An. Arm. Teor. Op. Vol. 2, No. 1, 9–15
ISSN 2244-7628

Análisis Armónico y Teoría de Operadores

ACERCA DE LOS NÚMEROS SINGULARES DE LOS CONMUTANTES DE SARASON
ABOUT THE SINGULAR NUMBERS OF SARASON COMMUTANTS

MARISELA DOMÍNGUEZ

RESUMEN. Se consideran los valores singulares de un operador lineal y acotado. A partir de un teorema de Cotlar y Sadosky que da un levantamiento de formas, más general que el teorema de Nehari, y usando un resultado de Treil se da un teorema de levantamiento n-condicional.

ABSTRACT. The singular values of a bounded linear operator are considered. From a lifting theorem of forms given by Cotlar and Sadosky, which generalizes the theorem of Nehari, and using a result of Treil a n-conditional lifting theorem is given.

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo se consideran los bien conocidos valores singulares de un operador lineal y acotado. Los resultados principales presentados en esta nota fueron tomados de los artículos de M. Cotlar y C. Sadosky [2], [3] y de S. Treil y [7].

Antes de introducir los valores singulares de un operador lineal, se presentará los valores singulares de una matriz, estos últimos son objetos muy útiles en álgebra lineal numérica y han recibido mucha atención durante los últimos años. Se presentará de manera elemental aprovechando su interpretación geométrica.

Los valores singulares aparecen en varias partes de la matemática y han recibido diferentes nombres a lo largo de su historia. El nombre con el que se presentan aquí (valores singulares) es el que se ha consolidado en la comunidad de analistas numéricos, pero han sido denominados de diferentes maneras a lo largo del tiempo. El resumen que se presenta en esta sección está basado en el artículo de I. Zaballa [9] y en dos textos: un trabajo realizado por uno de los pioneros y más afamados algebristas numéricos de la actualidad, G. W. Stewart [6], y en la introducción del capítulo 3 del segundo de los dos enciclopédicos tomos sobre Análisis Matricial escritos por R. Horn and Ch. Johnson [5].

El origen de los valores singulares se encuentra en el intento de los geómetras del siglo XIX por conseguir, en lenguaje actual, la reducción de una forma cuadrática

---

Recibido por los editores 1 de noviembre 2013 y revisado 13 de diciembre 2013.
2000 *Mathematics Subject Classification.* Primario 47B35; Secundarios 47A20.
Palabras claves. número singular o valor singular de un operador, formas de Toeplitz, formas de Hankel, levantamiento de formas, levantamiento condicional.
El autor fue financiado parcialmente por el CDCH de la Universidad Central de Venezuela, PI-03-8033-2011.

a forma diagonal mediante cambios de base ortogonales. La primera contribución en este sentido parece ser de Eugene Beltrami, un geómetra diferencial italiano, que intentando promover entre sus estudiantes el gusto por el estudio de la formas bilineales escribió un artículo en la revista Giornale di Matematiche ad Uso degli Studenti Delle Universita, [1].

Beltrami comienza con una forma bilineal $f(x, y) = x^t Ay$, donde A es una matriz real de orden n, y demuestra que existen matrices ortogonales Q_1 y Q_2, $n \times \times n$, tales que

$$Q_1^t A Q_2 = \Sigma = Diag(\sigma_1, ..., \sigma_n)$$

es una matriz diagonal de números reales positivos, los cuales son las raíces cuadradas de los valores propios de $A^t A$ (o de AA^t , dado que estas dos matrices simétricas son semejantes). En realidad, Beltrami propone, más que demuestra, la descomposición anterior cuando los elementos diagonales son todos distintos entre sí. En otras palabras, se puede considerar que Beltrami es el descubridor de lo que hoy en día se llama la descomposición en valores singulares de matrices reales cuadradas no singulares con valores singulares distintos. Omite las posibles situaciones de degeneración, sin embargo éstas tienen importantes consecuencias.

