UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
POSTGRADO EN MATEMATICA
FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO ELABORADO
POR EL ESTUDIANTE
para la presentación del

PROYECTO DE TRABAJO DE GRADO

Maestría en Matemática

Estudiante: Lic. Maicol Ochoa.
Tutor: Dra. Marisela Domínguez.

Caracas, Venezuela
Marzo de 2009

Índice general

Bases teóricas

A continuación se presentan algunos antecedentes de la investigación. Estos fueron seleccionados mediante una revisión bibliográfica, basada en publicaciones existentes y textos especializados, que permiten fundamentar los objetivos del trabajo a realizar. Los enunciados que se presentan en este capítulo son el producto de la investigación de varios especialistas del área y han sido publicados por ellos en revistas de reconocido prestigio internacional. Estos resultados constituyen los antecedentes de esta investigación.

Para una mayor comprensión de estos antecedentes, el estudiante que participa en este proyecto ha desarrollado este capítulo en el cual se precisa el resultado de Agler y se incluyen las demostraciones de algunos resultados conocidos para espacios de Sobolev. Estas notas podrían llegar a ser parte de su Trabajo de Grado.

El problema de Nevanlinna y Pick. La condición de Pick.

Sean $z_1, z_2, \ldots, z_n$ puntos fijos en el disco unitario $\mathbb{D}$. El conjunto $\mathcal{D}$ de puntos $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ en $\mathbb{C}^n$, tales que existe una $f \in H^\infty$ con $|f| \leq 1$ y $f(z_i) = w_i$, para $1 \leq i \leq n$ fue descrito independientemente por Nevanlinna [**18**] y Pick [**20**].

Para resolver este problema de interpolación Nevanlinna y Pick usaron técnicas muy diferentes y encontraron condiciones de interpolación muy diferentes.

Estamos interesados en la condición de Pick: la matriz $n \times n$ dada por

$$\left\{ \frac{1 - \overline{w}_i w_j}{1 - \overline{z}_i z_j} \right\}_{i,j=1,\ldots,n}$$

es semidefinida positiva.

Espacios de Sobolev de orden entero. Distribuciones y derivadas débiles.

En lo que sigue, trabajaremos en $\mathbb{R}^n$ dotado del producto interno usual y la norma euclideana.

Una n-tupla $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de enteros no negativos será llamada *multi-índice*.

Dados $x \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un multi-índice, el símbolo x^α representa al monomio $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, es decir

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

y el grado de x^α es el entero positivo

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

Para $1 \leq i \leq n$ sea

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Para cada multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ se considerará el operador diferencial

$$D^\alpha = D^{\alpha_1} \cdots D^{\alpha_n}.$$

El operador D^α es de orden $|\alpha|$ y $D^{(0,\dots,0)}$ es el operador identidad.

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Denotamos por $C^m(\Omega)$ al espacio de funciones $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ tales que ϕ y $D^\alpha \phi$ son continuas en Ω para todo multi-índice α tal que $|\alpha| \leq m$. Se define

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} C^m(\Omega).$$

El conjunto $C_0^m(\Omega)$ es el subespacio de $C^m(\Omega)$ formado por las funciones con soporte compacto en Ω.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Decimos que una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es *localmente integrable* si u es integrable sobre cualquier conjunto compacto A tal que $\overline{A} \subset \Omega$. Al conjunto de funciones localmente integrables sobre Ω lo denotaremos por el símbolo $L^1_{loc}(\Omega)$.

Una *distribución de tipo integral* es un operador de la forma

$$T_u(\phi) = \int_\Omega u(x)\phi(x)dx$$

con $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ y $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Sea $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Si existe $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que se satisface la relación

$$T_v = D^\alpha T_u$$

para algún multi-índice α, entonces se dice que v es la *derivada débil o distribucional* de orden $|\alpha|$ de u. Esta derivada se suele denotar como

$$v \overset{d}{=} D^\alpha u.$$

En este punto ha de resaltarse que existe un concepto general de *distribución* que, como es de esperarse, engloba a las de tipo integral descritas antes. Sin embargo, para los efectos de este trabajo, el estudio de tal concepto general desviaría en alguna medida la persecusión de los objetivos que nos hemos propuesto.

A continuación definimos lo que en adelante llamaremos espacio de Sobolev de orden entero. Para tales efectos, como veremos, basta conocer el concepto de distribuciones de tipo integral.

