $H(0,1)$ el espacio de Hilbert de las funciones absolutemente continuas en $[0,1]$ con derivadas de cuadrado integrable, con el producto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f\,\overline{g} + \int_0^1 f\,'\,\overline{g\,'}$$

y $\|f\|_2 = \langle f, f\rangle^{1/2}$.

El conmutante de M_t en $H(0,1)$.

Sea $M_t : H(0,1) \to H(0,1)$ el operador dado por

$$M_t f(t) = t f(t)$$

para $f \in H(0,1)$ y $t \in [0,1]$.

El conmutante de M_t en $H(0,1)$ es la colección de todos los operadores en H que tienen la forma

$$M_\phi f(t) = \phi(t) f(t)$$

para alguna $\phi \in H(0,1)$.

Por lo tanto el espacio que hará las veces de H^∞ para el problema de Nevanlinna-Pick es $H(0,1)$ equipado con la norma dada por

$$\|\phi\|_\infty \equiv \sup\{\|\phi f\| : f \in H(0,1), \|f\| = 1\} \leq 1.$$

El problema de interpolación de Nevanlinna-Pick en el espacio $H(0,1)$.

Sea k la función núcleo del espacio de Hilbert $H(0,1)$ (ver [**3**]).

Agler [**2**] dió una versión del resultado de Pick sustituyendo el espacio H^2 por el espacio de Sobolev $H(0,1)$, el cual establece lo siguiente:

Sean $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0,1]$ y $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{C}$. Entonces: existe $\phi \in H(0,1)$ con $\|\phi\|_\infty \leq 1$ y $\phi(t_j) = w_j$ para $j = 1, \ldots, n$ si y sólo si la matriz de tamaño $n \times n$ dada por

$$\{(1 - \overline{w}_j w_k) k(t_j, t_k)\}_{j,k=1,\ldots,n}$$

es definida positiva.

Planteamiento del problema.

Dar una versión abstracta del teorema de interpolación de Agler en espacios de Sobolev. Este resultado de Agler es análogo al teorema de Pick.

Objetivos

Objetivo general.

(1) Plantear y resolver problemas de interpolación en espacios de Sobolev.
(2) Enunciar y demostrar teoremas abstractos que permitan obtener como corolario el resultado de interpolación de Agler en espacios de Sobolev, que es análogo al teorema de Pick.

Objetivos específicos.

(1) Estudiar los espacios de Sobolev [**1**].
(2) Estudiar la sección del libro [**15**] referente al teorema de Pick [**20**].
(3) Estudiar la demostración del teorema de Pick a partir del teorema de Sarason que aparece en el libro [**19**].
(4) Estudiar el artículo de Agler referente al problema de interpolación de Nevanlinna-Pick en espacios de Sobolev [**2**].
(5) Estudiar la relación entre el teorema de Sarason y algunos teoremas de levantamiento y de representación [**4, 12**].
(6) Relacionar los temas anteriores con algunos de los resultados de [**8, 9, 11, 17**].
(7) Dar una nueva demostración de algunos de los teoremas de los artículos anteriores.
(8) De ser posible, establecer nuevas versiones o generalizaciones de los resultados anteriores.
(9) De ser posible, determinar nuevas relaciones entre algunos de los diferentes temas indicados.

Justificación del problema

Observación 1. El teorema clásico de interpolación de Nevanlinna-Pick dice que, dados diferentes $z_1, z_2, \ldots, z_n$ en el disco unitario abierto del plano complejo y dados diferentes números complejos $w_1, w_2, \ldots, w_n$ existe ϕ en el espacio de Hardy H^∞ con $\|\phi\|_\infty \leq 1$ y $\phi(z_i) = w_i$ para $1 \leq i \leq n$ si y sólo si la matriz $n \times n$ dada por

$$\left\{ \frac{1 - \overline{w}_i w_j}{1 - \overline{z}_i z_j} \right\}_{i,j=1,\ldots,n}$$

es definida positiva.

En 1990, dentro del contexto de los espacios de Sobolev, Agler [**2**] dió un resultado de interpolación análogo al de Pick.

Observación 2.

El libro de Foias - Frazho [**16**] hace énfasis en la relevancia del teorema del levantamiento del conmutante para las siguientes ramas de la ciencia: análisis complejo, análisis funcional y aplicaciones a problemas de ingeniería.

