UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA
LABORATORIO DE FORMAS EN GRUPOS

Ejercicios de Análisis I

Ramón Bruzual
Marisela Domínguez

Caracas, Venezuela
Febrero 2005

Ramón Bruzual
Correo-E: rbruzual@euler.ciens.ucv.ve

Marisela Domínguez
Correo-E: mdomin@euler.ciens.ucv.ve

Laboratorio de Formas en Grupos
Centro de Análisis
Escuela de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad Central de Venezuela

http://euler.ciens.ucv.ve/~labfg

Nota: Este material está disponible en la página web
http://euler.ciens.ucv.ve/~labfg/guias.htm
En general mantenemos una réplica en un servidor externo a la Universidad Central de Venezuela, el vínculo se encuentra indicado en esa misma página web.

PROBLEMARIO

Práctica 1.
Números reales.

(1) Demostrar las siguientes afirmaciones (x e y denotan números reales):
  (a) Si $a\,x = a$ para algún número real $a \neq 0$ entonces $x = 1$.
  (b) $x^2 - y^2 = (x - y)\,(x + y)$.
  (c) Si $x^2 = y^2$ entonces $x = y$ ó $x = -y$.
  (d) Si n es un número natural entonces

$$x^n - y^n = (x - y)\,(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

  (e) Si n es un número impar y $x^n = y^n$ entonces $x = y$.
  (f) Si n es un número par y $x^n = y^n$ entonces $x = y$ ó $x = -y$.

(2) Encontrar el error en la siguiente "demostración".

Sean x e y números reales. Supongamos $x = y$. Entonces

$$\begin{aligned} x^2 &= y^2 \\ x^2 - y^2 &= x\,y - y^2 \\ (x + y)\,(x - y) &= y\,(x - y) \\ x + y &= y \\ 2\,y &= y \end{aligned}$$

Si tomamos $x = y = 1$ obtenemos $2 = 1$.

(3) Demostrar que si a, b, c, d son números reales y $b, d \neq 0$ entonces

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

(4) El máximo de dos números reales x e y se denota por $\max(x, y)$ y el mínimo por $\min(x, y)$. Demostrar:

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |y - x|}{2},$$

$$\min(x, y) = \frac{x + y - |y - x|}{2}.$$

(5) Demostrar que no existe ningún número racional de cuadrado igual a 2.

(6) Demostrar que la suma de un número racional y un número irracional es un número irracional.

(7) ¿Es la suma de números irracionales un número irracional?

(8) Demostrar que el producto de un número racional no nulo por un número irracional es un número irracional.

(9) ¿Es el producto de números irracionales un número irracional?

(10) Demostrar que existe un único número real positivo cuyo cuadrado es igual a 2.
Indicación: Considerar el conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\},$$

demostrar que A es acotado y que si $a = \sup A$ entonces $a^2 = 2$.

(11) Utilizar la misma idea del ejercicio anterior para demostrar que si n es par y $a > 0$ entonces a tiene una única raíz n-ésima positiva. Enunciar y demostrar el resultado correspondiente para n impar.
Tal como veremos más adelante, el Teorema **??** permite dar una demostración sencilla de este resultado.

(12) Demostrar que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es un número irracional.

(13) Demostrar que si x e y son números reales entonces
   (a) $||x| - |y|| \leq |x - y|$.
   (b) $|x\,y| = |x|\,|y|$.
   (c) $\left|\dfrac{1}{x}\right| = \dfrac{1}{|x|}$, si $x \neq 0$.
   (d) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, si $y \neq 0$.
   (e) $|x - y| \leq |x| + |y|$.
   (f) $|x| - |y| \leq |x - y|$.

(14) Demostrar las siguientes afirmaciones (a, b, c y d denotan números reales).
   (a) Si $a < b$ y $c < d$ entonces $a + c < b + d$.
   (b) Si $a < b$ entonces $-b < -a$.
   (c) Si $a < b$ y $c > d$ entonces $a - c < b - d$.
   (d) Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $a \cdot c < b \cdot c$.
   (e) Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $a \cdot c > b \cdot c$.
   (f) Si $a > 1$ entonces $a^2 > a$.
   (g) Si $0 < a < 1$ entonces $a^2 < a$.
   (h) Si $0 \leq a < b$ y $0 \leq c < d$ entonces $a \cdot c < b \cdot d$.
   (i) Si $0 \leq a < b$ entonces $a^2 < b^2$.
   (j) Si $a, b \geq 0$ y $a^2 < b^2$ entonces $a < b$.
   (k) Si $a > 0$ entonces $a^{-1} > 0$.

(15) Demostrar que la unión de dos conjuntos numerables es numerable

(16) Sean a y b números reales tales que $0 < a < b$. Demostrar que

$$a < \sqrt{a\,b} < \frac{a+b}{2} < b.$$

(17) Demostrar que si A es un subconjunto acotado superiormente de $\mathbb{R}$ entonces $\sup A$ es único.

(18) (a) Dar la definición de ínfimo.
   (b) Demostrar que si A es un subconjunto acotado inferiormente de $\mathbb{R}$ entonces A posee ínfimo e $\inf A$ es único.

Práctica 2.
Topología de la recta.

(1) (a) Demostrar que entre dos números racionales existe un número irracional.
(b) Demostrar que entre dos números racionales existen infinitos números irracionales.
(c) Demostrar que entre dos números irracionales existe un número racional.
(d) Demostrar que entre dos números irracionales existen infinitos números racionales.

