An. Arm. Teor. Op. Vol. 1, No. 1, 27–32
ISSN 2244-7628

Análisis Armónico
y Teoría de Operadores

ACERCA DE FUNCIONES DEFINIDAS POSITIVAS Y FUNCIONES κ-INDEFINIDAS

ABOUT POSITIVE DEFINITE FUNCTIONS AND κ-INDEFINITE FUNCTIONS

RAMÓN BRUZUAL

Resumen. Usando técnicas muy básicas se da una demostración de que toda función definida positiva es acotada y se presentan ejemplos de funciones definidas positivas. Se introduce el concepto, más general, de función κ-indefinida y se dan ejemplos que muestran que una función κ-indefinida continua no necesariamente es acotada.

Abstract. Using basic techniques, it is proved that every positive definite function is bounded and examples of positive defined functions are presented. The more general concept of κ-indefinite function is introduced and examples showing that κ-indefinite continuous functions are not necessarily bounded are given.

1. Algunos resultados básicos de álgebra lineal

Sea $\begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix}$ una matriz 2×2 de números complejos ($A, B, C, D \in \mathbb{C}$).

Se dice que esta matriz es *positiva* o *definida positiva* si

$$\left\langle \begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}^2} \geq 0,$$

para todo $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.

Desarrollando el producto escalar, se obtiene que esta condición equivale a

$$A|\lambda_1|^2 + C\overline{\lambda_1}\,\lambda_2 + D\lambda_1\overline{\lambda_2} + B|\lambda_2|^2 \geq 0, \text{ para todo } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \tag{1}$$

De esta última desigualdad se obtiene el siguiente resultado, que es de carácter muy básico.

Proposición 1.1. *Sea* $\begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix}$ *una matriz definida positiva, entonces*

(1) $A, B \geq 0$,

Recibido por los editores 1 de mayo 2012 y revisado 29 de junio 2012.
2000 *Mathematics Subject Classification.* Primario 42A82; Secundario 46C20.
Palabras claves. función definida positiva, función indefinida, producto interno indefinido, espacios con métrica indefinida.
El autor agradece al Consejo de desarrollo Científico y Humanístico de la Universidad Central de Venezuela. Proyecto PI-03-8035-2011-1.

(2) $C = \overline{D}$,
(3) $|C|^2 \leq |A||B|$.

Demostración.

(1) Para demostrar que $A \geq 0$ considerar $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ en la desigualdad (1) y para $B \geq 0$ considerar $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$.
(2) Al tomar $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ en la desigualdad (1) se obtiene
$$A + B + C + D \geq 0,$$
por lo tanto $C + D \in \mathbb{R}$.
Al tomar $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$ en la desigualdad (1) se obtiene
$$A + B + i(C - D) \geq 0,$$
por lo tanto $i(C - D) \in \mathbb{R}$.
Usando que $C + D, i(C - D) \in \mathbb{R}$ se deduce fácilmente que
$$C = \overline{D}.$$
(3) Por el resultado anterior la matriz es de la forma $\begin{bmatrix} A & C \\ \overline{C} & B \end{bmatrix}$ y se tiene que
$$A|\lambda_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(C\overline{\lambda_1}\,\lambda_2) + B|\lambda_2|^2 = A|\lambda_1|^2 + C\overline{\lambda_1}\,\lambda_2 + \overline{C}\lambda_1\overline{\lambda_2} + B|\lambda_2|^2 \geq 0.$$
Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| = 1$ y $\alpha\, C = |C|$. Si en la desigualdad anterior se toma $\lambda_1 = \xi_1 \in \mathbb{R}$ y $\lambda_2 = \alpha\,\xi_2$, con $\xi_2 \in \mathbb{R}$, se obtiene
$$A\xi_1^2 + 2\,|C|\xi_1\xi_2 + B\xi_2^2 \geq 0, \text{ para todo } \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}.$$
Si $A = B = 0$ se obtiene fácilmente que $C = 0$.
Supongamos $A > 0$, completando cuadrados se obtiene
$$A\left(\xi_1 + \frac{|C|\,\xi_2}{A}\right)^2 + \left(B - \frac{|C|^2}{A}\right)\xi_2^2 \geq 0 \qquad \text{para todo } \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R},$$
de donde sigue que
$$B - \frac{|C|^2}{A} \geq 0,$$
que equivale a
$$|C|^2 \leq |A||B|.$$
El caso $B > 0$ es análogo.

