UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA
LABORATORIO DE FORMAS EN GRUPOS

Cálculo Diferencial en una Variable

Ramón Bruzual
Marisela Domínguez

Caracas, Venezuela
Febrero 2005

Ramón Bruzual
Correo-E: rbruzual@euler.ciens.ucv.ve

Marisela Domínguez
Correo-E: mdomin@euler.ciens.ucv.ve

Laboratorio de Formas en Grupos
Centro de Análisis
Escuela de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad Central de Venezuela

http://euler.ciens.ucv.ve/~labfg

Nota: Este material está disponible en la página web
http://euler.ciens.ucv.ve/~labfg/guias.htm

En general mantenemos una réplica en un servidor externo a la Universidad Central de Venezuela, el vínculo se encuentra indicado en esa misma página web.

Prólogo

Estas notas han sido concebidas para ser utilizadas en la primera parte del curso de Análisis I de la Licenciatura en Matemática de la Universidad Central de Venezuela y son el resultado de la experiencia de los autores en el dictado de dicho curso.

En este curso se debe dar una visión rigurosa del cálculo en una variable.

Los siguientes temas son tratados en forma exhaustiva:

(1) Los números reales. Axiomas. Propiedades de orden. Supremo. Completitud. Numerabilidad.
(2) Topología de la recta. Intervalos. Conjuntos abiertos y cerrados. Puntos de acumulación. Teorema de Bolzano-Weierstrass. Conjuntos cerrados. Conjuntos compactos. Teorema de Heine-Borel. Conjuntos conexos.
(3) Sucesiones. Convergencia. Sucesiones de Cauchy. Sucesiones monótonas. Subsucesiones. Límites superior e inferior de una sucesión. El número e.
(4) Límites y continuidad de funciones. Funciones continuas en abiertos y cerrados. Condiciones necesarias y suficientes para continuidad. Continuidad y compacidad. Continuidad uniforme y el teorema de Heine. Discontinuidades. Funciones monótonas.
(5) Derivada de una función real. Teorema del valor medio. Funciones inversas. Derivadas de orden superior y el teorema de Taylor.

Se han incorporado dos capítulos adicionales. En el primero se estudia el método de la tangente de Newton y en el segundo se desarrolla, a manera de ejercicio, la construcción del conjunto de los números reales mediante el método de sucesiones de Cauchy.

Aunque la defınción rigurosa de las funciones exponencial, logarítmica y trigonométricas se hace en la segunda parte del curso, usamos estas funciones y sus propiedades, suponiendo un conocimiento previo intuitivo.

Tanto el trabajo de mecanografía como la elaboración de los gráficos estuvo a cargo de los autores. Agradecemos cualquier observación o comentario que deseen hacernos llegar.

Ramón Bruzual.
Marisela Domínguez.
Febrero 2005.

Índice general

CAPíTULO 1

Los números reales.

1. Introducción.

Aclarar emos algunos aspectos del método axiomático. Comenzaremos con un ejemplo, Euclides de Alejandría y su famosa obra Los Elementos.

Euclides (450? - 374? a.C.) fué un matemático griego que nació en Gela o Megara donde funda una escuela de filosofía.

Euclides no fue propiamente un gran innovador, pero fue un soberbio organizador de los resultados matemáticos alcanzados por Tales, Eudoxo y otros sabios de la edad de oro de la geometría griega, tales como Demócrito, Hipócrates de Quíos y Arquitas. Euclides se dedicó a elaborar un compendio del conocimiento matemático del momento. Mediante un razonamiento irrefutable, de carácter científico, Euclides elabora teorías a partir de la formulación de hipótesis, siguiendo un meticuloso camino deductivo. A ese curso de acción se le conoce como método axiomático.

De esta manera emprende la escritura de "Elementos", una serie de trece libros, obra en la cual exponen los adelantos que él y otros estudiosos habían logrado hasta el momento en materia de la geometría plana y del espacio, de las proporciones geométricas y de la aritmética. En la antigüedad se difundieron extensamente en forma de manuscrito. Desde la invención de la imprenta, miles de ediciones se han publicado.

En los "Elementos", Euclides afianza una característica de la matemática: su carácter abstracto y su independencia de cualquier aplicación práctica. En su obra no aparecen ejemplos numéricos, ni aplicaciones concretas, ni se alude a instrumento geométrico alguno.

Los Elementos es el primer ejemplo en la historia de la matemática de un sistema axiomático deductivo: A partir de unas cuantas suposiciones básicas y una colección de definiciones se deducen 465 proposiciones o teoremas siguiendo una cadena lógica. Toda esta información la dedujo Euclides a partir de 10 simples premisas: 5 postulados y 5 axiomas.

Podemos distinguir entre nociones comunes o axiomas que son las ideas básicas que se asumen en todos los estudios (carácter universal) y los postulados que sólo están relacionados con la materia o el objeto en estudio.

LOS AXIOMAS DE EUCLIDES:

(1) Las cosas iguales a una tercera son iguales entre sí.
(2) Si se suman los iguales con los iguales, las sumas son iguales.
(3) Si se restan los iguales de los iguales, las restos son iguales.
(4) Las cosas que coinciden mutuamente son mutuamente iguales.
(5) El todo es siempre mayor que la parte.

LOS POSTULADOS DE EUCLIDES:

(1) Por dos puntos cualesquiera pasa una línea recta.
(2) Un segmento de recta puede ser trazado de modo continuo sobre una línea recta.
(3) Tomando un punto cualquiera como centro puede trazarse un círculo con un radio igual a una línea recta finita (segmento).
(4) Todos los ángulos rectos son iguales.
(5) Dadas una línea recta y un punto exterior a ésta, hay a través de este punto una y tan sólo una paralela a la línea dada.

Euclides construyó su geometría, una geometría que resistió el paso de casi dos mil años, utilizando un método de trabajo especialmente acertado: el método axiomático. Euclides empezaba por enunciar una serie de verdades que le parecían evidentes por sí mismas y que aceptaba sin demostración previa. Una vez aceptados estos presupuestos básicos, las solas reglas del razonamiento le proporcionaban todo lo demás.

A partir de los enunciados primitivos, los axiomas, se iban encadenando una tras otra las deducciones que se desprendían de ellos; eran los teoremas. Y a partir de los teoremas surgían cada vez más teoremas. También surgían teoremas equivalentes, es decir, a enunciados que con distintas palabras, expresen la misma verdad.

El método de trabajo de las matemáticas modernas es muy semejante al de Euclides, sólo que más perfecto y acabado. Supongamos que queremos edificar una teoría matemática, por ejemplo la teoría de los números reales. Empezaremos por definir una serie de axiomas que nos aclaren qué entendemos por número real y qué reglas de juego nos estarán permitidas con esos números; luego nos pondremos a deducir de acuerdo con las reglas de juego, y ésta será nuestra base.

2. Definición axiomática del conjunto de los números reales.

Vamos a introducir el conjunto de los números reales en forma axiomática, es decir, vamos a aceptar que existe un conjunto, el de los números reales, que satisface ciertas propiedades. De una vez enunciaremos todos los axiomas que definen el conjunto de los números reales, posteriormente los iremos explicando, desarrollando y aclarando sus consecuencias e importancia.

Existe un conjunto, que denotaremos por $\mathbb{R}$, en el que están definidas dos operaciones, la suma $(+)$ y el producto $(\cdot)$ que satisfacen las siguientes propiedades:

Si a, b y c son elementos de $\mathbb{R}$ entonces:

(P1) (*Propiedad conmutativa de la suma*)

$$a + b = b + a.$$

(P2) (*Propiedad asociativa de la suma*)

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

(P3) (*Existencia de elemento neutro para la suma*) Existe un elemento $0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

(P4) (*Existencia de inverso con respecto a la suma*) Si $a \in \mathbb{R}$ entonces existe otro elemento $-a \in \mathbb{R}$ tal que

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

(P5) (*Propiedad conmutativa del producto*)

$$a \cdot b = b.a\cdot$$

(P6) (*Propiedad asociativa del producto*)

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

(P7) (*Existencia de elemento neutro para el producto*) Existe un elemento $1 \in \mathbb{R}$ tal que $1 \neq 0$ y

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

(P8) (*Existencia de inverso con respecto al producto*) Si $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$ entonces existe otro elemento $a^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1.$$

(P9) (*Propiedad distributiva*)

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Existe un subconjunto P de $\mathbb{R}$ que satisface:

(P10) Si $a \in \mathbb{R}$ entonces se cumple una y sólo una de las siguientes condiciones:
- (i) $a = 0$.
- (ii) $a \in P$.
- (iii) $-a \in P$.

(P11) Si a y $b \in P$ entonces $a + b \in P$.

(P12) Si a y $b \in P$ entonces $a \cdot b \in P$.

Los conceptos que aparecen en la siguiente propiedad los aclararemos en el transcurso del capítulo.

(P13) Si A es un subconjunto no vacío del conjunto de los números reales y A está acotado superiormente entonces A posee supremo.

Las propiedades de los números reales, (P1) a (P12), que hemos enunciado hasta ahora, también la poseen los números racionales. La propiedad (P13) la posee el conjunto de los números reales y no el de los racionales. Como veremos a lo largo del curso, esta propiedad es fundamental y marca una gran diferencia entre números reales y números racionales.

El número 0 es el único que satisface (P3) y el número $-a$ está unívocamente determinado por a, es decir:

Proposición 1.1.

(i) *Si* $x \in \mathbb{R}$ *satisface* $a + x = a$ *para cierto* $a \in \mathbb{R}$ *entonces* $x = 0$.

(ii) *Si* $a,\ b \in \mathbb{R}$ *y* $a + b = 0$ *entonces* $b = -a$.

Demostración. (i) Si $a + x = a$ entonces $(-a) + (a + x) = (-a) + a = 0$, de donde $(-a + a) + x = 0$ y por lo tanto $x = 0 + x = 0$. La segunda parte queda como ejercicio.

□

Definición 1.2. La *resta* se define como una operación derivada de la suma: si a y $b \in \mathbb{R}$ $a - b$ es, por definición, $a + (-b)$.

Proposición 1.3. *Si* $a \in \mathbb{R}$ *entonces* $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$.

Demostración. $0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$. De la primera parte de la Proposición 1.1 sigue que $0 \cdot a = 0$.

□

Observación 1.4. A primera vista puede resultar extraño haber pedido $1 \neq 0$ en (P7), por lo que es importante hacer notar que, si todos los números reales fuesen iguales a 0, entonces (P1), . . . ,(P13) se cumplirían, tomando $P = \emptyset$ en lo que se refiere a (P10), (P11) y (P12).

Definición 1.5. La *división* se define en términos de la multiplicación de la siguiente manera: Si $b \neq 0$, $\dfrac{a}{b}$ es, por definición $a \cdot b^{-1}$.

Observación 1.6. Es importante aclarar en este punto que, como $0 \cdot b = 0$ para todo número real b, entonces 0^{-1} no tiene sentido, y por lo tanto tampoco lo tiene $\dfrac{a}{0}$ para un número real a.

El siguiente resultado debe ser probado como ejercicio

Proposición 1.7.

(i) *Si* a, b *y* $c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ *y* $a \cdot b = a \cdot c$ *entonces* $b = c$.
(ii) *Si* a *y* $b \in \mathbb{R}$ *y* $a \cdot b = 0$ *entonces* $a = 0$ *ó* $b = 0$.

La conocida "regla de los signos" también la podemos obtener de las propiedades anteriores, más precisamente:

Proposición 1.8. *Sean* a *y* $b \in \mathbb{R}$*, entonces*

(i) $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$

(ii) $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$

(iii) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

Demostración. Las pruebas de (i) y (ii) quedan como ejercicios.
Haremos la prueba de (iii).
Por (i), (P9), (P4) y por la Proposición 1.3

$$(-a) \cdot (-b) - (a \cdot b) = (-a) \cdot (-b) + (-a) \cdot b = (-a) \cdot (-b + b) = (-a) \cdot 0 = 0.$$

Usando la Proposición 1.1 obtenemos

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b.$$

□

Observación 1.9. Como es usual, a veces escribiremos $a\,b$, en vez de $a \cdot b$.

3. Orden y números reales positivos.

Para comprender mejor las propiedades (P10), (P11), (P12) y (P13) es importante notar lo siguiente:

Todos tenemos una noción intuitiva de lo que quiere decir $a < b$ (a menor que b) si a y b son números reales. Los números a que satisfacen $a > 0$ se llaman positivos, mientras que los números a que satisfacen $a < 0$ se llaman negativos. Por lo tanto la positividad se puede definir en términos de $<$. Sin embargo, es posible invertir el proceso: $a < b$ puede interpretarse como que $b - a$ es positivo. Conviene considerar el conjunto de todos los números positivos, representado por P, como concepto básico y expresar todas las propiedades en términos de P.

Las relación de orden en $\mathbb{R}$ se define de la siguientes manera:

Definición 1.10. Sean a y $b \in \mathbb{R}$

$a > b$ si $a - b \in P$.

$a < b$ si $b > a$.
$a \leq b$ si $a < b$ ó $a = b$.
$a \geq b$ si $a > b$ ó $a = b$.

Es importante notar que $a > 0$ si y sólo si $a \in P$.

De las propiedades de P se deduce que, si a y b son dos números reales, una y sólo una de las siguientes afirmaciones puede ser cierta :

(i) $a - b = 0$.
(ii) $a - b \in P$.
(iii) $b - a \in P$.

Equivalentemente, se cumple una y sólo una de las siguientes condiciones:

$$a = b.$$
$$a > b.$$
$$b > a.$$

Las propiedades básicas de las desigualdades se obtienen en forma inmediata de (P10), (P11) y (P12). Veamos algunos ejemplos:

PROPOSICIÓN 1.11. *Sean a, b y c números reales, entonces:*

(i) *Si $a < b$ entonces $a + c < b + c$.*
(ii) *Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.*
(iii) *Si $a < 0$ y $b < 0$ entonces $a \cdot b > 0$.*
(iv) *Si $a < 0$ y $b > 0$ entonces $a \cdot b < 0$.*

DEMOSTRACIÓN.
(i) Como $a < b$ entonces $b - a \in P$. Pero por (P1), (P9), (P2), (P4) y (P3)

$$\begin{aligned}(b + c) - (a + c) &= (b + c) - (c + a)\\ &= (b + c) - c - a\\ &= b + (c - c) - a\\ &= b + 0 - a\\ &= b - a\end{aligned}$$

y por lo tanto $(b + c) - (a + c) \in P$, de donde $a + c < b + c$.

(ii) Por hipótesis $b - a \in P$ y $c - b \in P$, por lo tanto $(c - b) + (b - a) \in P$. Pero

$$(c - b) + (b - a) = c + (-b + b) - a = c + 0 - a = c - a.$$

(Justifique qué propiedad se usó en cada paso).

Luego $c - a \in P$, es decir, $a < c$.

(iii) Por hipótesis $-a \in P$ y $-b \in P$, por lo tanto $(-a) \cdot (-b) \in P$. Por la Proposición 1.8 tenemos que $a \cdot b = (-a) \cdot (-b)$, de donde $a \cdot b \in P$, es decir, $a \cdot b > 0$.

(iv) Por hipótesis $-a \in P$ y $b \in P$, por lo tanto $(-a) \cdot b \in P$. Por la Proposición 1.8 $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b$, de donde $-(a \cdot b) \in P$, es decir, $a \cdot b < 0$.

$\square$

Una consecuencia importante de este último resultado es que $a^2 = a.a > 0$ siempre que $a \neq 0$. En particular $1 = 1{,}1 > 0$.

Definición 1.12. Si $a \in \mathbb{R}$, se define el *valor absoluto de* a, $|a|$, como sigue:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Es importante notar que $|a|$ es siempre positivo, excepto cuando $a = 0$.

Proposición 1.13. *Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Si $x \geq 0$, $y \geq 0$ y si $x^2 \leq y^2$ entonces $x \leq y$.*

Demostración. Debemos considerar dos casos.

Primer caso: Si $x = y$, en este caso el resultado ya se cumple.

Segundo caso: Si $x \neq y$.

Como $x^2 \leq y^2$, tenemos que $y^2 - x^2 \geq 0$ y por lo tanto

$$(y - x)(y + x) \geq 0.$$

Tenemos que $y - x \neq 0$ y $y + x > 0$ (¿por qué?), por lo tanto de esta última desigualdad se deduce que $y - x$ y $y + x$ son ambos mayores que cero. Por lo tanto $y > x$.

$\square$

El siguiente resultado es fundamental.

PROPOSICIÓN 1.14. *Si a y $b \in \mathbb{R}$ entonces*

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

DEMOSTRACIÓN. Notemos primero que $a \leq |a|$ para todo número real a (probarlo como ejercicio).

Por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned}(|a+b|)^2 &= (a+b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2 \\ &\leq a^2 + |2\,a\,b| + b^2 = |a|^2 + 2\,|a|\,|b| + |b|^2 \\ &= (|a| + |b|)^2.\end{aligned}$$

De donde $(|a+b|)^2 \leq (|a|+|b|)^2$, por la proposición anterior

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

□

4. Supremo.

DEFINICIÓN 1.15. Sea A un subconjunto del conjunto de los números reales.

Se dice que A está *acotado superiormente* si existe un número real M tal que $x \leq M$ para todo x de A, en este caso se dice M es una *cota superior* de A.

Se dice que A está *acotado inferiormente* si existe un número real m tal que $x \geq m$ para todo x de A, en este caso se dice que m es *cota inferior* de A.

Se dice que A está *acotado* si A está acotado tanto superior como inferiormente.

DEFINICIÓN 1.16. Sea A un subconjunto del conjunto de los números reales.

Se dice que M es una *cota superior mínima* de A si:

(i) M es cota superior de A.

(ii) Si F es una cota superior de A entonces $M \leq F$.

Es decir, M es la menor de las cotas superiores.

Es fácil probar (hágalo como ejercicio) que si el conjunto A posee una cota superior mínima, entonces ésta es única. Por esta razón podemos hablar de la cota superior mínima de A, en caso de que exista. Como sinónimo de cota superior mínima se suele usar *supremo*, que se abrevia sup.

Como ejercicio definir cota inferior máxima (sinónimo de *ínfimo*) y demostrar su unicidad en caso de que exista.

Como vimos el conjunto P induce un orden, $<$, en $\mathbb{R}$. Con este orden inducido se cumple el axioma (P13) que enunciamos anteriormente:

(P13) Si A es un subconjunto no vacío del conjunto de los números reales y A está acotado superiormente entonces A posee supremo.

Es importante notar que los 12 primeros axiomas los satisface el cuerpo $\mathbb{Q}$ de los números racionales. Sin embargo el axioma (P13) establece una gran diferencia entre estos dos cuerpos. Por ejemplo si

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$$

entonces A es acotado en $\mathbb{Q}$ y sin embargo A no tiene cota superior mínima en $\mathbb{Q}$.

También debe estar claro que los conjuntos $\mathbb{N}$ (los naturales), $\mathbb{Z}$ (los enteros) y $\mathbb{Q}$ (los racionales) son subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Es muy importante aclarar que es posible construir el conjunto de los números reales a partir del conjunto de los números racionales, los números racionales se pueden obtener a partir de los números enteros y los números enteros se pueden obtener a partir de los números naturales. Finalmente existen dos formas básicas de obtener los números naturales, una muy constructiva a partir de la teoría de conjuntos y otra a partir de los axiomas de Peano. En el Capítulo 7 se dan muchos más detalles acerca de estas construcciones y también se dan referencias para quien tenga interés en profundizar en el tema.

El conjunto de los números reales es único en el siguiente sentido: Si $\mathbb{F}$ es otro conjunto en el que se satisfacen las propiedades (P1) a (P13) entonces $\mathbb{F}$ y $\mathbb{R}$ son isomorfos, es decir existe una biyección entre $\mathbb{F}$ y $\mathbb{R}$ que respeta las operaciones de suma, producto y el orden. Más precisamente, existe una función biyectiva $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{F}$ tal que para todo $a, b \in \mathbb{R}$:

(i) $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$,
(ii) $\phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot \phi(b)$,
(iii) $a < b$ implica $\phi(a) < \phi(b)$.

Para finalizar esta sección demostraremos el siguiente resultado, que intuitivamente es muy claro y que es de consecuencias fundamentales.

TEOREMA 1.17. *El conjunto $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\mathbb{N}$ está acotado superiormente. Por el axioma (13) tenemos que $\mathbb{N}$ tiene supremo. Sea $a = \sup N$.

Entonces $n \leq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Si $n \in \mathbb{N}$ entonces también $n + 1 \in \mathbb{N}$. Por lo tanto también es cierto que $n + 1 \leq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir $n \leq a - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es decir, $a - 1$ es una cota superior. Luego a no es la menor de las cotas superiores.

Claramente esta última afirmación contradice el hecho de que $a = \sup N$.

□

COROLARIO 1.18.

(i) *Para cada $r \in \mathbb{R}$ tal que $r > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n} < r$.*

(ii) $\mathbb{R}$ *es* Arquimediano*, es decir, si $r \in \mathbb{R}$, $R \in \mathbb{R}$ y $r > 0$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot r > R$.*

Tanto la demostración como la interpretación geométrica de este corolario se dejarán como ejercicio.

5. Cardinalidad del conjunto de los números reales.

DEFINICIÓN 1.19. Se dice que un conjunto A es *numerable* si existe una función $f : \mathbb{N} \to A$ biyectiva.

Dicho de otra manera, A es numerable si A es infinito y los elementos de A se pueden poner en una lista de la forma $a_1, a_2, a_3, \dots$

OBSERVACIÓN 1.20. Se puede probar que si A es un conjunto infinito y existe una función $f : \mathbb{N} \to A$ sobreyectiva entonces A es numerable.

Son ejemplos de conjuntos numerables los siguientes:

(a) $\mathbb{N}$.
(b) El conjunto de los números pares $\{2, 4, 6, \dots\}$, una función que serviría es $f(n) = 2n$.
(c) El conjunto de los números impares.
(d) El conjunto de los números enteros

$$\{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots\}$$

(e) Aunque no es tan inmediato, el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales también es numerable. Una forma de hacer una lista de los números racionales positivos es la que sugiere la siguiente tabla:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & \rightarrow & \frac{1}{4} & & \frac{1}{5} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & & \\
\frac{2}{1} & & \frac{2}{2} & & \frac{2}{3} & & \frac{2}{4} & & \frac{2}{5} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & & & \\
\frac{3}{1} & & \frac{3}{2} & & \frac{3}{3} & & \frac{3}{4} & & \frac{3}{5} & & \cdots \\
 & & & & & & & & & & \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots
\end{array}
$$

Proposición 1.21. *El conjunto de los números reales no es numerable.*

(Esta es otra gran diferencia entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$).