(2) ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ son abiertos? ¿Cuáles son cerrados? ¿Cuáles son compactos?.
(a) $(0,1)$.
(b) $[0,1]$.
(c) $(0,1) \cup \{2,3\}$.
(d) $\{1,2\}$.
(e) $(0,2) \cup \{1\}$.
(f) $\mathbb{Q}$.
(g) $\mathbb{Z}$.
(h) $\mathbb{Q} \cap [0,2]$.
(i) $(-\infty, 5]$.
(j) $(1,+\infty) \cap \mathbb{N}$.
(k) El conjunto de los números irracionales.
(l) El conjunto de los números irracionales intersectado con $[0,1]$.
(m) $(0,+\infty)$
(n) $\{x \in \mathbb{R} : \; x^2 < 2\}$
(o) $\{x \in \mathbb{Q} : \; x^2 < 2\}$

(3) (a) Demostrar que la unión de una familia arbitraria de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ es un conjunto abierto.
(b) Demostrar que la intersección de una familia finita de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ es un conjunto abierto.
(c) Mostrar, mediante un ejemplo, que puede ocurrir que la intersección de una familia infinita de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ no sea un conjunto abierto.

(4) (a) Demostrar que la intersección de una familia arbitraria de subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}$ es un conjunto cerrado.
(b) Demostrar que la unión de una familia finita de subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}$ es un conjunto cerrado.
(c) Mostrar, mediante un ejemplo, que puede ocurrir que la unión de una familia infinita de subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}$ no sea un conjunto cerrado.

(5) Hallar el conjunto de los puntos de acumulación de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$.

(a) $\mathbb{R}$.

(b) $\left\{1 - \dfrac{1}{n} : n = 1, 2, \dots\right\}$.

(c) $\left\{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n : n = 1, 2, \dots\right\}$.

(d) $\{\sqrt[n]{n} : n = 1, 2, \dots\}$.

(e) Los conjuntos que aparecen en el ejercicio 2.

(6) Construir un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$ que tenga exactamente tres puntos de acumulación.

(7) Sea A' el conjunto de los puntos de acumulación del conjunto A. Demostrar que A' es cerrado.

(8) ¿Es la unión de conjuntos conexos un conjunto conexo? ¿Es la intersección de conjuntos conexos un conjunto conexo?

(9) Demostrar que los únicos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que son a la vez abiertos y cerrados son $\mathbb{R}$ y $\emptyset$.

(10) Demostrar que cada componente conexa de un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ es un conjunto abierto (y por lo tanto un intervalo abierto).

(11) (*) Demostrar que todo subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ es la unión de una cantidad a lo sumo numerable de intervalos abiertos disjuntos.

(12) (*) Se dice que un números real a es algebraico si a es raíz de una ecuación de la forma

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_0 = 0$$

donde $a_0, \ldots, a_n$ son números enteros.

Demostrar que el conjunto de los números algebraicos es numerable.

Práctica 3.
Sucesiones.

(1) (a) Demostrar, a partir de la definición, que toda sucesión convergente es acotada.
(b) Dar un ejemplo de una sucesión acotada que no es convergente.

(2) Demostrar que toda sucesión monótona decreciente y acotada inferiormente es convergente.

(3) (a) Demostrar que si la sucesión $\{x_n\}$ converge entonces la sucesión $\{|x_n|\}$ también converge y

$$\lim_{n\to+\infty} |x_n| = \left|\lim_{n\to+\infty} x_n\right|.$$

(b) Dar un ejemplo de una sucesión divergente $\{x_n\}$ tal que $\{|x_n|\}$ converge.

(4) (a) Demostrar que si la sucesión $\{x_n\}$ converge entonces la sucesión $\{x_n^2\}$ también converge y

$$\lim_{n\to+\infty} x_n^2 = (\lim_{n\to+\infty} x_n)^2.$$

(b) Dar un ejemplo de una sucesión divergente $\{x_n\}$ tal que $\{x_n^2\}$ converge.

(5) ¿ Qué puede decirse de una sucesión convergente $\{a_n\}$ tal que $a_n \in \mathbb{Z}$ para todo n?

(6) Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones convergentes.

Demostrar que si $c \in \mathbb{R}$ entonces la sucesión $\{cx_n\}$ es convergente y

$$\lim_{n\to+\infty} c\,x_n = c \lim_{n\to+\infty} x_n.$$

(7) Conseguir una expresión más simple para la función

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} (\lim_{k\to+\infty} (\cos(n!\pi x)\,)^{2k}), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(8) Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones tales que existen

$$\lim_{n\to+\infty} x_n \text{ y } \lim_{n\to+\infty} y_n.$$

Indicar cuales de las siguientes propiedades se cumplen, o bajo qué condiciones adicionales se cumplen:

(a) Si $c \in \mathbb{R}$ entonces $\lim_{n\to+\infty} c\,x_n = c\lim_{n\to+\infty} x_n$.

(b) $\lim_{n\to+\infty} x_n + y_n = \lim_{n\to+\infty} x_n + \lim_{n\to+\infty} y_n$.

(c) $\lim_{n\to+\infty} x_n \cdot y_n = \lim_{n\to+\infty} x_n \cdot \lim_{n\to+\infty} y_n$.

(d) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim_{n\to+\infty} x_n}{\lim_{n\to+\infty} y_n}$.

En caso de que afirme que la propiedad se cumple hacer la demostración. Si afirma que la propiedad no se cumple dar un contraejemplo.