La denominación no se estabiliza, y entre los muchos matemáticos notables que han trabajado en las propiedades de los valores singulares, se debe nombrar a H. Weyl con importantes contribuciones a la teoría de perturbación de los mismos. Pero en cuanto a nomenclatura se refiere, todavía en su artículo [8] habla de "dos clases de valores propios" y en una traducción al inglés de un tratado ruso sobre operadores no autoadjuntos, Gohberg y Krein, [4], se refieren a los valores singulares como "s-números"de un operador.

El apogeo del análisis numérico ha contribuido a que finalmente la denominación de valores singulares haya arraigado en la comunidad matemática.

Para decir qué son los valores singulares se puede dar la demostración del teorema de descomposición de una matriz u operador lineal en valores singulares y definirlos a partir del mismo, tras probar su unicidad y unas cuantas propiedades más.

Otra manera de decir qué son los valores singulares es formulando la pregunta: ¿cuál es la imagen de la circunferencia unidad (la de centro el origen de coordenadas y radio 1) por una aplicación lineal?. La respuesta es una elipse centrada en el origen de coordenadas; claro que ésta puede ser degenerada, es decir, puede ser un segmento o un punto.

Para dimensiones superiores hay un resultado similar: la imagen de la esfera unidad en un espacio de dimensión n es una hiperelipse que puede ser degenerada; es decir, el número de semiejes puede ser inferior a n, y habitar, en consecuencia, en un espacio de dimensión menor que n.

Esto nos coloca en condiciones de presentar en forma geométrica los valores singulares de una matriz.

Los *valores singulares de una matriz* A son las longitudes de los semiejes de la hiperelipse en que se convierte la esfera unidad por A. Son, por lo tanto, números reales no negativos (porque se admiten semiejes de longitud 0): $s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq 0$.

A cada matriz se le puede asociar sus valores singulares, pero puede haber, y en general hay, muchas matrices que produzcan la misma elipse como imagen de la circunferencia unidad. Todas ellas tendrán los mismo valores singulares. Se dice que son ortogonalmente equivalentes. (En el caso de matrices con valores complejos se habla de matrices unitariamente equivalentes).

2. Números singulares o valores singulares de operadores

En lo que sigue $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ son espacios de Hilbert y $L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ es el espacio de los operadores lineales y acotados de $\mathcal{H}_1$ en $\mathcal{H}_2$.

Sea $T \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$.

La *imagen* de T, denotada por Im T, es el conjunto de elementos de $\mathcal{H}_2$ que son imágenes de al menos un elemento de $\mathcal{H}_1$.

Se llama *rango* de T a la dimensión de la imagen y se denotará por ran T, así que

$$\operatorname{ran} T = \dim(\operatorname{Im} T)$$

Es fácil ver que:

(a) Im T es un subespacio de $\mathcal{H}_2$.
(b) ran $T \leq \dim \mathcal{H}_2$.

Sea $\{v_k\}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}_1$. Para $x \in \mathcal{H}_1$ sean

$$T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, v_k \rangle T(v_k)$$

y

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, v_k \rangle T(v_k).$$

Si se llama F_n al subespacio vectorial cerrado generado por $\{v_k\}_{k=1}^{n}$ y E_n al subespacio vectorial cerrado generado por $\{v_k\}_{k=n+1}^{\infty}$ se tiene que

(a) $(T - T_n)(x) = 0$ si $x \in F_n$.
(b) $(T - T_n)(x) = T(x)$ si $x \in E_n$.
(c) $\operatorname{ran} T_n \leq \dim F_n \leq n$.

Así que T_n es un operador de rango finito que aproxima a T, pero no es el único. Es decir, hay otros operadores de rango finito que también aproximan a T. Estas observaciones motivan la siguiente definición de valor singular de un operador que se dará más adelante.

La condición (c) se puede escribir de la siguiente manera

$$\operatorname{ran} T_n \leq \dim F_n = \operatorname{codim} E_n \leq n.$$

Teniendo como objetivo la divulgación se hace énfasis en que la codimensión es un concepto relativo: solamente se define para un objeto que está dentro de otro. No tiene sentido hablar de la “codimensión de un espacio vectorial (de manera aislada)”, solamente se puede hablar de la codimensión de un subespacio vectorial.

