UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA
POSTGRADO EN MATEMÁTICA

PROYECTO DE TESIS DOCTORAL

LA CONSTANTE DE OLSON K-BARICÉNTRICA Y UN TEOREMA INVERSO DE ERDÖS-GINZBURG-ZIV.

AUTOR: MSc. Felicia C. Villarroel V.
C.I. XXXXX

TUTOR: Dr. Oscar Ordaz
Departamento de Matemáticas y Centro ISYS.
Facultad de Ciencias. UCV.
C.I. XXXXX

Caracas – Venezuela
Marzo de 2007

ANTECEDENTES Y MOTIVACIÓN

Sean G un grupo abeliano finito de orden m, $S \subseteq G$ una secuencia o un conjunto, $|S|$ la longitud o cardinalidad de S y $\sum S = \{\sigma(A) : A \subseteq S\}$ donde $\sigma(A)$ es la suma de los elementos de A. Si $\sigma(A) = 0$, decimos que A es de suma cero.

El primer resultado conocido sobre problemas de suma cero, es el denominado por Erdös Lema prehistórico: Sea G un grupo abeliano de orden m. Entonces toda secuencia de m elementos contiene una subsecuencia de suma cero.

En 1961, Erdös, Ginzburg, Ziv [14], dan el siguiente teorema:

Toda secuencia de $2m$-1 elementos en un grupo abeliano de orden m, contiene una m-subsecuencia de suma cero.

Este resultado constituye la base fundamental en el desarrollo del área de investigación denominada *Problemas de Suma Cero*, la cual está inmersa en el campo de la teoría aditiva y, por tanto, utiliza muchos resultados de dicha teoría como herramientas básicas.

Sea G un grupo abeliano y sean A y B subconjuntos no vacíos de G. Se define:

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

En forma más general, si $A_1, A_2, \ldots, A_m$ son subconjuntos no vacíos de G, se define:

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_m = \{a_1 + a_2 + \ldots + a_m : a_i \in A_i, 1 \le i \le m\}.$$

Entre los resultados de la teoría aditiva tenemos:

1.- Teorema de Cauchy-Davenport [16]:

Sea p un número primo, y sean A y B subconjuntos no vacíos de Z_p. Entonces

$$|A+B| \geq \min\{p, |A|+|B|-1\}.$$

2.- La generalización del teorema de Cauchy-Davenport [16, 33]:

Sean B_i, $1 \leq i \leq q$, *subconjuntos no vacíos de* $\mathbb{Z}_p$, *con p primo, entonces*:

$$|B_1 + \cdots + B_q| \geq \min\{p, |B_1| + \cdots + |B_q| - q + 1\}.$$

3.- El teorema de Dias da Silva-Hamidoune [15]:

Sea H un subconjunto de $\mathbb{Z}_p$. *Sea d un entero positivo tal que* $2 \leq d \leq |H|$. *Sea* $\Lambda^d H = \left\{ \sum_{x \in S} x : S \subset H,\ |S| = d \right\}$. *Entonces:*

$$|\Lambda^d H| = \min\{p, d(|H| - d) + 1\}.$$

En 1961 aparece la constante de suma cero, *ZS*(*G*), es decir, el menor entero positivo *t* tal que toda secuencia de longitud *t* en un grupo abeliano de *G* de orden *m* contiene una subsecuencia de longitud m y de suma cero. Es claro que $ZS(G) \leq 2m-1$, donde *m* es el orden de *G*.

En 1966, Davenport da origen a su célebre constante *D*(*G*) que se define como el menor entero positivo *t*, tal que toda secuencia de longitud *t* contiene una subsecuencia de suma cero. Gao [18] prueba que *ZS*(*G*) = $|G|$ + *D*(*G*) -1.

En 1976 Olson [38] generaliza el teorema de Erdös, Ginzburg, Ziv, mostrando que al agregar a este teorema, la condición de que ningún elemento se repite más de *m*+1 vez, entonces el conjunto de las sumas de las *m* subsecuencias de la secuencia dada contiene un subconjunto no nulo.

En 1994 Oscar Ordaz, introduce la constante de Olson *O*(*G*): menor entero positivo *t* tal que todo conjunto de cardinalidad *t*, contiene un subconjunto de suma cero. Esta constante es estudiada en [13, 20, 23, 42]. En [13] esta constante es denotada por $SD(G)$. Es claro que $O(G) \leq D(G)$.

Un conjunto S es libre de ceros si este no contiene subconjuntos de suma cero. Sea $ZFS_s(G)$ el conjunto de los conjuntos libres de cero en G. Es claro que

$$O(G) = 1 + \max\{|S| : S \in ZFS_s(G)\}.$$

Un conjunto de suma cero en G sin subconjuntos propios de suma cero es llamado conjunto cero minimal. El conjunto de todos los conjuntos cero minimal se denota por $\mu_s(G)$.

Sea G un grupo finito abeliano. Entonces $SD(G) = \max\{|S| : S \in \mu_s(G)\}$ es llamado la constante fuerte de Davenport de G.

Baginski [2] explica que existe una relación entre la constante de Olson y la constante fuerte de Davenport. Demuestra que $SD(G) \leq O(G) \leq SD(G)+1$. En [39] se presentan un familia grande de grupos que verifican que $SD(G) = O(G)$.

En 1996 se da a conocer la Conjetura de Caro [9]:

Sean $\omega_1, \cdots, \omega_k$ *enteros positivos, tal que* $\omega_1 + \omega_2 \cdots + \omega_k = 0 \pmod{m}$. *Sean* $a_1, a_2, \ldots, a_{n+k-1}$ *en* G *de orden* m. *Entonces existen* $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ *tal que* $\omega_1 a_{i_1} + \omega_2 a_{i_2} \cdots + \omega_k a_{i_k} = 0$.

Las secuencias con peso, esto es, secuencias constituidas por términos de la forma $\omega_1 a_i$, donde los a_i son elementos de G y los coeficientes o pesos son enteros positivos, aparecen inicialmente en la conjetura de Caro.

En 1996 Hamidoune [28], demostró la conjetura de Caro con la condición adicional $(w_i, n) = 1 \; \forall \, i$. Recientemente David Grynkiewicz [25] la demuestra con el siguiente teorema.