Demostración. Para probar que $\mathbb{R}$ no es numerable basta ver que es imposible poner en una lista de la forma $a_1, a_2, a_3, \dots$ a todos los números del intervalo $(0,1)$.

Supongamos que $a_1, a_2, a_3, \dots$ es una lista de números del intervalo $(0,1)$. Entonces

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 0, b_1^{(1)} b_1^{(2)} b_1^{(3)} b_1^{(4)} \dots \\
a_2 &= 0, b_2^{(1)} b_2^{(2)} b_2^{(3)} b_2^{(4)} \dots \\
a_3 &= 0, b_3^{(1)} b_3^{(2)} b_3^{(3)} b_3^{(4)} \dots \\
\dots &= \dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

donde $b_j^{(i)}$ es un número entero entre 0 y 9 (evitaremos los desarrollos que terminan en $9999999\dots$).

Consideremos el siguiente número:

$$b = 0, b^{(1)} b^{(2)} b^{(3)} b^{(4)} \dots$$

donde los enteros $b^{(i)}$ están escogidos de la siguiente manera:

$$0 \le b^{(i)} < 9 \text{ y } b^{(1)} \ne b_1^{(1)},\ b^{(2)} \ne b_2^{(2)},\ b^{(3)} \ne b_3^{(3)}, \text{ etc } \dots$$

Tenemos que $b \in (0,1)$ y la forma en que hemos construído b nos asegura que

$$b \neq a_1,\ b \neq a_2,\ b \neq a_3, \text{ etc } \ldots$$

Por lo tanto el número b no puede estar en la lista original, lo cual prueba que es imposible hacer una lista con todos los elementos de (0,1).

□

Ejercicios.
Números reales.

(1) Demostrar las siguientes afirmaciones (x e y denotan números reales):
   (a) Si $a\,x = a$ para algún número real $a \neq 0$ entonces $x = 1$.
   (b) $x^2 - y^2 = (x - y)\,(x + y)$.
   (c) Si $x^2 = y^2$ entonces $x = y$ ó $x = -y$.
   (d) Si n es un número natural entonces

$$x^n - y^n = (x - y)\,(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

   (e) Si n es un número impar y $x^n = y^n$ entonces $x = y$.
   (f) Si n es un número par y $x^n = y^n$ entonces $x = y$ ó $x = -y$.

(2) Encontrar el error en la siguiente “demostración”.
   Sean x e y números reales. Supongamos $x = y$. Entonces

$$x^2 = y^2$$
$$x^2 - y^2 = x\,y - y^2$$
$$(x + y)\,(x - y) = y\,(x - y)$$
$$x + y = y$$
$$2\,y = y$$

   Si tomamos $x = y = 1$ obtenemos $2 = 1$.

(3) Demostrar que si a, b, c, d son números reales y $b, d \neq 0$ entonces

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

(4) El máximo de dos números reales x e y se denota por $\max(x, y)$ y el mínimo por $\min(x, y)$. Demostrar:

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |y - x|}{2},$$
$$\min(x, y) = \frac{x + y - |y - x|}{2}.$$

(5) Demostrar que no existe ningún número racional de cuadrado igual a 2.

(6) Demostrar que la suma de un número racional y un número irracional es un número irracional.

(7) ¿Es la suma de números irracionales un número irracional?

(8) Demostrar que el producto de un número racional no nulo por un número irracional es un número irracional.

(9) ¿Es el producto de números irracionales un número irracional?

(10) Demostrar que existe un único número real positivo cuyo cuadrado es igual a 2.

Indicación: Considerar el conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\},$$

demostrar que A es acotado y que si $a = \sup A$ entonces $a^2 = 2$.

(11) Utilizar la misma idea del ejercicio anterior para demostrar que si n es par y $a > 0$ entonces a tiene una única raíz n-ésima positiva. Enunciar y demostrar el resultado correspondiente para n impar.

Tal como veremos más adelante, el Teorema 4.19 permite dar una demostración sencilla de este resultado.

(12) Demostrar que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es un número irracional.

(13) Demostrar que si x e y son números reales entonces

(a) $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

(b) $|x\,y| = |x|\,|y|$.

(c) $\left|\dfrac{1}{x}\right| = \dfrac{1}{|x|}$, si $x \neq 0$.

(d) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, si $y \neq 0$.

(e) $|x - y| \leq |x| + |y|$.

(f) $|x| - |y| \leq |x - y|$.

(14) Demostrar las siguientes afirmaciones (a, b, c y d denotan números reales).
  (a) Si $a < b$ y $c < d$ entonces $a + c < b + d$.
  (b) Si $a < b$ entonces $-b < -a$.
  (c) Si $a < b$ y $c > d$ entonces $a - c < b - d$.
  (d) Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $a \cdot c < b \cdot c$.
  (e) Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $a \cdot c > b \cdot c$.
  (f) Si $a > 1$ entonces $a^2 > a$.
  (g) Si $0 < a < 1$ entonces $a^2 < a$.
  (h) Si $0 \leq a < b$ y $0 \leq c < d$ entonces $a \cdot c < b \cdot d$.
  (i) Si $0 \leq a < b$ entonces $a^2 < b^2$.
  (j) Si $a, b \geq 0$ y $a^2 < b^2$ entonces $a < b$.
  (k) Si $a > 0$ entonces $a^{-1} > 0$.

(15) Demostrar que la unión de dos conjuntos numerables es numerable

(16) Sean a y b números reales tales que $0 < a < b$. Demostrar que

$$a < \sqrt{a\,b} < \frac{a+b}{2} < b.$$

(17) Demostrar que si A es un subconjunto acotado superiormente de $\mathbb{R}$ entonces $\sup A$ es único.

(18) (a) Dar la definición de ínfimo.
  (b) Demostrar que si A es un subconjunto acotado inferiormente de $\mathbb{R}$ entonces A posee ínfimo e $\inf A$ es único.

CAPíTULO 2

Topología de la recta.

1. Intervalos. Conjuntos abiertos.

Definición 2.1. Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$ entonces

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\},$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\},$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\},$$

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\},$$

etc.

Observación 2.2. Recordemos que al conjunto (a, b) se le llama el *intervalo abierto con extremos a y b*, al conjunto $[a, b]$ se le llama *el intervalo cerrado con extremos a y b*, al conjunto $(a, b]$ se le llama *intervalo semiabierto*, etc.

Los conceptos de conjunto abierto y conjunto cerrado los vamos a estudiar con mucha más generalidad.

Definición 2.3. Sea $A \subset \mathbb{R}$. Se dice que A es *abierto* cuando para cada $x \in A$ existe $r > 0$ tal que el intervalo $(x - r, x + r)$ está contenido en A.

Ejemplo 2.4.

A continuación vamos a demostrar en detalle que el intervalo $(0, 1)$ es un conjunto abierto.

Sea $x \in (0, 1)$, debemos probar que existe $r > 0$ tal que

$$(x - r, x + r) \subset (0, 1).$$

Como $x \in (0, 1)$ tenemos que $0 < x < 1$, por lo tanto $1 - x > 0$. Sea $r > 0$ definido por

$$r = \frac{\min(x, 1 - x)}{2}.$$

Entonces tenemos que

$$
\begin{aligned}
x - r &\geq x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2} > 0, \\
x + r &\leq x + \frac{1-x}{2} = \frac{1+x}{2} < \frac{1+1}{2} = 1.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto el intervalo $(x-r, x+r)$ está contenido en $(0,1)$.

Para ilustrar mejor la situación, veamos desde un punto de vista geométrico lo que hemos hecho.

Por la forma en que hemos escogido r tenemos que

$$
r = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si } \ 0 < x \leq \dfrac{1}{2}, \\[2ex] \dfrac{1-x}{2} & \text{si } \ \dfrac{1}{2} < x < 1. \end{cases}
$$

Por lo tanto, en el caso $0 < x \leq 1/2$, tenemos que r es la mitad de la distancia de x a 0 y el intervalo $(x-r, x+r)$ luce como en el siguiente dibujo.

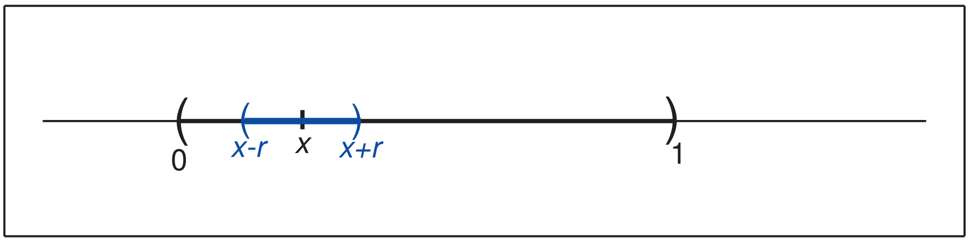

Figura 2.1. Caso $0 < x \leq 1/2$

En el caso $1/2 < x < 1$, tenemos que r es la mitad de la distancia de x a 1 y el intervalo $(x-r, x+r)$ luce como en el siguiente dibujo.

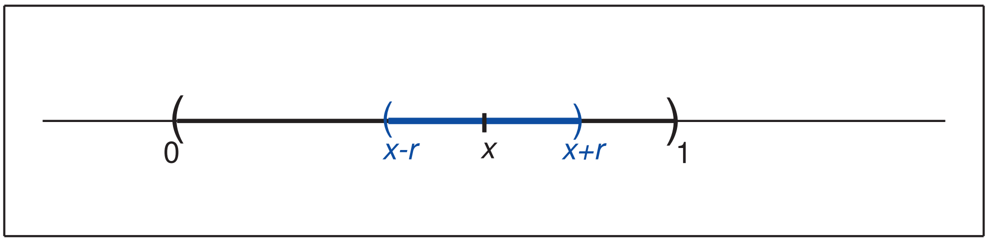

Figura 2.2. Caso $1/2 < x < 1$

EJEMPLO 2.5. A continuación vamos a demostrar en detalle que el intervalo $[0,1]$ no es un conjunto abierto.

Para esto debemos verificar que existe un punto $x \in [0,1]$ tal que, cualquiera que sea $r > 0$, el intervalo $(x-r, x+r)$ no está contenido en $[0,1]$.

Un punto que nos sirve es $x = 1$, ya que si $r > 0$ entonces el punto $1 + r/2$ pertenece al intervalo $(1-r, 1+r)$ y no pertenece a $[0,1]$.

El siguiente dibujo nos ilustra esta situación.

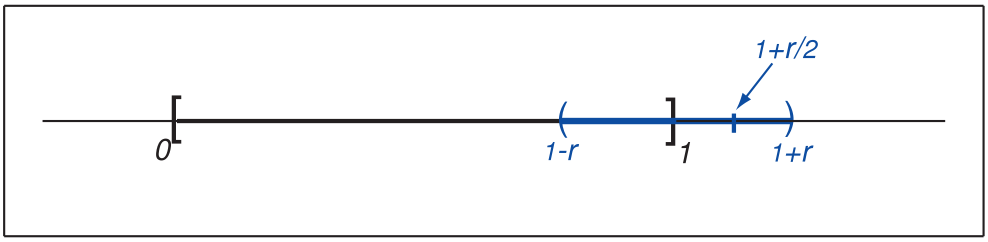

FIGURA 2.3.

EJERCICIO 2.6.

(1) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Demostrar que el intervalo (a,b) es un conjunto abierto. Demostrar que los intervalos $[a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$ no son conjuntos abiertos.
(2) Sea $a \in \mathbb{R}$. Demostrar que los intervalos $(-\infty, a)$ y $(a, +\infty)$ son conjuntos abiertos. Demostrar que los intervalos $(-\infty, a]$ y $[a, +\infty)$ no son conjuntos abiertos.
(3) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Demostrar que el conjunto $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ es abierto.
(4) Demostrar que el conjunto vacío es abierto.

DEFINICIÓN 2.7. Si $x \in \mathbb{R}$, un *entorno* V de x es un abierto $V \subset \mathbb{R}$ tal que $x \in V$.

2. Punto de acumulación de un conjunto.

DEFINICIÓN 2.8. Sea $A \subset \mathbb{R}$. Se dice que $p \in \mathbb{R}$ es un *punto de acumulación* de A cuando para todo $r > 0$ se tiene que

$$A \cap ((p-r, p+r) - \{p\}) \neq \emptyset.$$

Nota: A veces se usa el término *punto límite* en vez de punto de acumulación.

EJEMPLO 2.9. El punto 2 es un punto de acumulación del intervalo $(1, 2)$.

PROPOSICIÓN 2.10. *Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $p \in \mathbb{R}$. Entonces p es un punto de acumulación de A si y sólo si para cada $r > 0$ existe un punto $a_o \in A$ tal que*

$$0 < |p - a_o| < r.$$

La demostración queda como ejercicio.

TEOREMA 2.11. *Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $p \in \mathbb{R}$.*

Entonces p es un punto de acumulación de A si y sólo si todo entorno de p contiene infinitos puntos de A.

DEMOSTRACIÓN.

($\Rightarrow$) Supongamos existe un entorno V de p tal que V contiene una cantidad finita de puntos de A, entonces existen $q_1, q_2, \ldots, q_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$A \cap V \subset \{p, q_1, q_2, \ldots, q_n\}.$$

Sea

$$r = \text{mín}\{|p - q_1|, |p - q_2|, \ldots, |p - q_n|\}.$$

Entonces

$$(p - r, p + r) \cap A \subset \{p\}.$$

Luego

$$A \cap ((p - r, p + r) - \{p\}) = \emptyset.$$

Es decir, p no es punto de acumulación de A.

Por lo tanto, si p es punto de acumulación de A entonces todo entorno de p contiene infinitos puntos de A.

($\Leftarrow$) Dado $r > 0$ sea $V = (p - r, p + r)$, entonces V es un entorno de p.

Por hipótesis V contiene infinitos puntos de A. Luego existe $a_0 \in A$ tal que $a_0 \neq p$ y $a_0 \in V$. De donde

$$a_0 \in ((p - r, p + r) - \{p\}).$$

De donde

$$A \cap ((p - r, p + r) - \{p\}) \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, p es punto de acumulación de A. □

Corolario 2.12. *Un conjunto finito no tiene puntos de acumulación.*

Observación 2.13. Es importante aclarar que el hecho de que p sea un punto de acumulación de A no implica que p está en A, por ejemplo 2 es punto de acumulación de $(1,2)$ y sin embargo $2 \notin (1,2)$.

3. Conjuntos cerrados.

Definición 2.14. Dado un subconjunto A de $\mathbb{R}$ decimos que A es *cerrado* cuando A contiene todos sus puntos de acumulación.

Dado un subconjunto A de $\mathbb{R}$ su *complemento* es

$$A^c = \mathbb{R} - A = \{x \in \mathbb{R} : x \notin A\}$$

Teorema 2.15. *Sea $A \subset \mathbb{R}$.*
Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) *A contiene todos sus puntos de acumulación.*
(ii) *A^c es abierto.*

Demostración. Sea $p \in \mathbb{R}$.
Supongamos (i). Sea $p \in A^c$, entonces $p \notin A$. Por hipótesis, p no es un punto de acumulación de A.
Luego existe un entorno V de p tal que $V \cap A = \emptyset$, de donde $V \subset A^c$.
Por lo tanto A^c es abierto.

Supongamos (ii). Si $p \notin A$ entonces $p \in A^c$.
Como A^c es abierto entonces existe un entorno V de p tal que $V \subset A^c$. Luego $V \cap A = \emptyset$. Por lo tanto p no puede ser punto de acumulación de A.

$\square$

Corolario 2.16. *Sea $A \subset \mathbb{R}$. Entonces A es cerrado si y sólo si A^c es abierto.*

OBSERVACIÓN 2.17. Algunos autores dan como definición de cerrado la siguiente: A es cerrado si A^c es abierto. Por el resultado anterior este otro tratamiento es completamente equivalente.

Son ejemplos de subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}$, cualquier intervalo de la forma $[a, b]$, $[4, 5] \cup [-1, 0]$ y el conjunto vacío.

Los conjuntos [1,2) y (3,5] no son ni abiertos ni cerrados.

Es importante destacar que, tal como lo muestra el último ejemplo, existen conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados.

OBSERVACIÓN 2.18. Los conjuntos $\mathbb{R}$ y $\emptyset$ son tanto abiertos como cerrados.

4. Conjuntos compactos.

DEFINICIÓN 2.19. Sea $A \subset \mathbb{R}$. Se dice que A es *compacto* cuando A es cerrado y acotado.

(En el curso de topología se encontrarán con otra definición de compacto, que en el caso de $\mathbb{R}$ es equivalente a la anterior)

EJEMPLO 2.20.

(i) $[0, 1]$ es compacto.
(ii) $\{1\}$ es compacto.
(iii) $(2, 4]$ no es compacto.
(iv) $[0, +\infty)$ no es compacto
(v) $\mathbb{R}$ no es compacto.

5. Conjuntos conexos.

DEFINICIÓN 2.21. Sea C un subconjunto de $\mathbb{R}$. Se dice que C es *disconexo* cuando existen dos conjuntos abiertos A y B tales que

(i) A y B son disjuntos ($A \cap B = \emptyset$),
(ii) $A \cap C \neq \emptyset$,
(iii) $B \cap C \neq \emptyset$,
(iv) $C \subset A \cup B$.

EJEMPLO 2.22. $C = [-7,-3) \cup (4,6)$ es disconexo. Para probarlo podemos tomar $A = (-\infty, 0)$, $B = (2, +\infty)$

DEFINICIÓN 2.23. Sea C un subconjunto de $\mathbb{R}$. Se dice que C es *conexo* si C no es disconexo, es decir, si no existen dos conjuntos abiertos A y B tales que

(i) A y B son disjuntos ($A \cap B = \emptyset$),
(ii) $A \cap C \neq \emptyset$,
(iii) $B \cap C \neq \emptyset$,
(iv) $C \subset A \cup B$.

EJEMPLO 2.24.

(i) $\mathbb{R}$ es conexo.
(ii) $\{1\}$ es conexo
(iii) $(2, 4]$ es conexo
(iv) $(-1, 0) \cup (0, 1)$ no es conexo
(v) $(-1, 2) \cup (0, 3)$ es conexo

TEOREMA 2.25. *Sea C un subconjunto de $\mathbb{R}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *C es conexo*
(ii) *C posee la siguiente propiedad: Si $x \in C$, $y \in C$ y $x < z < y$ entonces $z \in C$.*

DEMOSTRACIÓN.

Primero probaremos que (i) implica (ii). Supongamos que la propiedad falla para ciertos números x, y, z , es decir, $x \in C$, $y \in C$, $x < z < y$ pero $z \notin C$.

Tomemos $A = (-\infty, z)$, $B = (z, +\infty)$, de la Definición 2.23 es inmediato que C no es conexo.

Ahora probaremos que (ii) implica (i). Supongamos que C no es conexo. Entonces existen puntos $x, y \in C$, $x < y$ y existen dos conjuntos abiertos disjuntos A y B tales que $x \in A$, $y \in B$, $C \subset A \cup B$.

Sea $S = A \cap [x, y]$, y sea $z = \sup S$.

Como $y \in B$, A y B son disjuntos y B es abierto tiene que ser $z < y$.

Por lo tanto de ser cierto que $z \in A$ el hecho de que A es abierto implicaría que z no es cota superior de S. Luego $z \notin A$.

Como $x \in A$ y A es abierto se tiene que $x < z$.

De ser cierto que $z \in B$ el hecho de que B es abierto implicaría que z no es la menor cota superior de S. Por lo tanto $z \notin B$.

Como $C \subset A \cup B$ se tiene que $z \notin C$. Es decir, la propiedad falla.

Esto termina la demostración. $\square$

COROLARIO 2.26. *Los subconjuntos conexos de* $\mathbb{R}$ *son los intervalos, es decir, un subconjunto* C *de* $\mathbb{R}$ *es conexo si y sólo si* C *tiene la siguiente forma:*

$$(-\infty, b), (-\infty, b], (a, +\infty), [a, +\infty), (-\infty, +\infty), (a, b), [a, b), (a, b], [a, b]$$

(a *y* b *son números reales tales que* $a \leq b$*).*

La demostración de la siguiente proposición es sencilla. Hágala como ejercicio.

PROPOSICIÓN 2.27. *La unión de una familia de subconjuntos conexos de* $\mathbb{R}$ *que tienen un punto común es un conjunto conexo.*

Si $X \subset \mathbb{R}$ y $x \in X$, por la proposición anterior es claro que, la unión de todos los subconjuntos conexos de X que contienen a x es un conjunto conexo, contenido en X. Es claro que éste es el más grande de todos los subconjuntos de X que son conexos y que contienen a x.

DEFINICIÓN 2.28. Sea $X \subset \mathbb{R}$, x un elemento de X. El *componente conexo* de x en X es el mayor subconjunto conexo de X que contiene a x.

DEFINICIÓN 2.29. Sea $X \subset \mathbb{R}$. Las *componentes conexas* de X son las componentes conexas de sus elementos.

EJEMPLO 2.30. El conjunto $(-1, 0) \cup \{2\} \cup [4, 5)$ tiene tres componentes conexas que son los conjuntos: $(-1, 0)$, $\{2\}$ y $[4, 5)$.

Aparte de las referencias dadas en el programa una buena referencia para estudiar y ampliar esta parte de la materia es el libro de Juan Horváth, Introducción a la topología general ([**6**])

Ejercicios.
Topología de la recta.

(1) (a) Demostrar que entre dos números racionales existe un número irracional.
(b) Demostrar que entre dos números racionales existen infinitos números irracionales.
(c) Demostrar que entre dos números irracionales existe un número racional.
(d) Demostrar que entre dos números irracionales existen infinitos números racionales.

(2) ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ son abiertos? ¿Cuáles son cerrados? ¿Cuáles son compactos?.
(a) $(0,1)$.
(b) $[0,1]$.
(c) $(0,1) \cup \{2,3\}$.
(d) $\{1,2\}$.
(e) $(0,2) \cup \{1\}$.
(f) $\mathbb{Q}$.
(g) $\mathbb{Z}$.
(h) $\mathbb{Q} \cap [0,2]$.
(i) $(-\infty, 5]$.
(j) $(1, +\infty) \cap \mathbb{N}$.
(k) El conjunto de los números irracionales.
(l) El conjunto de los números irracionales intersectado con $[0,1]$.
(m) $(0, +\infty)$
(n) $\{x \in \mathbb{R} : \; x^2 < 2\}$
(o) $\{x \in \mathbb{Q} : \; x^2 < 2\}$

(3) (a) Demostrar que la unión de una familia arbitraria de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ es un conjunto abierto.
(b) Demostrar que la intersección de una familia finita de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ es un conjunto abierto.
(c) Mostrar, mediante un ejemplo, que puede ocurrir que la intersección de una familia infinita de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ no sea un conjunto abierto.

