An. Arm. Teor. Op. Vol. 2, No. 1, 1–8
ISSN 2244-7628

Análisis Armónico y Teoría de Operadores

EL MÉTODO DE LOS FUNCIONALES DIRECTORES DE M. G. KREĬN Y EXTENSIÓN DE FUNCIONES DEFINIDAS POSITIVAS

THE DIRECTED FUNCTIONALS METHOD OF M. G. KREĬN AND EXTENSION OF POSITIVE DEFINITE FUNCTIONS

RAMÓN BRUZUAL

Resumen. Se da la definición de funcional director y se presentan ejemplos. Se enuncia el teorema de los funcionales directores de M. G. Kreĭn y, a partir de este resultado, se demuestra el teorema de extensión de M. G. Kreĭn para funciones definidas positivas.

Abstract. The definition of directed functional and some examples are given. The directed functional theorem of M. G. Kreĭn is enunciated and, from this result, the M. G. Kreĭn theorem about extension of positive definite functions is proved.

1. Definiciones, ejemplos y resultados básicos

La referencia básica para este artículo es el libro "M.G. Krein's Lectures on Entire Operators" escrito por M. L. Gorbachuk y V. I. Gorbachuk (Operator Theory: Advances and Applications 97) [2].

Sea $\mathfrak{L}$ un espacio lineal (sobre $\mathbb{C}$), sea $\mathcal{D}(Ao)$ una variedad lineal contenida en $\mathfrak{L}$ y sea $A_o : \mathcal{D}(Ao) \to \mathfrak{L}$ un operador lineal.

Adicionalmente sea $\{\Phi(\cdot, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ una familia de funcionales lineales definidos en $\mathfrak{L}$, con más detalle

$$\Phi : \mathfrak{L} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

y es lineal en la primera componente.

Definición 1.1. Se dice que la familia $\{\Phi(\cdot, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ es una *familia de funcionales directores* (o abreviado *funcional director*) para el operador lineal A_o si se cumple que:

a) Para cada $f \in \mathfrak{L}$ la función $\lambda \mapsto \Phi(f, \lambda)$ es analítica en todo el eje real;
b) Existe al menos un elemento $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que el funcional $\Phi(\cdot, \lambda)$ no es nulo;

Recibido por los editores 15 de octubre 2013 y revisado 12 de noviembre de 2013.
2000 *Mathematics Subject Classification.* Primario 42A82; Secundario 47A67.
Palabras claves. funcional director, definida positiva.

c) Si $f_o \in \mathfrak{L}$ y $\lambda_o \in \mathbb{R}$, la ecuacion

$$A_o f - \lambda_o f = f_o \tag{1}$$

tiene solución si y sólo si

$$\Phi(f_o, \lambda_o) = 0. \tag{2}$$

Ejemplo 1.2.

A continuación un ejemplo de un operador lineal que tiene un funcional director.

Sea a tal que $0 < a \leq +\infty$ y sea $\mathfrak{L}$ el espacio de todas las funciones continuas, a valores complejos, definidas en el intervalo $[0, a)$ y con soporte compacto.

El operador A_o se define de la siguiente manera

$$\mathcal{D}(A_o) = \{f \in C^1([0, a)) \cap \mathfrak{L} \,:\, f(0) = 0\}$$

y

$$A_o f = -f'.$$

Sean $f_o \in \mathfrak{L}$ y $\lambda_o \in \mathbb{R}$. En este ejemplo la ecuación (1) queda así

$$-f'(x) - \lambda_o f(x) = f_o(x) \tag{3}$$

La solución general de esta ecuación es

$$f(x) = e^{-\lambda_o x} \int_0^x e^{\lambda_o t} f_o(t)\, dt + C e^{-\lambda_o x},$$

donde C es una constante. Por lo tanto la solución que satisface $f(0) = 0$ es

$$f(x) = e^{-\lambda_o x} \int_0^x e^{\lambda_o t} f_o(t)\, dt.$$

Si $a < +\infty$, por ser soporte de f_o compacto, para $\eta \geq 0$ y suficientemente pequeño se tiene que

$$\int_0^{a-\eta} e^{\lambda_o t} f_o(t)\, dt$$

es constante.