En ese libro, puede verse cómo aplicaciones geométricas del teorema de levantamiento del conmutante se relacionan con la versión a valores operadores de los problemas de interpolación clásicos de Carathéodory, Fejér, Nevanlinna-Pick y con problemas de interpolación para matrices de Hankel.

Observación 3.

Desde que apareció el artículo de Sarason [**23**] la influencia del problema de interpolación de Nevanlinna-Pick ha sido extraordinaria en teoría de operadores.

Conclusión. Las observaciones dadas anteriormente indican que los temas y los problemas que pretendemos resolver en este trabajo son interesantes y constituyen un problema aún no resuelto que podría ser investigado.

CAPíTULO 2

Información complementaria

Área de conocimiento

Área: Ciencias.

Disciplina: Matemática.

Especialidad principal: Análisis Funcional.

Temas a considerar

(1) Espacios con producto interno.
(2) Espacios de Hilbert con núcleo reproductivo.
(3) Análisis funcional.
(4) Análisis armónico.
(5) Teoría de operadores.
(6) Espacios de Sobolev.

Técnicas a utilizar.

(1) Técnicas de análisis real: medidas abstractas, medidas complejas, teorema de representación de Riesz para funcionales lineales en espacios de funciones continuas (ver [**21, 22**]).
(2) Técnicas de análisis funcional: espacios de Banach, teorema de Hahn-Banach, espacios de Hilbert (ver [**10**]).
(3) Técnicas de análisis armónico: series de Fourier, transformada de Fourier (ver [**14**]).
(4) Técnicas de teoría espectral: resolvente, espectro, teorema espectral, radio espectral (ver [**13**]).
(5) Técnicas de análisis complejo: funciones analíticas, espacios de Hardy (ver [**22**]).
(6) Técnicas de espacios de Sobolev y otros espacios de funciones "suaves"(ver [**1, 5, 6, 7, 24**]).

Metodología a utilizar.

(1) Revisión bibliográfica.
(2) Estudio de demostraciones conocidas de resultados de otros investigadores.
(3) Asistencia a seminarios de investigación.
(4) Discusión periódica con el tutor con el propósito de profundizar en los temas de estudio.
(5) Formulación de nuevas demostraciones de los resultados estudiados.
(6) Formulación de nuevas proposiciones y nuevos teoremas.
(7) Realización de una o dos presentaciones públicas presentando los temas estudiados y las nuevas demostraciones obtenidas.

Cronograma de trabajo

Etapa	1	2	3
Mar 2009 - Jul 2009	X	.	.
Sep 2009 - Feb 2010	.	X	.
Marzo 2010 - Julio 2010	.	.	X

- Primera etapa. Marzo 2009 - Julio 2009.

  Revisión bibliográfica y estudio de diferentes demostraciones de un mismo teorema.

- Segunda etapa. Septiembre 2009 - Febrero 2010.

  Formulación y desarrollo de nuevas demostraciones de teoremas conocidos. Probablemente formulación y desarrollo de nuevos resultados.a

- Tercera etapa. Marzo 2010 - Julio 2010.

  Redacción y presentación del trabajo.

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
POSTGRADO EN MATEMATICA
FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO ELABORADO
POR EL ESTUDIANTE
para la presentación del

PROYECTO DE TRABAJO DE GRADO

Maestría en Matemática

Estudiante: Lic. Maicol Ochoa.
Tutor: Dra. Marisela Domínguez.

Caracas, Venezuela
Marzo de 2009

Bases teóricas

A continuación se presentan algunos antecedentes de la investigación. Estos fueron seleccionados mediante una revisión bibliográfica, basada en publicaciones existentes y textos especializados, que permiten fundamentar los objetivos del trabajo a realizar. Los enunciados que se presentan en este capítulo son el producto de la investigación de varios especialistas del área y han sido publicados por ellos en revistas de reconocido prestigio internacional. Estos resultados constituyen los antecedentes de esta investigación.

Para una mayor comprensión de estos antecedentes, el estudiante que participa en este proyecto ha desarrollado este capítulo en el cual se precisa el resultado de Agler y se incluyen las demostraciones de algunos resultados conocidos para espacios de Sobolev. Estas notas podrían llegar a ser parte de su Trabajo de Grado.

El problema de Nevanlinna y Pick. La condición de Pick.