Teorema ([25]): *Sean m, n y k* ≥ 2 *enteros positivos. Si f es una secuencia de m+k-1 elementos que provienen del grupo abeliano G de orden m y exponente n, y si* $W = \{w_i\}_{i=1}^{k}$ *es una secuencia de enteros cuya suma es cero módulo n. Entonces existe una subsecuencia* $\{b_i\}_{i=1}^{k}$ *de* f *tal que* $\sum_{i=1}^{k} w_i b_i = 0$. *Además, si f tiene un k-conjunto partición* $A = A_1, \ldots, A_k$ *tal que* $|w_i A_i| = |A_i|$ *para todo i, entonces existe un subgrupo no trivial H de G y un k-conjunto partición* $A^1 = A_1^1, \ldots, A_k^1$ *de f con H*$\subseteq w_i A_i^1$ *y* $|w_i A_i^1| = |A_i^1|$ *para todo i.*

El hecho de que Hamidoune, demostrara parcialmente la conjetura de Caro, permitió a Ordaz definir las secuencias *k*-baricéntricas, las cuales se definen como:

Una secuencia $f : A \rightarrow G$ *donde A es un conjunto finito con* $|A| \geq 2$ *y tal que existe* $a \in A$ *que verifica* $\sum_A f = |A| f(a)$. El elemento *f*(a) se llama baricentro. Cuando $|A| = k$ hablamos de secuencia *k*-baricéntrica y cuando f es inyectiva hablamos de conjunto *k-baricéntrico*. A raíz de esa definición se dio conocer los denominados problemas baricéntricos.

Es importante señalar que las secuencias baricéntricas son un caso particular de las secuencias de *G* de suma cero con peso, introducidas y estudiadas por Hamidoune en los años 1995 y 1996 en [27,28].

El estudio de las secuencias baricéntricas se inicia en [12] y [13]. En [13] la constante baricéntrica de Davenport , *BD*(*G*), la cual se define como el menor entero positivo *t* tal que toda *t* –secuencia en *G* contiene una subsecuencia baricéntrica, y en

[12] la constante k-baricéntrica de Davenport, *BD*(k,G), la cual se define como el menor entero positivo t tal que toda t –secuencia en G contiene una subsecuencia k-baricéntrica.

Dentro de los problemas de suma cero esta la teoría de Ramsey de suma cero, la cual ofrece generalizaciones combinatorias del teorema de Erdös-Ginsburg-Ziv.

Dado un grafo H, el número de Ramsey clásico $R(H,k)$, es el menor entero t tal que en cualquier k-coloración $f: E(K_t) \to \{0,1,2,\ldots,k\text{-}1\}$ de los lados del grafo completo K_t existe una copia monocromática de H.

Dado un grafo H cuyo número de lados $e(H)$ satisface $e(H) = 0 \pmod{m}$, se define el número de Ramsey de suma cero $R(H,\mathbb{Z}_m)$ como el menor entero positivo s tal que cualquier coloración $c: E(K_s) \to \mathbb{Z}_m$ de los lados del grafo completo K_s con elementos de $\mathbb{Z}_m$ produce una copia H_0 de H tal que:

$$\sum_{e \in E(H_0)} c(e) = 0$$

Este concepto se puede extender a cualquier grupo abeliano G de orden m.

Nótese que la existencia del número de Ramsey de suma cero está garantizada por la existencia del número de Ramsey clásico ya que si $m|e(H)$ cualquier coloración $f: E(K_{R(H,m)}) \to \{0,1,2,\ldots,m\text{-}1\}$ produce una copia monocromática de H y, entonces:

$$\sum_{e \in H} f(e) = a\,|e(H)| = 0 \,(\text{mod } m)$$

Por lo tanto, $R(H,\mathbb{Z}_m) \le R(H,m)$.

Además, es importante señalar que la condición $e(H) = 0 \pmod{m}$ es necesaria, ya que de lo contrario la función $f: E(K_s) \to \mathbb{Z}_m$ idénticamente igual a 1, no permitiría que H fuese un grafo de suma cero.

Bialostocki y Dierker [4] fueron los primeros en introducir el concepto de los números de Ramsey $R(H,\mathbb{Z}_m)$ con $m = e(H)$. Esta noción fue luego extendida al concepto más general $R(H,\mathbb{Z}_m)$ con $m|e(H)$, es decir $e(H) = 0(mod\ m)$.

En [9], Caro da una revisión estructurada de resultados y problemas abiertos sobre los números de Ramsey de suma cero. Recientemente Gao y Geroldinger [21] presentan un survey donde actualizan la información dada por Caro.

A raíz de la definición de secuencias baricéntricas, surge en el año 1996 en el centro ISYS de la UCV, la teoría de Ramsey baricéntrico, la cual constituye un área nueva dentro de la combinatoria y, específicamente dentro de la teoría de Ramsey de suma cero. El origen de la teoría de Ramsey baricéntrico proviene del siguiente teorema de Hamidoune (1996) [28]:

Sea G un grupo abeliano de orden m y D(G) la constante de Davenport. Sea $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *una secuencia de elementos de G tal que* x_0 *es el elemento que más se repite en la secuencia. Sea k un entero positivo y* $\{w_i : 1 \le i \le k\}$ *una familia de enteros primos relativos con m. Entonces:*

1.- *Para* $m \ge n + k - 1$, *existe una permutación* α *de* $[1, n]$ *tal que:*

$$\sum_{1\le i\le k} w_i x_{\alpha(i)} = \left(\sum_{1\le i\le k} w_i\right) x_0$$

2.- *Para* $k \ge m - 1$ *y* $n \ge k + D(G) - 1$ *existe un k-subconjunto* $K \subset [1, n]$ *tal que:*

$$\sum_{i\in K} x_i = kx_0$$

Este teorema es una generalización del teorema de Erdös-Ginzburg-Ziv y permite establecer la siguiente condición, denominada condición de Hamidoune, en el contexto de las secuencias baricéntricas.