Si $a = +\infty$, por ser soporte de f_o compacto, para M suficientemente grande se tiene que

$$\int_0^{M} e^{\lambda_o t} f_o(t)\, dt$$

es constante.

Por lo tanto la función f definida por

$$f(x) = e^{-\lambda_o x} \int_0^x e^{\lambda_o t} f_o(t)\, dt$$

es un elemento de $\mathfrak{L}$ si y sólo si

$$\int_0^{a} e^{\lambda_o t} f_o(t)\, dt = 0.$$

Luego, la familia

$$\Phi(f, \lambda) = \int_0^{a} e^{\lambda t} f(t)\, dt$$

es un funcional director para el operador A_o.

Ejemplo 1.3.

En forma análoga a como se hizo en el ejemplo anterior se puede demostrar que, si $\mathfrak{L}$ es el espacio de las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$, con soporte compacto, $\mathcal{D}(A_o)$ es $C_0^1(\mathbb{R})$ (el espacio de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ continuamente diferenciables y con soporte compacto) y

$$A_o = i\frac{d}{dx,}$$

entonces la familia

$$\Phi(f,\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} f(x)\, dx$$

es un funcional director para el operador A_o.

Proposición 1.4 (Algunas propiedades básicas de los funcionales directores)**.**

Sea $\{\Phi(\cdot,\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ *un funcional director para el operador* A_o*.*

1) Si $f \in \mathcal{D}(A_o)$ *entonces*

$$\Phi(A_o f, \lambda) = \lambda\Phi(f,\lambda) \quad \textit{para todo } \lambda \in \mathbb{R}.$$

2) Si $f \in \mathfrak{L}$, $\lambda_o \in \mathbb{R}$ *y*

$$\Phi(f, \lambda_o) = 0$$

entonces existe un elemento $h \in \mathcal{D}(A_o)$ *tal que*

$$\Phi(h,\lambda) = \frac{\Phi(f,\lambda)}{\lambda - \lambda_o}.$$

3) Si $\mathfrak{I}$ *es un intervalo acotado contenido en la recta real entonces existe* $u \in \mathfrak{L}$ *tal que* $\Phi(u,\lambda) \neq 0$ *para todo* $\lambda \in \mathcal{I}$*.*

Demostración.

1) Sean $f \in \mathcal{D}(A_o)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces g definido por

$$g = A_o f - \lambda f$$

es un elemento de $\mathfrak{L}$. Por lo tanto

$$\Phi(g,\lambda) = \Phi(A_o f - \lambda f, \lambda) = 0.$$

De la linealidad de $\Phi(\cdot,\lambda)$ sigue que

$$\Phi(A_o f, \lambda) = \lambda\Phi(f,\lambda)$$

2) Sean $f \in \mathfrak{L}$ y $\lambda_o \in \mathbb{R}$ tales que

$$\Phi(f,\lambda_o) = 0.$$

Entonces, por la propiedad (c) de la definición de funcional director, existe $h \in \mathcal{D}(A_o)$ tal que

$$A_o h - \lambda_o h = f,$$

evaluando $\Phi(\cdot,\lambda)$ se obtiene

$$\lambda\Phi(h,\lambda) - \lambda_o\Phi(h,\lambda) = \Phi(A_o h - \lambda_o h, \lambda) = \Phi(f,\lambda)$$

de esta última igualdad se obtiene

$$\Phi(h,\lambda) = \frac{\Phi(f,\lambda)}{\lambda - \lambda_o}.$$

3) Sea $\mathfrak{I}$ un intervalo acotado contenido en la recta real, por las propiedades (a) y (b) de la definición de funcional director existen $f_1 \in \mathcal{L}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que
$$\Phi(f_1, \lambda) \neq 0.$$
Si $\lambda_o \in \mathfrak{I}$ es tal que
$$\Phi(f_1, \lambda_o) = 0$$
por la propiedad anterior existe $f_1' \in \mathfrak{L}$ tal que
$$\Phi(f_1', \lambda) = \frac{\Phi(f_1, \lambda)}{\lambda - \lambda_o}.$$
La cantidad de ceros que puede tener $\Phi(f_1, \lambda)$ en el intervalo $\mathfrak{I}$ es finita y cada uno de estos ceros tiene que ser de multiplicidad finita. Repitiendo el procedimiento anterior en cada cero tantas veces como sea necesario de acuerdo a la multiplicidad del cero se obtiene el elemento u.