□

En resumen, una matriz 2×2 definida positiva es de la forma
$$\begin{bmatrix} A & C \\ \overline{C} & B \end{bmatrix},$$
donde $A, B, C \in \mathbb{C}$, $A, B \geq 0$ y $|C|^2 \leq A\,B$.

2. Funciones definidas positivas en la recta

Se dice que una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ es *definida positiva* si

$$\sum_{j,l=1}^{n} f(x_j-x_l)\lambda_j\overline{\lambda_l}\geq 0,$$

para todo $n\in\mathbb{N}$, $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$, $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{C}$.

Supóngase que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ es definida positiva. Tomando $n=2$, $x_1=0$, $x_2=x$, en la definición, se obtiene que

$$f(0)|\lambda_1|^2+f(x)\overline{\lambda_1}\,\lambda_2+f(-x)\lambda_1\overline{\lambda_2}+f(0)|\lambda_2|^2\geq 0,\ \text{ para todo } \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C} \text{ y } x\in\mathbb{R},$$

es decir, la matriz

$$\begin{bmatrix} f(0) & f(x)\\ f(-x) & f(0)\end{bmatrix}$$

es definida positiva, para todo $x\in\mathbb{R}$. Por lo tanto, de la Proposición 1.1 sigue el siguiente resultado.

Teorema 2.1. *Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ una función definida positiva. Entonces*

(1) $f(0)\geq 0$,
(2) $f(x)=\overline{f(-x)}$ *para todo* $x\in\mathbb{R}$,
(3) $|f(x)|\leq f(0)$ *para todo* $x\in\mathbb{R}$.

Es importante destacar que el resultado anterior implica que toda función definida positiva es acotada.

3. Un concepto más general: función κ-indefinida

Para la lectura de esta sección y las siguientes serán necesarios algunos conocimientos (muy básicos) de álgebra lineal y de espacios con métrica indefinida. La parte de álgebra lineal se puede encontrar en el libro de K. Hoofman y R. Kunze [2]. La parte de espacios con métrica indefinida se puede estudiar en el libro de Z. Sasvári [3]. Más información sobre los espacios con métrica indefinida se puede encontrar en el libro de J. Bognár [1].

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ una función. Se tiene que f es definida positiva si y sólo si para cada $n\in\mathbb{N}$ y $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$ la matriz

$$\big(f(x_j-x_l)\big)_{j,l=1}^{n}$$

es definida positiva, lo que equivale a decir que la matriz es hermítica, por lo tanto diagonalizable, y que todos sus autovalores son no negativos.

Supóngase que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ es una función hermítica, es decir $f(x)=\overline{f(-x)}$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Entonces, para cada colección de puntos $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$ la matriz

$$\big(f(x_j-x_l)\big)_{j,l=1}^{n}$$

es hermítica, por lo tanto es diagonalizable, y todos sus autovalores son reales.

El siguiente concepto generaliza el de función definida positiva.

Definición 3.1. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ una función hermítica y sea κ un entero no negativo. Se dice que f es *κ-indefinida* si para cada $n\in\mathbb{N}$ y $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$ la matriz

$$\big(f(x_j-x_l)\big)_{j,l=1}^{n}$$

tiene a lo sumo κ autovalores negativos y tiene exactamente κ para alguna escogencia de n y $x_1, \ldots, x_n$.

Al entero κ se le suele llamar *índice* de f.

Es importante destacar que el caso $\kappa = 0$ corresponde con el caso de una función definida positiva.

3.1. **El espacio con producto interno indefinido asociado a una función hermítica.**

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función hermítica. Para $\omega \in \mathbb{R}$ se define $f_\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ por

$$f_\omega(x) = f(x - \omega).$$

El espacio $\mathcal{E}(f)$ se define como el espacio lineal de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ generado por el conjunto $\{f_\omega \,:\, \omega \in \mathbb{R}\}$.