(4) (a) Demostrar que la intersección de una familia arbitraria de subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}$ es un conjunto cerrado.
(b) Demostrar que la unión de una familia finita de subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}$ es un conjunto cerrado.
(c) Mostrar, mediante un ejemplo, que puede ocurrir que la unión de una familia infinita de subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}$ no sea un conjunto cerrado.

(5) Hallar el conjunto de los puntos de acumulación de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$.

(a) $\mathbb{R}$.

(b) $\left\{1 - \dfrac{1}{n} : n = 1, 2, \dots\right\}$.

(c) $\left\{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n : n = 1, 2, \dots\right\}$.

(d) $\{\sqrt[n]{n} : n = 1, 2, \dots\}$.

(e) Los conjuntos que aparecen en el ejercicio 2.

(6) Construir un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$ que tenga exactamente tres puntos de acumulación.

(7) Sea A' el conjunto de los puntos de acumulación del conjunto A. Demostrar que A' es cerrado.

(8) ¿Es la unión de conjuntos conexos un conjunto conexo? ¿Es la intersección de conjuntos conexos un conjunto conexo?

(9) Demostrar que los únicos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que son a la vez abiertos y cerrados son $\mathbb{R}$ y $\emptyset$.

(10) Demostrar que cada componente conexa de un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ es un conjunto abierto (y por lo tanto un intervalo abierto).

(11) (*) Demostrar que todo subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ es la unión de una cantidad a lo sumo numerable de intervalos abiertos disjuntos.

(12) (*) Se dice que un números real a es algebraico si a es raíz de una ecuación de la forma

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_0 = 0$$

donde $a_0, \ldots, a_n$ son números enteros.

Demostrar que el conjunto de los números algebraicos es numerable.

CAPíTULO 3

Sucesiones.

1. Definiciones básicas.

La idea de sucesión en $\mathbb{R}$ es la de una lista de puntos de $\mathbb{R}$.

Son ejemplos de sucesiones:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$$

$$2, 4, 6, 8, 10, \ldots$$

$$1, 4, 9, 25, 36, \ldots$$

$$1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$$

$$1, 10, 100, 1{,}000, 10{,}000, \ldots$$

$$1, -1, 1, -1, 1, \ldots$$

Lo importante acerca de una sucesión es que a cada número natural n le corresponde un punto de $\mathbb{R}$, por esto damos la siguiente definición.

Definición 3.1. Una *sucesión* es una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$.

Si $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es una sucesión en vez de escribir $a(1), a(2), a(3), \ldots$ suele escribirse

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

La misma sucesión suele designarse mediante un símbolo tal como $\{a_n\}$, (a_n) ó $\{a_1, a_2, \ldots\}$. También usaremos $\{x_n\}$, (x_n) ó $\{x_1, x_2, \ldots\}$.

Ejemplo 3.2. La *sucesión de Fibonacci* $\{a_n\}$ está definida por

$$a_1 = a_2 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ para } n \geq 3.$$

Esta sucesión fué descubierta por Fibonacci (1175-1250. aprox.) en relación con un problema de conejos. Fibonacci supuso que una pareja de conejos criaba una nueva pareja cada mes y que después de dos meses cada nueva pareja se comportaba del mismo modo. El número a_n de parejas nacidas en el n-ésimo mes es $a_{n-1} + a_{n-2}$, puesto que nace una pareja por cada pareja nacida en el mes anterior, y además cada pareja nacida hace dos meses produce ahora una pareja nueva.

Una sucesión, al igual que toda función, tiene una representación gráfica. Por ejemplo, sean

$$\alpha_n = n$$
$$\beta_n = (-1)^n$$
$$\gamma_n = \frac{1}{n}$$

Las gráficas de $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ y $\{\gamma_n\}$ son las siguientes:

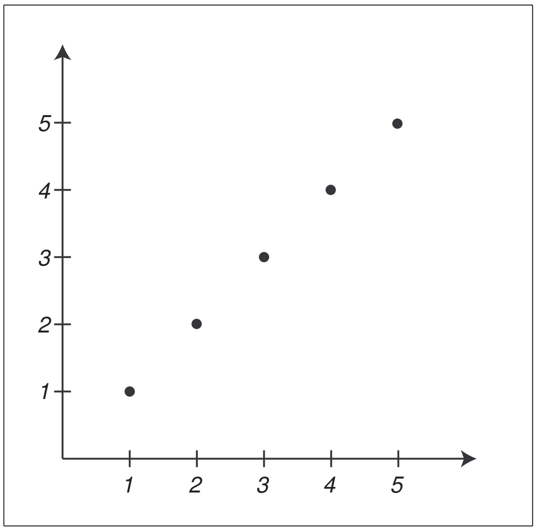

FIGURA 3.1. $\{\alpha_n\}$

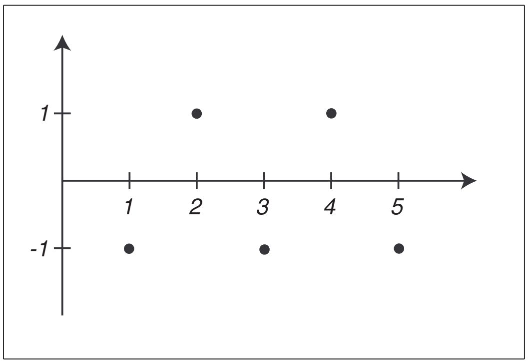

FIGURA 3.2. $\{\beta_n\}$

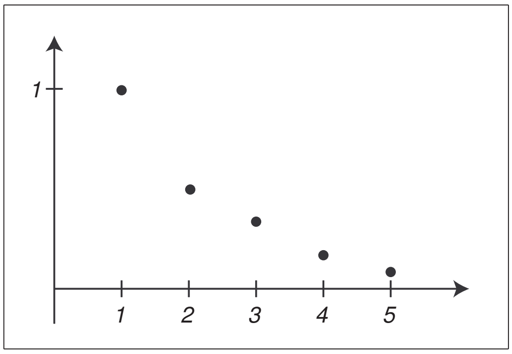

Figura 3.3. $\{\gamma_n\}$

Sin embargo se obtiene una mejor representación de una sucesión marcando los puntos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sobre una recta:

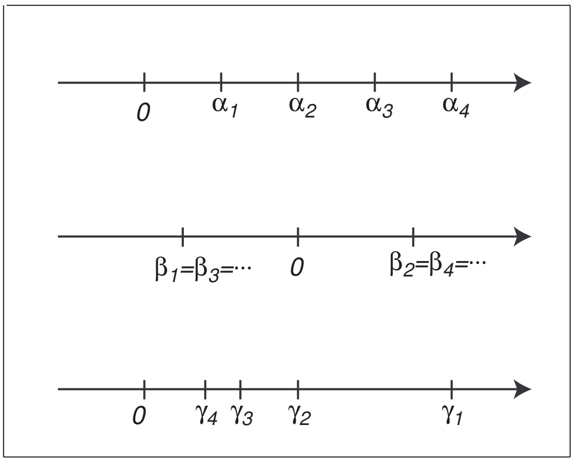

Figura 3.4.

Este tipo de diagramas nos indican "hacia donde va" la sucesión.

Definición 3.3. Una sucesión $\{x_n\}$ es *acotada* si $\{x_1, x_2, \ldots\}$ es un conjunto acotado. Es decir, si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|x_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. Convergencia.

Definición 3.4. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales. La sucesión $\{x_n\}$ *converge a* $x \in \mathbb{R}$, o *límite de* $\{x_n\}$ *es* x si:

Para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $|x_n - x| < \varepsilon$.

Esto se abrevia mediante

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ es *convergente* si existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\{x_n\}$ converge a x; se dice que es *divergente* (o que *diverge*) si no es convergente.

Observación 3.5. La definición de límite tiene la siguiente interpretación geométrica:

La sucesión $\{x_n\}$ converge a x si, dado cualquier intervalo centrado en x, existe un "lugar", N, a partir del cual todos los términos de la sucesión se encuentran en el intervalo dado.

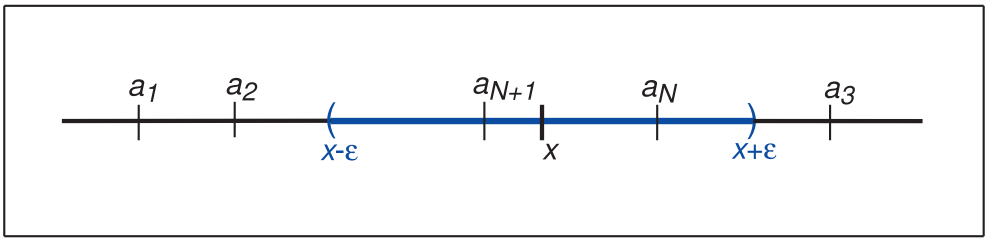

Figura 3.5.

Ejemplo 3.6. Consideremos la sucesión

$$a_n = \frac{1}{n},$$

demostraremos que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Dado $\varepsilon > 0$, debemos demostrar que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$.

Notemos que

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{si y sólo si} \quad n > \frac{1}{\varepsilon},$$

Como $1/\varepsilon$ no necesariamente es un número entero, tomando

$$N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$$

obtenemos el resultado.

TEOREMA 3.7 (unicidad del límite). *Una sucesión convergente tiene uno y sólo un límite.*

DEMOSTRACIÓN. Sea (a_n) una sucesión convergente y supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

y que también

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b.$$

Para demostrar la unicidad del límite debemos probar que

$$a = b.$$

Vamos a suponer que $a \neq b$ y vamos a llegar a una contradicción. Si $a \neq b$ entonces tenemos que $|a-b| > 0$. Consideremos

$$\varepsilon = \frac{|a-b|}{2}.$$

Como $|a-b| > 0$ tenemos que $\varepsilon > 0$ y de la definición de límite podemos concluir que

$$\text{existe } N_1 \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n \geq N_1 \text{ entonces } |a_n - a| < \frac{|a-b|}{2}$$

$$\text{existe } N_2 \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n \geq N_2 \text{ entonces } |a_n - b| < \frac{|a-b|}{2}$$

Consideremos $n_o \geq \max\{N_1, N_2\}$. Utilizando la desigualdad triangular obtenemos

$$|a-b| \leq |a - a_{n_o}| + |a_{n_o} - b| < |a-b|,$$

de donde obtenemos que

$$|a-b| < |a-b|,$$

lo cual es una contradicción, por lo tanto

$$a = b.$$

$\square$

PROPOSICIÓN 3.8. *Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $p \in \mathbb{R}$. Entonces p es un punto de acumulación de A si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\} \subset A$ tal que*

(a) $\lim_{n\to\infty} x_n = p$.

(b) $x_i \neq x_j$ *para* $i \neq j$.

Demostración.

Supongamos que p es un punto de acumulación de A.

Por la Proposición 2.10, aplicada con $r = 1$ tenemos que existe $x_1 \in A$ tal que

$$0 < |x_1 - p| < 1.$$

Volvemos a aplicar nuevamente la Proposición 2.10, pero con $r = \text{mín}(|x_1 - p|, 1/2)$ y obtenemos que existe $x_2 \in A$ tal que

$$0 < |x_2 - p| < \text{mín}(|x_1 - p|, 1/2).$$

Por la desigualdad anterior tenemos que $x_1 \neq x_2$ y $0 < |x_2 - p| < 1/2$.

Nuevamente por la Proposición 2.10, pero con $r = \text{mín}(|x_2 - p|, 1/3)$, obtenemos que existe $x_3 \in A$ tal que

$$0 < |x_3 - p| < \text{mín}(|x_2 - p|, 1/3).$$

Por la desigualdad anterior tenemos que $x_3 \notin \{x_1, x_2\}$ y $0 < |x_3 - p| < 1/3$.

Continuando de esta manera obtenemos una sucesión que satisface (a) y (b).

La otra parte de la demostración queda como ejercicio.

□

Como ejercicio demostrar el siguiente resultado.

Proposición 3.9. *Sea* $A \subset \mathbb{R}$. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) A *es cerrado*

(ii) *Si* $\{x_n\} \subset A$ *es una sucesión convergente entonces* $\text{lím}_{n\to\infty} x_n \in A$.

3. Sucesiones de Cauchy.

Definición 3.10. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales. La sucesión $\{x_n\}$ es *de Cauchy* si:

Para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$ entonces $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Geométricamente esto quiere decir que a medida que n crece los términos de la sucesión se van juntando.

Proposición 3.11. *Si* $\{x_n\}$ *es una sucesión de Cauchy entonces* $\{x_n\}$ *es acotada.*

Demostración. Para $\varepsilon = 1$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq N$ se cumple que $|x_n - x_m| < 1$.

Entonces, para todo $n \geq N$

$$|x_n| - |x_N| \leq |x_n - x_N| < 1.$$

De donde, para todo $n \geq N$

$$|x_n| < |x_N| + 1.$$

Sea

$$M = \text{máx}\{|x_1|, \dots, |x_N|, |x_N| + 1\}.$$

Entonces $|x_n| \leq M$ para todo $n \geq 1$. □

Proposición 3.12. *Si $\{x_n\}$ es una sucesión convergente entonces $\{x_n\}$ es de Cauchy.*

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión convergente. Entonces existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\text{lím}_{n\to\infty} x_n = x$. Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $|x_n - x| < \varepsilon/2$.

Luego, para $n, m \geq N$

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Este resultado puede servir para demostrar que una sucesión no es convergente, tal como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.13. Sea $x_n = (-1)^n$. Dado $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$|x_n - x_{n+1}| = 2.$$

Así que $\{x_n\}$ no es una sucesión de Cauchy. Por la Proposición anterior $\{x_n\}$ no converge.

Proposición 3.14. *Si $\{x_n\}$ es una sucesión convergente entonces $\{x_n\}$ es acotada.*

Demostración. Como $\{x_n\}$ es una sucesión convergente por la Proposición 3.12 $\{x_n\}$ es de Cauchy, de la Proposición 3.11 sigue que $\{x_n\}$ es acotada. □

4. Sucesiones monótonas y el axioma del supremo.

DEFINICIÓN 3.15. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales.
Se dice que $\{x_n\}$ está *acotada superiormente* si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq M$.
Se dice que $\{x_n\}$ está *acotada inferiormente* si existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \geq m$.

EJEMPLO 3.16.
Si $x_n = 1/n$, entonces la sucesión $\{x_n\}$ está acotada superiormente por $M = 1$.
Si $x_n = n$, entonces la sucesión $\{x_n\}$ está acotada inferiormente por $m = 1$.

De la Definición 3.3 sigue inmediatamente lo siguiente.

PROPOSICIÓN 3.17. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión, $\{x_n\}$ es acotada si y sólo si $\{x_n\}$ está acotada superiormente e inferiormente.*

DEFINICIÓN 3.18. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales.
Se dice que $\{x_n\}$ es *monótona creciente* si $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Se dice que $\{x_n\}$ es *monótona decreciente* si $x_{n+1} \leq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

EJEMPLO 3.19.
Si $x_n = n$, entonces la sucesión $\{x_n\}$ es monótona creciente.
Si $x_n = 1/n$, entonces la sucesión $\{x_n\}$ es monótona decreciente.

Una importante consecuencia de (P13) es el siguiente resultado.

TEOREMA 3.20.

(i) *Toda sucesión monótona creciente y acotada superiormente es convergente.*
(ii) *Toda sucesión monótona decreciente y acotada inferiormente es convergente.*

DEMOSTRACIÓN. Demostraremos (i), la prueba de (ii) es completamente análoga.
Sea $\{x_n\}$ una sucesión monótona creciente y acotada. Sea

$$A = \{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$$

entonces A es un conjunto acotado superiormente. Del axioma (P13) sigue que A tiene supremo. Sea $x = \sup\{x_n\}$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $x - \varepsilon < x$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x - \varepsilon < x_N$.

Como $\{x_n\}$ es monótona creciente se tiene que para $n \geq N$

$$x - \varepsilon < x_N \leq x_n \leq x < x + \varepsilon.$$

Es decir $|x_n - x| < \varepsilon$ si $n \geq N$. □

5. Teorema de Bolzano-Weierstrass.

Definición 3.21. Si $\{x_n\}$ es una sucesión, una *subsucesión* de $\{x_n\}$ es una sucesión de la forma

$$\{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots\}$$

donde $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

La subsucesión la denotaremos con $\{x_{n_k}\}$.

Proposición 3.22. *Toda subsucesión de una sucesión acotada es acotada.*

La demostración de esta proposición queda como ejercicio.

Definición 3.23. Sea n_0 un número natural. Diremos que n_0 es *punto cumbre* de una sucesión $\{x_n\}$ cuando $x_n < x_{n_0}$ para todo $n > n_0$.

Por ejemplo, en la sucesión de la figura los números 2 y 7 son puntos cumbres.

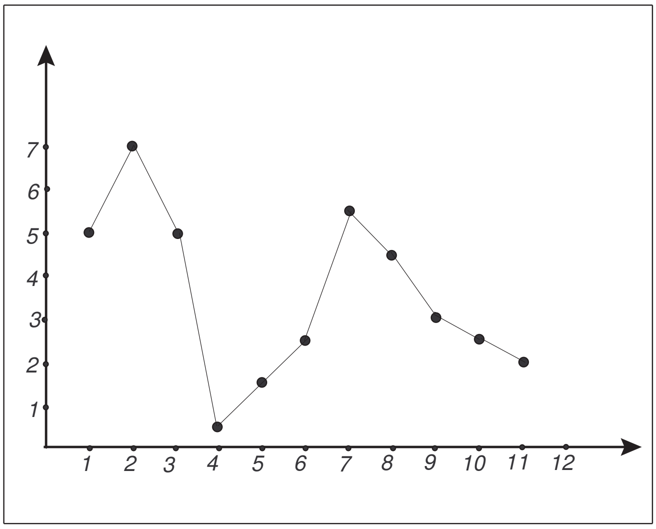

Figura 3.6. Puntos cumbre

LEMA 3.24. *Toda sucesión contiene una subsucesión que es ó monótona creciente ó monótona decreciente.*

DEMOSTRACIÓN. Se pueden presentar dos casos.

Caso 1: La sucesión tiene infinitos puntos cumbres.
En este caso sean $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ los puntos cumbres. Entonces

$$x_{n_1} > x_{n_2} > x_{n_3} > \dots$$

de modo que $\{x_{n_k}\}$ es la subsucesión (decreciente) buscada.

Caso 2: La sucesión tiene solamente un número finito de puntos cumbres.
En este caso sea n_1 un número natural mayor que todos los puntos cumbres.
Como n_1 no es un punto cumbre, existe $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_1} \leq x_{n_2}$.
Como n_2 no es un punto cumbre, existe $n_3 > n_2$ tal que $x_{n_2} \leq x_{n_3}$.
Continuando de esta forma se obtiene la subsucesión (monótona creciente) deseada.
□

TEOREMA 3.25 (Bolzano-Weierstrass). *Toda sucesión acotada contiene una subsucesión convergente.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada. Por el Lema 3.24 $\{x_n\}$ contiene una subsucesión monótona creciente o una subsucesión monótona decreciente. Llamémosla $\{x_{n_k}\}$.
Por la Proposición 3.22 la subsucesión $\{x_{n_k}\}$ es acotada.
Por lo tanto, del Teorema 3.20, se obtiene que la subsucesión $\{x_{n_k}\}$ es convergente. □

OBSERVACIÓN 3.26. Es claro que todo subconjunto infinito de $\mathbb{R}$ contiene una sucesión. Es por esto que una forma usual de enunciar el teorema de Bolzano-Weierstrass es la siguiente:
Todo subconjunto acotado e infinito de $\mathbb{R}$ tiene por lo menos un punto de acumulación.

6. Completitud de $\mathbb{R}$.

PROPOSICIÓN 3.27. *Si una sucesión es de Cauchy y tiene una subsucesión convergente entonces la sucesión original también converge.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy y $\{x_{n_k}\}$ una subsucesión tal que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

Sea $\varepsilon > 0$ entonces:

Existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N_1$ entonces $|x_n - x_m| < \varepsilon/2$.

Existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n_k \geq N_2$ entonces $|x_{n_k} - x| < \varepsilon/2$.

Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$. Si $n \geq N$, tomamos algún $n_k \geq N$ y obtenemos

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Luego $|x_n - x| < \varepsilon$.

Hemos probado que $\{x_n\}$ converge a x.

□

TEOREMA 3.28. *El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales es completo, es decir, una sucesión de números reales es convergente si y sólo si es de Cauchy.*

DEMOSTRACIÓN. Ya fue probado que toda sucesión convergente es de Cauchy.

La otra parte de la demostración es como sigue:

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy. Entonces $\{x_n\}$ es acotada. Por el Teorema 3.25 $\{x_n\}$ contiene una subsucesión convergente.

Por la Proposición anterior tenemos que $\{x_n\}$ converge.

□

7. Teorema de Heine-Borel.

TEOREMA 3.29 (Heine-Borel). *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$.*

Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) *A es compacto.*

(ii) *Todo subconjunto infinito de A tiene un punto de acumulación en A.*

DEMOSTRACIÓN.

Supongamos (i).

Sea S un subconjunto infinito de A.

Como A es acotado, claramente S tiene que ser acotado.

Por el Teorema de Bolzano-Weierstrass (ver lo dicho en la Observación 3.26) tenemos que S tiene un punto de acumulación.

Por ser A cerrado tenemos que este punto de acumulación debe estar en A. Es decir, S tiene un punto de acumulación en A.

Supongamos (ii).

A debe ser cerrado puesto que (ii) implica que A contiene todos sus puntos de acumulación.

Supongamos que A no es acotado. Entonces existe una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de A $|x_n| \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\lim_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$.

El conjunto infinito formado por los términos de esta sucesión no puede tener un punto de acumulación que esté en A. Esto contradice (ii). Por lo tanto A debe ser acotado.