(Utilizar las convenciones usuales $a+\infty = +\infty$, $a-\infty = -\infty$ si $a \in \mathbb{R}$, $a\cdot(+\infty) = +\infty$ si $a > 0$, etc.)

(9) (a) Demostrar que si $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$ entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = L.$$

(b) Dar un ejemplo de una sucesión $\{a_n\}$ tal que existe

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$

pero sin embargo no existe $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

(10) (a) Demostrar que si $0 < a < 2$ entonces $a < \sqrt{2a} < 2$.

(b) Demostrar que la sucesión

$$\sqrt{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\ \dots$$

es convergente.

(c) Hallar el límite de la sucesión anterior.

(11) Demostrar o dar un contraejemplo:

(a) Si $\{x_n\}$ es una sucesión convergente tal que $\lim_{n\to+\infty} x_n > 0$ entonces $x_n > 0$ para todo n.

(b) Si $\{x_n\}$ es una sucesión convergente tal que $\lim_{n\to+\infty} x_n > 0$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > 0$ para todo $n \geq N$.

(c) Si $\{x_n\}$ es una sucesión convergente tal que $\lim_{n\to+\infty} x_n > 0$ entonces existen $r > 0$ en $\mathbb{R}$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $x_n > r$ para todo $n \geq N$.

(d) Si $\{x_n\}$ es una sucesión convergente tal que $\lim_{n\to+\infty} x_n \geq 0$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \geq 0$ para todo $n \geq N$.

(e) Si $\{x_n\}$ es una sucesión convergente tal que $a \leq x_n \leq b$ para todo n (a y b reales) entonces

$$a \leq \lim_{n\to+\infty} x_n \leq b.$$

(f) Si $\{x_n\}$ es una sucesión convergente tal que $a < x_n < b$ para todo n (a y b reales) entonces

$$a < \lim_{n\to+\infty} x_n < b.$$

(12) Hallar todas las subsucesiones convergentes de las sucesiones
(a) $1, -1, 1, -1, \ldots$
(b) $1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots$
(c) $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

(13) Demostrar que si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sucesiones entonces

$$\limsup x_n + y_n \leq \limsup x_n + \limsup y_n.$$

(14) Demostrar que si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sucesiones tales que $x_n \leq y_n$ para todo n entonces

(a) $\limsup x_n \leq \limsup y_n$.

(b) $\liminf x_n \leq \liminf y_n$.

(15) Sea $\{\alpha(n)\}$ el número de números primos que dividen a n. Demostrar que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha(n)}{n} = 0.$$

(16) Demostrar que si $a > 1$ entonces

$$\lim_{n \to +\infty} a^n = +\infty.$$

Indicación: Notar que $\{a^n\}$ es una sucesión monótona creciente. Por lo tanto si suponemos que esta sucesión es acotada entonces debe converger. Notar también que $a^{n+1} - a^n = a^n (a-1) \geq (a-1)$.

(17) Demostrar que si $0 < a < 1$ entonces

$$\lim_{n \to +\infty} a^n = 0.$$

(18) Sean a y b números reales positivos. Hallar

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}.$$

(19) Hallar el límite superior y el límite inferior de las siguientes sucesiones:

(a) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

(b) $\left\{(-1)^n \frac{1}{n}\right\}$

(c) $\left\{(-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right\}$

(d) $\left\{(-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$

(e) $\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\}$

(f) $\{(\sqrt[n]{n} - 1)^n\}$

(g) $x_1 = 0, x_{2n} = \dfrac{x_{2n-1}}{2}, x_{2n+1} = \dfrac{1}{2} + x_{2n}$

(h) $\{(-1)^n n\}$

(20) Hallar los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{4}{n^2}\right)^{n^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\cos\left(\frac{2}{n}\right)\right)^{3n^2}$

(c) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

(d) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

(21) Hallar una sucesión de números racionales que converja a $\sqrt{3}$.

Práctica 4.
Límites y continuidad.

(1) Sea D un subconjunto de $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de D. Supongamos que existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$ y es positivo. Demostrar que existe $\delta > 0$ tal que si $x \in D$ y $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $f(x) > 0$.

(2) Sea D un subconjunto de $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in D$ tal que f es continua en x_0. Supongamos $f(x_0) > 0$. Demostrar que existe $\delta > 0$ tal que si $x \in D$ y $|x - x_0| < \delta$ entonces $f(x) > 0$.

(3) Sea D un subconjunto de $\mathbb{R}$, $f, g : D \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $x_0 \in D$. Supongamos que $f(x_0) > g(x_0)$.

Demostrar que existe $\delta > 0$ tal que si $x \in D$ y $|x-x_0| < \delta$ entonces $f(x) > g(x)$.

¿ Sigue siendo cierta la conclusión si en vez de suponer $f(x_0) > g(x_0)$ suponemos $f(x_0) \geq g(x_0)$?

(4) Demostrar que la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es continua en 0.

(5) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Demostrar que si $C \subset \mathbb{R}$ es cerrado entonces $f^{-1}(C)$ es cerrado.

(6) (a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua.
Demostrar que el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$ es cerrado.
(b) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas.
Demostrar que el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x)\}$ es cerrado.

(7) Sean A y D subconjuntos de $\mathbb{R}$. Se dice que A es denso en D si $A \subset D$ y todo entorno de un punto de D contiene puntos de A (por ejemplo, $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$).
(a) Sea f continua en D y A un conjunto denso en D. Demostrar que si $f(x) = 0$ para todo $x \in A$ entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in D$.