Sean $z_1, z_2, \ldots, z_n$ puntos fijos en el disco unitario $\mathbb{D}$. El conjunto $\mathcal{D}$ de puntos $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ en $\mathbb{C}^n$, tales que existe una $f \in H^\infty$ con $|f| \leq 1$ y $f(z_i) = w_i$, para $1 \leq i \leq n$ fue descrito independientemente por Nevanlinna [**18**] y Pick [**20**].

Para resolver este problema de interpolación Nevanlinna y Pick usaron técnicas muy diferentes y encontraron condiciones de interpolación muy diferentes.

Estamos interesados en la condición de Pick: la matriz $n \times n$ dada por

$$\left\{ \frac{1 - \overline{w}_i w_j}{1 - \overline{z}_i z_j} \right\}_{i,j=1,\ldots,n}$$

es semidefinida positiva.

Espacios de Sobolev de orden entero. Distribuciones y derivadas débiles.

En lo que sigue, trabajaremos en $\mathbb{R}^n$ dotado del producto interno usual y la norma euclideana.

Una n-tupla $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de enteros no negativos será llamada *multi-índice*.

Dados $x \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ un multi-índice, el símbolo x^α representa al monomio $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, es decir

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

y el grado de x^α es el entero positivo

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

Para $1 \leq i \leq n$ sea

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Para cada multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ se considerará el operador diferencial

$$D^\alpha = D^{\alpha_1} \cdots D^{\alpha_n}.$$

El operador D^α es de orden $|\alpha|$ y $D^{(0,\ldots,0)}$ es el operador identidad.

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Denotamos por $C^m(\Omega)$ al espacio de funciones $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ tales que ϕ y $D^\alpha \phi$ son continuas en Ω para todo multi-índice α tal que $|\alpha| \leq m$. Se define

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} C^m(\Omega).$$

El conjunto $C_0^m(\Omega)$ es el subespacio de $C^m(\Omega)$ formado por las funciones con soporte compacto en Ω.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Decimos que una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es *localmente integrable* si u es integrable sobre cualquier conjunto compacto A tal que $\overline{A} \subset \Omega$. Al conjunto de funciones localmente integrables sobre Ω lo denotaremos por el símbolo $L^1_{loc}(\Omega)$.

Una *distribución de tipo integral* es un operador de la forma

$$T_u(\phi) = \int_\Omega u(x)\phi(x)dx$$

con $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ y $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Sea $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Si existe $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que se satisface la relación

$$T_v = D^\alpha T_u$$

para algún multi-índice α, entonces se dice que v es la *derivada débil o distribucional* de orden $|\alpha|$ de u. Esta derivada se suele denotar como

$$v \stackrel{d}{=} D^\alpha u.$$

En este punto ha de resaltarse que existe un concepto general de *distribución* que, como es de esperarse, engloba a las de tipo integral descritas antes. Sin embargo, para los efectos de este trabajo, el estudio de tal concepto general desviaría en alguna medida la persecusión de los objetivos que nos hemos propuesto.

A continuación definimos lo que en adelante llamaremos espacio de Sobolev de orden entero. Para tales efectos, como veremos, basta conocer el concepto de distribuciones de tipo integral.

Dados $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ p \geq 1$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, consideremos el subespacio de $L^p(\Omega)$ dado por

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega)\,:\, v \stackrel{d}{=} D^\alpha u \in L^p(\Omega)\,\text{para todo multi-índice}\,\alpha\,\text{con}\,|\alpha| \leq m\}.$$

Definamos las siguientes funciones sobre $W^{m,p}$:

$$\|u\|_{m,p} = \left\{ \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right\}^{1/p}$$

si $1 \leq p < \infty$.

$$\|u\|_{m,\infty} = \sup\{\|D^\alpha u\|_\infty \,:\, 0 \leq |\alpha| \leq m\}.$$

Se llama *espacio de Sobolev de orden* m sobre Ω al par $(W^{m,p}(\Omega), \|\,\|_{m,p})$ con $1 \leq p \leq \infty$

Las principales características de los espacios de Sobolev se resumen en los siguientes teoremas.

TEOREMA 4. *El par* $(W^{m,p}(\Omega), \|\,\|_{m,p})$ *es un espacio de Banach.*

Demostración.

Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $W^{m,p}(\Omega)$. Entonces, si α es un multi-índice tal que $|\alpha| \leq m$ tenemos que $\{D^\alpha u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $L^p(\Omega)$. Por completitud de $L^p(\Omega)$ sabemos que existen u, $v \in L^p(\Omega)$ tales que

$$u_n \to u \quad \text{y} \quad D^\alpha u_n \to v \qquad \text{cuando } n \to \infty.$$

Ahora bien, dado que $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$, se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$ la función u_n determina una distribución integral T_{u_n}. Si $\phi \in C_o^\infty(\Omega)$, entonces por la desigualdad de Hölder se cumple que

$$|T_{u_n}(\phi) - T_u(\phi)| \leq \int_\Omega |u_n(x) - u(x)||\phi(x)|dx \leq \|\phi\|_{p'}\|u_n - u\|_p$$

donde p' es el conjugado de p.

Análogamente se prueba que

$$T_{D^\alpha u_n}(\phi) \to T_v(\phi)$$

para todo $\phi \in C_o^\infty(\Omega)$.

Para terminar, veamos que $u \in W^{m,p}(\Omega)$. En efecto, una aplicación directa del teorema de integración por partes nos permite escribir lo siguiente:

$$T_v(\phi) = \lim_n T_{D^\alpha u_n}(\phi) = \lim_n (-1)^{|\alpha|} T_{u_n}(D^\alpha \phi) = D^\alpha T_u(\phi)$$

para cada $\phi \in C_o^\infty(\Omega)$, lo que prueba que

$$v \stackrel{d}{=} D^\alpha u$$

y se tiene así la completitud establecida.

$\square$

Teorema 5. *$W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach separable si $1 \leq p < \infty$ y si $1 < p < \infty$ entonces $W^{m,p}(\Omega)$ es reflexivo y uniformemente convexo.*

Demostración.

Denotemos por N al número de multi-índices α tales que $0 \leq |\alpha| \leq m$.

Para $p \in [1, \infty]$ sea

$$L^p_N(\Omega) = L^p(\Omega) \times \stackrel{N}{\cdots} \times L^p(\Omega)$$

y definamos las siguientes normas en este espacio:

$$\|u\|_{L_N^p} = \left(\sum_{j=i}^{N} \|u_j\|_p^p \right)^{1/p}$$

si $1 \leq p < \infty$

$$\|u\|_{L_N^\infty} = \sup\{\|u_j\|_\infty \,:\, j = 1, \cdots, N\}$$

Sabemos que $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach separable si $1 \leq p < \infty$ y es reflexivo y uniformemente convexo si $1 < p < \infty$, por ende, el producto finito $L_N^p(\Omega)$ también tiene tales propiedades.

Consideremos el operador $P : W^{m,p}(\Omega) \to L_N^p(\Omega)$ dado por

$$P(u) = (D^\alpha u)_{0 \leq |\alpha| \leq m} \,.$$

Es claro que el operador P es lineal, pues el operador diferencial D^α lo es. Además P es una isometría, pues por construcción se observa que

$$\|P(u)\|_{L_N^p} = \|u\|_{m,p}.$$

Luego P es un isomorfismo isométrico de $W^{m,p}$ sobre algún subespacio cerrado $W \subset L_N^p$. Entonces, W es separable si $1 \leq p < \infty$ y es reflexivo y uniformemente convexo si $1 < p < \infty$, y como

$$W^{m,p}(\Omega) = P^{-1}(W),$$

se tiene el resultado.

□

En lo que sigue, establecemos una caracterización básica del espacio dual de $W^{m,p}(\Omega)$. Primero probaremos una generalización del teorema de representación de Riesz para el caso n dimensional. Por simplicidad, asumimos la notación

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

cuando la integral tenga sentido.

Lema 6. *Sean $1 \leq p < \infty$ y q dos números conjugados. Para cada $L \in (L_N^p(\Omega))^*$ existe un único $v \in L_N^q(\Omega)$ tal que para todo $u \in L_N^p$ se cumple que*

$$L(u) = \sum_{j=1}^{N} \langle u_j, v_j \rangle.$$

Demostración.

Dados $1 \leq j \leq N$ y $\omega \in L^p(\Omega)$ definamos el vector

$$\omega_{(j)} = (\omega\, \delta_{ij})_{i=1}^{N}$$

en $L_N^p(\Omega)$.