Hemos probado que A es cerrado y acotado. Luego A es compacto. □

8. Operaciones con sucesiones.

TEOREMA 3.30. *Sean $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ sucesiones convergentes.*
Sean $x = \lim_{n\to+\infty} x_n$, $y = \lim_{n\to+\infty} y_n$. Entonces:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n + y_n = x + y.$$

DEMOSTRACIÓN. Dado $\varepsilon > 0$ existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que

(a) si $n \geq N_1$ entonces $|x_n - x| < \varepsilon/2$.
(b) si $n \geq N_2$ entonces $|y_n - y| < \varepsilon/2$.

Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$. Si $n \geq N$ entonces

$$\begin{aligned}|(x_n + y_n) - (x + y)| &= |(x_n - x) + (y_n) - y)| \\ &\leq |x_n - x| + |y_n - y| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

De donde

$$\lim_{n\to+\infty} x_n + y_n = x + y.$$

□

TEOREMA 3.31. *Sean $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ sucesiones convergentes.*

Sean $x = \lim_{n\to+\infty} x_n$, $y = \lim_{n\to+\infty} y_n$. *Entonces:*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n \cdot y_n = x \cdot y.$$

DEMOSTRACIÓN. Como $\{x_n\}$ es convergente entonces es acotada . Sea $M > 0$ una cota superior de $\{x_n\}$.

Dado $\varepsilon > 0$ sea $\gamma = \varepsilon/(M + |y|)$ entonces $\gamma > 0$. Por lo tanto existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que

(a) si $n \geq N_1$ entonces $|x_n - x| < \gamma$.
(b) si $n \geq N_2$ entonces $|y_n - y| < \gamma$.

Sea $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$. Si $n \geq N$ entonces

$$\begin{aligned} |(x_n \cdot y_n) - (x \cdot y)| &= |x_n \cdot y_n - x_n \cdot y + x_n \cdot y - x \cdot y| \\ &\leq |x_n||y_n - y| + |y||x_n - x| \\ &< M\gamma + |y|\gamma = \varepsilon. \end{aligned}$$

De donde

$$\lim_{n\to+\infty} x_n \cdot y_n = x \cdot y.$$

□

LEMA 3.32. *Sea* $\{y_n\}$ *una sucesión convergente. Sean* $y = \lim_{n\to+\infty} y_n$.
Si $y \neq 0$, *entonces existen* $m \in \mathbb{R}$ *y* $N_0 \in \mathbb{N}$ *tales que*

$$0 < m \leq |y_n|$$

para todo $n \geq N_0$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\varepsilon = |y|/2$ entonces existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N_0$ implica $|y_n - y| < |y|/2$.

Luego, para $n \geq N_0$

$$|y| - |y_n| \leq |y - y_n| < \frac{|y|}{2}.$$

De donde $|y_n| > |y|/2 > 0$ para $n \geq N_0$.

□

TEOREMA 3.33. *Sean $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ sucesiones convergentes.*
Sean $x = \lim_{n\to+\infty} x_n$, $y = \lim_{n\to+\infty} y_n$. Si $y_n \neq 0$ para todo n, $y \neq 0$, entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}.$$

DEMOSTRACIÓN. Por el lema anterior existen $m \in \mathbb{R}$ y $N_0 \in \mathbb{N}$ tales que

$$0 < m \leq |y_n|$$

para todo $n \geq N_0$.

Dado $\varepsilon > 0$ sea $\gamma = \varepsilon m|y|/(|x| + |y|)$ entonces $\gamma > 0$. Por lo tanto existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que

(a) si $n \geq N_1$ entonces $|x_n - x| < \gamma$.
(b) si $n \geq N_2$ entonces $|y_n - y| < \gamma$.

Sea $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$. Si $n \geq N$ entonces

$$\begin{aligned} \left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}\right| &= \left|\frac{yx_n - xy_n}{y_n y}\right| \\ &= \frac{|yx_n - yx + xy - xy_n|}{|y_n||y|} \\ &< \frac{|y|\gamma + |x|\gamma}{m|y|} = \varepsilon. \end{aligned}$$

De donde

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}.$$

□

9. Límites infinitos.

DEFINICIÓN 3.34. Sea $\{x_n\}$ una sucesión.

Diremos que $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ si para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $x_n \geq \lambda$.

Diremos que $\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$ si para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $x_n \leq \lambda$.

Es importante notar que las sucesiones que tienen límite infinito **no son convergentes**.

10. Límite superior y límite inferior.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión. Sea $E = E_{\{x_n\}}$ el conjunto de los x tales que existe una subsucesión de $\{x_n\}$ con límite x (nota: puede ocurrir que $+\infty$ ó $-\infty$ sean elementos de E).

Ejemplo 3.35.
Sea $\{x_n\}$ la sucesión dada por:

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 3k \text{ para un } k \in \mathbb{N} \\ 1/n & \text{si } n = 3k+1 \text{ para un } k \in \mathbb{N} \\ n^2 & \text{si } n = 3k+2 \text{ para un } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Entonces

$$E = E_{\{x_n\}} = \{0, +\infty\}.$$

Observe que $\inf E = 0$ y $\sup E = +\infty$.

Ejemplo 3.36.
Sea $\{x_n\}$ la sucesión dada por:

$$x_n = \begin{cases} -1 & \text{si } n = 5k \text{ para un } k \in \mathbb{N} \\ 1/n & \text{si } n = 5k+1 \text{ para un } k \in \mathbb{N} \\ n^2 & \text{si } n = 5k+2 \text{ para un } k \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{si } n = 5k+3 \text{ para un } k \in \mathbb{N} \\ n & \text{si } n = 5k+4 \text{ para un } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Entonces

$$E = E_{\{x_n\}} = \{-1, 0, 1, +\infty\}.$$

Observe que $\inf E = -1$ y $\sup E = +\infty$.

Definición 3.37. El *límite superior* de $\{x_n\}$ es el supremo de E. Se denotará por

$$\limsup x_n \quad \text{ó} \quad \overline{\lim_{n\to+\infty}}\, x_n,$$

con la convención $\sup E = +\infty$ si $+\infty$ está en E.

DEFINICIÓN 3.38. El *límite inferior* de $\{x_n\}$ es el ínfimo de E. Se denotará por

$$\liminf x_n \ \text{ó} \ \varliminf_{n\to+\infty} x_n,$$

con la convención $\inf E = -\infty$ si $-\infty$ está en E.

EJEMPLO 3.39.

(i) Consideremos la sucesión 1, 0, -1, 1, 0, -1, ... En este caso el conjunto E es igual a $\{1, 0, -1\}$. El límite superior es 1 y el inferior es -1.

(ii) Consideremos la sucesión definida por $x_n = (-1)^n \cdot n$. En este caso el conjunto E es igual a $\{-\infty, +\infty\}$. El límite superior es $+\infty$ y el inferior $-\infty$.

(iii) Sea $\{x_n\}$ una sucesión en la que aparecen todos los números racionales. En este caso E es igual a $\mathbb{R}$. El límite superior es $+\infty$ y el inferior $-\infty$.

(iv) Si $\{x_n\}$ es una sucesión convergente entonces el límite superior y el límite inferior de $\{x_n\}$ coinciden y son iguales al límite de $\{x_n\}$.

Es claro que se cumple el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 3.40. *Sea* $\{x_n\}$ *una sucesión.*
Entonces

$$\liminf x_n \leq \limsup x_n.$$

TEOREMA 3.41. *Sea* $\{x_n\}$ *una sucesión.*
Existe $\lim_{n\to+\infty} x_n$ *si y sólo si* $\liminf x_n = \limsup x_n$.
En este caso $\lim_{n\to+\infty} x_n = \liminf x_n = \limsup x_n$.

DEMOSTRACIÓN.
Supongamos que existe $\lim_{n\to+\infty} x_n$ y llamémoslo x. Entonces $E = E_{\{x_n\}} = \{x\}$. Por lo tanto

$$\liminf x_n = \inf E = x = \sup E = \limsup x_n.$$

Veamos la otra implicación. Supongamos $\liminf x_n = \limsup x_n$.
Vamos a considerar el caso de una sucesión acotada. El otro caso quedará como ejercicio.
Sea

$$x = \liminf x_n = \limsup x_n.$$

Si la sucesión $\{x_n\}$ no converge a x, entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cada $N \in \mathbb{N}$ existe $n > N$ tal que $|x_n - x| \geq \varepsilon_0$.

Usando esto último se puede construir una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ tal que $|x_{n_k} - x| \geq \varepsilon_0$ para todo k.

Por el teorema de Bolzano-Weierstrass esta sucesión contiene una subsucesión convergente y por lo tanto existen dos elementos diferentes en E, lo que contradice la hipótesis.

$\square$

Observación 3.42. Una consecuencia inmediata de este teorema es que una sucesión acotada $\{x_n\}$ converge si y sólo si $\liminf x_n = \limsup x_n$.

Teorema 3.43. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada y sean $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ las sucesiones definidas por*

$$s_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}.$$

$$t_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}.$$

Entonces las sucesiones $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ son convergentes y

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \limsup x_n.$$

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = \liminf x_n.$$

Demostración. Sea

$$B_n = \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}.$$

Tenemos que $B_{n+1} \subset B_n$.

Por lo tanto $s_{n+1} \leq s_n$ y $t_n \leq t_{n+1}$.

De donde $\{s_n\}$ es monótona decreciente y $\{t_n\}$ es monótona creciente.

Claramente las sucesiones $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ son acotadas, por lo tanto estas sucesiones son convergentes.

Probaremos la igualdad en la que aparece el límite superior y queda como ejercicio probar la igualdad en la que aparece el límite inferior.

Sean

$$L = \lim_{n\to+\infty} s_n \qquad \text{y} \qquad \Lambda = \limsup x_n.$$

Veamos que $\Lambda \leq L$.

Como $s_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$ entonces $x_n \leq s_n$ para todo n.

Además dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $L - \varepsilon < s_n < L + \varepsilon$. Luego $x_n < L + \varepsilon$ si $n \geq N$.

De donde $\Lambda = \limsup x_n < L + \varepsilon$. Como ε es arbitrario y positivo entonces $\Lambda \leq L$.

Veamos que $\Lambda \geq L$.

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Como cada s_n es un supremo tenemos los siguiente:

Existe $n_1 > 1$ tal que $x_{n_1} \geq s_1 - \varepsilon$.

Existe $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_2} \geq s_{n_1+1} - \varepsilon$.

Existe $n_3 > n_2$ tal que $x_{n_3} \geq s_{n_2+1} - \varepsilon$.

De esta manera construimos una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ tal que $x_{n_{(k+1)}} \geq s_{n_k+1} - \varepsilon$. Esta sucesión $\{x_{n_k}\}$ contiene una subsucesión, que también es subsucesión $\{x_n\}$, convergente y cuyo límite tiene que ser mayor o igual que $\lim_{n\to+\infty} s_n - \varepsilon$.

Por lo tanto

$$\Lambda \geq \lim_{n\to+\infty} s_n - \varepsilon = L - \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario entonces $\Lambda \geq L$ y esto termina la demostración. □

Observación 3.44. Si $\{x_n\}$ una sucesión acotada tenemos que

$$\limsup x_n = \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} x_k.$$

En efecto, sabemos que $\{s_n\}$ es monótona decreciente y acotada. Luego

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \inf\{s_1, s_2, s_3, \dots\} = \inf_{n\geq 1} s_n.$$

Pero

$$s_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} = \sup_{k\geq n} x_k.$$

De donde

$$\limsup x_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \inf_{n\geq 1} s_n = \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} x_k.$$

Observación 3.45. Si $\{x_n\}$ una sucesión acotada tenemos que

$$\liminf x_n = \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} x_k.$$

En efecto, sabemos que $\{t_n\}$ es monótona creciente y acotada. Luego

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = \sup\{t_1, t_2, t_3, \dots\} = \sup_{n\geq 1} t_n.$$

Pero

$$t_n = \text{ínf}\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} = \inf_{k\geq n} x_k.$$

De donde

$$\liminf x_n = \lim_{n\to+\infty} t_n = \sup_{n\geq 1} t_n = \sup_{n\geq 1}\inf_{k\geq n} x_k.$$

11. El número e.

Definición 3.46.

$$e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}.$$

Aunque lo volveremos a estudiar más adelante, supondremos que el alumno sabe que la serie anterior converge.

Teorema 3.47.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Demostración. Sean

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \qquad x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Entonces

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = e.$$

Por el teorema del binomio

$$x_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\ \frac{1}{n^k} = 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\ \frac{1}{n^k}$$

Luego

$$\begin{aligned} x_n &= 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\ \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \\ &= 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\ \left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\ &= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\dots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$x_n \leq S_n \text{ para todo } n,$$

de donde

$$\limsup x_n \leq \limsup S_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = e.$$

Con esto obtenemos la primera desigualdad

$$\limsup x_n \leq e.$$

Veamos la otra desigualdad.

Si $n \geq m$,

$$x_n \geq 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right).$$

Luego

$$\begin{aligned}\liminf x_n &\geq \lim_{n\to+\infty} 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\\ &= 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{m!}\\ &= S_m.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$S_m \leq \liminf x_n \text{ para todo } m.$$

Haciendo $m \to +\infty$ obtenemos

$$e = \lim_{m\to+\infty} S_m \leq \liminf x_n$$

Del Teorema 3.41 se obtiene el resultado.

$\square$

Observación 3.48. La rapidez con que la serie

$$e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

converge puede ser estimada de la siguiente manera:

Si

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!},$$

entonces

$$
\begin{aligned}
e - S_n &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+3)(n+2)} + \frac{1}{(n+4)(n+3)(n+2)} + \dots \right) \\
&< \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots \right) \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} \right)^k \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} \right) \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+1}{n} \\
&= \frac{1}{n!n}.
\end{aligned}
$$

De donde

$$0 < e - S_n < \frac{1}{n!n} \tag{3.1}$$

Así que s_{10} aproxima a e con un error menor que 10^{-7}.

Esta última desigualdad también tiene un interés teórico, ya que nos permite establecer el siguiente resultado.

TEOREMA 3.49. *e es irracional*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que e es racional.
Entonces $e = p/q$, donde p y q son enteros positivos y $q \neq 0$.
Como $q \geq 1$ y por la desigualdad 3.1

$$0 < e - S_q < \frac{1}{q!q}.$$

Luego

$$0 < q!(e - S_q) < \frac{1}{q} \leq 1. \tag{3.2}$$

Sea

$$r = q!(e - S_q).$$

Ya sabemos que $0 < r < 1$.

Veremos otras propiedades del número r.

Sabemos que $q!$ es entero. Por la suposición inicial tenemos que

$$q!e = q!\frac{p}{q} = (q-1)!p.$$

De donde $q!e$ es un número entero.

Por otro lado

$$q!S_q = q!\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right).$$

De donde $q!S_q$ es un entero.

Juntando ambos hechos tenemos que $q!e - q!S_q$ es un entero. Es decir, r es un entero.

Hemos probado que existe un número entero r tal que $0 < r < 1$, lo cual es una contradicción.

□

Ejercicios.
Sucesiones.

(1) (a) Demostrar, a partir de la definición, que toda sucesión convergente es acotada.
(b) Dar un ejemplo de una sucesión acotada que no es convergente.

(2) Demostrar que toda sucesión monótona decreciente y acotada inferiormente es convergente.

(3) (a) Demostrar que si la sucesión $\{x_n\}$ converge entonces la sucesión $\{|x_n|\}$ también converge y
$$\lim_{n\to+\infty} |x_n| = \left|\lim_{n\to+\infty} x_n\right|.$$
(b) Dar un ejemplo de una sucesión divergente $\{x_n\}$ tal que $\{|x_n|\}$ converge.

(4) (a) Demostrar que si la sucesión $\{x_n\}$ converge entonces la sucesión $\{x_n^2\}$ también converge y
$$\lim_{n\to+\infty} x_n^2 = (\lim_{n\to+\infty} x_n)^2.$$
(b) Dar un ejemplo de una sucesión divergente $\{x_n\}$ tal que $\{x_n^2\}$ converge.

(5) ¿ Qué puede decirse de una sucesión convergente $\{a_n\}$ tal que $a_n \in \mathbb{Z}$ para todo n?

(6) Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones convergentes.

Demostrar que si $c \in \mathbb{R}$ entonces la sucesión $\{cx_n\}$ es convergente y
$$\lim_{n\to+\infty} c\,x_n = c \lim_{n\to+\infty} x_n.$$

(7) Conseguir una expresión más simple para la función
$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} (\lim_{k\to+\infty} (\cos(n!\pi x)\,)^{2k}), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(8) Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones tales que existen
$$\lim_{n\to+\infty} x_n \text{ y } \lim_{n\to+\infty} y_n.$$

Indicar cuales de las siguientes propiedades se cumplen, o bajo qué condiciones adicionales se cumplen:

(a) Si $c \in \mathbb{R}$ entonces $\lim_{n\to+\infty} c\,x_n = c \lim_{n\to+\infty} x_n$.

(b) $\lim_{n\to+\infty} x_n + y_n = \lim_{n\to+\infty} x_n + \lim_{n\to+\infty} y_n$.

(c) $\lim_{n\to+\infty} x_n \cdot y_n = \lim_{n\to+\infty} x_n \cdot \lim_{n\to+\infty} y_n$.

(d) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim_{n\to+\infty} x_n}{\lim_{n\to+\infty} y_n}$.

En caso de que afirme que la propiedad se cumple hacer la demostración. Si afirma que la propiedad no se cumple dar un contraejemplo.

(Utilizar las convenciones usuales $a + \infty = +\infty$, $a - \infty = -\infty$ si $a \in \mathbb{R}$, $a \cdot (+\infty) = +\infty$ si $a > 0$, etc.)

(9) (a) Demostrar que si $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$ entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = L.$$

(b) Dar un ejemplo de una sucesión $\{a_n\}$ tal que existe

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$

pero sin embargo no existe $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

(10) (a) Demostrar que si $0 < a < 2$ entonces $a < \sqrt{2a} < 2$.

(b) Demostrar que la sucesión

$$\sqrt{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\ \ldots$$

es convergente.

(c) Hallar el límite de la sucesión anterior.

(11) Demostrar o dar un contraejemplo:

(a) Si $\{x_n\}$ es una sucesión convergente tal que $\lim_{n\to+\infty} x_n > 0$ entonces $x_n > 0$ para todo n.

(b) Si $\{x_n\}$ es una sucesión convergente tal que $\lim_{n\to+\infty} x_n > 0$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > 0$ para todo $n \geq N$.

(c) Si $\{x_n\}$ es una sucesión convergente tal que $\lim_{n\to+\infty} x_n > 0$ entonces existen $r > 0$ en $\mathbb{R}$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $x_n > r$ para todo $n \geq N$.

(d) Si $\{x_n\}$ es una sucesión convergente tal que $\lim_{n\to+\infty} x_n \geq 0$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \geq 0$ para todo $n \geq N$.

(e) Si $\{x_n\}$ es una sucesión convergente tal que $a \leq x_n \leq b$ para todo n (a y b reales) entonces

$$a \leq \lim_{n\to+\infty} x_n \leq b.$$

(f) Si $\{x_n\}$ es una sucesión convergente tal que $a < x_n < b$ para todo n (a y b reales) entonces

$$a < \lim_{n\to+\infty} x_n < b.$$

(12) Hallar todas las subsucesiones convergentes de las sucesiones

(a) $1, -1, 1, -1, \ldots$

(b) $1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots$

(c) $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

(13) Demostrar que si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sucesiones entonces

$$\limsup x_n + y_n \leq \limsup x_n + \limsup y_n.$$

(14) Demostrar que si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sucesiones tales que $x_n \leq y_n$ para todo n entonces

(a) $\limsup x_n \leq \limsup y_n$.

(b) $\liminf x_n \leq \liminf y_n$.

(15) Sea $\{\alpha(n)\}$ el número de números primos que dividen a n. Demostrar que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha(n)}{n} = 0.$$

(16) Demostrar que si $a > 1$ entonces

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty.$$

Indicación: Notar que $\{a^n\}$ es una sucesión monótona creciente. Por lo tanto si suponemos que esta sucesión es acotada entonces debe converger. Notar también que $a^{n+1} - a^n = a^n\,(a-1) \geq (a-1)$.

(17) Demostrar que si $0 < a < 1$ entonces

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = 0.$$

(18) Sean a y b números reales positivos. Hallar

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}.$$

(19) Hallar el límite superior y el límite inferior de las siguientes sucesiones:

(a) $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$

(b) $\left\{(-1)^n \dfrac{1}{n}\right\}$

(c) $\left\{(-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\right\}$

(d) $\left\{(-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$

(e) $\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\}$

(f) $\{(\sqrt[n]{n} - 1)^n\}$

(g) $x_1 = 0, x_{2n} = \dfrac{x_{2n-1}}{2}, x_{2n+1} = \dfrac{1}{2} + x_{2n}$

(h) $\{(-1)^n\, n\}$

(20) Hallar los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{4}{n^2}\right)^{n^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\cos\left(\frac{2}{n}\right)\right)^{3n^2}$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n}$

(d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

(21) Hallar una sucesión de números racionales que converja a $\sqrt{3}$.

CAPíTULO 4

Límites y continuidad.

1. Límite de funciones.

DEFINICIÓN 4.1. Sea $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ una función y $x_o \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de D. Diremos que el *límite cuando x tiende a x_o de f es L* si:
Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in D$ y $0 < |x - x_o| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Esto se abrevia mediante
$$\lim_{x \to x_o} f(x) = L.$$
Debe quedar claro que en la definición anterior no se supone $x_o \in D$, es decir podría ser que f no esté definida en x_o.

PROPOSICIÓN 4.2. *Si una función tiene límite en un punto, entonces el límite es único.*

La demostración de esta proposición queda como ejercicio. Es análoga a la que ya se hizo para sucesiones.

TEOREMA 4.3. *Sea $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ una función y $x_o \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de D. Entonces*
$$\lim_{x \to x_o} f(x) = L$$
si y sólo si
$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = L$$
para toda sucesión $\{x_n\} \subset D$ tal que $x_n \neq x_o$ para todo n y $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_o$.

DEMOSTRACIÓN.
($\Rightarrow$) Supongamos $\lim_{x \to x_o} f(x) = L$. Sea $\{x_n\} \subset D$ tal que $x_n \neq x_o$ y $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_o$.
Sea $\varepsilon > 0$.
Por la definición de límite existe $\delta > 0$ tal que si $x \in D$ y $0 < |x - x_o| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.
Como $x_n \neq x_o$ para todo n y $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_o$ tenemos que para este $\delta > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $0 < |x_n - x_o| < \delta$.