En $\mathcal{E}(f)$ se define una forma sesquilinear hermítica de la siguiente manera, si

$$u = \sum_{j=1}^{n} c_j f_{\omega_j} \quad \text{y} \quad v = \sum_{l=1}^{m} c'_l f_{\omega'_j}$$

son elementos de $\mathcal{E}(f)$, donde $c_1, \ldots, c_n, c'_1, \ldots, c'_m \in \mathbb{C}$, $\omega_1, \ldots, \omega_n, \omega'_1, \ldots, \omega'_m \in \mathbb{R}$, se define

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{E}(f)} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} c_j \, \overline{c'_l} \, f(\omega'_l - \omega_j).$$

Se tiene que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{E}(f)}$ es una forma sesquilineal hermítica en $\mathcal{E}(f)$ y además se cumple que

$$u(x) = \langle u, f_x \rangle_{\mathcal{E}(f)}$$

si $u \in \mathcal{E}(f)$, $x \in \mathbb{R}$, esta propiedad se conoce como la *propiedad reproductora*.

La propiedad reproductora implica que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{E}(f)}$ es no degenerada, es decir si $u \in \mathcal{E}(f)$ y $\langle u, v \rangle_{\mathcal{E}(f)} = 0$ para todo $v \in \mathcal{E}(f)$ entonces $u = 0$.

Se cumple el siguiente resultado, para su demostración ver [3].

Teorema 3.2. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función hermítica y κ un entero no negativo.*

Entonces, f es κ-indefinida si y sólo si $\mathcal{E}(f)$ es un pre-espacio de Pontryagin de índice κ.

Tomando en cuenta el Teorema 2.1 es muy natural hacerse la siguiente pregunta: ¿Es toda función κ -indefinida acotada? Más adelante se verá que la respuesta es negativa, mediante un ejemplo bastante básico (ver Ejemplo 3.4).

3.2. **Ejemplos básicos.**

Ejemplo 3.3.

Para $\gamma, a \in \mathbb{R}$ sea

$$f(x) = a\, e^{i\gamma x}.$$

Entonces f es hermítica y el espacio $\mathcal{E}(f)$ se puede describir muy fácilmente. Sean $\omega_1, \ldots, \omega_n \in \mathbb{R}$ y $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$, entonces

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \, f_{\omega_j}(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \, a \, e^{i\gamma(x - \omega_j)} = \left(a \sum_{j=1}^{n} c_j \, a \, e^{-i\gamma\omega_j} \right) e^{i\gamma x},$$

como todo elemento de $\mathcal{E}(f)$ es un múltiplo escalar de la función $e^{i\gamma x}$, se tiene que la dimensión de $\mathcal{E}(f)$ es igual a 1.

Por la propiedad reproductora sigue que

$$\langle f, f\rangle_{\mathcal{E}(f)} = \langle f, f_0\rangle_{\mathcal{E}(f)} = f(0) = a.$$

Por lo tanto, si $a > 0$ el producto interno en $\mathcal{E}(f)$ es definido positivo y f es definida positiva. Si $a < 0$ el producto interno en $\mathcal{E}(f)$ es definido negativo y f es 1-indefinida.

Es importante destacar que en este ejemplo la función es acotada.

Ejemplo 3.4.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ un polinomio, es decir

$$f(x) = a_o + a_1 x + \cdots + a_N x^N,$$

donde $N \in \mathbb{N}$ y $a_o, a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{C}$.

Se tiene que f es hermítica si y sólo si

$$a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_N x^N = \overline{a_o + a_1(-x) + a_2(-x)^2 + \cdots + a_N(-x)^N},$$

lo que es equivalente a la siguiente condición

$$a_{2k} \in \mathbb{R} \text{ y } \; a_{2k+1} \in i\,\mathbb{R}.$$

De ahora en adelante se supondrá que f es hermítica.

En este caso el espacio $\mathcal{E}(f)$ también es fácil de describir, ya que como un elemento de este espacio es de la forma

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\, f(x - \omega_j),$$

donde $\omega_1, \ldots, \omega_n \in \mathbb{R}$, $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ y f es un polinomio de grado N se tiene que todo elemento de $\mathcal{E}(f)$ es combinación lineal de los polinomios $p_o, p_1, \ldots, p_N$, donde $p_j(x) = x^j$. Por lo tanto $\mathcal{E}(f)$ es un espacio pre-Pontryagin de dimensión menor o igual que $N + 1$ y por lo tanto su índice es menor o igual que $N + 1$.