(b) Sean f y g continuas en D y A un conjunto denso en D. Demostrar que si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$ entonces $f(x) = g(x)$ para todo $x \in D$.

(8) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.
Demostrar:
(a) $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
(b) $f\left(\dfrac{1}{q}\,x\right) = \dfrac{1}{q}\,f(x)$ para todo $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
(c) $f\left(\dfrac{p}{q}\,x\right) = \dfrac{p}{q}\,f(x)$ para todo $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(9) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Demostrar que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(10) Sea $D \subset \mathbb{R}$ y $f : D \to \mathbb{R}$ una función uniformemente continua. Demostrar que si D es acotado entonces $f(D)$ es acotado. Mostrar con un ejemplo que la conclusión no es cierta si omitimos la hipótesis D acotado.

(11) Sea $D \subset \mathbb{R}$ y $f : D \to \mathbb{R}$ una función uniformemente continua. Demostrar que si $\{x_n\} \subset D$ es una sucesión de Cauchy entonces $\{f(x_n)\}$ también es una sucesión de Cauchy. Buscar un ejemplo que muestre que la hipótesis "f uniformemente continua" no puede ser omitida.

(12) Demostrar que si I es un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ es una función continua y estrictamente creciente entonces la imagen de todo intervalo abierto contenido en I es un intervalo abierto.

(13) Demostrar que todo polinomio de grado impar posee por lo menos una raíz real.

(14) Sean f y g funciones continuas definidas en el intervalo $[a, b]$ tales que $f(a) < g(a)$ y $f(b) > g(b)$. Demostrar que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = g(c)$. Interpretar gráficamente.

(15) Utilizar el Teorema **??** para demostrar que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a^2 = 2$ (ver Ejercicio 10 del Capítulo **??**).

(16) Demostrar que si n es un número natural par y $a > 0$, existe un único $x > 0$ tal que $x^n = a$.

(17) Demostrar que si n es un número natural impar y $a \in \mathbb{R}$, existe un único $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^n = a$.

(18) Todo número racional x se puede escribir en la forma

$$x = \frac{m}{n},$$

donde m y n son enteros sin divisores comunes y $n > 0$. Cuando $x = 0$ tomaremos $n = 1$. Consideremos la función definida en $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \\ \dfrac{1}{n} & \text{si } x = \dfrac{m}{n} \end{cases}$$

Demostrar que f es continua en todo punto irracional y que f tiene una discontinuidad simple en todo punto racional.

(19) ¿Cuáles de las siguientes funciones son uniformemente continuas?
   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$.
   (b) $g : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2$.
   (c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \operatorname{sen}(x)$

(20) (a) Demostrar que si f es una función continua, definida en un conjunto D entonces la función $|f|$ también es continua en D.
   (b) Sea f una función continua definida en $\mathbb{R}$. Demostrar que f se puede escribir en la forma $f = P + I$, donde P es una función par y continua en $\mathbb{R}$ e I es una función impar y continua en $\mathbb{R}$.
   (c) Demostrar que si f y g son funciones continuas definidas en D entonces las funciones $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ también son continuas.

(21) Demostrar que si f es una función continua tal que su dominio contiene un entorno de L y $\lim_{x\to a} g(x) = L$ entonces $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(L)$. Mostrar con un ejemplo que si no se supone la continuidad de f el resultado anterior no se cumple.

(22) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es racional} \end{cases}$$

¿En cuáles puntos es f continua?

(23) Dar un ejemplo de una función que no sea continua en ningún punto, pero tal que $|f|$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

(24) Demostrar que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sen} x = x - 1$.

(25) Supóngase que f y g son funciones continuas en $\mathbb{R}$, que $f^2 = g^2$ y que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ ó $f(x) = -g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(26) Demostrar que si $f : [0, 1] \to [0, 1]$ es una función continua entonces existe $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = x$.

(27) Supóngase que f es continua en $[a, b]$ y que $f(x)$ es siempre racional. ¿Qué puede decirse acerca de f?

(28) (a) Demostrar que no existe ninguna función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que tome exactamente dos veces cada uno de sus valores.
(b) Construir una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que tome exactamente tres veces cada uno de sus valores.

(29) Demostrar el siguiente Teorema:
Sean X e Y subconjuntos de $\mathbb{R}$, $f : X \to Y$ una función.
f es continua si y sólo si la imagen inversa de un conjunto abierto en Y es un conjunto abierto en X.

(30) Utilizar el Teorema **??** para demostrar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua e inyectiva, entonces $f^{-1} : f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es continua.

(31) $\star$ Dar un ejemplo de una función $f : D \to \mathbb{R}$ (D un subconjunto de $\mathbb{R}$) que es inyectiva, continua y $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}$ no es continua.

(32) Sea $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ una función uniformemente continua. Demostrar que existe

$$\lim_{x \to 0^+} f(x).$$

(33) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que existen los límites

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

y son finitos.

Demostrar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

Práctica 5.
Derivadas.

(1) Sea $f(x) = |x|^3$. Hallar $f'(x)$, $f''(x)$ para cualquier x de $\mathbb{R}$ y demostrar que $f'''(0)$ no existe.

(2) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$$

para todo x, y en $\mathbb{R}$. Demostrar que f es constante. ¿Puede generalizar este resultado?

(3) Supóngase que f es una función definida en un entorno de x y que $f''(x)$ existe. Demostrar que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = f''(x).$$

Dar un ejemplo que muestre que el límite anterior puede existir aunque $f''(x)$ no exista.