Luego para $n \geq N$ tenemos $|f(x_n) - L| < \varepsilon$.

Por lo tanto,

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = L.$$

($\Leftarrow$)Supongamos es falso que $\lim_{x \to x_o} f(x) = L$.

Entonces existe $\varepsilon_o > 0$ tal que para cada $\delta > 0$ existe un punto $x' \in D$ (que depende de δ) tal que $0 < |x' - x_o| < \delta$ y $|f(x') - L| \geq \varepsilon_o$.

Tomando $\delta = \dfrac{1}{n}$ tenemos que existe $x_n \in D$ tal que

$$0 < |x_n - x_o| < \frac{1}{n} \qquad \text{y} \qquad |f(x_n) - L| \geq \varepsilon_o.$$

Luego

$$\lim_{n \to +\infty} |x_n - x_o| = 0.$$

Hemos obtenido una sucesión $\{x_n\} \subset D$ tal que $x_n \neq x_o$ para todo n, $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_o$ y sin embargo no es cierto que $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = L$.

□

La demostración del siguiente resultado quedará como ejercicio.

Lema 4.4. *Sean $D \subset \mathbb{R}$, x_o un punto límite de D y $f : D \to \mathbb{R}$. Si existe $\lim_{x \to x_o} f(x)$ entonces existen $M \in \mathbb{R}$ y un entorno V de x_o tales que $|f(x)| \leq M$ para cada $x \in V \cap D$.*

Lema 4.5. *Sean $D \subset \mathbb{R}$, x_o un punto límite de D, sean $L \in \mathbb{R}$ y $f : D \to \mathbb{R}$. Si existe $\lim_{x \to x_o} f(x) = L$ y $L \neq 0$ entonces existen $m > 0$ y un entorno V de x_o tales que $|f(x)| \geq m$ para cada $x \in (V \cap D - \{x_o\})$.*

Demostración. Sea $\varepsilon = |L|/2$ entonces existe $\delta > 0$ tal que $x \in D$ y $0 < |x - x_o| < \delta$ implica $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Sea

$$V = (x_o - \delta, x_o + \delta)$$

y sea $x \in (V \cap D - \{x_o\})$, entonces

$$|f(x) - L| < \frac{|L|}{2},$$

luego

$$|L| - |f(x)| \leq |f(x) - L| < \frac{|L|}{2},$$

de donde obtenemos

$$|f(x)| > \frac{|L|}{2}.$$

□

Teorema 4.6. *Sean $D \subset \mathbb{R}$, x_o un punto límite de D, f y g funciones con dominio D tales que*

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = L_1, \qquad \lim_{x\to x_o} g(x) = L_2.$$

Entonces

(i) $\lim\limits_{x\to x_o} (f+g)(x) = L_1 + L_2$.

(ii) $\lim\limits_{x\to x_o} (f\cdot g)(x) = L_1 \cdot L_2$.

(iii) *Si $L_2 \neq 0$ existe un entorno V de x_o tal que g no se anula en $(V \cap D - \{x_o\})$ y*

$$\lim_{x\to x_o} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L_1}{L_2}.$$

La demostración de este resultado quedará como ejercicio, si el lector ha estudiado los resultados análogos para sucesiones no debe encontrar mayores dificultades para hacer la demostración.

2. Funciones continuas.

Definición 4.7. Sea $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ una función y $x_o \in D$. Decimos que f es *continua* en x_o cuando:

para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in D$ y $|x - x_o| < \delta$ entonces $|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$.

Definición 4.8. Sea $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es *continua en D* cuando f es continua en todo punto de D .

Los siguientes tres teoremas son muy fáciles de demostrar y quedarán como ejercicios.

Teorema 4.9. *Sea $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ una función y $x_o \in D$. Supongamos además que x_o es un punto límite de D. Entonces f es continua en x_o si y sólo si* $\lim_{x\to x_o} f(x) = f(x_o)$.

TEOREMA 4.10. *Sean $D \subset \mathbb{R}$ y sean f y g funciones continuas en D. Entonces*

(i) *$f + g$ es continua en D.*

(ii) *$f \cdot g$ es continua en D.*

(iii) *Si g nunca se anula, $\dfrac{f}{g}$ es continua en D.*

TEOREMA 4.11. *Sean $f : D \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$ funciones tales que $f(D) \subset E$. Sea $h : D \to \mathbb{R}$ la función definida por $h(x) = g(f(x))$.*

Si f es continua en x_o y g es continua en $f(x_o)$ entonces h es continua en x_o.

DEMOSTRACIÓN.

Sea $\varepsilon > 0$.

Como g es continua en $f(x_o)$, existe $\gamma > 0$ tal que si $y \in E$ y $|y - f(x_o)| < \gamma$ entonces $|g(y) - g(f(x_o))| < \varepsilon$.

Como f es continua en x_o, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in D$ y $|x - x_o| < \delta$ entonces $|f(x) - f(x_o)| < \gamma$.

Sea $x \in D$ tal que $|x - x_o| < \delta$, entonces $|f(x) - f(x_o)| < \gamma$ y por lo tanto

$$|h(x) - h(x_o)| = |g(f(x)) - g(f(x_o))| < \varepsilon.$$

Luego h es continua en x_o.

$\square$

3. Continuidad y espacios topológicos.

Sean $V, D \subset \mathbb{R}$ y sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función. Recordemos que la *imagen inversa* del conjunto V bajo f es

$$f^{-1}(V) = \{x \in D : f(x) \in V\}.$$

TEOREMA 4.12. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función.*

f es continua si y sólo si $f^{-1}(V)$ es abierto para todo $V \subset \mathbb{R}$ abierto.

DEMOSTRACIÓN.

($\Rightarrow$) Supongamos que f es continua y sea V un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$.

Sea $x_o \in f^{-1}(V)$. Entonces $f(x_o) \in V$. Como V es abierto existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(f(x_o) - \varepsilon, f(x_o) + \varepsilon) \subset V$$

y como f es continua en x_o existe $\delta > 0$ tal que si $|x - x_o| < \delta$ entonces $|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$. Es decir:

$$x \in (x_o - \delta, x_o + \delta) \text{ implica } f(x) \in (f(x_o) - \varepsilon, f(x_o) + \varepsilon) \subset V.$$

Por lo tanto

$$(x_o - \delta, x_o + \delta) \subset f^{-1}(V).$$

Hemos probado que $f^{-1}(V)$ es abierto.

($\Leftarrow$) Supongamos $f^{-1}(V)$ es abierto para todo $V \subset \mathbb{R}$ abierto.

Sean $x_o \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$. Sea

$$V = (f(x_o) - \varepsilon, f(x_o) + \varepsilon).$$

Como $f(x_o) \in V$ entonces $x_o \in f^{-1}(V)$.

Sabemos que V es abierto (porque es un intervalo abierto). Usando la hipótesis obtenemos que $f^{-1}(V)$ también es abierto. Luego existe $\delta > 0$ tal que

$$(x_o - \delta, x_o + \delta) \subset f^{-1}(V).$$

Sea x tal que $|x - x_o| < \delta$ entonces $x \in (x_o - \delta, x_o + \delta)$. Luego $x \in f^{-1}(V)$. Por lo tanto

$$f(x) \in V = (f(x_o) - \varepsilon, f(x_o) + \varepsilon).$$

De donde $|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$.

Hemos probado que f es continua en x_o.

$\square$

Si X es un conjunto no vacío usaremos $\mathcal{P}(X)$ para denotar el conjunto de partes de X.

Definición 4.13. Un *espacio topológico* es un par $(X, \mathcal{T})$, donde X es un conjunto no vacío y $\mathcal{T}$ es un subconjunto de $\mathcal{P}(X)$ tal que

(i) $\emptyset$ y X pertenecen a $\mathcal{T}$

(ii) La unión de una familia de elementos de $\mathcal{T}$ es un elemento de $\mathcal{T}$.

(iii) La intersección de una familia finita de elementos de $\mathcal{T}$ es un elemento de $\mathcal{T}$.

En este caso se dice que $\mathcal{T}$ es una *topología* en X y se dice que los elementos de $\mathcal{T}$ son conjuntos abiertos.

Ejemplo 4.14. Si tomamos $X = \mathbb{R}$ y $\mathcal{T}$ el conjunto de lo que hemos llamado los conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ (ver capítulo 2) entonces $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico.

Observación 4.15. Todo subconjunto de un espacio topológico también es un espacio topológico. Más precisamente:

Sea $(X, \mathcal{T}_X)$ un espacio topológico y $A \subset X$ un subconjunto no vacío. Si definimos

$$\mathcal{T}_A = \{A \cap V : V \in \mathcal{T}_X\}$$

tenemos que $(A, \mathcal{T}_A)$ es un espacio topológico.

Por lo tanto todo subconjunto de $\mathbb{R}$ es un espacio topológico y por ejemplo el intervalo $[1, 2)$ es abierto en $[1, 5]$.

Como ejercicio establecer el siguiente resultado.

Teorema 4.16. *Sean X e Y subconjuntos de $\mathbb{R}$, $f : X \to Y$ una función.*

f es continua si y sólo si la imagen inversa de un conjunto abierto en Y es un conjunto abierto en X.

Es natural definir continuidad en espacios topológicos de la siguiente manera.

Definición 4.17. Sean $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Se dice que f es *continua* si la imagen inversa bajo f de un abierto en Y es un abierto en X, es decir $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$ para todo $V \in \mathcal{T}_Y$.

4. Funciones continuas en conjuntos conexos.

Teorema 4.18. *Si $C \subset \mathbb{R}$ y C es conexo, si $f : C \to \mathbb{R}$ es una función continua entonces $f(C)$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que $f(C)$ no es conexo.

Entonces existen dos conjuntos abiertos A y B tales que

(i) $A \cap B = \emptyset$.
(ii) $A \cap f(C) \neq \emptyset$.
(iii) $B \cap f(C) \neq \emptyset$.
(iv) $f(C) \subset A \cup B$.

Luego $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son subconjuntos abiertos de C. Además

(i) $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.
(ii) $f^{-1}(A) \cap C \neq \emptyset$.
(iii) $f^{-1}(B) \cap C \neq \emptyset$.
(iv) $C \subset f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

(Pruebe (ii), (iii) y (iv)).

Por lo tanto C no es conexo. □

Es claro que otra forma de enunciar el teorema anterior es:
"la imagen de un intervalo por una función continua es un intervalo".

De manera que tenemos el siguiente resultado

Teorema 4.19 (Teorema de los valores intermedios).
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua.
Si $f(a) < f(b)$ y si $c \in \mathbb{R}$ es tal que $f(a) < c < f(b)$ entonces existe $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = c$.

Interprete geométricamente este teorema.

Demostración. Como f es continua y $[a, b]$ es conexo, por el teorema anterior tenemos que $f[a, b]$ es conexo.

Además $f(a), f(b) \in f[a, b]$ y $f(a) < c < f(b)$. Por la conexidad se sigue que $c \in f[a, b]$.

Con esto se obtiene que existe $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = c$ (Justifique por qué se puede tomar el punto x en el intervalo abierto).

□

5. Funciones continuas en conjuntos compactos.

Teorema 4.20. *Sea $D \subset \mathbb{R}$ un conjunto compacto y sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces $f(D)$, la imagen de f, es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$.*

Demostración. Se debe probar que $f(D)$ es cerrado y acotado.

(i) $f(D)$ es acotado, en efecto:

Supongamos que $f(D)$ no es acotado. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in f(D)$ tal que $|y_n| \geq n$.

Pero $y_n = f(x_n)$ para algún $x_n \in D$. Así obtenemos que existe una sucesión $\{x_n\}$ contenida en D tal que $|f(x_n)| \geq n$.

Sea

$$B = \{x_1, x_2, \cdots\}.$$

Tenemos que $B \subset D$, por lo tanto B es un conjunto infinito y acotado. Por el Teorema de Heine-Borel, B tiene un punto de acumulación $x_o \in D$. Es decir, $\{x_n\}$ contiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ que converge a x_o.

Como f es continua se tendrá

$$|f(x_o)| = |f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k})| = |\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})| \geq |\lim_{k\to\infty} n_k| = +\infty.$$

Lo que es una contradicción. Por lo tanto $f(D)$ es acotado.

(ii) $f(D)$ es cerrado, en efecto:

Sea $y_o \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de $f(D)$.

Se debe probar que $y_o \in f(D)$.

Como y_o es un punto de acumulación de $f(D)$, existe una sucesión inyectiva $\{y_n\} \subset f(D)$ tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = y_o$. Es decir, existe una sucesión inyectiva $\{x_n\}$ contenida en D tal que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_o$.

Sea

$$B = \{x_1, x_2, \cdots\}.$$

Tenemos que $B \subset D$, por lo tanto B es un conjunto infinito y acotado. Por el Teorema de Heine-Borel, B tiene un punto de acumulación $x_o \in D$. Es decir, $\{x_n\}$ contiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ que converge a x_o.

Por continuidad

$$f(x_o) = f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = y_o.$$

Es decir, $y_o \in f(D)$.

$\square$

Teorema 4.21. *Sea $D \subset \mathbb{R}$ un conjunto compacto y sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función continua. Sean*

$$M = \sup\{f(x) : x \in D\}, \quad m = \inf\{f(x) : x \in D\}.$$

Entonces existen p, $q \in D$ tales que $f(p) = M$, $f(q) = m$.

Demostración. Por el teorema anterior $f(D)$ es compacto. Luego tiene todos sus puntos de acumulación.

Podemos construir una sucesión en $f(D)$ que converge a M. Se sigue que $M \in f(D)$. De donde existe $p \in D$ tal que $f(p) = M$.

Análogamente obtenemos que existe $q \in D$ tal que $f(q) = m$.

□

Observación 4.22. Claramente un intervalo de la forma $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. El teorema anterior implica el siguiente resultado (que se suele dar en los cursos de cálculo):

"Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza su valor máximo y su valor mínimo".

Teorema 4.23. *Sean $D \subset \mathbb{R}$ un conjunto compacto y $f : D \to \mathbb{R}$ una función continua e inyectiva.*

Entonces la función inversa de f, $f^{-1} : f(D) \to D$, definida por $f^{-1}(f(x)) = x$ es continua.

Demostración. Claramente $f : D \to f(D)$ es una función biyectiva.

Para probar la continuidad de f^{-1} basta ver que $f(V)$ es abierto si V es un subconjunto abierto de D.

Sea V un abierto en D. Entonces $D \backslash V$ es cerrado. Como D es compacto tenemos que $D \backslash V$ es compacto.

Por el Teorema 4.20, $f(D \backslash V)$ es compacto.

Como f es inyectiva entonces $f(D \backslash V) = f(V)^c$. Luego $f(V)^c$ es compacto y por lo tanto cerrado.

De donde $f(V)$ es abierto. □

6. Continuidad uniforme.

Definición 4.24. Sea $D \subset \mathbb{R}$ y $f : D \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es *uniformemente continua en D* si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in D$ se tiene que si $|x - y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Es importante notar que el mismo δ sirve para todos los puntos de D.

Observación 4.25. Es claro que toda función uniformemente continua es continua. Sin embargo es posible que una función continua no sea uniformemente continua, tal como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.26. Sea $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $(0,1)$.

Si queremos $\left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right| < \varepsilon$ debe ser

$$\left|\frac{y-x}{xy}\right| < \varepsilon,$$

es decir, necesitamos $|y-x| < \varepsilon|xy|$. Para la continuidad uniforme tendríamos que encontrar "el δ" que corresponde a ε, el cual debería satisfacer $0 < \delta \leq \varepsilon|xy|$.

Como x se puede tomar muy pequeño el δ tendría que ser igual a 0 y ése no sirve porque debería ser estrictamente positivo.

Por lo tanto esta función no es uniformemente continua.

Teorema 4.27. *Toda función continua en un subconjunto compacto de* $\mathbb{R}$ *es uniformemente continua.*

Demostración. Sea $D \subset \mathbb{R}$ un compacto y $f : D \to \mathbb{R}$ una función continua.

Supongamos que f no es uniformemente continua en D.

Entonces existe $\varepsilon_o > 0$ tal que para cada $\delta > 0$ existen x e y en D tales que $|x-y| < \delta$ y $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_o$.

Tomando $\delta = 1/n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ se construyen un par de sucesiones $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ contenidas en D tales que

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_o.$$

Como D es compacto la sucesión $\{x_n\}$ contiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ que converge a un $x_o \in D$, es decir $x_o = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$.

Es fácil probar que $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = x_o$ (para hacerlo se usa que $|x_{n_k} - y_{n_k}| < 1/n_k$).

Por la continuidad de f se debe tener

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) = f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) - f(\lim_{k\to\infty} y_{n_k}) = f(x_o) - f(x_o) = 0.$$

Esto último contradice el hecho de que

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_o \qquad \text{para todo } n.$$

Luego f debe ser uniformemente continua.

$\square$

7. Discontinuidades.

DEFINICIÓN 4.28. Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función y $x \in D$. Se dice que f es *discontinua en* x o que f tiene *una discontinuidad en* x cuando f no es continua en x .

DEFINICIÓN 4.29. Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función y x_o un punto límite de D. Diremos que el *límite cuando* x *tiende a* x_o *por la derecha de* f *es* $L \in \mathbb{R}$ si:
Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in D$ y $0 < x - x_o < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Esto se abrevia mediante $f(x_o^+) = L$ ó

$$\lim_{x \to x_o^+} f(x) = L.$$

En forma análoga se define límite por la izquierda.

DEFINICIÓN 4.30. Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función y x_o un punto límite de D. Diremos que el *límite cuando* x *tiende a* x_o *por la izquierda de* f *es* $L \in \mathbb{R}$ si:
Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in D$ y $0 < x_o - x < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Esto se abrevia mediante $f(x_o^-) = L$ ó

$$\lim_{x \to x_o^-} f(x) = L.$$

DEFINICIÓN 4.31. Sean f una función definida en un intervalo (a, b).
Si f es discontinua en un punto x de (a, b), y si $f(x^+)$ y $f(x^-)$ existen, entonces se dice que f tiene una *discontinuidad de primera especie* o *discontinuidad simple en* x.

Las discontinuidades de primera especie pueden ser evitables o de salto:

(a) Una discontinuidad en x es evitable cuando $f(x^+) = f(x^-)$.
(b) Una discontinuidad en x es de salto cuando $f(x^+) \neq f(x^-)$.

Ejemplo 4.32.

Si f es la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 3 \\ 4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

entonces f tiene una discontinuidad de primera especie en x = 3.

Definición 4.33. Se dice que f tiene una *discontinuidad de segunda especie* cuando tiene una discontinuidad que no es de primera especie.

Ejemplo 4.34.

(a) Si f es la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

entonces f tiene una discontinuidad de segunda especie en x = 0.

(b) Si f es la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es racional} \end{cases}$$

entonces f tiene una discontinuidad de segunda especie en todo punto.

8. Funciones monótonas.

Definición 4.35. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es *monótona creciente en* (a, b) si $a < x < y < b$ implica

$$f(x) \leq f(y).$$

Definición 4.36. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es *monótona decreciente en* (a, b) si $a < x < y < b$ implica

$$f(y) \leq f(x).$$

DEFINICIÓN 4.37. Una función es *monótona* cuando es monótona creciente o monótona decreciente.

TEOREMA 4.38. *Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una función monótona creciente. Entonces:*

(i) *Existe $f(x+)$ para todo punto de $x\in(a,b)$.*
(ii) *Existe $f(x-)$ para todo punto de $x\in(a,b)$.*
(iii) *Se tiene que*

$$\sup_{a<t<x} f(t) = f(x^-) \leq f(x) \leq f(x^+) = \inf_{x<t<b} f(t).$$

(iv) *Si $a<x<y<b$, entonces*

$$f(x^+) \leq f(y^-).$$

Un resultado análogo es cierto para funciones monótonas decrecientes.

DEMOSTRACIÓN.

Probaremos (ii), la prueba de (i) es análoga.

Por hipótesis el conjunto $\{f(t):\ a<t<x\}$ está acotado por $f(x)$. Sea

$$S=\sup\{f(t):\ a<t<x\}.$$

Claramente $S\leq f(x)$. Probaremos que $S=f(x^-)$.

Sea $\varepsilon>0$. Entonces existe $z\in(a,x)$ tal que

$$S-\varepsilon<f(z)\leq S.$$

Por lo tanto existe $\delta>0$ tal que $a<x-\delta<x$, y

$$S-\varepsilon<f(x-\delta)\leq S.$$

Como f es monótona creciente

$$f(x-\delta)\leq f(t)\leq f(x) \ \text{ si } \ x-\delta<t<x.$$

Combinando estas dos últimas desigualdades se obtiene

$$S-\varepsilon<f(t)\leq S<S+\varepsilon \ \text{ si } \ x-\delta<t<x.$$

De donde

$$|f(t)-S|<\varepsilon \ \text{ si } \ x-\delta<t<x.$$

Por lo tanto $f(x^-)=S$.

Hemos probado (ii) y la primera igualdad de (iii).

Análogamente se prueban (i) y la última igualdad de (iii).

La desigualdad en (iii) queda como ejercicio.

Probaremos (iv). Si $a < x < y < b$ entonces usando (iii) dos veces obtenemos

$$f(x^+) = \inf_{x<t<b} f(t),$$

$$f(y^-) = \sup_{a<t<y} f(t).$$

Como f es creciente

$$\inf_{x<t<b} f(t) = \inf_{x<t<y} f(t)$$

$$\sup_{a<t<y} f(t) = \sup_{x<t<y} f(t).$$

Luego

$$f(x^+) = \inf_{x<t<y} f(t) \leq \sup_{x<t<y} f(t) = f(y^-).$$

$\square$

Corolario 4.39. *Las funciones monótonas no tienen discontinuidades de segunda especie.*

Teorema 4.40. *Sea f una función monótona en el intervalo (a, b). Entonces el conjunto de los puntos donde f es discontinua es a lo sumo numerable.*

Demostración. Solamente lo probaremos en el caso en que f es monótona creciente, el otro caso es análogo.

Sea

$$E = \{x \in (a, b) : \text{ f es discontinua en } x\}.$$

Sea $x \in (a, b)$ por el teorema anterior sabemos que existen $f(x^+)$ y $f(x^-)$.

Si $x \in E$ entonces

$$f(x^-) \neq f(x^+).$$

Más aún, por el teorema anterior sabemos que

$$f(x^-) < f(x^+).$$

Por un ejercicio de la práctica, existe un número racional $r(x)$ tal que

$$f(x^-) < r(x) < f(x^+).$$

A cada punto $x \in E$ le hemos asociado un número racional $r(x)$. Con esto estamos definiendo una función $r : E \to \mathbb{Q}$.