□

2. Espacios cuasi-Hilbert

Se dice que $(\mathfrak{L}, \langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{L}})$ es un *espacio cuasi-Hilbert* si $\langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{L}}$ satisface todas las propiedades de un producto interno, salvo que puede ocurrir que $\langle f, f \rangle_{\mathfrak{L}} = 0$ sin que $f = 0$.

En espacio cuasi-Hilbert vale la desigualdad de Cauchy Schwarz y, de manera natural, completando y pasando a un cociente se obtiene un espacio de Hilbert $(\widetilde{\mathfrak{L}}, \langle\ ,\ \rangle_{\widetilde{\mathfrak{L}}})$ a partir de $\mathfrak{L}$. Por $\widetilde{f}$ se denotará a la clase de equivalencia del elemento $f \in \mathfrak{L}$.

Sea $(\mathfrak{L}, \langle , \rangle_{\mathfrak{L}})$ un espacio cuasi-Hilbert. Se dirá que un operador lineal A_o definido en un conjunto cuasi-denso $\mathcal{D}(A_o)$ de $\mathfrak{L}$, y a valores en $\mathfrak{L}$, es *simétrico* si $\mathcal{D}(A_o)$ es cuasi-denso en $\mathfrak{L}$ y
$$\langle A_o f, g \rangle_{\mathfrak{L}} = \langle f, A_o g \rangle_{\mathfrak{L}} \quad \text{para todo par } f, g \in \mathcal{D}(A_o).$$

Proposición 2.1.
Si $(\mathfrak{L}, \langle , \rangle_{\mathfrak{L}})$ es un espacio cuasi-Hilbert y $A_o : \mathcal{D}(A_o) \to \mathfrak{L}$ es simétrico, entonces el operador
$$\widetilde{A_o} : \mathcal{D}(\widetilde{A_o}) \to \widetilde{\mathfrak{L}}$$
definido por
$$\mathcal{D}(\widetilde{A_o}) = \{\widetilde{f} \ :\ f \in \mathcal{D}(A_o)\}$$
y
$$\widetilde{A_o}\widetilde{f} = \widetilde{A_o f}$$
es simétrico.

Demostración.
Primero se debe probar que $\widetilde{A_o}$ está bien definido. Para probar esto basta ver que si $f \in \mathcal{D}(A_o)$ y $\langle f, f \rangle_{\mathfrak{L}} = 0$, entonces $\langle A_o f, A_o f \rangle_{\mathfrak{L}} = 0$.

Sea $f \in \mathcal{D}(A_o)$ tal que $\langle f, f \rangle_{\mathfrak{L}} = 0$. Si $g \in \mathcal{D}(A_o)$ entonces
$$|\langle A_o f, g \rangle_{\mathfrak{L}}|^2 = |\langle f, A_o g \rangle_{\mathfrak{L}}|^2 \leq \langle f, f \rangle_{\mathfrak{L}} \langle A_o g, A_o g \rangle_{\mathfrak{L}} = 0.$$
Como $\mathcal{D}(A_o)$ es cuasi-denso debe ser $\langle A_o f, A_o f \rangle_{\mathfrak{L}} = 0$.

Finalmente la densidad de $\mathcal{D}(\widetilde{A_o})$ y la simetría de $\widetilde{A_o}$ se obtienen de las correspondientes propiedades de $\mathcal{D}(A_o)$ y de A_o.

□

3. Teorema de los funcionales directores de M.G. Krein

El siguiente resultado, que se enuncia sin demostración, fue probado por M. G. Kreĭn en [3]. Para más detalles ver [2, páginas 102 a 106] y [1, páginas 160 a 161].

Teorema 3.1.
Sea $\mathfrak{L}$ un espacio cuasi-Hilbert y sea $A : \mathcal{D}(A) \to \mathfrak{L}$ un operador simétrico que tiene un funcional director $\{\Phi(\cdot, \lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$. Entonces existe una función monótona no decreciente $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\langle f, g\rangle_{\mathfrak{L}} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi(f, \lambda)\, \overline{\Phi(g, \lambda)}\, d\sigma(\lambda)$$

para cualquier par $f, g \in \mathfrak{L}$.
Si el operador A es positivo la función σ puede ser escogida de manera que $\sigma(\lambda) = 0$ si $\lambda \leq 0$.