Si $\mathcal{W}$ es un subespacio vectorial de un espacio vectorial $\mathcal{H}$ de dimensión finita, entonces la codimensión de $\mathcal{W}$ en $\mathcal{H}$ es:

$$\operatorname{codim}(\mathcal{W}) = \dim(\mathcal{H}) - \dim(\mathcal{W}).$$

Si $\mathcal{W}$ es un subespacio vectorial de un espacio vectorial $\mathcal{H}$ (posiblemente infinito dimensional) entonces la codimensión de $\mathcal{W}$ en $\mathcal{H}$ es la dimensión (posiblemente infinita) del espacio cociente $\mathcal{H}/\mathcal{W}$:

$$\operatorname{codim}(\mathcal{W}) = \dim(\mathcal{H}/\mathcal{W}).$$

Para espacios vectoriales finito-dimensionales, esto coincide con la definición previa.

Ya se está en condiciones de presentar los valores singulares de un operador lineal.

Definición 2.1. El *número singular* o *valor singular* de T es

$$s_n(T) = \text{ínf}\{\|T - V\| : \text{ran } V \leq n\}.$$

Se observa que.

(a) $s_0(T) = \|T\|$.
(b) Si ran $T \leq n$ entonces $s_n(T) = 0$.

Si se denota por $L_n(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ al espacio de los operadores $V \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ tales que ran $V \leq n$, resulta que $s_n(T)$ es la distancia, en $L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, de T a $L_n(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$.

Usando el concepto de codimensión se puede dar otra expresión para $s_n(T)$, se presenta a continuación.

Proposición 2.2.

$$s_n(T) = \text{ínf}\{\|T|_E\| : E \textit{ es un subespacio de } \mathcal{H}_1 \textit{ y codim} E \leq n\}.$$

El siguiente resultado de Treil se usa para probar el teorema de levantamiento n-condicional de formas de Hankel.

Teorema 2.3 (Treil)**.** [7] *Sean* $T \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$,

$$\mathcal{K} = \{f \in \mathcal{H}_1 : \|Tf\|_{\mathcal{H}_2} \leq s_n(T)\|f\|_{\mathcal{H}_1}\}$$

y $\tau_1 \in L(\mathcal{H}_1)$ *un operador tal que* $\tau_1\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$. *Entonces existe un subespacio* $\mathcal{M}$ *de* $\mathcal{H}_1$ *tal que*

(a) $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}$.
(b) *codim*$\mathcal{M} \leq n$.
(c) $\tau_1\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$.

3. Formas de Toeplitz y formas de Hankel

3.1. **Formas** (τ_1, τ_2)**-Toeplitz y formas** (τ_1, τ_2)**-Hankel.** Sean τ_1, τ_2 son operadores unitarios, $\tau_1 \in L(\mathcal{H}_1)$ y $\tau_2 \in L(\mathcal{H}_2)$.

Definición 3.1. Una forma sesquilineal $B : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \to \mathbb{C}$ es llamada (τ_1, τ_2)-*Toeplitz* si ella es (τ_1, τ_2)-invariante, es decir, si

$$B(\tau_1 f_1, \tau_2 f_2) = B(f_1, f_2) \qquad \text{para todo } (f_1, f_2) \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$$

o equivalentemente

$$B(\tau_1 f_1, f_2) = B(f_1, \tau_2^{-1} f_2) \qquad \text{para todo } (f_1, f_2) \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2.$$

Definición 3.2. Sean $\mathcal{W}_1 \subset \mathcal{H}_1$ y $\mathcal{W}_2 \subset \mathcal{H}_2$ un par de subespacios cerrados tales que $\tau_1\mathcal{W}_1 \subset \mathcal{W}_1$ y $\tau_2^{-1}\mathcal{W}_2 \subset \mathcal{W}_2$.