Sea $x < y$. Nuevamente por el teorema:

$$f(x^+) < f(y_-).$$

Por lo tanto se tiene que

$$r(x) < f(x^+) < f(y_-) < r(y).$$

De donde $r(x) < r(y)$.

Por lo tanto la función r es inyectiva.

Es decir, hemos definido una función $r : E \to \mathbb{Q}$ que es inyectiva.

Luego E es numerable.

$\square$

9. Límites infinitos.

En forma análoga a como se hizo en sucesiones se define

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = +\infty.$$

Más precisamente, $\lim_{x \to x_o} f(x) = +\infty$ si para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_o| < \delta$ entonces $f(x) > \lambda$.

Se dejará como ejercicio escribir las definiciones de

$$\lim_{x \to x_o^+} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L,$$

$$\ldots \text{etc.}$$

Ejercicios.
Límites y continuidad.

(1) Sea D un subconjunto de $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de D. Supongamos que existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$ y es positivo. Demostrar que existe $\delta > 0$ tal que si $x \in D$ y $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $f(x) > 0$.

(2) Sea D un subconjunto de $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in D$ tal que f es continua en x_0. Supongamos $f(x_0) > 0$. Demostrar que existe $\delta > 0$ tal que si $x \in D$ y $|x - x_0| < \delta$ entonces $f(x) > 0$.

(3) Sea D un subconjunto de $\mathbb{R}$, $f, g : D \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $x_0 \in D$. Supongamos que $f(x_0) > g(x_0)$.

Demostrar que existe $\delta > 0$ tal que si $x \in D$ y $|x - x_0| < \delta$ entonces $f(x) > g(x)$.

¿ Sigue siendo cierta la conclusión si en vez de suponer $f(x_0) > g(x_0)$ suponemos $f(x_0) \geq g(x_0)$?

(4) Demostrar que la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es continua en 0.

(5) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Demostrar que si $C \subset \mathbb{R}$ es cerrado entonces $f^{-1}(C)$ es cerrado.

(6) (a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua.
Demostrar que el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$ es cerrado.
(b) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas.
Demostrar que el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x)\}$ es cerrado.

(7) Sean A y D subconjuntos de $\mathbb{R}$. Se dice que A es denso en D si $A \subset D$ y todo entorno de un punto de D contiene puntos de A (por ejemplo, $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$).
(a) Sea f continua en D y A un conjunto denso en D. Demostrar que si $f(x) = 0$ para todo $x \in A$ entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in D$.

(b) Sean f y g continuas en D y A un conjunto denso en D. Demostrar que si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$ entonces $f(x) = g(x)$ para todo $x \in D$.

(8) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.
Demostrar:
(a) $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) $f\left(\frac{1}{q}\,x\right) = \frac{1}{q}\,f(x)$ para todo $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(c) $f\left(\frac{p}{q}\,x\right) = \frac{p}{q}\,f(x)$ para todo $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(9) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Demostrar que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(10) Sea $D \subset \mathbb{R}$ y $f : D \to \mathbb{R}$ una función uniformemente continua. Demostrar que si D es acotado entonces $f(D)$ es acotado. Mostrar con un ejemplo que la conclusión no es cierta si omitimos la hipótesis D acotado.

(11) Sea $D \subset \mathbb{R}$ y $f : D \to \mathbb{R}$ una función uniformemente continua. Demostrar que si $\{x_n\} \subset D$ es una sucesión de Cauchy entonces $\{f(x_n)\}$ también es una sucesión de Cauchy. Buscar un ejemplo que muestre que la hipótesis "f uniformemente continua" no puede ser omitida.

(12) Demostrar que si I es un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ es una función continua y estrictamente creciente entonces la imagen de todo intervalo abierto contenido en I es un intervalo abierto.

(13) Demostrar que todo polinomio de grado impar posee por lo menos una raíz real.

(14) Sean f y g funciones continuas definidas en el intervalo $[a, b]$ tales que $f(a) < g(a)$ y $f(b) > g(b)$. Demostrar que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = g(c)$. Interpretar gráficamente.

(15) Utilizar el Teorema 4.19 para demostrar que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a^2 = 2$ (ver Ejercicio 10 del Capítulo 1).

(16) Demostrar que si n es un número natural par y $a > 0$, existe un único $x > 0$ tal que $x^n = a$.

(17) Demostrar que si n es un número natural impar y $a \in \mathbb{R}$, existe un único $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^n = a$.

(18) Todo número racional x se puede escribir en la forma

$$x = \frac{m}{n},$$

donde m y n son enteros sin divisores comunes y $n > 0$. Cuando $x = 0$ tomaremos $n = 1$. Consideremos la función definida en $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \\ \dfrac{1}{n} & \text{si } x = \dfrac{m}{n} \end{cases}$$

Demostrar que f es continua en todo punto irracional y que f tiene una discontinuidad simple en todo punto racional.

(19) ¿Cuáles de las siguientes funciones son uniformemente continuas?
(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$.
(b) $g : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2$.
(c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \operatorname{sen}(x)$

(20) (a) Demostrar que si f es una función continua, definida en un conjunto D entonces la función $|f|$ también es continua en D.
(b) Sea f una función continua definida en $\mathbb{R}$. Demostrar que f se puede escribir en la forma $f = P + I$, donde P es una función par y continua en $\mathbb{R}$ e I es una función impar y continua en $\mathbb{R}$.
(c) Demostrar que si f y g son funciones continuas definidas en D entonces las funciones $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ también son continuas.

(21) Demostrar que si f es una función continua tal que su dominio contiene un entorno de L y $\lim_{x\to a} g(x) = L$ entonces $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(L)$. Mostrar con un ejemplo que si no se supone la continuidad de f el resultado anterior no se cumple.

(22) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es racional} \end{cases}$$

¿En cuáles puntos es f continua?

(23) Dar un ejemplo de una función que no sea continua en ningún punto, pero tal que $|f|$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

(24) Demostrar que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sen} x = x - 1$.

(25) Supóngase que f y g son funciones continuas en $\mathbb{R}$, que $f^2 = g^2$ y que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ ó $f(x) = -g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(26) Demostrar que si $f : [0, 1] \to [0, 1]$ es una función continua entonces existe $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = x$.

(27) Supóngase que f es continua en $[a, b]$ y que $f(x)$ es siempre racional. ¿Qué puede decirse acerca de f?

(28) (a) Demostrar que no existe ninguna función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que tome exactamente dos veces cada uno de sus valores.
(b) Construir una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que tome exactamente tres veces cada uno de sus valores.

(29) Demostrar el siguiente Teorema:

Sean X e Y subconjuntos de $\mathbb{R}$, $f : X \to Y$ una función.

f es continua si y sólo si la imagen inversa de un conjunto abierto en Y es un conjunto abierto en X.

(30) Utilizar el Teorema 4.23 para demostrar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua e inyectiva, entonces $f^{-1} : f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es continua.

(31) $\star$ Dar un ejemplo de una función $f : D \to \mathbb{R}$ (D un subconjunto de $\mathbb{R}$) que es inyectiva, continua y $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}$ no es continua.

(32) Sea $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ una función uniformemente continua. Demostrar que existe

$$\lim_{x \to 0^+} f(x).$$

(33) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que existen los límites

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

y son finitos.

Demostrar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

CAPíTULO 5

Derivadas.

1. La derivada de una función.

DEFINICIÓN 5.1. Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función y sea $x \in (a,b)$.
Se dice que f es *derivable* en el punto x si existe el siguiente límite

$$\lim_{t\to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

En este caso el límite se denota por $f'(x)$ y recibe el nombre de *derivada* de f en el punto x.

DEFINICIÓN 5.2. Si la función es derivable en todo punto de un conjunto $E \subset (a,b)$ se dice que f *es derivable en* E.

Supondremos que el estudiante está familiarizado con el significado geométrico de la derivada: $f'(x_o)$ es la pendiente de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(x_o, f(x_o))$.

EJEMPLO 5.3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = x^2$. Entonces

$$\lim_{t\to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{t\to x} \frac{t^2 - x^2}{t - x} = \lim_{t\to x} \frac{(t+x)(t-x)}{t - x} = \lim_{t\to x} t + x = 2x.$$

Luego f es derivable en todo $\mathbb{R}$ y

$$f'(x) = 2x.$$

TEOREMA 5.4. *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función. Si f es derivable en $x \in (a,b)$ entonces f es continua en x.*

Demostración.

$$\begin{aligned}\lim_{t\to x} f(t)-f(x) &= \lim_{t\to x}\left(\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\right)(t-x)\\ &= \lim_{t\to x}\left(\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\right)\lim_{t\to x}(t-x)\\ &= f'(x)\cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

□

Observación 5.5. El recíproco del teorema anterior no es cierto. Por ejemplo la función

$$f(x) = |x|$$

es continua y no es derivable en 0.

Observación 5.6. También existen funciones continuas en todo $\mathbb{R}$ que no son derivables en ningún punto.

Teorema 5.7. *Sean f y g funciones definidas en (a,b), derivables en $x \in (a,b)$. Entonces*

(i) *$f+g$ es derivable en x y $(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x)$.*
(ii) *$f\cdot g$ es derivable en x y $(f\cdot g)'(x) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.*
(iii) *Si $g(x)\neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ es derivable en x, y*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{(g(x))^2}.$$

Demostración.

(i) Tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to x}\frac{(f(t)+g(t))-(f(x)+g(x))}{t-x} &= \lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}+\lim_{t\to x}\frac{g(t)-g(x)}{t-x}\\ &= f'(x)+g'(x).\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x).$$

(ii) Por el teorema anterior f es continua en x, usando la siguiente igualdad

$$\frac{f(t)g(t)-f(x)g(x)}{t-x}=\frac{f(t)[g(t)-g(x)]}{t-x}+\frac{g(x)[f(t)-f(x)]}{t-x},$$

obtenemos

$$\begin{aligned}\lim_{t\to x}\frac{f(t)g(t)-f(x)g(x)}{t-x}&=\lim_{t\to x}f(t)\lim_{t\to x}\frac{[g(t)-g(x)]}{t-x}+g(x)\lim_{t\to x}\frac{[f(t)-f(x)]}{t-x}\\&=f(x)g'(x)+g(x)f'(x).\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(f\cdot g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$$

(iii) Sea $h=\dfrac{f}{g}$. Por el teorema anterior g es continua en x, por lo tanto

$$\frac{h(t)-h(x)}{t-x}=\frac{1}{g(t)g(x)}\left[g(x)\frac{f(t)-f(x)}{t-x}-f(x)\frac{g(t)-g(x)}{t-x}\right].$$

Luego

$$\begin{aligned}\lim_{t\to x}\frac{h(t)-h(x)}{t-x}&=\frac{1}{g(x)\lim_{t\to x}g(t)}\left[g(x)\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}-f(x)\lim_{t\to x}\frac{g(t)-g(x)}{t-x}\right]\\&=\frac{1}{(g(x))^2}\left[g(x)f'(x)-f(x)g'(x)\right].\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{(g(x))^2}.$$

□

Teorema 5.8 (Regla de la cadena). *Sean $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ y $g:(c,d)\to\mathbb{R}$ funciones tales que $f(a,b)\subset(c,d)$. Sea $x\in(a,b)$, si f es derivable en x y g es derivable en $f(x)$ entonces la función compuesta $\varphi(t)=g(f(t))$ es derivable en x, y $\varphi'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)$.*

Demostración. Sea $k(h) = f(x+h) - f(x)$. Entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{k(h)}{h} = f'(x) \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0} k(h) = 0.$$

Consideraremos dos casos

Caso 1: Si $f'(x) \neq 0$.

En este caso, para h suficientemente pequeño, $k(h) \neq 0$.

Luego, para h pequeño

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{k(h)} \cdot \frac{k(h)}{h}.$$

Como $\lim_{h\to 0} k(h) = 0$ se tiene que

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{k(h)} = \lim_{h\to 0} \frac{g(f(x) + k(h)) - g(f(x))}{k(h)} = g'(f(x)).$$

Por lo tanto

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = g'(f(x))f'(x).$$

Caso 2: Si $f'(x) = 0$.

En este caso es posible que $k(h)$ sea igual a 0 para h arbitrariamente pequeño.

Si $k(h) = 0$ entonces $f(x+h) = f(x)$ y por lo tanto

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = 0.$$

Si $k(h) \neq 0$ entonces, ya que $\lim_{h\to 0} \dfrac{k(h)}{h} = f'(x) = 0$, el número $\dfrac{k(h)}{h}$ estará muy cerca de 0, para h pequeño. También el cociente

$$\frac{g(f(x) + k(h)) - g(f(x))}{k(h)}$$

estará muy cerca de $g'(f(x)$ para h pequeño. Luego

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{k(h)} \frac{k(h)}{h}$$

estará muy cerca de 0 para h pequeño.

Por lo tanto se tiene que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = 0 = g'(f(x)),0 = g'(f(x))f'(x).$$

Nota: El estudiante deberá estar en capacidad de justificar los términos "pequeño" y "estar cerca" con argumentos tipo "ε, δ".

□

2. Teoremas del valor medio.

TEOREMA 5.9. *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Si f alcanza un máximo o un mínimo en $c \in (a,b)$ entonces $f'(c) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que f alcanza un máximo en c (el caso del mínimo es análogo).

Entonces $f(x) \leq f(c)$ para x cerca de c. Por lo tanto tenemos que, si $h \geq 0$ y pequeño, entonces

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0,$$

si $h \leq 0$ y pequeño, entonces

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0.$$

Como existe $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h}$ y es igual a $f'(c)$ tenemos que

$$f'(c) \leq 0 \quad \text{y} \quad f'(c) \geq 0.$$

Por lo tanto

$$f'(c) = 0.$$

□

TEOREMA 5.10 (Teorema de Rolle). *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua, diferenciable en el intervalo abierto (a,b) y tal que $f(a) = f(b)$ entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Si f es constante claramente se satisface la conclusión.

Si f no es constante entonces tiene que alcanzar o un máximo o un mínimo en un punto $c \in (a,b)$. Claramente $f'(c) = 0$.

□

El siguiente gráfico ilustra el teorema de Rolle.

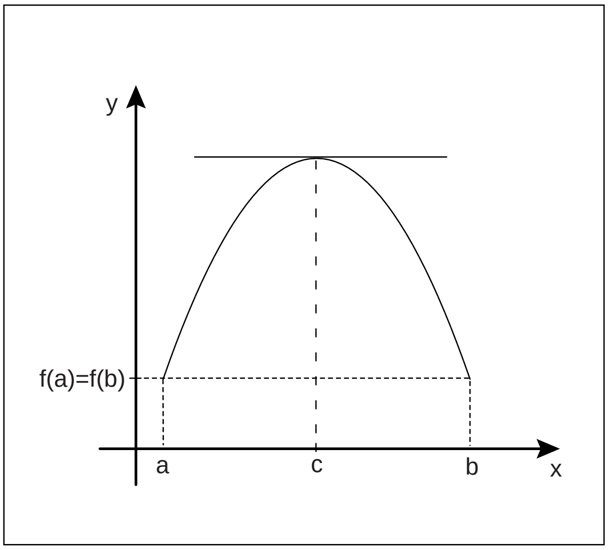

FIGURA 5.1. Teorema de Rolle

DEFINICIÓN 5.11. Diremos que una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es *diferenciable en el intervalo cerrado* $[a, b]$ si f es diferenciable en (a, b) y existen las derivadas laterales

$$f'_{+}(a) = \lim_{t \to a^{+}} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}, \qquad f'_{-}(b) = \lim_{t \to b^{-}} \frac{f(t) - f(b)}{t - b}.$$

Cuando no se preste a confusión escribiremos $f'(a)$ en vez de $f'_{+}(a)$ y $f'(b)$ en vez de $f'_{-}(b)$.

TEOREMA 5.12 (Propiedad de Darboux de las derivadas). *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en el intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces f' toma todos los valores comprendidos entre $f'(a)$ y $f'(b)$.*

DEMOSTRACIÓN. Es claro que basta considerar el caso $f'(a) < f'(b)$.

Sea γ tal que $f'(a) < \gamma < f'(b)$. Sea $g(x) = f(x) - \gamma x$. Entonces

$$g'(x) = f'(x) - \gamma,$$

$$g'_{+}(a) = f'(a) - \gamma < 0,$$

$$g'_{-}(b) = f'(b) - \gamma > 0.$$

Por ser $g'_{+}(a) < 0$ tenemos que g no puede alcanzar un valor mínimo en a y por ser $g'_{-}(b) > 0$ tenemos que g no puede alcanzar un valor mínimo en b (explique por qué).

Como g es continua y $[a, b]$ es compacto g alcanza un mínimo en un punto $c \in [a, b]$. Por lo anterior tenemos que $c \in (a, b)$. Además debe ser $g'(c) = 0$, de donde $f'(c) = \gamma$.

$\square$

TEOREMA 5.13 (Teorema del valor medio). *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y diferenciable en el intervalo abierto (a, b) entonces existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea φ la función definida por

$$\varphi(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) \right).$$

Entonces

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Además $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ y claramente φ satisface el resto de las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[a, b]$. Por lo tanto existe $c \in (a, b)$ tal que $\varphi'(c) = 0$. De esta igualdad sigue el resultado.

$\square$

OBSERVACIÓN 5.14. El teorema anterior tiene una interpretación geométrica muy clara: la curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ debe tener un punto en el que su tangente es paralela a la cuerda que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ (es una versión rotada del teorema de Rolle). Notemos también que la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es

$$y = g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

y la función φ que consideramos en la demostración del teorema anterior es $\varphi = f - g$.

La siguiente situación sirve para motivar una generalización del teorema del valor medio:

Consideremos una curva suave parametrizada por las ecuaciones

$$x = g(t), \qquad y = f(t) \qquad (a \leq t \leq b).$$

La pendiente de la cuerda que une los puntos extremos de la curva es

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

La pendiente de la curva en $t = c$ es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

De existir $c \in (a,b)$ en el que la tangente a la curva es paralela a la cuerda que une a los extremos de la curva se debía tener que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

El siguiente gráfico ilustra el teorema del valor medio.

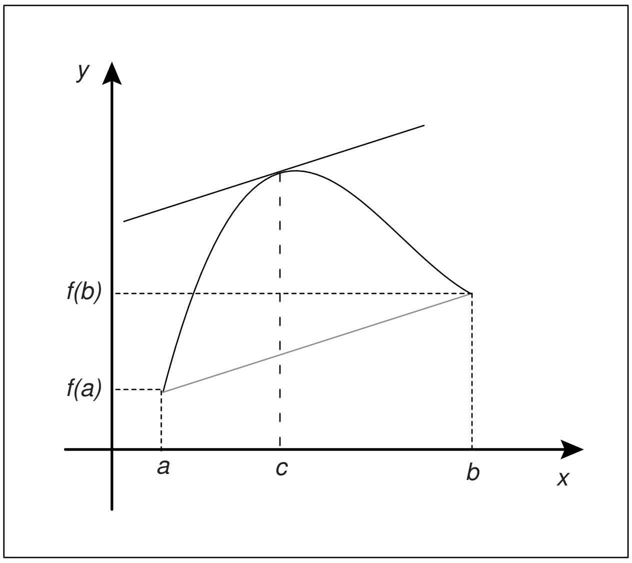

Figura 5.2. Teorema del Valor Medio

Teorema 5.15 (Teorema del valor medio de Cauchy). *Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas y diferenciables en el intervalo abierto (a,b).*

Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que

$$(f(b)-f(a))g'(c) = (g(b)-g(a))f'(c).$$

Demostración. Sea

$$\varphi(t) = (f(b)-f(a))g(t) - (g(b)-g(a))f(t)$$

entonces

$$\varphi'(t) = (f(b)-f(a))g'(t) - (g(b)-g(a))f'(t).$$

Claramente φ es continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b). Además

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= (f(b)-f(a))g(a)-(g(b)-g(a))f(a)\\ &= f(b)g(a)-g(b)f(a).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(b) &= (f(b)-f(a))g(b)-(g(b)-g(a))f(b)\\ &= f(b)g(a)-g(b)f(a).\end{aligned}$$

Del teorema de Rolle se obtiene inmediatamente la conclusión. □

Observación 5.16. Si al teorema anterior se le agregan las hipótesis $g'(x)\neq 0$ para todo $x\in(a,b)$ y $g(a)\neq g(b)$ la conclusión se puede escribir de la siguiente manera:

Existe $c\in(a,b)$ tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Observación 5.17. El teorema del valor medio se puede obtener a partir del anterior tomando $g(x)=x$.

Veamos ahora algunas consecuencias de los teoremas anteriores.

Teorema 5.18. *Sea f una función diferenciable en el intervalo (a,b). Si $f'(x)=0$ para todo $x\in(a,b)$ entonces f es constante.*

Demostración. Sean α y β puntos de (a,b). Sabemos que f es continua en $[\alpha,\beta]$ y derivable en (α,β). Del teorema del valor medio aplicado en el intervalo $[\alpha,\beta]$ sigue que existe $c\in(\alpha,\beta)$ tal que

$$f'(c)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$

Como $f'(c)=0$ entonces $f(\alpha)=f(\beta)$. Como α y β son dos puntos arbitrarios de (a,b) tenemos que f es constante. □

Teorema 5.19. *Sea f una función diferenciable en el intervalo (a,b).*

(i) *Si $f'(x)>0$ para todo $x\in(a,b)$ entonces f es estrictamente creciente en (a,b).*
(ii) *Si $f'(x)\geq 0$ para todo $x\in(a,b)$ entonces f es monótona creciente en (a,b).*

(iii) *Si* $f'(x) < 0$ *para todo* $x \in (a, b)$ *entonces* f *es estrictamente decreciente en* (a, b).
(iv) *Si* $f'(x) \leq 0$ *para todo* $x \in (a, b)$ *entonces* f *es monótona decreciente en* (a, b).

La demostración, que es una consecuencia inmediata del teorema del valor medio, quedará como ejercicio.

Teorema 5.20 (Regla de L'Hopital). *Sean* f *y* g *funciones diferenciables en un intervalo de la forma* $(a - r, a + r)$ $a, r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. *Supongamos que*

(a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$
(b) $g'(x) \neq 0$ *para todo* x *en* $(a - r, a + r)$, $x \neq a$.
(c) $\lim_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

Entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Demostración. Como f y g son diferenciables en a, entonces f y g son continuas en a. Luego $f(a) = 0$ y $g(a) = 0$.