(4) Sean f y g funciones que poseen derivadas de todos los órdenes y sea $h = f \cdot g$

(a) Demostrar que

$$h''(x) = f''(x)\, g(x) + 2f'(x)\, g'(x) + f(x)\, g''(x).$$

(b) Demostrar que si n es un entero positivo entonces

$$h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x).$$

(Este resultado lleva el nombre de fórmula de Leibnitz)

(5) Sea f una función definida en un intervalo $[a, b]$ que tiene derivada por la derecha en un punto $c \in [a, b]$. Demostrar que f es continua por la derecha en c.

(6) Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ es racional;} \\ \operatorname{sen} x & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Probar que $f'(0) = 1$.

(7) Demostrar o dar un contraejemplo:

Si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable en $c \in (a, b)$ y $f'(c) > 0$ entonces f es creciente en un subintervalo abierto de (a, b) que contiene a c.

(8) Demostrar que no existe k en $\mathbb{R}$ tal que la ecuación

$$x^3 - 3x + k = 0$$

tenga dos soluciones en [0,1].

(9) Demostrar que si

$$C_0 + \frac{C_1}{2} + \cdots + \frac{C_{n-1}}{n} + \frac{C_n}{n+1} = 0,$$

donde $C_0, \ldots C_n$ son constantes reales, entonces existe $x \in (0, 1)$ tal que

$$C_0 + C_1 x + \cdots + C_{n-1} x^{n-1} + C_n x^n = 0.$$

(10) Supóngase que f está definida y es diferenciable para todo $x > 0$ y que $f'(x) \to 0$ si $x \to +\infty$. Sea

$$g(x) = f(x + 1) - f(x).$$

Demostrar que $g(x) \to 0$ si $x \to +\infty$.

(11) Supóngase que

f es continua para $x \geq 0$.
f es derivable para $x > 0$.
$f(0) = 0$.
f' es monótona creciente.

Sea

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \qquad (x > 0).$$

Probar que g es monótona creciente.

(12) Demostrar que entre todos los rectángulos de igual perímetro, el que tiene mayor área es el cuadrado.

(13) Trazar los gráficos de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2}$

(c) $f(x) = e^{-x^2}$

(d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

(e) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$

(f) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-9}$

(14) Demostrar, sin calcular $\sqrt{66}$, que

$$\frac{1}{9} < \sqrt{66} - 8 < \frac{1}{8}.$$

(15) Supóngase que f es n veces derivable y que $f(x) = 0$ para $n+1$ diferentes valores de x. Demostrar que $f^{(n)}(x) = 0$ para algún x.

(16) Demostrar que si f es una función inyectiva, derivable en un intervalo y $f'(f^{-1}(a)) = 0$ entonces f^{-1} no es derivable en a.

(17) Demostrar el siguiente Teorema:

Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $f'(x) > 0$ para todo x de (a,b), o $f'(x) < 0$ para todo x de (a,b) y sea g su función inversa. Entonces g es diferenciable y

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

(18) Deducir las fórmulas para las derivadas de las funciones arcsen, arccos, arctan, arcsec, etc...

(19) * Demostrar que si $|f|$ es derivable en a y f es continua en a entonces f es derivable en a.

(20) ** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $f(0) = 0$ y $|f'(x)| \leq |f(x)|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(21) Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función continua. Supongamos que para cierto $c \in (a, b)$ se cumple que f es derivable en (a, c) y en (c, b) y que $\lim_{x\to c} f'(x) = L$. Demostrar que f es derivable en c y $f'(c) = L$.

(22) Demostrar que si $x \in \mathbb{R}$ entonces

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Hallar fórmulas similares para las funciones cos, exp, cosh y senh.

(23) Demostrar que $\operatorname{sen} x < x$ para todo $x > 0$.

(24) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivable y tal que f' es continua en $[a, b]$. Demostrar que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{f(t) - f(x)}{t - x} - f'(x) \right| < \varepsilon$$

si $0 < |t - x| < \delta$, $a \le x$, $t \le b$.

(25) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable. Demostrar que si existen $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ y son finitos entonces $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

(26) Dar un ejemplo de una función derivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que existe $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y es finito y no existe $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$.

(27) Demostrar las siguientes variantes de la regla de L'Hopital (colocar en detalle las hipótesis adecuadas en cada caso).

(a) Si $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$, y $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$, entonces $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.

(b) Si $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^-} g(x) = 0$, y $\lim_{x\to a^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$, entonces $\lim_{x\to a^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.

(c) Si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, y $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$, entonces $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

(d) Si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, y $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$, entonces $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.

(e) Si $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$, y $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$, entonces $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

(f) Si $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^-} g(x) = 0$, y $\lim_{x\to a^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$, entonces $\lim_{x\to a^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

(g) Si $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$, y $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$, entonces $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.

(h) Si $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^-} g(x) = 0$, y $\lim_{x\to a^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$, entonces $\lim_{x\to a^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.

(i) Si $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} g(x) = 0$, y $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$, entonces $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.

Indicación: Considerar $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{g\left(\frac{1}{x}\right)}$.

(j) Si $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} g(x) = 0$, y $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$, entonces $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.