Sea G un grupo abeliano de orden $m \geq 2$ *y* $f : A \to G$ *una secuencia con* $|A| \geq m + k - 1$. *Entonces existe una subsecuencia k-baricéntrica de f. Además, en el caso en que* $k \geq |G|$ *la condición* $|A| \geq k + D(G) - 1$ *es suficiente para garantizar la existencia de una subsecuencia de f k-baricéntrica.*

El número de Ramsey baricéntrico se define de la siguiente manera: *Sea G un grupo abeliano de orden* $m \geq 2$ *y sea H un grafo con* $e(H)=k$ *lados. El número de Ramsey baricéntrico del par* (H,G)*, denotado por* $BR(H,G)$ *es el menor entero positivo r tal que cualquier coloración* $c : E(K_r) \to G$ *de los lados del grafo completo* K_r *con elementos de G produce una copia* H_0 *de H con un lado* e_0 *tal que se verifica:*

$$\sum_{e \in E(H_0)} c(e) = kc(e_0) \qquad (1)$$

Es importante observar lo siguiente:

1.- Como una copia monocromática de H satisface la relación (1), se tiene que $BR(H,G) \leq R(H,m)$, donde $R(H,m)$ es el número de Ramsey clásico para m colores.

2.- Si $m|e(H)$, entonces el lado derecho de (1) es cero. Así, la relación (1) se satisface precisamente cuando el lado izquierdo es cero. Tenemos entonces que, en este caso, $BR(H,G) = R(H,G)$ y, por lo tanto, $BR(H,G)$ generaliza el número de Ramsey de suma cero.

3.- Para el número de Ramsey baricéntrico no se necesita la condición $e(H)=0$ (mod m).

4.- Es claro que $BR(H,G) \geq |V(H)|$.

Un tipo particular de grafos son las estrellas, las cuales son grafos bipartitos de la forma $K_{1,m}$.

Un hecho importante es que en cualquier vértice del grafo completo $K_{BD(k,G)+1}$ se tiene una estrella baricéntrica centrada en ese vértice, por lo tanto se verifica la desigualdad:

$$BR(K_{1,k},G) \leq BD(k,G)+1 \qquad (2)$$

Este último resultado permite hallar cotas superiores para el número de Ramsey baricéntrico de las estrellas, si se conocen los valores exactos o cotas superiores para la constante de Davenport baricéntrica $BD(k,G)$.

La constante de Olson k-baricéntrica , $BO(k,G)$, se define como el menor entero positivo t tal que todo conjunto de cardinalidad t en G contenga un subconjunto k-baricéntrico.

Es claro que cuando m es impar, entonces $BO(m,\mathbb{Z}_m)= m$ y si m es par, $BO(m,\mathbb{Z}_m)$ no existe. Más aun para m impar el baricentro de todo $Q \subseteq \mathbb{Z}_n$ con $|Q| = m-1$ es $\mathbb{Z}_m \setminus Q$. Además $BO(m\text{-}1,\mathbb{Z}_m)$ no existe. Para m impar $BO(m\text{-}1,\mathbb{Z}_m) = m-1$, sea $S \subseteq \mathbb{Z}_m$, con $|S| = m-1$ y $\{b\} = \mathbb{Z}_m \setminus S$. Es fácil ver que S es un conjunto (m – 1)-baricéntrico con $\frac{n}{2} - \frac{1}{n-1}b$ como baricentro.

En [13] se enuncia el siguiente teorema:

Sea $s \geq 2$, $d \geq 2$, $p \geq d+2+\frac{1}{d-1}$. *Sea A un conjunto con s + d elementos, y* $f: A \to \mathbb{Z}_p$ *una secuencia con* $|f(A)| \geq \frac{p-1}{d}+d+1$. *Entonces f contiene una subsecuencia s-baricéntrica.*

Este teorema tiene el siguiente corolario:

$BO(m,\mathbb{Z}_m) \leq p$ *para* $3 \leq k \leq p-2$ *con* $p \geq 5$.

El siguiente teorema también da una cota para el $BO(m,\mathbb{Z}_m)$.

Teorema: $BO(m,\mathbb{Z}_m) \leq m$ *para* $m \geq 6$ y $\frac{m+1}{2} \leq k \leq m-2$.

El siguiente lema es usado.

Lema [12]: *Si una* 3-*secuencia en* $\mathbb{Z}_m$ (*m impar*) *entonces estos elementos son iguales o son diferentes dos a dos. Mas aun un* 3-*conjunto en* $\mathbb{Z}_m$ *es baricéntrico si y sólo si estos elementos están en progresión aritmética.*

De este lema derivamos el siguiente resultado:
$BO(3,\mathbb{Z}_m) \leq m \ para \ m \geq 3$.

El siguiente teorema es obtenido del teorema de Dias da Silva-Hamidoune.
Teorema : $BO(3,\mathbb{Z}_p) \leq \left\lceil \frac{p}{3} \right\rceil + 1 \ para \ p \geq 5$.

Sea G un grupo abeliano de orden m y $k \leq m$. Si $BO(k, G)$ existe, entonces tenemos que $BO(k, G) \leq BD(k, G)$ en caso contrario $m + 1 \leq BD(k, G)$. Por la condición de Hamidoune tenemos que $BD(k, G) \leq m + k - 1$.

En este sentido en nuestro trabajo, se busca un método para el cálculo de la constante de Olson k-baricéntrica $BO(k,G)$. Al igual que su utilidad para calcular nuevos valores de la $BD(k,G)$, considerando las relaciones de estas dos constantes, dadas con anterioridad, y a partir de esta constante , nuevos valores para $BR(K_{1,k}.,G)$.

Los teoremas inversos del teorema Erdös- Ginzburg- Ziv son aquellos teoremas que describen la estructura de la secuencia S en G con longitud $|S| = m + k$, $1 \leq k \leq m-2$ sin m-subsecuencia de suma cero. Para grupos de orden m, la estructura de S ha sido descrita por muchos autores: cuando $k = m-2$, por Peterson and Yuster [40], y por Bialostocki and Dierker en [3]; cuando $k = m-3$ por Flores and Ordaz en [17]; cuando $m - \left\lfloor \frac{m+1}{4} \right\rfloor - 1 \leq k \leq m-2$, por Bialostocki, Dierker, Grynkiewicz and Lotspeich en [5] (Usando un resultado de Gao [19]) y cuando $k \geq \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor$, por Chen en [10].

En general, no es fácil describir completamente la estructura de la secuencia *S*, cuando *k* es menor que *m*. En lugar de describir completamente la estructura de *S*, se considera el problema de determinar:

$$h(m,k)=\min\left\{h(S):|S|=m+k\ y\ 0\notin \sum_m S\right\}$$

donde

$\sum_m S=\left\{\sigma(T):T \text{ subsecuencia de } S,|T|=m\right\}$ y $h(S)$ es la multiplicidad máxima de los elementos en S.