Si $L \in (L_N^p(\Omega))^*$, entonces la relación

$$L_j(\omega) = L(\omega_{(j)})$$

define un operador en $(L^p(\Omega))^*$. Por el teorema de Riesz en una dimensión, sabemos que existe un único $v_j \in L^q(\Omega)$ tal que si $\omega \in L^p(\Omega)$ se cumple que

$$L(\omega_{(j)}) = L_j(\omega) = \langle \omega, v_j \rangle$$

Luego, para $u \in L_N^p(\Omega)$ tenemos:

$$L(u) = L\left(\sum_{j=1}^{N} u_{j(j)}\right) = \sum_{j=1}^{N} L(u_{j(j)}) = \sum_{j=1}^{N} \langle u_j, v_j \rangle$$

probando así el resultado.

□

Ahora estamos en condiciones de probar lo siguiente:

Teorema 7. *Sean $1 \leq p < \infty$ y q dos números conjugados. Para cada $L \in (W^{m,p}(\Omega))^*$ existe un elemento $v = (v_\alpha)_{0 \leq |\alpha| \leq m} \in L_N^p(\Omega)$ tal que*

$$L(u) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, v_\alpha \rangle$$

para todo $u \in W^{m,p}(\Omega)$

Demostración.

Ya hemos visto que

$$W^{m,p}(\Omega) = P^{-1}(W),$$

donde W es un subespacio cerrado de $L^p_N(\Omega)$ y P es un isomorfismo isométrico.

Dado $L \in (W^{m,p}(\Omega))^*$ sea L^* un operador lineal sobre W tal que

$$L^*(P(u)) = L(u)$$

Como P es isomorfismo isométrico, entonces $L^* \in W^*$ y

$$\|L^*\|_{W^*} = \|L\|_{(W^{m,p}(\Omega))^*}.$$

El teorema de Hahn-Banach garantiza la existencia de una extensión lineal de L^* a todo el espacio $L^p_N(\Omega)$. Sea $\hat{L}$ tal extensión. Por el lema anterior, sea $v = (v_\alpha)_{0\leq|\alpha|\leq m} \in L^q_N(\Omega)$ tal que

$$\hat{L}(\cdot) = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \langle \cdot, v_\alpha \rangle.$$

En particular, si $u \in W^{m,p}(\Omega)$ obtenemos:

$$L(u) = L^*(P(u)) = \hat{L}(P(u)) = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \langle D^\alpha u, v_\alpha \rangle$$

lo que concluye la prueba.

□

Extensión del resultado de Pick a un espacio de Sobolev.

En el contexto de los espacios de Sobolev, Agler [**2**] dió un resultado de interpolación análogo al de Pick.

Supongamos que $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Definimos el espacio $W(a,b)$ como

$$W(a,b) = \{u \in L^2(a,b) : u' \in L^2(a,b)\}.$$

Es conocido que $W(a,b)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|u\|_W = \left(\|u\|_2^2 + \|u'\|_2^2\right)^{1/2}.$$

$W(a,b)$ es un caso particular de espacio de Sobolev. Los espacios de Sobolev jugarán un papel importante en este proyecto.

Sea $H(0,1)$ el espacio de Hilbert de las funciones absolutamente continuas en $[0,1]$ con derivadas de cuadrado integrable, con el producto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f\,\overline{g} + \int_0^1 f'\,\overline{g'}.$$

Sea k la función núcleo de $H(0,1)$, Agler probó que, dados diferentes $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0,1]$ y dados diferentes números complejos $w_1, w_2, \ldots, w_n$ existe $\phi \in H$ con

$$\|\phi\|_\infty \equiv \sup\{\|\phi f\| : f \in H, \|f\| = 1\} \leq 1$$

y $\phi(t_i) = w_i$ para todo i si y sólo si la matriz $n \times n$ dada por

$$\{(1 - \overline{w}_i w_j) k(t_i, t_j)\}_{i,j=1,\ldots,n}$$

es semidefinida positiva.