Aplicando el teorema del valor medio de Cauchy a f y g en el intervalo $[a, x]$ ó $[x, a]$ (según $a > x$ ó $a < x$) podemos concluir que existe α_x entre a y x tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)}.$$

Si $x \to a$ entonces $\alpha_x \to a$. De esto último y la igualdad anterior se concluye el resultado.

$\square$

Observación 5.21. El resultado anterior también es válido cuando se consideran límites laterales ($x \to a^+$ ó $x \to a^-$), cuando se consideran límites cuando x tiende a infinito y también para límites de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Para más detalles ver los ejercicios de la guía de problemas.

3. Funciones inversas.

El siguiente resultado, que es consecuencia del teorema de los valores intermedios, se dejará como ejercicio.

Teorema 5.22. *Sea* I *un intervalo y* $f : I \to \mathbb{R}$ *una función continua. Si* f *es inyectiva entonces* f *es estrictamente creciente o estrictamente decreciente en* I.

Recordemos que la imagen de un intervalo por una función continua también es un intervalo.

TEOREMA 5.23. *Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función inyectiva y continua. Entonces $f^{-1} : f(I) \to I$ es continua.*

DEMOSTRACIÓN. Basta considerar el caso f estrictamente creciente, ya que el caso decreciente se obtiene a partir de éste con un cambio de signo.

Cuando f es creciente se tiene que f^{-1} también es creciente (pruébelo).

Sea $\varepsilon > 0$ y $\gamma = f(c) \in f(I)$. Vamos a suponer que c no es un extremo de I. El caso en que c es un extremo se trata en forma completamente análoga.

Consideremos el intervalo $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ alrededor de c. Entonces

$$f(c-\varepsilon) < f(c) < f(c+\varepsilon).$$

Sea

$$\delta = \text{mín}\{f(c+\varepsilon) - f(c), f(c) - f(c-\varepsilon)\}.$$

Si $y \in f(I)$ y $|y - \gamma| < \delta$ entonces

$$f(c-\varepsilon) \leq f(c) - \delta < y < f(c) + \delta \leq f(c+\varepsilon).$$

Como f^{-1} es creciente entonces

$$c - \varepsilon < f^{-1}(y) < c + \varepsilon.$$

Luego

$$|f^{-1}(y) - c| < \varepsilon.$$

□

LEMA 5.24. *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $f'(x) > 0$ para todo x de (a,b), o $f'(x) < 0$ para todo x de (a,b) entonces f es inyectiva.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $f'(x) > 0$ para todo x de (a,b) (el otro caso es análogo).

Sean $\alpha, \beta \in (a,b)$ con $\alpha < \beta$ entonces f es continua en $[\alpha,\beta]$ y diferenciable en (a,b). Aplicamos el teorema de valor medio de Lagrange en $[\alpha,\beta]$ y encontramos $c \in (\alpha,\beta)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Como $f'(c) > 0$ y $\beta - \alpha > 0$ obtenemos que $f(\beta) > f(\alpha)$. Por lo tanto f es inyectiva en (a, b).

$\square$

TEOREMA 5.25. *Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $f'(x) > 0$ para todo x de (a, b), o $f'(x) < 0$ para todo x de (a, b) y sea g su función inversa (considerando el dominio de g como el rango de f). Entonces g es diferenciable y*

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

La demostración de este teorema queda como ejercicio.

4. Teorema de Taylor.

TEOREMA 5.26. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función tal que f', f'', ..., $f^{(n)}$ están definidas en $[a, b]$, (n un entero positivo).*

Sean α y x distintos puntos del intervalo $[a, b]$ y sea

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(t - \alpha)^k.$$

Entonces existe un punto c entre α y x tal que

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - \alpha)^n.$$

DEMOSTRACIÓN. Es fácil probar que $P^{(k)}(\alpha) = f^{(k)}(\alpha)$ para $k = 0, 1, \ldots, n - 1$.

Consideremos a x como un punto fijo de $\mathbb{R}$.

Sea $M \in \mathbb{R}$ dado por

$$M = \frac{f(x) - P(x)}{(x - \alpha)^n}$$

entonces

$$f(x) = P(x) + M(x - \alpha)^n.$$

Sea g la función de variable t definida por

$$g(t) = f(t) - P(t) - M(t - \alpha)^n.$$

Derivando con respecto a t obtenemos que

$$g'(t) = f'(t) - P'(t) - nM(t - \alpha)^{n-1}.$$

Como $P'(\alpha) = f'(\alpha)$ obtenemos que $g'(\alpha) = 0$.

Si seguimos derivando, obtenemos

$$g^{(k)}(t) = f^{(k)}(t) - P^{(k)}(t) - n.\dots.(n-k+1)M(t-\alpha)^{n-k}.$$

Usando que $P^{(k)}(\alpha) = f^{(k)}(\alpha)$ para $k = 0, 1, \dots, n-1$ obtenemos que

$$g(\alpha) = g'(\alpha) = \dots = g^{(n-1)}(\alpha) = 0.$$

Por la forma en que se escogió M se tiene que $g(x) = 0$, del teorema de Rolle sigue que existe un x_1 entre α y x tal que

$$g'(x_1) = 0.$$

Como $g'(\alpha) = 0$, por el teorema de Rolle, existe x_2 entre α y x_1 tal que

$$g''(x_2) = 0.$$

Después de n pasos llegaremos a la conclusión de que

$$g^{(n)}(x_n) = 0$$

para algún x_n entre α y x_{n-1}. Pero x_n también está entre α y x.

Tomemos $c = x_n$.

Para $a < t < b$ tenemos

$$P^{(n)}(t) = 0$$

y por lo tanto

$$g^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - n!M.$$

Luego

$$f^{(n)}(c) - n!M = 0.$$

De donde

$$M = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}.$$

□

5. Significado del signo de la derivada segunda.

DEFINICIÓN 5.27. Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es *convexa* si

$$f(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda f(u) + (1-\lambda) f(v)$$

para todo $u, v \in (a,b)$, $\lambda \in (0,1)$.

OBSERVACIÓN 5.28. Gráficamente f convexa quiere decir que dados dos puntos del gráfico de f, $(u, f(u))$ y $(v, f(v))$, el gráfico de f queda por debajo del segmento que une a este par de puntos.

Para verificar esto, notemos que la ecuación de la recta que une $(u, f(u))$ con $(v, f(v))$ es

$$y = f(u) + \frac{f(u) - f(v)}{u - v}(x - u)$$

por lo tanto la altura de esta recta para $x = \lambda u + (1 - \lambda)v$ es $\lambda f(u) + (1 - \lambda)f(v)$.

TEOREMA 5.29. *Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Si f' es creciente entonces f es convexa.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $u, v \in (a, b)$, $u < v$, $\lambda \in (0, 1)$ y sea $z = \lambda u + (1 - \lambda)v$. Note que

$$(1 - \lambda)(v - z) = (1 - \lambda)v - (1 - \lambda)z = z - \lambda u - (1 - \lambda)z = \lambda(z - u).$$

Debemos probar que $f(z) \leq \lambda f(u) + (1 - \lambda)f(v)$.

Como $f(z) = \lambda f(z) + (1 - \lambda)f(z)$, es lo mismo demostrar que

$$\lambda f(z) + (1 - \lambda)f(z) \leq \lambda f(u) + (1 - \lambda)f(v).$$

Por lo tanto basta probar que

$$\lambda(f(z) - f(u)) \leq (1 - \lambda)(f(v) - f(z)).$$

Por el teorema del valor medio existen c y d tales que $u < c < z < d < v$ y

$$f(z) - f(u) = f'(c)(z - u), \qquad f(v) - f(z) = f'(d)(v - z).$$

Sabemos que $f'(c) \leq f'(d)$. Además como $(1 - \lambda)(v - z) = \lambda(z - u)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \lambda(f(z) - f(u)) &= f'(c)\lambda(z - u) \\ &= f'(c)(1 - \lambda)(v - z) \\ &\leq f'(d)(1 - \lambda)(v - z) \\ &= (1 - \lambda)(f(v) - f(z)) \end{aligned}$$

□

COROLARIO 5.30. *Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable. Si f'' es no negativa entonces f es convexa.*

DEFINICIÓN 5.31. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Se dice que $x_0 \in (a, b)$ es un *punto crítico* de f si $f'(x_0) = 0$.

TEOREMA 5.32 (Criterio de la segunda derivada para clasificar los puntos críticos).

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable y tal que f'' es continua. Sea $x_0 \in (a, b)$ un punto crítico de f.

Si $f''(x_0) > 0$ entonces f tiene un mínimo local en x_0.

Si $f''(x_0) < 0$ entonces f tiene un máximo local en x_0 .

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el siguiente desarrollo de Taylor de f en x alrededor de x_0:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2}(x - c)^2 = f(x_0) + \frac{f''(c)}{2}(x - c)^2,$$

donde c está entre x y x_0. Luego

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(c)}{2}(x - c)^2.$$

Supongamos $f''(x_0) > 0$. Como f'' es continua, si x está lo suficientemente cerca de x_0 entonces $f''(c) > 0$.

Por lo tanto $f(x) > f(x_0)$ si $x \neq x_0$ y x está cerca de x_0. Entonces f tiene un mínimo local en x_0.

El otro caso es análogo. □

OBSERVACIÓN 5.33. Sea $x_0 \in (a, b)$.

El desarrollo de Taylor de f alrededor de x_0 con $n = 2$ es

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2}(x - c)^2,$$

donde c está entre x y x_0.

La ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ es

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Así que del desarrollo de Taylor podemos concluir que si $f'' > 0$ entonces el gráfico de f queda por encima de su recta tangente en cada punto, condición que es equivalente a la convexidad.

Ejercicios.
Derivadas.

(1) Sea $f(x) = |x|^3$. Hallar $f'(x)$, $f''(x)$ para cualquier x de $\mathbb{R}$ y demostrar que $f'''(0)$ no existe.

(2) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$$

para todo x, y en $\mathbb{R}$. Demostrar que f es constante. ¿Puede generalizar este resultado?

(3) Supóngase que f es una función definida en un entorno de x y que $f''(x)$ existe. Demostrar que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = f''(x).$$

Dar un ejemplo que muestre que el límite anterior puede existir aunque $f''(x)$ no exista.

(4) Sean f y g funciones que poseen derivadas de todos los órdenes y sea $h = f \cdot g$

(a) Demostrar que

$$h''(x) = f''(x)\, g(x) + 2f'(x)\, g'(x) + f(x)\, g''(x).$$

(b) Demostrar que si n es un entero positivo entonces

$$h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x).$$

(Este resultado lleva el nombre de fórmula de Leibnitz)

(5) Sea f una función definida en un intervalo $[a, b]$ que tiene derivada por la derecha en un punto $c \in [a, b]$. Demostrar que f es continua por la derecha en c.

(6) Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ es racional;} \\ \operatorname{sen} x & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Probar que $f'(0) = 1$.

(7) Demostrar o dar un contraejemplo:

Si $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable en $c \in (a,b)$ y $f'(c) > 0$ entonces f es creciente en un subintervalo abierto de (a,b) que contiene a c.

(8) Demostrar que no existe k en $\mathbb{R}$ tal que la ecuación

$$x^3 - 3x + k = 0$$

tenga dos soluciones en [0,1].

(9) Demostrar que si

$$C_0 + \frac{C_1}{2} + \cdots + \frac{C_{n-1}}{n} + \frac{C_n}{n+1} = 0,$$

donde $C_0, \ldots C_n$ son constantes reales, entonces existe $x \in (0,1)$ tal que

$$C_0 + C_1 x + \cdots + C_{n-1}x^{n-1} + C_n x^n = 0.$$

(10) Supóngase que f está definida y es diferenciable para todo $x > 0$ y que $f'(x) \to 0$ si $x \to +\infty$. Sea

$$g(x) = f(x+1) - f(x).$$

Demostrar que $g(x) \to 0$ si $x \to +\infty$.

(11) Supóngase que

f es continua para $x \geq 0$.
f es derivable para $x > 0$.
$f(0) = 0$.
f' es monótona creciente.

Sea

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \qquad (x > 0).$$

Probar que g es monótona creciente.

(12) Demostrar que entre todos los rectángulos de igual perímetro, el que tiene mayor área es el cuadrado.

(13) Trazar los gráficos de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2}$

(c) $f(x) = e^{-x^2}$

(d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

(e) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$

(f) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-9}$

(14) Demostrar, sin calcular $\sqrt{66}$, que

$$\frac{1}{9} < \sqrt{66} - 8 < \frac{1}{8}.$$

(15) Supóngase que f es n veces derivable y que $f(x) = 0$ para $n+1$ diferentes valores de x. Demostrar que $f^{(n)}(x) = 0$ para algún x.

(16) Demostrar que si f es una función inyectiva, derivable en un intervalo y $f'(f^{-1}(a)) = 0$ entonces f^{-1} no es derivable en a.

(17) Demostrar el siguiente Teorema:

Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $f'(x) > 0$ para todo x de (a,b), o $f'(x) < 0$ para todo x de (a,b) y sea g su función inversa. Entonces g es diferenciable y

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

(18) Deducir las fórmulas para las derivadas de las funciones arcsen, arccos, arctan, arcsec, etc...

(19) * Demostrar que si $|f|$ es derivable en a y f es continua en a entonces f es derivable en a.

(20) ** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $f(0) = 0$ y $|f'(x)| \leq |f(x)|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(21) Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función continua. Supongamos que para cierto $c \in (a, b)$ se cumple que f es derivable en (a, c) y en (c, b) y que $\lim_{x\to c} f'(x) = L$. Demostrar que f es derivable en c y $f'(c) = L$.

(22) Demostrar que si $x \in \mathbb{R}$ entonces

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Hallar fórmulas similares para las funciones cos, exp, cosh y senh.

(23) Demostrar que $\operatorname{sen} x < x$ para todo $x > 0$.

(24) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivable y tal que f' es continua en $[a, b]$. Demostrar que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{f(t) - f(x)}{t - x} - f'(x) \right| < \varepsilon$$

si $0 < |t - x| < \delta$, $a \leq x$, $t \leq b$.

(25) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable. Demostrar que si existen $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ y son finitos entonces $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

(26) Dar un ejemplo de una función derivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que existe $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y es finito y no existe $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$.

(27) Demostrar las siguientes variantes de la regla de L'Hopital (colocar en detalle las hipótesis adecuadas en cada caso).

(a) Si $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$, y $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$, entonces $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.

(b) Si $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^-} g(x) = 0$, y $\lim_{x\to a^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$, entonces $\lim_{x\to a^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.

(c) Si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, y $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$, entonces $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

(d) Si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, y $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$, entonces $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.

(e) Si $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$, y $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$, entonces $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

(f) Si $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^-} g(x) = 0$, y $\lim_{x\to a^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$, entonces $\lim_{x\to a^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

(g) Si $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$, y $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$, entonces $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.

(h) Si $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^-} g(x) = 0$, y $\lim_{x\to a^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$, entonces $\lim_{x\to a^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.

(i) Si $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} g(x) = 0$, y $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$, entonces $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.
Indicación: Considerar $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{g\left(\frac{1}{x}\right)}$.

(j) Si $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} g(x) = 0$, y $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$, entonces $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.

(k) Si $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} g(x) = 0$, y $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$, entonces $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

(l) Notar que hasta ahora sólo se han considerado límites de la forma $\dfrac{0}{0}$. En este ejercicio se consideran límites de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$ y requiere de mayor manipulación. Si

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty,$$

y

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l,$$

entonces

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Indicación:

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - l\right| < \varepsilon \quad \text{para } x > a.$$

Por el teorema del valor medio de Cauchy se tiene que

$$\left|\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} - l\right| < \varepsilon \quad \text{para } x > a.$$

Notar que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \cdot \frac{f(x)}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{g(x)}.$$

(m) Finalmente establecer el siguiente resultado:

Si

$$\lim_{x\to[\,]} f(x) = \lim_{x\to[\,]} g(x) = \{\,\},$$

y

$$\lim_{x\to[\,]} \frac{f'(x)}{g'(x)} = (\,),$$

entonces

$$\lim_{x\to[\,]} \frac{f(x)}{g(x)} = (\,),$$

donde $[\,]$ puede ser a, a^+, a^-, $+\infty$ ó $-\infty$; $\{\,\}$ puede ser 0, $+\infty$ ó $-\infty$ y $(\,)$ puede ser l, $+\infty$ ó $-\infty$.

(28) Hallar los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{1-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^{10000}}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{x}\right)$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan 5x}{\operatorname{sen} 8x}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{sen} x}$

(29) Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0; \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Demostrar que:

(a) f posee un mínimo local en 0.

(b) $f'(0) = f''(0) = 0$.

(c) f no es creciente en ningún intervalo a la dercha de 0 y no es decreciente en ningún intervalo a la izquierda de 0.

CAPíTULO 6

Lectura recomendada: El método de la tangente de Newton.

1. Idea geométrica.

Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ queremos hallar una solución de la ecuación $f(x) = 0$. Es decir queremos hallar $x^* \in \mathbb{R}$ tal que $f(x^*) = 0$.

Supongamos que f es derivable.

Sea $x_1 \in \mathbb{R}$ un punto cualquiera, consideremos la recta L_1, tangente al gráfico de f en el punto $(x_1, f(x_1))$.

La ecuación de L_1 es

$$y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1).$$

Sea $x_2 \in \mathbb{R}$ el punto de corte de la recta L_1 con el eje x, entonces

$$0 = f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1),$$

es decir,

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Podemos repetir este proceso: considerar la recta L_2, tangente al gráfico de f en el punto $(x_2, f(x_2))$, hallar su punto de corte x_3 con el eje x, y así sucesivamente.

De esta manera se obtiene una sucesión, definida en forma recursiva, dada por

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

El siguiente gráfico sugiere que la sucesión $\{x_k\}$ converge a una solución de la ecuación $f(x) = 0$.

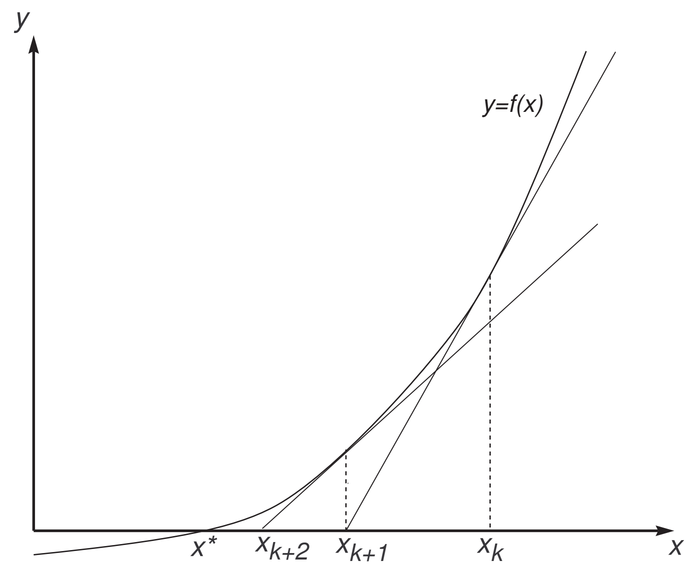

Figura 6.1. Método de la tangente de Newton

Se puede probar que, bajo ciertas hipótesis, la sucesión $\{x_k\}$ converge a un número $x*$ tal que $f(x*) = 0$. En la Sección 3 de este Apéndice se estudia con más detalle este problema, considerando una sucesión ligeramente modificada.

El método de la tangente de Newton no siempre funciona bien, a continuación se ilustran gráficamente situaciones en las que el método puede resultar inadecuado.

En el siguiente ejemplo, la tangente al gráfico de f en el punto $(x_2, f(x_2))$ es horizontal ($f'(x_2) = 0$), por lo tanto x_3 no está definido.

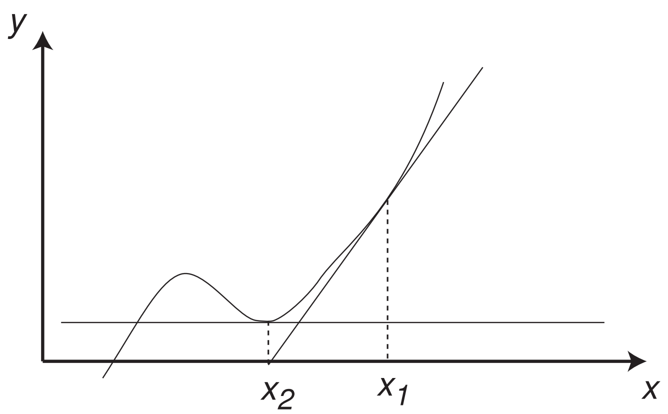

Figura 6.2.

En el siguiente ejemplo la sucesión se aleja del punto que estamos buscando.

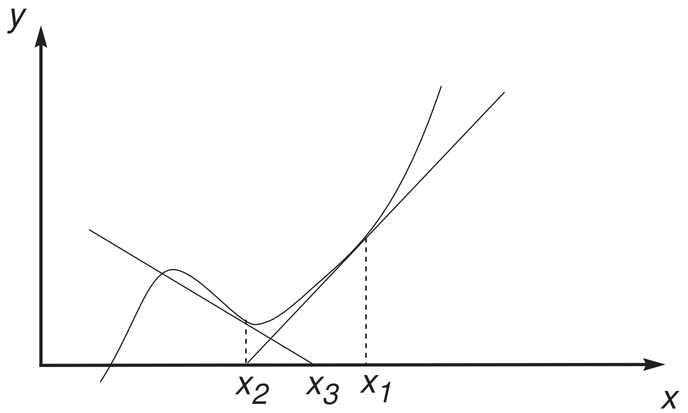

Figura 6.3.

En el siguiente ejemplo la sucesión oscila entre dos puntos.

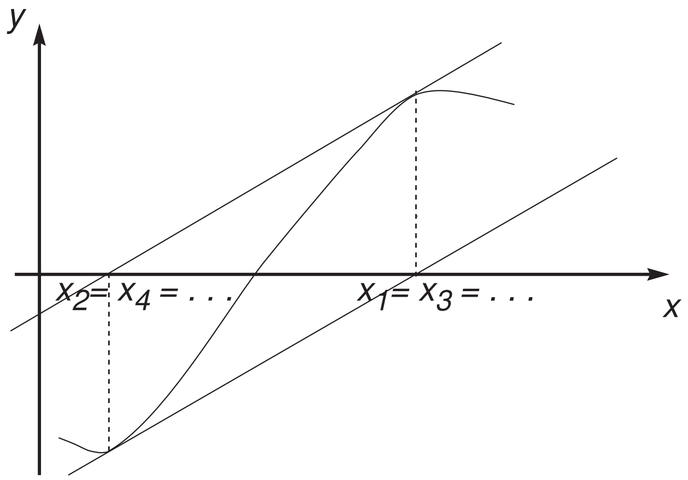

Figura 6.4.