Hay algunos resultados sobre el valor exacto o cotas para $h(m,k)$. Por ejemplo cuando $G=\mathbb{Z}_m$, Gao [19] probó que $m-\left[\frac{m+1}{4}\right]-1\leq k\leq m-2$ se tiene que $h(m,k)\geq k+1$. También, Gao and Thanhadurai [22] probaron que $h(p,k)\geq k+1$ para todo primo p y todo *k* tal que $1\leq k\leq p-2$.

Sean $m\wedge S=\left\{\sum_{i=1}^{m}x_i : x_1x_2\dots x_m \text{ una subsecuencia de longitud n en S}\right\}$,

$\sum_{\leq t}(S)=\bigcup_{m=1}^{t} m\wedge S$, $\sum_{\geq t}(S)=\bigcup_{m=t}^{|S|} m\wedge S$ y $\sum(S)=\sum_{\leq|S|}(S)$.

En este orden de ideas Gao, Thangadurai and Zhuang [21,24] establecieron las siguientes conjeturas.

Conjetura 1: Sea *G* un grupo cíclico de orden $m\geq 2$, *p* el menor primo divisor de *m*. Sea *S* una secuencia en G \ 0 de longitud *m*. Si *h* = *h*(*S*) $\geq\frac{n}{p}-1$, entonces $\sum_{\leq h} S=\sum S$.

Conjetura 2: Sea G un grupo cíclico de orden $m \geq 2$, p el menor primo divisor de m. Sea k un entero tal que $k \geq \frac{m}{p} - 1$. Sea S una secuencia de longitud $|S| = m + k$. Si $0 \notin m\Lambda S$, entonces $h(S) \geq k + 1$.

Las motivaciones de este trabajo son:

1.- Definir métodos para el cálculo de la constante de Olson k- baricéntrica, $BO(k,G)$, algunos de estos métodos están basados en el Teorema de Dias da Silva-Hamidoune, un teorema clásico de teoría aditiva, al igual que el uso de la teoría de órbitas [18, 43].

2.- La resolución de las conjeturas 1 y 2 de Gao, Thangadurai y Zhuang citadas con anterioridad.

El uso de la teoría de órbitas juega un papel importante en este trabajo, ya que a través de ellas podemos hallar un método que permita:

a) Caracterizar conjuntos t-baricéntricos.

b) Identificar conjuntos t-baricéntricos en un k-conjunto.

La razón que nos lleva al uso de la teoría de órbitas es la siguiente:

Si tenemos un conjunto X y un grupo G, decimos que G actúa sobre X, o que X es un G-conjunto, si existe una aplicación $G \times X \to X$ que satisface:

(1) $xe = x$, para todo x en X.

(2) $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$, para todos $x \in X$ y $g_1, g_2 \in G$.

Si X es un G-conjunto, la órbita de $x \in X$, es el subconjunto de X definido por:

$$\theta(x) = \{gx : g \in G\}.$$

Un resultado importante sobre las órbitas es que dos órbitas cualesquiera en un G-conjunto X son disjuntas o son iguales. Esto permite asegurar que cualquier G-.conjunto X es la unión disjunta de sus órbitas, y podemos definir una relación de equivalencia, de manera natural:

$$x \approx y \Leftrightarrow \theta(x) = \theta(y)$$

donde las órbitas son las clases de equivalencia.

Como un caso particular, podemos considerar $X = \mathbb{Z}_m$, y el grupo:

$$A = \left\{ f_{a,b} : \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_m : f_{a,b}(x) = ax + b,\ a,b \in \mathbb{Z}_m,\ (a,m) = 1 \right\}$$

el cual, es un grupo de orden $n\phi(m)$ donde $\phi(m) = \left|\{0 < q < m : (q,m) = 1\}\right|$ es la función phi de Euler. Entonces *A* actúa de manera natural sobre *X*.

Sea $X_m^k = \left\{ \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} : x_i \in \mathbb{Z}_m \right\}$.Una acción de A sobre X_m^k puede ser definida de la siguiente manera:

$$f_{a,b}\left(\{x_1, \ldots, x_k\}\right) = \left\{ f_{a,b}(x_1), \ldots, f_{a,b}(x_k) \right\},$$

y por lo tanto particiona en órbitas a X_m^k.

Aplicando dicha función, es fácil ver que $\theta(\{0\})$ es la única órbita de X_m^1. De igual manera el grupo *A* actúa sobre el conjunto X_m^2 y allí se obtienen órbitas de la forma $\theta(\{0, z\})$. En forma más general, el grupo *A* actúa sobre el conjunto X_m^k.

También es importante observar que la acción de *A* sobre X_m^k, preserva la propiedad de ser baricéntrico; esto es, si un conjunto $U \in X_m^k$ es baricéntrico, entonces todos los *k*-conjuntos en la órbita de *U* también son baricéntricos.

Toda esta teoría permite identificar y caracterizar conjuntos *k*-baricéntricos con el fin de obtener un método para el cálculo de *BO*(*k*,*G*).

Finalmente, el cálculo de *BO*(*k*,*G*) y el uso de la condición de Hamidoune, permitirán determinar valores exactos para el *BD*(*k*,*G*) . Las condiciones que relacionan al *BD*(*k*,*G*) con el *BR*($K_{1,k}$,*G*) y los teoremas de descomposición de grafos, permitirán determinar valores exactos para el número de Ramsey baricéntrico de las estrellas.

Entre estos teoremas de descomposición de grafos podemos mencionar el teorema de Harary [31]:

Sea K_m *el grafo completo con m vértices. Entonces:*

K_m*, con m impar, es la unión disjunta de* $\frac{m-1}{2}$ *ciclos hamiltonianos.*

K_m*, con m par, es la unión disjunta de* $\frac{m-2}{2}$ *ciclos hamiltonianos y un matching perfecto.*

También tenemos los siguientes corolarios

Corolario: *Sea* K_m *un grafo completo de m vértices, con m impar. Entonces* K_m *puede descomponerse en dos grafos completos* $K_{\frac{m+1}{2}}$ *con un vértice en común y un grafo bipartito completo* $K_{\frac{m-1}{2},\frac{m-1}{2}}$.