Una forma sesquilineal $B : \mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2 \to \mathbb{C}$ es llamada (τ_1, τ_2)-*Hankel* (o *conmutante de Sarason*) si

$$B(\tau_1 f_1, f_2) = B(f_1, \tau_2^{-1} f_2) \qquad \text{para todo } (f_1, f_2) \in \mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2.$$

Sean $L^2 = L^2[0, 2\pi]$, $S : L^2 \to L^2$ el operador de multiplicación por e_1, es decir, $Sf = e_1 f$. Como es usual, $e_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, está dada por $e_n(x) = e^{inx}$.

$$H^2 = \{f \in L^2 : \widehat{f}(n) = 0 \text{ para } n < 0\},$$
$$H^2_- = \{f \in L^2 : \widehat{f}(n) = 0 \text{ para } n \geq 0\}.$$

Ejemplo 3.3. $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = L^2$, $\tau_1 = \tau_2 = S$, $\mathcal{W}_1 = H^2$, $\mathcal{W}_2 = H^2_-$.

En este caso las formas (τ_1, τ_2)-Hankel coinciden con las formas de Hankel clásicas. El teorema clásico de Nehari se da en el contexto de este ejemplo.

3.2. **Forma sesquilineal asociada a un operador lineal y acotado.**

Definición 3.4. Sea $T \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, se dice que B es la *forma asociada* a T cuando $B : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \to \mathbb{C}$ está dada por

$$B(f, g) = \langle Tf, g \rangle.$$

Definición 3.5. Si B es la forma asociada a T, se define el *número singular* de B o *valor singular* de B como

$$s_n(B) = s_n(T).$$

3.3. **Operadores (τ_1, τ_2)-Toeplitz y operadores (τ_1, τ_2)-Hankel.**

Definición 3.6.

(a) Sea $T \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, se dice que T es un operador (τ_1, τ_2)-Toeplitz cuando la forma asociada es (τ_1, τ_2)-Toeplitz.

(b) Sea $T \in L(\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2)$, se dice que T es un operador (τ_1, τ_2)-Hankel cuando la forma asociada es (τ_1, τ_2)-Hankel.

Por lo tanto,

(a) Existe una correspondencia $1-1$ entre las formas (τ_1, τ_2)-Toeplitz y los operadores (τ_1, τ_2)-Toeplitz.

(b) Existe una correspondencia $1-1$ entre las formas (τ_1, τ_2)-Hankel y los operadores (τ_1, τ_2)-Hankel.

El siguiente teorema de Cotlar y Sadosky es una versión abstracta del teorema de interpolación de Sarason.

Teorema 3.7 (Levantamiento de formas, Cotlar y Sadosky)**.** [2]

Dado un par de espacios de Hilbert $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ y un par de isomorfismos unitarios $\tau_1 \in L(\mathcal{H}_1)$ y $\tau_2 \in L(\mathcal{H}_2)$, sean $\mathcal{W}_1 \subset \mathcal{H}_1$ y $\mathcal{W}_2 \subset \mathcal{H}_2$ un par de subespacios cerrados tales que $\tau_1 \mathcal{W}_1 \subset \mathcal{W}_1$ y $\tau_2^{-1} \mathcal{W}_2 \subset \mathcal{W}_2$.

Entonces toda forma (τ_1, τ_2)-Hankel $B : \mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2 \to \mathbb{C}$ tiene un levantamiento (τ_1, τ_2)-Toeplitz $B' : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \to \mathbb{C}$ tal que

(i) $\|B'\| = \|B\|$.

(ii) $B' = B$ *en* $\mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2$.

Para los espacios y operadores del ejemplo dado, el teorema de Nehari es una consecuencia inmediata de este teorema de Cotlar y Sadosky.

Definición 3.8. Sea $\Gamma : H^2 \to H^{2-}$ un operador lineal, se dice que Γ es un *operador de Hankel* cuando

$$P^- S \Gamma = \Gamma S \mid_{H^2} .$$

Proposición 3.9. *Sea $\Gamma : H^2 \to H^{2-}$ un operador lineal y continuo. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) Γ *es un operador de Hankel.*

(b) *Existe $\gamma \in L^2$ tal que $\Gamma = P^- M_\gamma$.*

(c) *Existe $\gamma \in L^2$ tal que $\langle \Gamma e_k, e_{-j} \rangle_{L^2} = \widehat{\gamma}(-k-j)$ para todo $k \geq 0$, $j > 0$.*

Esta función γ es llamada el *símbolo* del operador de Hankel.