Dados $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ p \geq 1$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, consideremos el subespacio de $L^p(\Omega)$ dado por

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega)\,:\, v \overset{d}{=} D^\alpha u \in L^p(\Omega) \,\text{para todo multi-índice}\, \alpha \,\text{con}\, |\alpha| \leq m\}.$$

Definamos las siguientes funciones sobre $W^{m,p}$:

$$\|u\|_{m,p} = \left\{ \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right\}^{1/p}$$

si $1 \leq p < \infty$.

$$\|u\|_{m,\infty} = \sup\{\|D^\alpha u\|_\infty \,:\, 0 \leq |\alpha| \leq m\}.$$

Se llama *espacio de Sobolev de orden* m sobre Ω al par $(W^{m,p}(\Omega), \|\,\|_{m,p})$ con $1 \leq p \leq \infty$

Las principales características de los espacios de Sobolev se resumen en los siguientes teoremas.

Teorema 1. *El par $(W^{m,p}(\Omega), \|\,\|_{m,p})$ es un espacio de Banach.*

Demostración.

Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $W^{m,p}(\Omega)$. Entonces, si α es un multi-índice tal que $|\alpha| \leq m$ tenemos que $\{D^\alpha u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $L^p(\Omega)$. Por completitud de $L^p(\Omega)$ sabemos que existen u, $v \in L^p(\Omega)$ tales que

$$u_n \to u \quad \text{y} \quad D^\alpha u_n \to v \qquad \text{cuando } n \to \infty.$$

Ahora bien, dado que $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$, se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$ la función u_n determina una distribución integral T_{u_n}. Si $\phi \in C_o^\infty(\Omega)$, entonces por la desigualdad de Hölder se cumple que

$$|T_{u_n}(\phi) - T_u(\phi)| \leq \int_\Omega |u_n(x) - u(x)||\phi(x)|dx \leq \|\phi\|_{p'}\|u_n - u\|_p$$

donde p' es el conjugado de p.

Análogamente se prueba que

$$T_{D^\alpha u_n}(\phi) \to T_v(\phi)$$

para todo $\phi \in C_o^\infty(\Omega)$.

Para terminar, veamos que $u \in W^{m,p}(\Omega)$. En efecto, una aplicación directa del teorema de integración por partes nos permite escribir lo siguiente:

$$T_v(\phi) = \lim_n T_{D^\alpha u_n}(\phi) = \lim_n (-1)^{|\alpha|} T_{u_n}(D^\alpha \phi) = D^\alpha T_u(\phi)$$

para cada $\phi \in C_o^\infty(\Omega)$, lo que prueba que

$$v \stackrel{d}{=} D^\alpha u$$

y se tiene así la completitud establecida.

$\square$

Teorema 2. *$W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach separable si $1 \leq p < \infty$ y si $1 < p < \infty$ entonces $W^{m,p}(\Omega)$ es reflexivo y uniformemente convexo.*

Demostración.

Denotemos por N al número de multi-índices α tales que $0 \leq |\alpha| \leq m$.

Para $p \in [1, \infty]$ sea

$$L^p_N(\Omega) = L^p(\Omega) \times \overset{N}{\cdots} \times L^p(\Omega)$$

y definamos las siguientes normas en este espacio:

$$\|u\|_{L^p_N} = \left(\sum_{j=i}^{N} \|u_j\|_p^p \right)^{1/p}$$

si $1 \leq p < \infty$

$$\|u\|_{L^\infty_N} = \sup\{\|u_j\|_\infty \,:\, j = 1, \cdots, N\}$$

Sabemos que $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach separable si $1 \leq p < \infty$ y es reflexivo y uniformemente convexo si $1 < p < \infty$, por ende, el producto finito $L^p_N(\Omega)$ también tiene tales propiedades.

Consideremos el operador $P : W^{m,p}(\Omega) \to L^p_N(\Omega)$ dado por

$$P(u) = (D^\alpha u)_{0 \leq |\alpha| \leq m} .$$

Es claro que el operador P es lineal, pues el operador diferencial D^α lo es. Además P es una isometría, pues por construcción se observa que

$$\|P(u)\|_{L^p_N} = \|u\|_{m,p}.$$

Luego P es un isomorfismo isométrico de $W^{m,p}$ sobre algún subespacio cerrado $W \subset L^p_N$. Entonces, W es separable si $1 \leq p < \infty$ y es reflexivo y uniformemente convexo si $1 < p < \infty$, y como

$$W^{m,p}(\Omega) = P^{-1}(W),$$

se tiene el resultado.

□

En lo que sigue, establecemos una caracterización básica del espacio dual de $W^{m,p}(\Omega)$. Primero probaremos una generalización del teorema de representación de Riesz para el caso n dimensional. Por simplicidad, asumimos la notación

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

cuando la integral tenga sentido.