Corolario: *Sea* K_m *un grafo completo de m vértices, con m par. Entonces* K_m *puede descomponerse en dos grafos completos* $K_{\frac{m}{2}}$ *con vértices disjuntos y el restante* $K_{\frac{m}{2},\frac{m}{2}}$ en *un matching perfecto y un grafo* $\left(\frac{m}{2}-1\right)$*- regular.*

Con respecto a las conjeturas propuestas por Gao, Thangadurai y Zhuang es importante señalar que hay ejemplos que muestran que si la Conjetura 1 se cumple para algunos $h \leq \frac{m}{p} - 2$, entonces se debe cumplir alguna de las siguientes condiciones:

a. $\frac{m}{p} \equiv 0 \pmod{h}$ o

b. $\frac{m}{p} \equiv 1 \pmod{h}$ o

c. $p = 2$ *y* $\frac{m}{p} \equiv -1 \pmod{h}$.

Y la Conjetura 2 no es cierta para $k=\frac{m}{p}-l$, con $m \geq lp^2 \geq 2p^2$ compuesto e impar.

La idea es aplicar un nuevo método a partir del uso de un teorema análogo a Cauchy- Davenport [26] basado en particiones, donde una partición en n-conjuntos se define como:

Una partición de una secuencia S dada en subsecuencias no vacías, A_1, A_2, . . ., A_n, tal que los términos en cada subsecuencia A_i son todos distintos y así A_i puede ser considerado como un conjunto.

El siguiente resultado da condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una partición en n-conjuntos y, en caso de existencia, muestra que una partición en n-conjuntos puede encontrarse siempre con cardinalidades tan cercanas como sea posible.

Proposición: *Sea n un entero positivo. Una secuencia S tiene una partición en n-conjuntos* $A=A_1,\ldots,A_n$ *si y sólo si* $|S|\geq n$ *y* $h(S)\leq n$. *Además, si S tiene una partición en n-conjuntos, entonces S tiene una partición en n-conjuntos* $B=B_1,\ldots,B_n$ *con* $\left||B_i|-|B_j|\right|\leq 1$, *para todo i y j.*

El siguiente teorema de David Grynkiewicz [26] es denominado el Teorema análogo de Cauchy-Davenport. Nótese que cuando m es primo, trivialmente se obtiene el teorema de Cauchy-Davenport.

Teorema: *Sea* S' *una subsecuencia de una secuencia finita S en un grupo abeliano G de orden m, sea* $P=P_1,\ldots,P_n$ *una partición en n-conjuntos de* S', *y sea p el menor divisor primo de m. Si* $n\geq \min\left\{\frac{m}{p}-1, \frac{|S'|-n+1}{p}-1\right\}$, *entonces se verifica una de las siguientes condiciones:*

(i) existe una partición en n-conjuntos $A=A_1,\ldots,A_n$ *de una subsecuencia* S'' *de S con* $|S''|=|S'|$, $\sum_{i=1}^{n} P_i=\sum_{i=1}^{n} A_i$ *y:*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} A_i\right| \geq \min\{m,\ |S'| - n + 1\}.$$

(ii) existe un subgrupo propio no trivial H_a *de índice a, una clase* $\alpha + H_a$ *tal que todos, salvo e términos de S provienen de* $\alpha + H_a$*, donde* $e \leq \min\left\{a - 2, \left\lfloor \frac{|S'| - n}{|H_a|} \right\rfloor - 1\right\}$ *y una partición en n-conjuntos* $B = B_1, \ldots, B_n$ *de una subsecuencia* S_0'' *de S, con todos los términos de* S_0'' *provenientes de* $\alpha + H_a$ *y* $|S_0'| \leq n + |H_a| - 1$*, y tal que* $\sum_{i=1}^{n} B_i = \alpha + H_a$.

OBJETIVOS DEL TRABAJO

Objetivos Generales

- Definir la constante de Olson *k*-baricéntrica.
- Definir métodos para el cálculo de la constante de Olson *k*-baricéntrica.
- Demostrar las conjeturas de Gao, Thangadurai y Zhuang.

Objetivos Específicos

- Describir un método algorítmico para el cálculo de órbitas.
- Describir un método algorítmico para el cálculo de la constante de Olson *k*-baricéntrica.
- Calcular valores de la constante de Olson *k*-baricéntrica para G = $\mathbb{Z}_m$, en particular para $3 \leq n \leq 12$ y $3 \leq k \leq n$.
- Establecer nuevos valores de $BD(k,G)$ a partir de los valores de $BO(k,G)$.
- Establecer nuevos valores de $BR(K_{1,k},G)$ a partir de los valores de $BD(k,G)$.

METODOLOGÍA

La metodología utilizada está basada en:

1.- Teoremas de teoría aditiva para determinar la existencia de conjuntos baricéntricos, lo que permitirá dar cotas superiores para la constante de Olson *k*-baricéntrica.

2.- La teoría de órbitas para identificar y caracterizar conjuntos *k*-baricéntricos.

3.-El uso de la relación que involucra a las constantes *BD*(*k*, *G*) y *BO*(*k*, *G*) para calcular nuevos valores para *BD*(*k*, *G*).

4.- El uso de la relación $BR(K_{1,k}, G) \leq BD(k,G)+1$ y de teoremas de descomposición de grafos para el cálculo del número de Ramsey baricéntrico para estrellas, $BR(K_{1,k}, G)$.

5.- La aplicación del teorema análogo de Cauhy-Davenport para demostrar las conjeturas de Gao, Thangadurai y Zhuang.

Más específicamente tenemos:

1.- Uso de teoremas de la teoría aditiva:

Por ejemplo, utilización del teorema de Dias da Silva-Hamidoune para hallar una cota superior de $BO(3, Z_p)$, para $p \geq 5$:

Sea *A* un conjunto en $\mathbb{Z}_p$ con $|A| = \left\lceil \frac{p}{3} \right\rceil + 1$ en $\mathbb{Z}_p$. Por Teorema de Dias da Silva-Hamidoune tenemos que

$$\left|\Lambda^2 A\right| \geq \min\{p, 2(|A|-2)+1\} = \min\left\{p, 2\left\lceil \frac{p}{3} \right\rceil - 1\right\} = 2\left\lceil \frac{p}{3} \right\rceil - 1$$

Sea $D=\{2x : x\in A\}$, entonces $|\Lambda^2 A|+|D|\geq 3\left\lceil \frac{p}{3}\right\rceil > p$. Por tanto existen $2x\in D$ y $y+z\in \Lambda^2 A$ tales que 2x = y + z, de donde x + y + z = 3x, obteniendo un conjunto 3-baricéntrico de A y, así, $BD(3,Z_p)\leq \left\lceil \frac{p}{3}\right\rceil +1$.