Como para $N \geq 1$ se tiene que f no es acotada, en este caso f no puede ser definida positiva y por lo tanto es una función κ-indefinida. El índice κ tiene que ser menor o igual que $N + 1$, que es la dimensión del espacio asociado.

Ejemplo 3.5.

Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

Entonces

$$\sum_{j,l=1}^{n} f(x_j - x_l)\lambda_j \overline{\lambda_l} = a \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2.$$

Por lo tanto f es definida positiva si $a > 0$ y es indefinida si $a < 0$.

Es importante destacar que, para $a > 0$, este es un ejemplo de función definida positiva no continua.

3.3. **Suma de funciones κ-indefinidas.** La suma de funciones indefinidas, de índice finito, también es una función de índice finito, más precisamente se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.6.
Sea $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ funciones hermíticas. Si f es κ_1-indefinida y g es κ_2-indefinida, entonces $f + g$ es κ-indefinida, donde $\kappa \leq \kappa_1 + \kappa_2$.

Idea de la demostración.
Se tiene que $\mathcal{E}(f)$ y $\mathcal{E}(g)$ son espacios pre-Pontryagin de índice κ_1 y κ_2 respectivamente, por lo tanto $\mathcal{E}(f) \oplus \mathcal{E}(g)$ es un espacio pre-Pontryagin de índice $\kappa_1 + \kappa_2$.

Los elementos de $\mathcal{E}(f + g)$ son de la forma

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \, (f_{\omega_j} + g_{\omega_j}),$$

donde $\omega_1, \ldots, \omega_n \in \mathbb{R}$ y $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$.

Por lo tanto, como espacio lineal, $\mathcal{E}(f + g)$ está contenido en $\mathcal{E}(f) + \mathcal{E}(g)$.

Por otra parte, si $\omega_1, \ldots, \omega_n, \omega_1', \ldots, \omega_m' \in \mathbb{R}$ y $c_1, \ldots, c_n, c_1', \ldots, c_m' \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\left\langle \sum_{j=1}^{n} c_j \, (f_{\omega_j} + g_{\omega_j}), \sum_{l=1}^{m} c_l' \, (f_{\omega_l'} + g_{\omega_l'}) \right\rangle_{\mathcal{E}(f+g)} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} c_j \, \overline{c_l'} \, (f(\omega_l' - \omega_j) + g(\omega_l' - \omega_j))$$

$$= \left\langle \sum_{j=1}^{n} c_j \, f_{\omega_j}, \sum_{l=1}^{m} c_l' \, f_{\omega_l'} \right\rangle_{\mathcal{E}(f)} + \left\langle \sum_{j=1}^{n} c_j \, g_{\omega_j}, \sum_{l=1}^{m} c_l' \, g_{\omega_l'} \right\rangle_{\mathcal{E}(g)} .$$

Por lo tanto, geométricamente, $\mathcal{E}(f + g)$ es una sub-variedad lineal de $\mathcal{E}(f) \oplus \mathcal{E}(g)$, do donde se concluye que su índice es menor o igual que $\kappa_1 + \kappa_2$.

□

Este resultado, combinado con los ejemplos permite construir una gran variedad de ejemplos de funciones κ-indefinidas.

Referencias

[1] J. Bognár, *Indefinite inner product spaces*, Springer Verlag, 1974. Citado en la(s) página(s): 29

[2] K. Hoffman, R. Kunze, *Álgebra lineal*, Prentice Hall. Citado en la(s) página(s): 29

[3] Z. Sasvári, *Positive definite and definitizable functions,* Akademie Verlag, 1994. Citado en la(s) página(s): 29, 30

Ramón Bruzual, Escuela de Matemática, Fac. Ciencias, Universidad Central de Venezuela

Apartado Postal 47686, Caracas 1041-A, Venezuela.

e-mail: `ramon.bruzual@ciens.ucv.ve` , `ramonbruzual.ucv@gmail.com`