4. Extensión de funciones definidas positivas

Definición 4.1. Sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Se dice que una función $F : (-a, a) \to \mathbb{C}$ es *definida positiva* si, para todo $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \cdots, t_n \in [0, a)$ y $c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{C}$, se cumple que

$$\sum_{j,k=1}^{n} F(t_j - t_k)\, c_j\, \overline{c_k} \geq 0$$

La prueba del siguiente resultado no ofrece dificultad.

Proposición 4.2.
Sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ y sea $F : (-a, a) \to \mathbb{C}$ una función continua. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1) F es definida positiva.

2) $\int\limits_0^a \int\limits_0^a F(s - t)\, f(s)\, \overline{f(t)}\, ds\, dt \geq 0$ para toda función continua $f : [0, a) \to \mathbb{C}$.

3) $\int\limits_0^a \int\limits_0^a F(s-t)\, f(s)\, \overline{f(t)}\, ds\, dt \geq 0$ para toda función continua con soporte compacto $f : [0, a) \to \mathbb{C}$.

El siguiente teorema de representación y extensión de funciones definidas positivas fue demostrado por M. G. Kreĭn en [3].

Teorema 4.3.
Sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ y sea $F : (-a, a) \to \mathbb{C}$ una función.
Entonces F es continua y definida positiva si y sólo si existe una función monótona no decreciente y acotada $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$F(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda}\, d\sigma(\lambda) \quad \textit{para } t \in (-a, a) \tag{4}$$

Demostración.
($\Leftarrow$) Sigue de que toda función con una representación integral como la (4) es continua y definida positiva.

($\Rightarrow$) Sea $\mathfrak{L}$ el espacio de las funciones continuas $f : [0,a) \to \mathbb{C}$ con soporte compacto.

Para $f, g \in \mathfrak{L}$ sea $\langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{L}}$ la forma sesquilineal definida por

$$\langle f, g\rangle_{\mathfrak{L}} = \int_0^a \int_0^a F(s-t)\, f(s)\, \overline{g(t)}\, ds\, dt.$$

Por la Proposición 4.2 $(\mathfrak{L}, \langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{L}})$ es un espacio cuasi-Hilbert.

Sea $\mathcal{D}(A)$ el espacio de todas las funciones $f \in \mathfrak{L}$ que son de clase C^1 y que satisfacen

$$f(0) = 0.$$

Sea $A : \mathcal{D}(A) \to \mathfrak{L}$ el operador definido por

$$Af = if'.$$

A continuación se probará que el operador A es simétrico.

La densidad de $\mathcal{D}(A)$ en $\mathfrak{L}$ sigue de resultados básicos de medida e integración.

Sean $f, g \in \mathcal{D}(A)$, entonces

$$\begin{aligned}
\langle Af, g\rangle_{\mathfrak{L}} &= i \int_0^a \int_0^a F(s-t)\, f'(s)\, \overline{g(t)}\, ds\, dt = i \int_0^a f'(s) \int_{s-a}^{s} F(\tau)\, \overline{g(s-\tau)}\, d\tau\, ds \\
&= i \int_{-a}^{0} F(\tau) \int_0^{\tau+a} f'(s)\, \overline{g(s-\tau)}\, ds\, d\tau + i \int_0^a F(\tau) \int_\tau^a f'(s)\, \overline{g(s-\tau)}\, ds\, d\tau \\
&= i \int_{-a}^{0} F(\tau) \left(f(s)\, \overline{g(s-\tau)}\Big|_{s=0}^{s=\tau+a} - \int_0^{\tau+a} f(s)\, \overline{g'(s-\tau)}\, ds \right) d\tau \\
&\quad + i \int_0^a F(\tau) \left(f(s)\, \overline{g(s-\tau)}\Big|_{s=\tau}^{s=a} - \int_\tau^a f(s)\, \overline{g'(s-\tau)}\, ds \right) d\tau \\
&= -i \int_{-a}^{0} F(\tau) \int_0^{\tau+a} f(s)\, \overline{g'(s-\tau)}\, ds\, d\tau - i \int_0^a F(\tau) \int_\tau^a f(s)\, \overline{g'(s-\tau)}\, ds\, d\tau \\
&= -i \int_0^a f(s) \int_{s-a}^{0} F(\tau)\, \overline{g'(s-\tau)}\, d\tau\, ds - i \int_0^a f(s) \int_0^s F(\tau)\, \overline{g'(s-\tau)}\, d\tau\, ds \\
&= -i \int_0^a f(s) \int_s^a F(s-t)\, \overline{g'(t)}\, dt\, ds - i \int_0^a f(s) \int_0^s F(s-t)\, \overline{g'(t)}\, dt\, ds \\
&= \int_0^a f(s) \int_o^a F(s-t)\, \overline{ig'(t)}\, dt\, ds \\
&= \langle f, Ag\rangle_{\mathfrak{L}}
\end{aligned}$$