2.- Uso de la teoría de órbitas para identificar y caracterizar conjuntos k-baricéntricos.

Si $X=\mathbb{Z}_m$, entonces el grupo:

$$A=\left\{ f_{a,b}:\mathbb{Z}_m\to\mathbb{Z}_m : f_{a,b}(x)=ax+b,\ a,b\in\mathbb{Z}_m,\ (a,m)=1\right\}$$

actúa sobre los conjuntos de la forma:

$$X_m^k=\left\{\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}: x_i\in\mathbb{Z}_m\right\}$$

y esta acción preserva la propiedad de ser baricéntrico.

Veamos como se usa este hecho en los siguientes aspectos:

1.- Caracterización de conjuntos k-baricéntricos:

Al considerar la acción de A sobre X_m^k y calcular sus órbitas, podría ocurrir que:

a.- En X_m^k haya una sola órbita, en cuyo caso, podemos concluir que, o bien todas los k-conjuntos son baricéntricos, o ninguno lo es, dependiendo del comportamiento de cualquier conjunto en la órbita. Así podemos probar, por ejemplo que todo conjunto en $\mathbb{Z}_7$ con 5 elementos es 5-baricéntrico.

b.- En X_m^k haya más de una órbita, en cuyo caso, podríamos caracterizar los conjuntos k-baricéntricos, estudiando el comportamiento de las órbitas cuyos conjuntos formen conjuntos k-baricéntricos.

2.- Identificación de conjuntos t-baricéntricos en un k-conjunto:

Se considera la acción de A sobre X_m^t y calculamos las órbitas en este conjunto. De las órbitas calculadas, consideramos aquellas cuyos conjuntos no formen conjuntos t-

baricéntricos, y agregamos un elemento más a cada una de ellas de tal forma que no se obtengan subconjuntos t-baricéntricos. Obtenemos así las órbitas en X_m^{t+1} que no contienen subconjuntos t-baricéntricos.

Seguimos este proceso hasta determinar las órbitas en $X_m^{k\text{-}1}$ que no contienen subconjuntos t-baricéntricos. Si observamos que no podemos agregar un elemento más a los conjuntos en las órbitas de $X_m^{k\text{-}1}$ sin formar subconjuntos t-baricéntricos, podemos concluir que todo conjunto en un k-conjunto contiene un conjunto t-baricéntrico.

Así por ejemplo, podemos demostrar que en $\mathbb{Z}_6$ todo 5-conjunto contiene un conjunto 3-baricéntrico. Para ello consideramos la acción de A sobre X_6^3 y se obtienen las órbitas de los conjuntos $\{0,1,2\},\{0,1,3\}$ y $\{0,2,4\}$, de los cuales $\{0,1,3\}$ no es baricéntrico. Ahora agregamos un elemento más para formar las órbitas de X_6^4, trabajemos solamente con la no baricéntrica, sólo una órbita de 4-conjuntos no contiene subconjuntos 3-baricéntricos y ninguno de esos conjuntos puede ser extendido con un quinto elemento sin formar subconjuntos 3-baricéntricos. Por lo tanto, todo 5-conjunto contiene un subconjunto 3-baricéntrico.

3.-Uso de la relación que involucra al $BD(k, G)$ y al $BO(k, G)$ para calcular nuevos valores para $BD(k, G)$.

Sea G un grupo abeliano de orden m y $k \leq m$. Si $BO(k, G)$ existe, entonces tenemos que $BO(k, G) \leq BD(k, G)$ en caso contrario $m + 1 \leq BD(k, G)$. Por la condición de Hamidoune tenemos que $BD(k, G) \leq m + k - 1$. Como vimos en el ejemplo de la parte 2, todo 5-conjunto en $\mathbb{Z}_6$ contiene un subconjunto 3-baricéntrico, es decir $BO(3, \mathbb{Z}_6) = 5$. En consecuencia $5 \leq BO(3, \mathbb{Z}_6)$. La cota inferior se obtiene de la secuencia con cuatro elementos diferentes. La secuencia 00134 no es 3-baricéntrica. Más aun, si en una secuencia μ de longitud seis hay un elemento repetido tres veces, listo. En caso contrario, que sean diferentes, puesto que la única órbita no baricéntrica en X_6^3 es $\{0,1,3\}$ entonces es suficiente considerar la secuencia 001133, la cual contiene la secuencia 003, y esta es 3-baricéntrica. En consecuencia $BD(3,\ \mathbb{Z}_6) = 6$, es decir toda secuencia de longitud seis en $\mathbb{Z}_6$ contiene una subsecuencia 3-baricéntrica.

4.- Uso de la relación $BR(K_{1,k}, G) \leq BD(k, G) + 1$ y de teoremas de descomposición de grafos para el cálculo del número de Ramsey baricéntrico para estrellas, $BR(K_{1,k}, G)$.

El proceso consiste en seleccionar la cota superior del hecho de que $BR(K_{1,k}, G) \leq BD(k, G) + 1$. La cota inferior se deduce de la descomposición del grafo completo en subgrafos lados disjuntos. Cada subgrafo es coloreado de tal manera que el grafo completo no contenga una determinada estrella $K_{1,s}$ baricéntricaes. En algunos casos la cota superior es derivado de $BO(k,\ G)$. Por ejemplo, veamos el cálculo de $BR(K_{1,4}, \mathbb{Z}_6) = 7$. Se descompone el grafo completo K_6 en dos ciclos hamiltonianos y un matching perfecto, los cuales son coloreados con 1,3 y 0 respectivamente. Es fácil ver que K_6 con esta coloración no contiene un $K_{1,4}$ baricéntrico. La cota superior de $BR(K_{1,4}, \mathbb{Z}_6)$ se deduce del hecho que $BO(4, \mathbb{Z}_6) = 5$. Si existe un $K_{1,6}$ en K_7 coloreado con 5 ó 6 colores diferentes, luego existe un $K_{1,4}$ baricéntrico. Si todos los $K_{1,6}$ están coloreados con 3 ó 4 colores, entonces usando la teoría de órbitas es posible identificar en un $K_{1,6}$ un $K_{1,4}$ baricéntrico. Si todos los $K_{1,6}$ están coloreados con 2 colores diferentes, estos deben ser {0,1}, {0,2} ó {0,3}. Si suponemos la no existencia de un $K_{1,4}$ baricéntrico nos lleva a la contradicción de tener un grafo de orden impar y todos sus vértices de grado impar. Esto se obtiene considerando el grafo inducido por los lados coloreados con 0. Y de esta forma podemos concluir que $BR(K_{1,4}, \mathbb{Z}_6) = 7$.