Para $\gamma \in L^\infty$ se puede considerar $\Gamma : H^2 \to H^{2-}$ como el operador dado por $\Gamma = P^- M_\gamma$. Entonces

$$\|\Gamma\| = \|P^- M_\gamma\| \leq \|P^-\| \|M_\gamma\| \leq \|M_\gamma\| = \|\gamma\|_\infty.$$

Teorema 3.10 (Nehari)**.** *Sea* $\Gamma : H^2 \to H^{2-}$ *un operador de Hankel.* Γ *es acotado si y sólo si existe* $\phi_o \in L^\infty$ *tal que*

(a) $\widehat{\phi_o}(-k-j) = \langle \Gamma e_k, e_{-j}\rangle_{L^2}$ *para todo* $k \geq 0$, $j > 0$.

(b) $\Gamma = P^- M_{\phi_o}$.

En este caso

$$\|\Gamma\| = \text{ínf}\{\|\phi_o - h\|_\infty : h \in H_o^\infty\} = \|\phi_o\|_\infty.$$

Para la demostración se considera la forma B dada por

$$B(e_k, e_{-j}) = \langle \Gamma e_k, e_{-j}\rangle_{L^2}$$

para todo $k \geq 0$, $j > 0$.

4. El caso n-condicional

El siguiente teorema de Cotlar y Sadosky, es considerado un levantamiento n-condicional.

Teorema 4.1. [3] *Dado un par de espacios de Hilbert* $\mathcal{H}_1$ *y* $\mathcal{H}_2$ *y un par de isomorfismos unitarios* $\tau_1 \in L(\mathcal{H}_1)$ *y* $\tau_2 \in L(\mathcal{H}_2)$*, sean* $\mathcal{W}_1 \subset \mathcal{H}_1$ *y* $\mathcal{W}_2 \subset \mathcal{H}_2$ *un par de subespacios cerrados tales que* $\tau_1 \mathcal{W}_1 \subset \mathcal{W}_1$ *y* $\tau_2^{-1}\mathcal{W}_2 \subset \mathcal{W}_2$*. Entonces para cada forma* (τ_1, τ_2)*-Hankel* $B : \mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2 \to \mathbb{C}$ *y para cada* $n \geq 0$ *existe una forma de Toeplitz* $B^{(n)} : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \to \mathbb{C}$ *tal que*

(i) $\|B^{(n)}\| \leq s_n(B)$.

(ii) $B^{(n)} = B$ *en* $\mathcal{M} \times \mathcal{W}_2$*, donde* $\mathcal{M} \subset \mathcal{W}_1$ *es un subespacio y* $\text{codim}(\mathcal{M}) \leq n$.

Esta forma $B^{(n)}$ es llamada un *levantamiento n-condicional de B.*

Este teorema puede ser considerado como una versión çondicional"del teorema de Sz.Nagy-Foias.

Demostración. Sea $\Gamma \in L(\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2)$ el operador (τ_1, τ_2)-Hankel asociado a B, es decir,

$$B(f, g) = \langle \Gamma f, g\rangle.$$

Sea

$$\mathcal{K} = \{f \in \mathcal{W}_1 : \|\Gamma f\| \leq s_n(\Gamma)\|f\|\}.$$

Primero se verá que $\tau_1 \mathcal{K} \subset \mathcal{K}$.