Bibliografía

[1] R. Adams & J. Fournier. *Sobolev spaces.* 2nd ed. Pure and Applied Mathematics 140. New York, Academic Press. xiii. (2003). Citado en página(s): 7, 9

[2] J. Agler. *Nevanlinna-Pick interpolation on Sobolev space.* Proc. Am. Math. Soc. 108, No.2, (1990) 341-351. Citado en página(s): 5, 7, 8, 20

[3] N. Aronszajn. *Theory of reproducing kernels.* Trans. Am. Math. Soc. 68, 337-404 (1950). 4, 5

[4] R. Bruzual & M. Domínguez. *Equivalence between the dilation and lifting properties of an ordered group through multiplicative families of isometries. A version of the commutant lifting theorem on some lexicographic groups.* Integral Equations Oper. Theory 40 1-15 (2001). Citado en página(s): 7

[5] G. Choquet. *Lectures on analysis. Vol. I: Integration and topological vector spaces.* Edited by J. Marsden, T. Lance and S. Gelbart. 3rd printing. Mathematics Lecture Note Series. 24 (1976). Citado en página(s): 9

[6] G. Choquet. *Lectures on analysis. Vol. II: Representation theory.* Edited by J. Marsden, T. Lance and S. Gelbart. 3rd printing. Mathematics Lecture Note Series. 25. (1976). Citado en página(s): 9

[7] G. Choquet. *Lectures on analysis. Vol. III: Infinite dimensional measures and problem solutions.* Edited by J. Marsden, T. Lance and S. Gelbart. 3rd printing. Mathematics Lecture Note Series. 26. (1976). Citado en página(s): 9

[8] M. Cotlar. *Núcleos Invariantes y Teoremas de Dilatación, Parametrización y Predicción.* Asociación Matemática Venezolana, Boletín, Vol. I, N°1, (1994). Citado en página(s): 7

[9] M. Cotlar, R. Bruzual, P. Alegría, M. Domínguez, J. Giménez & S. Marcantognini. *Extensión y Representación de Formas Invariantes en la Teoría de Interpolación, Predicción y Dilatación.* Tercera Escuela Venezolana de Matemáticas, 1990. Citado en página(s): 7

[10] M. Cotlar & R. Cignoli. *An introduction to functional analysis.* North Holland, (1974). Citado en página(s): 9

[11] M. Cotlar & C. Sadosky. *Nehari and Nevanlinna-Pick problems and holomorphic extensions in the polydisk in terms of restricted BMO.* J. Funct. Anal. 124, No.1, 205-210 (1994). Citado en página(s): 7

[12] M. Domínguez. *Interpolation and prediction problems for connected compact abelian groups.* Integral Equations Operator Theory 40, 2001, 212-230. Citado en página(s): 7

[13] R. Douglas. *Banach algebra techniques in operator theory.* Academic press (1972). Citado en página(s): 9

[14] H. Dym & H.P. McKean. *Fourier Series and Integrals.* Academic Press, 1972. Citado en página(s): 9

[15] J. Garnett. *Bounded analytic functions.* Academic Press, 1981. Citado en página(s): 7

[16] C. Foias & A. Frazho, *The commutant lifting approach to interpolation problems.* Operator Theory: Advances and Applications, 44. Basel. Birkhäuser. xxiii, 1990. Citado en página(s): 8

[17] Z. Nehari. *On bounded bilinear forms.* Annals of Mathematics, 65-1, 1957, pp. 153 - 162. Citado en página(s): 7

[18] Nevanlinna, R. *Uber beschränkte Funktionen, die in gegebenen Punkten vorgeschriebene Werte annehmen.* Ann. Acad. Sc. Fennicae A 13, Nr. 1, 1-71 (1920). Citado en página(s): 4, 13

[19] N. Nikol'skii. *Treatise on the Shift Operator.* Springer-Verlag, 1986. Citado en página(s): 7

[20] G. Pick. *Über die Beschränkungen analytischer Funktionen, welche durch vorgegebene Funktionswerte bewirkt werden.* Math. Ann. 77, 7-23 (1916). Citado en página(s): 4, 7, 13

[21] H.L. Royden. *Real Analysis*, Collier Macmillan International Editions, 1968. Citado en página(s): 9

[22] W. Rudin. *Fourier analysis on groups.* Interscience, 1962. Citado en página(s): 9

[23] D. Sarason. *Generalized interpolation in* H^∞. Trans. Amer. Math. Soc., 127, 1967, pp. 179 - 203. Citado en página(s): 4, 8

[24] L. Schwartz. *Théorie des distributions. (Distribution theory). (Théorie des distributions.)* Nouveau tirage. Paris: Hermann. xii, (1998). Citado en página(s): 9