5.- Sobre el teorema análogo de Cauhy-Davenport.

El teorema de Cauchy Davenport juega un papel muy importante en el área de teoría aditiva, podemos ver, por ejemplo, su utilidad para demostrar el teorema de Erdös, Ginzburg, Ziv. Esto es, sea S una secuencia en $\mathbb{Z}_p$ con longitud $|S| = 2p - 1$. Si existe en S un elemento repetido p veces, entonces S contiene una p-subsecuencia de suma cero. En caso contrario se puede particionar S en $A_1+\cdots+A_p$ subconjuntos, luego aplicando el teorema de Cauchy-Davenport se tiene $\sum_{i=1}^{p} A_i = \mathbb{Z}_p$.

A partir del teorema análogo de Cauchy-Davenport, también se puede derivar el teorema de Erdös, Ginzburg, Ziv. Esto es, sea S una secuencia en $\mathbb{Z}_m$, m compuesto con $|S| = 2m-1$ supongamos que $h(S) \leq m$, sino trivialmente existe una subsecuencia de S de suma cero. Además como $|S| \geq m$. Entonces existe una partición $A= A_1+\cdots+A_m$ de S y además trivialmente se tienen las condiciones del teorema análogo. Si se verifica la parte *i*, entonces $\sum_{i=1}^{m} A_i = \mathbb{Z}_m$. Si se verifica la parte *ii*, entonces se tiene que $\sum_{i=1}^{m} B_i = m\alpha + H_a = H_a$. Es decir S contiene una subsecuencia de longitud m y suma cero.

Con respecto a las conjeturas dadas por Gao, Thangadurai y Zhuang, se verificarán los siguientes teoremas, que generalizan a dichas conjeturas.

Teorema 1: *Sea G un grupo abeliano de orden m, sea p el menor divisor primo de m, sea q el menor divisor primo de* $\frac{m}{p}$ *(si m es compuesto), sea S una secuencia de términos de G\0 y sean* $h \geq h(S)$ *y* $t \geq 0$ *enteros. Si* $|S| \geq m+t$ *y* $h' \leq h \leq |S|$, *entonces cualquiera de las siguientes condiciones implica que* $\sum(S)$ *es periódico y* $\sum_{\geq t+1}(S) \cap \sum_{\leq h+t}(S) = \sum(S)$,

(i) $h+t \geq \frac{m}{p}-1$, *o*

(ii) $\sum S \neq G$ *y m = pq, o*

(iii) $\sum S \neq G$ *y* $h+t \geq \frac{m}{pq}+q-3$.

Teorema 2: *Sea S una secuencia de términos de un grupo abeliano G de orden m, y sea p el menor divisor primo de m. Si* $|S| \geq m + \max\left\{h(S), \frac{m}{p} - 1\right\}$, *entonces* $0 \in m\Lambda S$, *y* $m\Lambda S$ *es periódico*.

ESTRUCTURA DEL TRABAJO

Además de la introducción y las conclusiones, el trabajo consta de cinco capítulos primordiales:

En el primer capítulo se presentan las herramientas que serán usadas en el trabajo; entre ellas, la forma general del teorema de Cauchy-Davenport, el teorema de Dias da Silva-Hamidoune, y además, algunos resultados adicionales de teoría aditiva y de descomposiciones en grafos, los cuales son necesarios para el desarrollo del trabajo.

El segundo capítulo aporta los teoremas importantes, que ayudarán a demostrar la existencia de la constante de Olson *k*-baricéntrica. De igual manera se considera el uso de la teoría de órbitas, es decir se desarrolla un método, basado en dicha teoría, que permite identificar y caracterizar conjuntos baricéntricos para así calcular algunos casos particulares de la constante de Olson *k*-baricéntrica.

El tercer capítulo presenta un método algorítmico para el cálculo de órbitas y para el cálculo de la constante de Olson *k*-baricéntrica.

En el cuarto capítulo se usan los valores de la constante de Olson k-baricéntrica $BO(k,G)$ para calcular los valores de $BD(k,G)$. Así como también la determinación exacta de valores para el $BR(K_{1,k},G)$, una vez conocido la $BD(k,G)$.

En el quinto capítulo se realizan las pruebas de la conjeturas de Gao, Thangadurai y Zhuang .

REFERENCIAS

[1] N. Alon and Y. Caro. *On three zero-sum Ramsey-type problems*. Journal of Graph Theory. Vol. **17**. N° 2 (1993) 177-192.

[2] Baginski. *The Strong Davenport Constant and The Olson Constant*. Preprint.

[3] A. Bialostocki and P. Dierker. *On Erdös- Ginzburg*-Ziv *theorem and the Ramsey numbers for stars and matchings.* Discrete Math. **110** (1992) 1-8.

[4] A. Bialostocki and P. Dierker. *On zero-sum Ramsey numbers-small graphs*. Ars Combinatoria. **29**A. (1990) 193-198.

[5] A. Bialostocki, P. Dierker, D. Grynkicwicz and M. Lotspcich, *On some developments of the Erdös- Ginzburg*-Ziv *Theorem II.* Acta. Arith, **110** (2003), no. 2, 173-184

[6] Y. Caro. *A complete characterization of the zero-sum (mod 2) Ramsey numbers*. J. Combin. Theory Ser. A **68** (1994) 205-211.

[7] Y. Caro. *On zero-sum subsequences in abelian non-cyclic groups*. Israel Journal of Mathematics. **92** (1995) 221-233.

[8] Y. Caro. *On zero-sum Ramsey numbers-stars*. Discrete Math. **104** (1992) 1-6.

[9] Y. Caro. *Zero-sum Ramsey problems: a survey*. Discrete Math. **152** (1996) 93-113.