(k) Si $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} g(x) = 0$, y $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$, entonces $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

(l) Notar que hasta ahora sólo se han considerado límites de la forma $\dfrac{0}{0}$. En este ejercicio se consideran límites de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$ y requiere de mayor manipulación. Si

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty,$$

y

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l,$$

entonces

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Indicación:
Para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - l \right| < \varepsilon \quad \text{para } x > a.$$

Por el teorema del valor medio de Cauchy se tiene que

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} - l \right| < \varepsilon \quad \text{para } x > a.$$

Notar que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \cdot \frac{f(x)}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{g(x)}.$$

(m) Finalmente establecer el siguiente resultado:
Si

$$\lim_{x\to[\,]} f(x) = \lim_{x\to[\,]} g(x) = \{\,\},$$

y

$$\lim_{x\to[\,]} \frac{f'(x)}{g'(x)} = (\,),$$

entonces

$$\lim_{x\to[\,]} \frac{f(x)}{g(x)} = (\,),$$

donde $[\,]$ puede ser a, a^+, a^-, $+\infty$ ó $-\infty$; $\{\,\}$ puede ser 0, $+\infty$ ó $-\infty$ y $(\,)$ puede ser l, $+\infty$ ó $-\infty$.

(28) Hallar los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{1-x}{1-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$

(b) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^{10000}}$

(c) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

(d) $\lim_{x\to +\infty} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

(e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan 5x}{\operatorname{sen} 8x}$

(f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{sen} x}$

(29) Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0; \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Demostrar que:

(a) f posee un mínimo local en 0.

(b) $f'(0) = f''(0) = 0$.

(c) f no es creciente en ningún intervalo a la dercha de 0 y no es decreciente en ningún intervalo a la izquierda de 0.

Práctica 6.
Integrales.

(1) Sean $a < b < c < d$ y f una función integrable sobre el intervalo $[a, d]$. Demostrar que f es integrable sobre $[b, c]$.

(2) Demostrar que si f es integrable sobre $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para todo x de $[a, b]$ entonces

$$\int_a^b f \geq 0.$$

(3) Demostrar que si f y g son integrables sobre $[a, b]$ y $f(x) \geq g(x)$ para todo x de $[a, b]$ entonces

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g.$$

(4) Sea f una función definida en el intervalo $[a, b]$ que es acotada y que es continua en todo punto de $[a, b]$, con la excepción de $x_0 \in (a, b)$. Demostrar que f es integrable sobre $[a, b]$.

Puede dar una generalización del resultado anterior?

(5) Supóngase que f es integrable sobre $[a, b]$. Demostrar que existe x en $[a, b]$ tal que

$$\int_a^x f = \int_x^b f.$$

(6) Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$ tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Demostrar que si

$$\int_a^b f = 0$$

entonces $f(x) = 0$ para todo x de $[a, b]$.

(7) Supóngase que f es continua sobre $[a, b]$ y que

$$\int_a^b fg = 0$$

para toda función g continua en $[a, b]$. Demostrar que $f(x) = 0$ para todo x de $[a, b]$.

(8) Sea f una función integrable en $[a, b]$ tal que $m \leq f(x) \leq M$ para todo x de $[a, b]$. Demostrar que existe que existe un número real $\mu \in [m, M]$ tal que

$$\int_a^b f = (b - a)\mu.$$

Interpretar geométricamente.

(9) (Primer teorema del valor medio para integrales) Demostrar que si f es continua sobre $[a,b]$ entonces existe $x \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f = (b-a)f(x).$$

Interpretar geométricamente.

(10) (Segundo teorema del valor medio para integrales) Supóngase que f es continua sobre $[a,b]$ y que g es integrable y no negativa sobre $[a,b]$. Demostrar que existe $\xi \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b fg = f(\xi)\int_a^b g.$$

Dar un ejemplo que muestre que la hipótesis sobre g es esencial.

(11) Demostrar que si f es una función integrable sobre el intervalo $[a,b]$ entonces $|f|$ es integrable sobre $[a,b]$ y

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$

(12) (Desigualdad de Cauchy-Schwartz) Demostrar que si f y g son funciones integrables sobre el intervalo $[a,b]$, entonces

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b (f(x))^2\,dx\right)\left(\int_a^b (g(x))^2\,dx\right).$$

(13) Supóngase que f es continua en $[0,+\infty)$ y que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$. Demostrar que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = a.$$

(14) Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones

(a) $F(x) = \displaystyle\int_1^{x^5} \cos^3 t dt$

(b) $F(x) = \displaystyle\int_1^{\int_1^{x^6} \cos t\, dt} \frac{\cos t}{2+\operatorname{sen}^2 t} dt$

(c) $F(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} e^{-u^2} du$

(d) $F(x) = \cos\left(\displaystyle\int_0^{e^x} \cos^2\left(\int_0^u \cos^3 t\, dt\right) du\right)$

(15) Para cada una de las siguientes funciones f, sea $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$. ¿En cuáles puntos x se cumple $F'(x) = f(x)$?

$$\text{(a)} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1; \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

$$\text{(b)} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1; \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

$$\text{(c)} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0; \\ x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

(16) Sean h una función continua, f y g funciones derivables y F la función definida por

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)\, dt.$$

Hallar una expresión para $F'(x)$ en términos de f, f', g, g' y h.

(17) Hallar las siguientes primitivas

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+1} dx$

(b) $\displaystyle\int \operatorname{arcsen} \sqrt{x}\, dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{x}{1+\operatorname{sen} x} dx$

(d) $\displaystyle\int \arctan x\, dx$

(e) $\displaystyle\int \sqrt{\tan x}\, dx$

(18) (*) Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es irracional;} \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{q} & \text{si } x = \dfrac{p}{q} \text{ como fracción irreducible.} \end{cases}$$

Demostrar que f es integrable sobre $[0,1]$ y que $\int_0^1 f = 0$.