LEMA 3. *Sean $1 \leq p < \infty$ y q dos números conjugados. Para cada $L \in (L^p_N(\Omega))^*$ existe un único $v \in L^q_N(\Omega)$ tal que para todo $u \in L^p_N$ se cumple que*

$$L(u) = \sum_{j=1}^{N} \langle u_j, v_j \rangle.$$

DEMOSTRACIÓN.

Dados $1 \leq j \leq N$ y $\omega \in L^p(\Omega)$ definamos el vector

$$\omega_{(j)} = (\omega\, \delta_{ij})_{i=1}^{N}$$

en $L^p_N(\Omega)$.

Si $L \in (L^p_N(\Omega))^*$, entonces la relación

$$L_j(\omega) = L(\omega_{(j)})$$

define un operador en $(L^p(\Omega))^*$. Por el teorema de Riesz en una dimensión, sabemos que existe un único $v_j \in L^q(\Omega)$ tal que si $\omega \in L^p(\Omega)$ se cumple que

$$L(\omega_{(j)}) = L_j(\omega) = \langle \omega, v_j \rangle$$

Luego, para $u \in L^p_N(\Omega)$ tenemos:

$$L(u) = L\left(\sum_{j=1}^{N} u_{j(j)}\right) = \sum_{j=1}^{N} L(u_{j(j)}) = \sum_{j=1}^{N} \langle u_j, v_j \rangle$$

probando así el resultado.

□

Ahora estamos en condiciones de probar lo siguiente:

TEOREMA 4. *Sean $1 \leq p < \infty$ y q dos números conjugados. Para cada $L \in (W^{m,p}(\Omega))^*$ existe un elemento $v = (v_\alpha)_{0 \leq |\alpha| \leq m} \in L^p_N(\Omega)$ tal que*

$$L(u) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, v_\alpha \rangle$$

para todo $u \in W^{m,p}(\Omega)$

DEMOSTRACIÓN.

Ya hemos visto que

$$W^{m,p}(\Omega) = P^{-1}(W),$$

donde W es un subespacio cerrado de $L^p_N(\Omega)$ y P es un isomorfismo isométrico.

Dado $L \in (W^{m,p}(\Omega))^*$ sea L^* un operador lineal sobre W tal que

$$L^*(P(u)) = L(u)$$

Como P es isomorfismo isométrico, entonces $L^* \in W^*$ y

$$\|L^*\|_{W^*} = \|L\|_{(W^{m,p}(\Omega))^*}.$$

El teorema de Hahn-Banach garantiza la existencia de una extensión lineal de L^* a todo el espacio $L^p_N(\Omega)$. Sea $\hat{L}$ tal extensión. Por el lema anterior, sea $v = (v_\alpha)_{0\leq|\alpha|\leq m} \in L^q_N(\Omega)$ tal que

$$\hat{L}(\cdot) = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \langle \cdot, v_\alpha \rangle.$$

En particular, si $u \in W^{m,p}(\Omega)$ obtenemos:

$$L(u) = L^*(P(u)) = \hat{L}(P(u)) = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \langle D^\alpha u, v_\alpha \rangle$$

lo que concluye la prueba.

□

Extensión del resultado de Pick a un espacio de Sobolev.

En el contexto de los espacios de Sobolev, Agler [**2**] dió un resultado de interpolación análogo al de Pick.

Supongamos que $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Definimos el espacio $W(a,b)$ como

$$W(a,b) = \{u \in L^2(a,b) : u' \in L^2(a,b)\}.$$

Es conocido que $W(a,b)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|u\|_W = \left(\|u\|_2^2 + \|u'\|_2^2\right)^{1/2}.$$

$W(a,b)$ es un caso particular de espacio de Sobolev. Los espacios de Sobolev jugarán un papel importante en este proyecto.

Sea $H(0,1)$ el espacio de Hilbert de las funciones absolutamente continuas en $[0,1]$ con derivadas de cuadrado integrable, con el producto interno

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f\,\overline{g} + \int_0^1 f\,'\,\overline{g\,'}.$$

Sea k la función núcleo de $H(0,1)$, Agler probó que, dados diferentes $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0,1]$ y dados diferentes números complejos $w_1, w_2, \ldots, w_n$ existe $\phi \in H$ con

$$\|\phi\|_\infty \equiv \sup\{\|\phi f\| : f \in H, \|f\| = 1\} \leq 1$$

y $\phi(t_i) = w_i$ para todo i si y sólo si la matriz $n \times n$ dada por

$$\{(1 - \overline{w}_i w_j)k(t_i,t_j)\}_{i,j=1,\ldots,n}$$

es semidefinida positiva.