[10] Fang Chen. *Long n-zero-free sequences in finite cyclic groups*, manuscript (2006).

[11] J.E. Cruthirds, L.E. Mattics, I.M. Isaacs, F. Quinn. *The group* $C_3 \times C_3 \times C_3$. The American Mathematical Monthly. Vol. **89**. Number 4 (1982) 279-280.

[12] C. Delorme, S. González, O. Ordaz and M. Varela. *Barycentric sequences and barycentric Ramsey numbers stars*. Descrete Math. **277** (2004) 45-56.

[13] C. Delorme, I. Márquez, O. Ordaz and A. Ortuño. *Existente condition for barycentric sequences*. Discrete Math. **281** (2004)163-172.

[14] P. Erdös, A. Ginzburg and A. Ziv. *Theorem in the additive number theory*. Bull. Res. Council Israel **10** (1961) 41-43.

[15] J.A. Dias da Silva and Y. O. Hamidoune. *Cyclic spaces for Grassmann derivatives and additive theory*. Bull. London Math. Soc. **26** (1994) 140-146.

[16] H. Davenport. *On the addition of residue classes*. J. London. Math. Soc. **10** (1935) 30-32.

[17] C. Flores and O. Ordaz. *On the Erdös-Ginzburg-Ziv theorem*. Discrete Math. **152** (1996) 321-324.

[18] J. Fraleigh. *Álgebra Abstracta*. Addison-Wesley Iberoamēricana. (1988).

[19] W. Gao. *An addition theorem for finite cyclic groups*. Discrete Math, **163** (1997) 257-265

[20] W. Gao and Geroldinger. *On long minimal zero sequences in finite abelian groups*. Periodica Mathematica Hungarica **38** (1999) 179-211.

[21] W. Gao and Geroldinger. *Zero-sum problems in finite abelian groups: A survey*, Expo. Math. **24** (2006) 337-369.

[22] W. Gao and R. Thangadurai. *Avariant of Kemnitz conjeture*. J. Comb. Theory, Ser. A **107** (2004)69-70.

[23] W. Gao, I. Ruzsa and R. Thangadurai. *Olson´s constant for the group* $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$. Jounal of Combinatorial Theory, Series A. **107**, Issue 1, (2004) 49-67.

[24] W. Gao, R. Thangadurai and Zhuang. *Addition theorems for cyclic groups* $\mathbb{Z}_{p^n}$. Preprint.

[25] D. J. Grynkiewicz. *A weighted version Erdös-Ginzburg-Ziv Theorem* . Combinatorica, **4** (2006) 445-453.

[26] D. Grynkicwicz. *On a Partition Analog of the Cauchy-Davenport Theorem.* Acta Math. Hungar., **107** (2005), no. 1-2, 161-174.

[27] Y. O. Hamidoune. *On weighted sequences sums*. Combinatorics, Probability and Computing **4** (1995), 363-367.

[28] Y. O. Hamidoune. *On weighted sums in abelian groups*. Discrete Math. **162** (1996) 127-132.

[29] Y. O. Hamidoune, O. Ordaz and A. Ortuño. *On a Combinatorial Theorem of Erdös, Ginzburg and Ziv*. Combinatorics, Probability and Computing **7** (1998) 403-412.

[30] Y. O. Hamidoune. *Subsequence sums*. Combinatorics, Probability and Computing **12** (2003) 413-425. .

[31] F. Harary. *Graph theory*. Addison-Wesley. Reading MA, 1972.

[32] N. Jacobson. *Basic Algebra I.* W. H. Freeman and Company, 1985.

[33] H. B. Mann. *Addition theorems*. Interscience tracts in pure and applied mathematics **18**, Wiley & Sons, 1965.

[34] H. B. Mann. *Two addition theorems*. J. Combinatorial theory **3** (1967) 233-235.

[35] H. B. Mann and J. E. Olson. *Sums of sets in the elementary abelian group of type (p,p)**. J. Combinatorial Theory **2** (1967) 275-284.

.

[36] M. B. Nathanson, *Additive Number Theory: Inverse Problems and the Geometry of Sumsets*, Springer, 1996.

[37] J. E. Olson. *A combinatorial problem on finite abelian groups*. I. J. Number theory **1** (1969) 195-199.

[38] J. E. Olson. *A combinatorial problem of Erdös, Ginzburg and Ziv*. Number Theory, **8** (1976), n° 1, 52-57.

[39] O. Ordaz and D. Quiroz. *On zero-free sets*. Divulgaciones Matemáticas **14** (2006) 1-10.

[40] B. Peterson and T. Yuster. *A generalization of an addition theorem for solvable groups,* Can. J. Math, VolXXXVI, No. **3** (1984) 529-536.

[41] V. Ponomarenko.*Minimal zero sequences of finite cyclic groups*. Integer **4** (2004), Paper A24, 6p.

[42] J. Subocz. *Some values of Olson constant*. Divulgaciones Matemáticas **8** (2000) 121-128.

[43] M.T. Varela. *La constante de Davenport k-baricéntrica y sus aplicaciones al cálculo del número de Ramsey baricéntrico para estrellas*. Tesis Doctoral. Universidad Central de Venezuela. Caracas. Junio 2004.

INFORMACIONES ADICIONALES

Área: Teoría Combinatoria.

Palabras Claves: Problemas de suma cero, constante de Olson *k*-baricéntrica, teorema inverso de Erdös-Ginzburg-Ziv.

Cronograma de trabajo

Agosto 2006 - Mayo 2007.

Lectura y análisis de artículos.

Cálculo de órbitas.

Cálculo de valores de la constante de Olson k-baricéntrica usando órbitas.

Cálculo de nuevos valores de la constante de Davenport.

Cálculo de la constante de Ramsey, conocida la constante de Davenport.

Implementar un método algorítmico para el cálculo de órbitas.

Implementar un método algorítmico para el cálculo de la constante de Olson k-baricéntrica.

Resolución de las conjeturas de Gao.

Junio 2007 - Septiembre 2007

Preparación y redacción de los resultados finales de la actividad anterior para su publicación.

Octubre 2007 - Enero 2008

Enviar a una revista internacional competente en el área los resultados parciales de la tesis. Redacción de los preliminares del trabajo de grado.

Febrero 2008 - Junio 2008

Culminación del trabajo de grado y defensa pública del mismo.