Indicación:

Como todas las sumas inferiores para esta función son iguales a 0, basta demostrar que para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición P de $[0,1]$ tal que $U(f,P) < \varepsilon$.

Dado $\varepsilon > 0$, sea n tal que $1/n < \varepsilon/2$ y sean $\{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ todos los puntos racionales de $[0,1]$ de la forma p/q con $q < n$.

Escoger una partición $P = \{t_o, \ldots, t_k\}$ tal que la suma de las longitudes de los intervalos $[t_{i-1,t_i}]$ que contiene a algún x_j sea menor que $\varepsilon/2$.

Demostrar que $U(f,P) < \varepsilon$.

(19) (*) Hallar dos funciones f y g que sean integrables, pero cuya composición $g \circ f$ no lo sea.

Indicación: El ejercicio anterior puede ser de utilidad.

Práctica 7.
Series Numéricas.

(1) Clasificar cada una de las siguientes series como convergente o divergente y, en caso de que corresponda, absolutamente convergente o condicionalmente convergente.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n^3}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+n}}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{n!}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^5}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(\log n)^2}$

(k) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2(\log n)}$

(l) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\log(\log n)}$

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

(n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$

(o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$

(p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$

(q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

(r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)$

(s) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

(t) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$

(u) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^3+5}-\sqrt{n^3+3}$

(v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n^9-n^5+1}$

(w) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2^n}\right)$

(x) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

(y) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^2+5}-\sqrt{n^2+3}$

(z) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+4}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

(2) Para cuales valores de a converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n n!}{n^n}.$$

(3) Demostrar que si las series $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2$ convergen, entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$$

también converge.

(4) Demostrar que si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ converge entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n}$$

converge.

(5) El siguiente resultado es el Criterio de condensación de Cauchy.

Supóngase que $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente y que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Demostrar que si $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, entonces

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$$

converge. Notar que de este criterio se puede concluir que la serie armónica diverge.

(6) Demostrar el siguiente Teorema:

Si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge absolutamente entonces toda reordenación $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ también converge absolutamente y

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.$$

(7) Demostrar el siguiente Teorema:

Si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge condicionalmente entonces para todo número real α existe una reordenación $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ tal que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \alpha.$$

(8) Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones de términos positivos y supongamos que existe

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

Consideremos las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

(a) Demostrar que si $\alpha \neq 0$ y finito se tiene que ambas series convergen o ambas series divergen.
(b) Demostrar que si $\alpha = 0$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
(c) Demostrar que si $\alpha \neq 0$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

(9) Hallar la suma de la serie

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \ldots$$

(10) Determinar para cuales valores de p y q es convergente la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \log^q n}.$$

(11) (**) Estudiar el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n}.$$

(12) (*) Utilizar el criterio de la integral para demostrar que la integral

$$\int_1^{\infty} \frac{e^x}{x^x}\, dx$$

converge.

(13) (*) Utilizar el criterio de la integral para demostrar que la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$$

converge.

Práctica 8.
Sucesiones y series de funciones.

(1) Para cada una de las siguientes sucesiones $\{f_n\}$:

(i) determinar el límite puntual de $\{f_n\}$ (si existe) en el intervalo indicado,

(ii) decir si $\{f_n\}$ converge uniformemente o no.

(a) $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$, en $[0, 1]$.

(b) $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq n; \\ x - n & \text{si } x \geq n; \end{cases}$
en $\mathbb{R}$.

(c) $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq n; \\ x - n & \text{si } x \geq n; \end{cases}$
en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$.

(d) $f_n(x) = e^{-nx^2}$ en $[-1, 1]$.

(2) Hallar cada una de las siguientes sumas infinitas

(a) $1 - x + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dots$

(b) $1 - x^3 + x^6 - x^9 + \dots$

(c) $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3 \cdot 2} + \dfrac{x^4}{4 \cdot 3} - \dfrac{x^5}{5 \cdot 4} + \dots$

(3) Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x \neq 0; \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Hallar $f^{(k)}(0)$ para $k = 1, 2, 3, \dots$

(4) Para $x \in (-R, R)$ sea

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Demostrar que:

(a) si f es par, entonces $a_n = 0$ para n impar,

(b) si f es impar entonces $a_n = 0$ para n par.

(5) Sea f una función diferenciable en $\mathbb{R}$. Demostrar que la función f' es el límite puntual de una sucesión de funciones continuas.

(6) Consideremos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2 x}.$$

(a) ¿Para cuáles valores de x la serie converge absolutamente?

(b) ¿En cuáles intervalos converge uniformemente?

(c) ¿En cuáles intervalos falla la convergencia uniforme?

(d) ¿Es f continua en el conjunto donde la serie converge?

(e) ¿Es f acotada?

(7) Demostrar que toda sucesión uniformemente convergente de funciones acotadas es uniformemente acotada.

(8) Demostrar que si $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ son sucesiones de funciones que convergen uniformemente en un conjunto E entonces $\{f_n + g_n\}$ también converge uniformemente en E. Demostrar que si además las funciones f_n y g_n son acotadas entonces $\{f_n g_n\}$ también converge uniformemente en E.

(9) Construir un par de sucesiones $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ que convergen uniformemente en E pero sin embargo su producto $\{f_n\, g_n\}$ no converge uniformemente en E.