Bibliografía

[1] R. Adams & J. Fournier. *Sobolev spaces.* 2nd ed. Pure and Applied Mathematics 140. New York, Academic Press. xiii. (2003). Citado en página(s):

[2] J. Agler. *Nevanlinna-Pick interpolation on Sobolev space.* Proc. Am. Math. Soc. 108, No.2, (1990) 341-351. Citado en página(s):

[3] N. Aronszajn. *Theory of reproducing kernels.* Trans. Am. Math. Soc. 68, 337-404 (1950).

[4] R. Bruzual & M. Domínguez. *Equivalence between the dilation and lifting properties of an ordered group through multiplicative families of isometries. A version of the commutant lifting theorem on some lexicographic groups.* Integral Equations Oper. Theory 40 1-15 (2001). Citado en página(s):

[5] G. Choquet. *Lectures on analysis. Vol. I: Integration and topological vector spaces.* Edited by J. Marsden, T. Lance and S. Gelbart. 3rd printing. Mathematics Lecture Note Series. 24 (1976). Citado en página(s):

[6] G. Choquet. *Lectures on analysis. Vol. II: Representation theory.* Edited by J. Marsden, T. Lance and S. Gelbart. 3rd printing. Mathematics Lecture Note Series. 25. (1976). Citado en página(s):

[7] G. Choquet. *Lectures on analysis. Vol. III: Infinite dimensional measures and problem solutions.* Edited by J. Marsden, T. Lance and S. Gelbart. 3rd printing. Mathematics Lecture Note Series. 26. (1976). Citado en página(s):

[8] M. Cotlar. *Núcleos Invariantes y Teoremas de Dilatación, Parametrización y Predicción.* Asociación Matemática Venezolana, Boletín, Vol. I, N°1, (1994). Citado en página(s):

[9] M. Cotlar, R. Bruzual, P. Alegría, M. Domínguez, J. Giménez & S. Marcantognini. *Extensión y Representación de Formas Invariantes en la Teoría de Interpolación, Predicción y Dilatación.* Tercera Escuela Venezolana de Matemáticas, 1990. Citado en página(s):

[10] M. Cotlar & R. Cignoli. *An introduction to functional analysis.* North Holland, (1974). Citado en página(s):

[11] M. Cotlar & C. Sadosky. *Nehari and Nevanlinna-Pick problems and holomorphic extensions in the polydisk in terms of restricted BMO.* J. Funct. Anal. 124, No.1, 205-210 (1994). Citado en página(s):

[12] M. Domínguez. *Interpolation and prediction problems for connected compact abelian groups.* Integral Equations Operator Theory 40, 2001, 212-230. Citado en página(s):

[13] R. Douglas. *Banach algebra techniques in operator theory.* Academic press (1972). Citado en página(s):

[14] H. Dym & H.P. McKean. *Fourier Series and Integrals.* Academic Press, 1972. Citado en página(s):

[15] J. Garnett. *Bounded analytic functions.* Academic Press, 1981. Citado en página(s):

[16] C. Foias & A. Frazho, *The commutant lifting approach to interpolation problems.* Operator Theory: Advances and Applications, 44. Basel. Birkhäuser. xxiii, 1990. Citado en página(s):

[17] Z. Nehari. *On bounded bilinear forms.* Annals of Mathematics, 65-1, 1957, pp. 153 - 162. Citado en página(s):

[18] Nevanlinna, R. *Uber beschränkte Funktionen, die in gegebenen Punkten vorgeschriebene Werte annehmen.* Ann. Acad. Sc. Fennicae A 13, Nr. 1, 1-71 (1920). Citado en página(s):

[19] N. Nikol'skii. *Treatise on the Shift Operator.* Springer-Verlag, 1986. Citado en página(s):

[20] G. Pick. *Über die Beschränkungen analytischer Funktionen, welche durch vorgegebene Funktionswerte bewirkt werden.* Math. Ann. 77, 7-23 (1916). Citado en página(s):

[21] H.L. Royden. *Real Analysis*, Collier Macmillan International Editions, 1968. Citado en página(s):

[22] W. Rudin. *Fourier analysis on groups.* Interscience, 1962. Citado en página(s):

[23] D. Sarason. *Generalized interpolation in* H^∞. Trans. Amer. Math. Soc., 127, 1967, pp. 179 - 203. Citado en página(s):

[24] L. Schwartz. *Théorie des distributions. (Distribution theory). (Théorie des distributions.)* Nouveau tirage. Paris: Hermann. xii, (1998). Citado en página(s):