Para $f \in \mathfrak{L}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ sea

$$\Phi(f,\lambda) = \int_0^a e^{i\lambda t} f(t)\, dt.$$

A continuación se probará que $\{\Phi(\cdot,\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ es un funcional director para el operador A.

Es bastante claro que las dos primeras propiedades de la definición se cumplen.

Sea $\lambda_o \in \mathbb{R}$.

La ecuación

$$Af - \lambda_o f = f_o \quad (f_o \in \mathfrak{L}) \tag{5}$$

es

$$if' - \lambda_o f = f_o,$$

su solución general es

$$f(t) = -ie^{-i\lambda_o t} \int_0^t e^{i\lambda_o s} f_o(s)\, ds \; + Ce^{-i\lambda_o t}.$$

Como f debe pertenecer al dominio del operador A se debe cumplir que $f(0) = 0$, por lo tanto $C = 0$. Como f tiene soporte compacto existe $\delta > 0$ tal que $\int_0^{a-r} e^{i\lambda_o s} f(s)\, ds$ es constante si $0 < r < \delta$, por lo que f está en $\mathfrak{L}$ si y sólo si $\int_0^a e^{i\lambda_o s} f(s)\, ds = 0$.

Por lo tanto la ecuación (5) tiene solución en $\mathcal{D}(A)$ si y sólo si

$$\Phi(f_o,\lambda_o) = \int_0^a e^{i\lambda t} f_o(s)\, ds = 0.$$

Así que la familia $\{\Phi(\cdot,\lambda) : \ \lambda \in \mathbb{R}\}$ es un funcional director para el operador simétrico A_o.

Por el Teorema 3.1 existe una función monótona no decreciente $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\langle f, g\rangle_{\mathfrak{L}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(f,\lambda)\, \overline{\Phi(g,\lambda)}\, d\sigma(\lambda)$$

para cualquier par $f, g \in \mathfrak{L}$, es decir

$$\int_0^a \int_0^a F(s-t)\, f(s)\, \overline{g(t)}\, ds\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^a e^{i\lambda s} f(s)\, ds \right) \left(\int_0^a e^{-i\lambda t} \overline{g(t)}\, dt \right) d\sigma(\lambda).$$

Sean $s_o, t_o \in [0,a)$. Aproximando a la función δ en s_o por una sucesión $\{f_n\}$ y a la función δ en t_o por una sucesión $\{g_n\}$ se obtiene

$$F(s_o - t_o) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(s_o - t_o)\lambda}\, d\sigma(\lambda).$$

Finalmente como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma(\lambda) = F(0)$$

se tiene que σ es acotada

$\square$

Referencias

[1] N. l. Akhiezer. *The classical moment problem and some related questions in analysis.* Oliver and Boyd LTD, 1965. Citado en la(s) página(s): 5

[2] M. L. Gorbachuk, V. I. Gorbachuk. *M.G. Krein's Lectures on Entire Operators.* Operator Theory: Advances and Applications 97, Springer 1997. Citado en la(s) página(s): 1, 5

[3] M. G. Kreĭn. *On continuation problem for positive definite functions (in Russian).* Dokl. Akad. Nauk SSSR **26** (1940), No. 1, 17-21. Citado en la(s) página(s): 5

Ramón Bruzual, Escuela de Matemática, Fac. Ciencias, Universidad Central de Venezuela

Apartado Postal 47686, Caracas 1041-A, Venezuela.

e-mail: `ramon.bruzual@ciens.ucv.ve` , `ramonbruzual.ucv@gmail.com`