(10) Demostrar que si f es continua en $[a, b]$ y

$$\int_a^b f(x)\, x^n\, dx = 0 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

entonces $f(x) = 0$ para todo x en $[a, b]$.

(11) Supóngase que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge. Entonces es claro que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es uniformemente convergente en $[-a, a]$ para $0 < a < 1$. Sin embargo puede no converger uniformemente en $[-1, 1]$; de hecho puede no converger en el punto -1 (ejemplo: la serie de $\ln(1 + x)$).

Un Teorema de Abel dice que si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge entonces la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformemente en $[0, 1]$ y por lo tanto la función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

es continua en $[0, 1]$. Esto implica que, en este caso,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Demostrar el Teorema de Abel.

Sugerencia:
Demostrar primero el lema de Abel:
Si $\{b_n\}$ es una sucesión monótona decreciente, no negativa y

$$m \leq a_1 + \cdots + a_n \leq M \quad \text{para todo } n$$

entonces

$$b_1 m \leq a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \leq b_1 M.$$

(Indicación:
Sea $s_k = a_1 + \cdots + a_k$, entonces

$$\begin{aligned} a_1\, b_1 + \cdots + a_n\, b_n &= b_1\, s_1 + b_2\, (s_2 - s_1) + \cdots + b_n\, (s_n - s_{n-1}) \\ &= s_1\, (b_1 - b_2) + s_2\, (b_2 - b_3) + \cdots + s_{n-1}\, (b_{n-1} - b_n) + s_n\, b_n, \end{aligned}$$

notar que, para cada i, $b_i - b_{i-1} \geq 0$ y $m \leq s_i \leq M$)
Deducir que

$$b_k m \leq a_k b_k + \cdots + a_n b_n \leq b_k M.$$

(12) Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ es sumable Abel si existe

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Por el ejercicio anterior toda sucesión sumable es sumable Abel. Hallar una sucesión que no sea sumable y que sin embargo si sea sumable Abel.

(13) Determinar el conjunto de convergencia de cada una de las siguientes series. Investigar en cuáles conjuntos la convergencia es uniforme y en cuáles conjuntos la convergencia es absoluta.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! x^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^x}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)x^n}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{\log x}}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n-1)x}{(2n-1)^2}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^5 x^{2n}}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \operatorname{sen}\left(\frac{x}{3^n}\right)$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\, 3^n (x-5)^n}$

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{e^{nx}}$

(l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{x^{n^n}}$

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n \operatorname{sen} x}$

(n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n + \frac{1}{n x^n}$

(o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}$

(p) $\displaystyle\sum_{n=-1}^{\infty} x^n$

(14) Hallar el intervalo de convergencia de cada una de las siguientes series de potencias, e investigar la convergencia en los extremos de dicho intervalo.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n\, 3^n \log n}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2(n-1)}}{2n-1}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}\, x^{2n-1}}{(4n-3)^2}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^{n!}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5 x^{2n}}{2n+1}$

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$

(l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right) x^n$

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2}\, x^{n^2}$

(n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n\,(x+3)^n$

(o) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n$

(p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{2n\, 4^n}$

(q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} (x-1)^n$

(r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-\pi)^n}{n!}$

(s) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,(x+3)^n}{n^n}$

(t) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\log(n+1)}$

(u) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\,\log(n+1)\,)\; x^n$

(v) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (\,2^n\,\log n\,)\;(x-25)^n$

(15) Demostrar la convergencia uniforme de cada una de las siguientes series en los intervalos que se indican:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ en el intervalo $[-1,1]$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{2^n}$ en toda la recta

Práctica 9.
Integrales impropias.

(1) Estudiar la convergencia de cada una de las siguientes integrales impropias

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\log x}{1-x}\,dx$

(2) Para un cierto valor de C la integral

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} - \frac{C}{x+1} \right) dx$$

converge. Determinar C y calcular la integral.

(3) Demostrar que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ converge.

(4) Demostrar que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right| dx$ diverge.

(5) La función Γ se define por

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,dt.$$

(a) Demostrar que la integral impropia $\Gamma(x)$ está definida si $x > 0$.
(b) Demostrar que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ si $x > 0$.
(c) Demostrar que $\Gamma(1) = 1$ y deducir que $\Gamma(n) = (n-1)!$ si n es un entero positivo.
(d) Hallar $\Gamma(\frac{1}{2})$.

Bibliografía

[1] Apostol, T. *Calculus.* Tomos 1 y 2. Reverté.

[2] Apostol, T. *Mathematical Analysis.*

[3] Bruzual, R. y Domínguez, M. *Series de Fourier.* Libro elaborado para el III y IV Taller de Formación Matemática.

[4] Cohen, L. and Ehrlich, G. *The structure of the real number system.* Van Nostrand, 1963.

[5] Deminovich, B. *Problemas y ejercicios de Análisis Matemático.*MIR

[6] Halmos, P. *Teoría intuitiva de los conjuntos.* CECSA, 1971.

[7] Horváth, J. *Introducción a la topología general* Monografía N 9, Serie de Matemática. O.E.A.

[8] Lick, D. *The advanced calculus of one variable.* Appleton-Century-Crofts, 1971.

[9] Protter, M. H. and Morrey, C. B. *A First Course in Real Analysis.*

[10] Rudin, W. *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw Hill

[11] Spivack, M. *Calculus.* Tomos 1 y 2. Reverté, 1981

[12] Stromberg, H. *An Introduction to Classical Real Analysis.*

[13] White, A. *Real Analysis; An Introduction.*