En efecto, si $f \in \mathcal{K}$ entonces

$$\begin{aligned}
|\langle \Gamma \tau_1 f, g\rangle| &= |B(\tau_1 f, g)| = |B(f, \tau_2^{-1} g)| = |\langle \Gamma f, \tau_2^{-1} g\rangle| \\
&\leq \|\Gamma f\|\|\tau_2^{-1} g\| \leq s_n(\Gamma)\|f\|\|\tau_2^{-1} g\| = s_n(\Gamma)\|f\|\|g\| \\
&= s_n(\Gamma)\|\tau_1 f\|\|g\|
\end{aligned}$$

Luego

$$\|\Gamma \tau_1 f\| \leq s_n(\Gamma)\|\tau_1 f\|.$$

Es decir, $\tau_1 f \in \mathcal{K}$. Se ha probado que $\tau_1 \mathcal{K} \subset \mathcal{K}$.

Por el Teorema 2.3 existe un subespacio $\mathcal{M}$ de $\mathcal{W}_1$ tal que $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}$, $\text{codim}\mathcal{M} \leq n$ y $\tau_1 \mathcal{M} \subset \mathcal{M}$.

Como $\tau_1 \mathcal{M} \subset \mathcal{M}$, $\tau_2^{-1}\mathcal{W}_2 \subset \mathcal{W}_2$ y $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}$ entonces

$$\|B|_{\mathcal{M} \times \mathcal{W}_2}\| \leq s_n(B).$$

Por el Teorema 3.7 sigue que $B|_{\mathcal{M}\times\mathcal{W}_2}$ tiene un levantamiento (τ_1,τ_2)-Toeplitz $B^{(n)}:\mathcal{H}_1\times\mathcal{H}_2\to\mathbb{C}$ tal que $B^{(n)}=B$ en $\mathcal{M}\times\mathcal{W}_2$ y $\|B^{(n)}\|=\|B|_{\mathcal{M}\times\mathcal{W}_2}\|\leq s_n(B)$. $\square$

Referencias

[1] E. Beltrami, *Sulle funzioni bilineari.* Giornale di Matematiche ad Uso degli Studenti Delle Universita, 11, 98–106, 1873. Traducido al inglés por D. Boley: Technical Report, University of Minnesota, Department of Computer Science, (1990), 90–37. Citado en la(s) página(s): 10

[2] M. Cotlar & C. Sadosky. *Two parameter lifting theorems and double Hilbert transforms in commutative and non-commutative settings.* J. Math. Anal. & Appl. 150 (1990), 439-480. Citado en la(s) página(s): 9, 13

[3] M. Cotlar & C. Sadosky. *Abstract, weighted, and multidimensional Adamjan-Arov-Krein theorems, and the singular numbers of Sarason commutants.* Integral Equations Oper. Theory 17, No.2 (1993), 169-201. Citado en la(s) página(s): 9, 14

[4] I. C. Gohberg & M. G. Krein. *Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators.* American Mathematical Society, Providence, R.I., 1969. Translated from the Russian by A. Feinstein. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 18. Citado en la(s) página(s): 10

[5] R. Horn, Ch. Johnson, Topics in Matrix Analisys. Cambridge University Press. New York, 1991. Citado en la(s) página(s): 9

[6] G. W. Stewart, *On the Early History of the Singular Value Decomposition.* Report disponible mediante ftp anónimo en tales.cs.umd.edu en el directorio pub/reports. Citado en la(s) página(s): 9

[7] S. Treil. *The Adamyan-Arov-Krein theorem: vector version.* Publ. Seminar LOMI Leningrad 141 (1985), 56-72. Citado en la(s) página(s): 9, 12

[8] H. Weyl, Inequalities betweeen the two kinds of eigenvalues of a linear transformation. Proceedings of the National Academy of Sciences, 35 (1949), 408–411. Citado en la(s) página(s): 10

[9] I. Zaballa, *Valores singulares. ¿Qué son?. ¿Para qué sirven?* www.ehu.es/izaballa/Cursos/valores_singulares.pdf? 1-24. Citado en la(s) página(s): 9

Universidad Central de Venezuela.

M. Domínguez, Departamento de Matemáticas, Fac. Ciencias, Universidad Central de Venezuela.

e-mail: `marisela.dominguez@ciens.ucv.ve , dominguez.math@gmail.com`