2. Construcción de una sucesión de Cauchy de números racionales que no tiene límite racional.

El método de la tangente de Newton puede ser utilizado para construir una sucesión de números racionales que converge a $\sqrt{2}$. De esta manera es posible obtener una sucesión de Cauchy de números racionales que no tiene límite racional.

Consideremos la función $f(x) = x^2 - 2$, los ceros de f son $\pm\sqrt{2}$, si comenzamos la iteración de Newton con $x_1 = 2$ deberíamos obtener una sucesión que converge a $\sqrt{2}$.

En este caso

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ &= x_k - \frac{x_k^2 - 2}{2x_k} \\ &= \frac{x_k^2 + 2}{2x_k} \end{aligned}$$

El objetivo del siguiente ejercicio es demostrar que la sucesión $\{x_k\}$ es de Cauchy y que no puede tener límite racional.

Ejercicio 6.1.
Considerar la sucesión definida por

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_{k+1} &= \frac{x_k^2 + 2}{2x_k} = \frac{x_k}{2} + \frac{1}{x_k} \end{aligned}$$

Demostrar:

(1) x_k es racional para todo k.
(2) $1 \leq x_k \leq 2$ para todo k.
(3) $|x_{k+1} - x_k| \leq \frac{1}{2}|x_k - x_{k-1}|$.
(4) La sucesión $\{x_k\}$ es de Cauchy.
(5) No existe ningún número racional q tal que $\lim_{k\to\infty} x_k = q$.

3. Método de la tangente de Newton modificado.

Al utilizar el método de la tangente de Newton para aproximar los ceros de una función f es necesario calcular $f'(x_1)$, $f'(x_2)$, etc... Existen formas de modificar la sucesión $\{x_k\}$ para simplificar los cálculos. Una simplificación que funciona bastante bien es la siguiente:

Supongamos que la derivada de f es acotada, que f tiene un cero en el intervalo $[a, b]$ y que $f'(x) > 0$ en $[a, b]$.

Sea $M = \max\{f'(x) : x \in [a, b]\}$, comenzamos con un punto x_1 y consideramos la recta de pendiente M que pasa por el punto $(x_1, f(x_1))$, esta recta corta al eje x en el punto

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{M}.$$

Si continuamos repitiendo este proceso obtenemos la siguiente sucesión:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{M}.$$

La siguiente gráfica sugiere que, si tomamos x_1 en forma adecuada debemos aproximarnos a un cero de f.

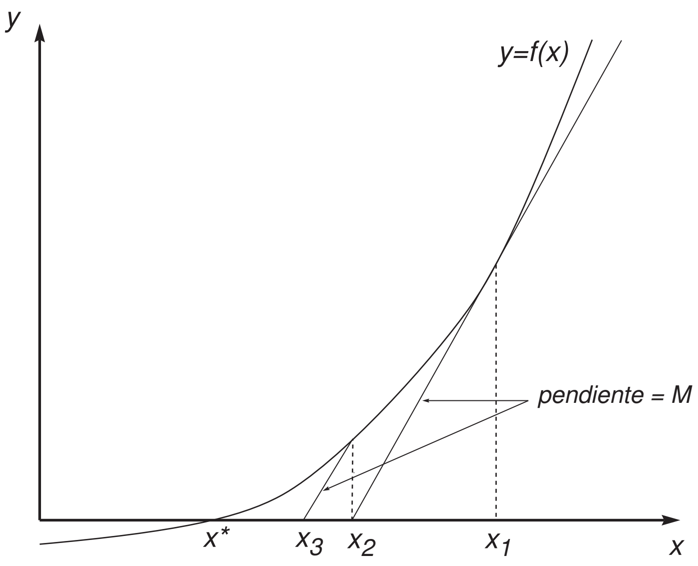

FIGURA 6.5. Método de Newton modificado

La demostración de la convergencia de este método no es difícil y la damos a continuación.

DEFINICIÓN 6.2. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sea $\varphi : I \to I$ una función. Se dice que φ es una *contracción* si existe r, $0 < r < 1$, tal que

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq r|x - y|$$

para todo $x, y \in I$.

OBSERVACIÓN 6.3. Claramente toda contracción es una función continua.

TEOREMA 6.4. *Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y acotado y sea $\varphi : [a, b] \to [a, b]$ una contracción. Entonces existe un único punto $x^* \in [a, b]$ tal que $\varphi(x^*) = x^*$. Más aún, si $x_1 \in [a, b]$, la sucesión definida por*

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

converge a x^*

DEMOSTRACIÓN.

Demostremos primero la existencia.

Sea $x_1 \in [a, b]$ arbitrario.

Consideremos la sucesión definida por $x_{k+1} = \varphi(x_k)$. Entonces

$$|x_{n+1} - x_n| = |\varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})| \leq r|x_n - x_{n-1}|,$$

de donde sigue por inducción que $|x_{n+1} - x_n| \leq r^{n-1}|x_2 - x_1|$. Luego, si $0 < n < m$

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &\leq |x_n - x_{n+1}| + \cdots + |x_{m-1} - x_m| \\ &\leq (r^{n-1} + \cdots r^{m-1})|x_2 - x_1| \\ &\leq r^{n-1}(1 + r + r^2 + \cdots)|x_2 - x_1|, \end{aligned}$$

usando la fórmula para la suma de la serie geométrica se obtiene

$$|x_n - x_m| \leq \frac{r^{n-1}\,|x_2 - x_1|}{1 - r}.$$

De esta última desigualdad sigue inmediatamente que la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy, por lo tanto converge a un punto $x^* \in [a, b]$. Como φ es continua

$$\varphi(x^*) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n = x^*.$$

Finalmente, para demostrar la unicidad, supongamos que $x^{**} \in [a, b]$ y $\varphi(x^{**}) = x^{**}$. Entonces

$$|x^{**} - x^*| = |\varphi(x^{**}) - \varphi(x^*)| \leq r\,|x^{**} - x^*|.$$

Como $r \in (0, 1)$ tenemos que $x^{**} = x^*$.

$\square$

Observación 6.5. Un punto tal que $\varphi(x^*) = x^*$ es lo que se llama un punto fijo para φ. El teorema anterior es un caso particular del teorema del punto fijo en espacios métricos, que dice que “Toda contracción en un espacio métrico completo posee un único punto fijo”.

Teorema 6.6. *Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y acotado y sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Supongamos*

(a) *$f(a) < 0 < f(b)$,*

(b) *Existen $m, M \in \mathbb{R}$ tales que $0 < m < f'(x) < M$ para todo $x \in [a, b]$.*

Entonces, si $x_1 \in [a, b]$, la sucesión definida por

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{M}$$

converge al único punto $x^* \in [a, b]$ tal que $f(x^*) = 0$.

Demostración. Sea $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{M}.$$

Vamos a probar que φ es una contracción de $[a, b]$ en $[a, b]$. Como $\varphi'(x) = 1 - [f(x)/M]$ tenemos que

$$0 \leq \varphi'(x) \leq 1 - \frac{m}{M} = r < 1 \tag{6.1}$$

para todo $x \in [a, b]$, por lo tanto φ es una función no decreciente. Luego

$$a < a - \frac{f(a)}{M} = \varphi(a) \leq \varphi(x) \leq \varphi(b) = b - \frac{f(b)}{M} < b$$

para todo $x \in [a, b]$. De esta última desigualdad se concluye que $\varphi[a, b] \subset [a, b]$ y del teorema del valor medio y la desigualdad 6.1 sigue que φ es una contracción.

Del Teorema anterior sigue inmediatamente el resultado. □

Ejercicio 6.7. Utilizar el Teorema anterior para demostrar que la sucesión definida por

$$x_1 = 2$$

$$x_{k+1} = \frac{2 + 4x_k - x_k^2}{4}$$

es convergente. También hallar su límite.

Ejercicio 6.8. Demostrar directamente que la sucesión definida en el ejercicio anterior es de Cauchy.

Ejercicio 6.9. Construir una sucesión de números racionales que converja a $\sqrt[3]{5}$.

CAPíTULO 7

Lectura recomendada: De los números naturales a los números reales.

1. Introducción.

El propósito de este apéndice es dar una visión, a través de ejercicios, de cómo se pueden ir obteniendo las distintas clases de números.

El cuerpo de los números racionales $\mathbb{Q}$, puede ser construido a partir del conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ y este último se puede construir a partir del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales. El conjunto de los números naturales se puede obtener a partir de la teoría de conjuntos o, en forma axiomática, a partir de los axiomas de Peano.

El cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$, se puede construir a partir del cuerpo de los números racionales. Existen dos métodos para esta construcción, el de las cortaduras de Dedekind y el de las sucesiones de Cauchy; la construcción que daremos usa este último método.

Para quien quiera profundizar más en el tema la siguiente bibliografía puede serle útil:

En el libro de Cohen y Ehrlich [**3**] se pueden encontrar las construcciones de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ lo construye a partir de los axiomas de Peano.

El libro de Halmos [**5**] es una excelente introducción a la teoría de conjuntos. En él se encuentra una construcción de $\mathbb{N}$ a partir de la teoría de conjuntos.

Una construcción de $\mathbb{R}$ usando el método de las cortaduras de Dedekind se puede encontrar en el libro de Rudin [**9**].

2. Los números naturales.

En esta sección vamos a ver como es posible obtener el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales a partir de los axiomas de Peano.

La idea es bastante sencilla, si examinamos la lista de los números naturales:

$$1, 2, 3, 4, \ldots$$

observamos que cada número natural tiene un sucesor y todo número natural es el sucesor de otro, salvo el 1. También es importante observar que todos los números naturales se pueden obtener comenzando del 1 y considerando sucesores repetidamente.

Los axiomas de Peano son los siguientes:
Existe un conjunto $\mathbb{N}$ y una función $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que:

A_1 S es inyectiva.
A_2 S no es sobreyectiva.
A_3 (Axioma de inducción) Si u es un elemento de $\mathbb{N}$ que no está en la imagen de S y M es un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que:
 (1) $u \in M$
 (2) $S(n) \in M$, siempre que $n \in M$
 entonces $M = \mathbb{N}$.

Si $n \in \mathbb{N}$, el sucesor de n es $S(n)$.

(1) Demostrar que existe exactamente un número natural que no es el sucesor de ningún otro número natural.

Por 1 denotaremos al único número natural que no es el sucesor de ningún otro.

(2) Demostrar que $S(n)$ es diferente de n para todo n.

Se puede demostrar lo siguiente (ver [**3**]):

(i) El conjunto de los números naturales es igual a

$$\{1, S(1), S(S(1)), S(S(S(1))), \dots\}.$$

(ii) Existe una única operación binaria, $+$, que llamaremos suma en $\mathbb{N}$ tal que:
 (a) $m + 1 = S(m)$ para cada $m \in \mathbb{N}$,
 (b) $m + S(n) = S(m + n)$ para cada $m, n \in \mathbb{N}$,
 (c) $+$ es asociativa y conmutativa

(iii) Existe una única operación binaria, $\cdot$, que llamaremos producto en $\mathbb{N}$ tal que:
 (a) $m \cdot 1 = m$ para cada $m \in \mathbb{N}$,
 (b) $m \cdot S(n) = m \cdot n + m$ para cada $m, n \in \mathbb{N}$,
 (c) $\cdot$ es asociativa y conmutativa
 (d) $\cdot$ es distributiva con respecto a $+$: $m \cdot (n+p) = m \cdot n + m \cdot p$ para cada $m, n, p \in \mathbb{N}$.

Si $n, m \in \mathbb{N}$, diremos que $m < n$ si existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $m + p = n$. Por supuesto $m \leq n$ si $m < n$, ó si $n = m$.

(iv) Si $m, n \in \mathbb{N}$ solamente se cumple una de las siguientes: $m = n$, $m < n$ ó $m > n$.

(v) Sean $m, n, p \in \mathbb{N}$. Si $m < n$ y $n < p$, entonces $m < p$.

3. Los números enteros.

La construcción de los enteros a partir de los naturales es bastante sencilla.
En el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(m, n) : m, n \in \mathbb{N}\}$ se define la siguiente relación:

$$(m, n) \approx (p, q) \text{ si } m + q = p + n.$$

(1) Demostrar $\approx$ que es una relación de equivalencia.

Definición 7.1. Un *número entero* es una clase de equivalencia con respecto a la relación $\approx$.

Como es usual el conjunto de los números enteros lo denotaremos por $\mathbb{Z}$.

(2) Demostrar que si $(m, n), (m', n'), (p, q), (p', q') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y $(m, n) \approx (m', n')$, $(p, q) \approx (p', q')$ entonces

$$(m + p, n + q) \approx (m' + p', n' + q'),$$

$$(mp + nq, mq + np) \approx (m'p' + n'q', m'q' + n'p').$$

Denotemos por $\overline{(m, n)}$ a la clase de equivalencia de (m, n).

Definición 7.2. El *producto* y la *suma* de enteros se definen de la siguiente manera:

$$\overline{(m, n)} +_{\mathbb{Z}} \overline{(p, q)} = \overline{(m + p, n + q)},$$

$$\overline{(m, n)} \cdot_{\mathbb{Z}} \overline{(p, q)} = \overline{(mp + nq, mq + np)}.$$

(3) Demostrar que $+_{\mathbb{Z}}$ y $\cdot_{\mathbb{Z}}$ están bien definidas.

Usaremos $+$ y $\cdot$ en vez de $+_{\mathbb{Z}}$ y $\cdot_{\mathbb{Z}}$ cuando no se preste a confusión. También, como es usual, escribiremos ab en vez de $a \cdot b$.

(4) Demostrar que $(\mathbb{Z}, +_{\mathbb{Z}}, \cdot_{\mathbb{Z}})$ es un anillo conmutativo con identidad, es decir, satisface las propiedades (P1) a (P7) y (P9) enunciadas en el Capítulo 1.

(5) Demostrar que si $a, b \in \mathbb{Z}$ y $a \cdot_{\mathbb{Z}} b = 0_{\mathbb{Z}}$ entonces $a = 0_{\mathbb{Z}}$ ó $b = 0_{\mathbb{Z}}$. Por lo tanto $(\mathbb{Z}, +_{\mathbb{Z}}, \cdot_{\mathbb{Z}})$ es un domino de integridad.

(6) Demostrar que la función $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$\varphi(n) = \overline{(n, 0)}$$

es inyectiva y preserva las operaciones de suma y producto.

Lo anterior nos permite identificar $\mathbb{N}$ con un subconjunto de $\mathbb{Z}$. Si $n \in \mathbb{N}$, en vez de escribir $\overline{(n, 0)}$, escribiremos simplemente n y definimos $-n$ por $-n = \overline{(0, n)}$

(7) Demostrar que $n + (-n) = 0$.

(8) Demostrar que $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N})$ y que la unión es disjunta.

(9) Definir $a < b$ para $a, b \in \mathbb{Z}$ y demostrar las propiedades básicas de $<$.

4. Los números racionales.

La construcción del cuerpo de los números racionales a partir de los números enteros también es bastante sencilla. Como esta construcción tiene bastante similitud con la de los enteros, daremos menos detalles.

En el conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ se define la siguiente relación:

$$(a, b) \approx (c, d) \text{ si } ad = bc.$$

(1) Demostrar $\approx$ que es una relación de equivalencia.

Definición 7.3. Un *número racional* es una clase de equivalencia con respecto a la relación $\approx$.

Como es usual el conjunto de los números racionales lo denotaremos por $\mathbb{Q}$.

(2) Demostrar que si $(a,b),(a',b'),(c,d),(c',d') \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ y $(a,b)\approx(a',b')$, $(c,d)\approx(c',d')$ entonces

$$(ad+bc,bd)\approx(a'd'+b'c',b'd'),$$

$$(ac,bd)\approx(a'c',b'd').$$

Denotemos por $\overline{(a,b)}$ a la clase de equivalencia de (a,b).

Definición 7.4. El *producto* y la *suma* de racionales se definen de la siguiente manera:

$$\overline{(a,b)} +_{\mathbb{Q}} \overline{(c,d)} = \overline{(ad+bc,bd)},$$

$$\overline{(a,b)} \cdot_{\mathbb{Q}} \overline{(c,d)} = \overline{(ac,bd)}.$$

(3) Demostrar que $+_{\mathbb{Q}}$ y $\cdot_{\mathbb{Q}}$ están bien definidas.

Usaremos $+$ y $\cdot$ en vez de $+_{\mathbb{Q}}$ y $\cdot_{\mathbb{Q}}$ cuando no se preste a confusión. También, como es usual, escribiremos ab en vez de $a\cdot b$.

(4) Demostrar que $(\mathbb{Q}, +_{\mathbb{Q}}, \cdot_{\mathbb{Q}})$ es un cuerpo ordenado, es decir satisface las propiedades (P1) a (P12) enunciadas en el Capítulo 1.

(5) Demostrar que $\mathbb{Z}$ se identifica, en forma natural, con un subconjunto de $\mathbb{Q}$.

5. Construcción del cuerpo de los números reales mediante el método de sucesiones de Cauchy.

Definición 7.5. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números racionales. Diremos que $\{x_n\}$ es *de Cauchy* si para cada número racional $\varepsilon > 0$ existe $N\in\mathbb{N}$ tal que si $n,m\geq N$ entonces $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de las sucesiones racionales de Cauchy.

(0) Demostrar que la suma y el producto de sucesiones de Cauchy es una sucesión de Cauchy. Demostrar que el cociente de una sucesión de Cauchy entre otra sucesión de Cauchy que no se anula y que no tiene límite cero es también una sucesión de Cauchy.

En $\mathcal{C}$ se define la siguiente relación $\approx$:

Si $\{x_n\} \in \mathcal{C}$, $\{y_n\} \in \mathcal{C}$ diremos que $\{x_n\} \approx \{y_n\}$ si $\lim x_n - y_n = 0$.

(1) Probar que $\approx$ es una relación de equivalencia.

(2) Sea $q \in \mathbb{Q}$ y $\{x_n\} \in \mathcal{C}$. Demostrar que $\lim x_n = q$ si y sólo si $\{x_n\} \approx \{q\}$ donde $\{q\}$ es la sucesión $\{q, q, q, \dots\}$.

Definición 7.6. Un *número real* es una clase de equivalencia con respecto a la relación $\approx$.

El conjunto de los números reales lo denotaremos por $\mathbb{R}$.

Por $\overline{\{x_n\}}$ denotaremos a la clase de equivalencia de la sucesión $\{x_n\}$.

(3) Sean $\{x_n\}, \{y_n\}, \{x'_n\}, \{y'_n\} \in \mathcal{C}$ tales que $\{x_n\} \approx \{x'_n\}$, $\{y_n\} \approx \{y'_n\}$.

Demostrar:
(a) $\{x_n + y_n\} \approx \{x'_n + y'_n\}$.
(b) $\{x_n \cdot y_n\} \approx \{x'_n \cdot y'_n\}$.

Definición 7.7. La *suma* y el *producto* de números reales se definen así: Si $x, y \in \mathbb{R}$ y $x = \overline{\{x_n\}}$, $y = \overline{\{y_n\}}$ entonces

$$x +_{\mathbb{R}} y = \overline{\{x_n + y_n\}}$$
$$x \cdot_{\mathbb{R}} y = \overline{\{x_n \cdot y_n\}}$$

(4) Demostrar que $+_{\mathbb{R}}$ y $\cdot_{\mathbb{R}}$ están bien definidas.

Cuando no se preste a confusión escribiremos $+$ y $\cdot$ en vez de $+_{\mathbb{R}}$ y $\cdot_{\mathbb{R}}$.

(5) Probar que en $\mathbb{R}$ se satisfacen las propiedades (P1) a (P9) enunciadas en el Capítulo 1. Es decir $(\mathbb{R}, +_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}})$ es un cuerpo. ($0_{\mathbb{R}} = \overline{\{0\}}$, $1_{\mathbb{R}} = \overline{\{1\}}$)

Diremos que $x \in \mathbb{R}$ es positivo si $x \neq 0$ y $x = \overline{\{x_n\}}$, donde $x_n > 0$ para todo n.

Sea P el conjunto de los números reales positivos.

(6) Demostrar que P satisface las propiedades (P10), (P11) y (P12) enunciadas en el Capítulo 1.

$\mathbb{Q}$ se puede identificar con el conjunto de los números reales de la forma $\overline{\{q\}}$, $q \in \mathbb{Q}$.

(7) Verificar que la identificación anterior preserva el orden y las operaciones de suma y producto.

(8) Demostrar que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, es decir, si $x \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$, ($\varepsilon \in \mathbb{R}$) existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $|x - q| < \varepsilon$.

(9) Demostrar que entre dos números reales existe un número racional.

(10) Demostrar que $\mathbb{R}$ es Arquimediano.

(11) Demostrar que $\mathbb{R}$ es completo, es decir, toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ es convergente.

(12) Demostrar que todo subconjunto acotado de $\mathbb{R}$ posee supremo.

(13) Demostrar la unicidad de $\mathbb{R}$:

Si $\mathbb{F}$ es otro conjunto en el que están definidas operaciones de suma y producto y se satisfacen las propiedades (P1) a (P13) entonces $\mathbb{F}$ y $\mathbb{R}$ son isomorfos, es decir existe una biyección entre $\mathbb{F}$ y $\mathbb{R}$ que respeta las operaciones de suma, producto y el orden.

Observación 7.8. Al construir $\mathbb{R}$ mediante el método de sucesiones de Cauchy se obtiene como resultado inmediato que toda sucesión de Cauchy es convergente. La propiedad del supremo (P13) se obtiene posteriormente.

Lo que ocurre es lo siguiente:

Si un cuerpo satisface las propiedades (P1) a (P12) entonces las siguientes propiedades adicionales son equivalentes:

(P13) la propiedad del supremo

(P14) el cuerpo es Arquimediano y toda sucesión de Cauchy es convergente.

Bibliografía

[1] Apostol, T. *Calculus.* Tomos 1 y 2. Reverté.

[2] Apostol, T. *Mathematical Analysis.*

[3] Cohen, L. and Ehrlich, G. *The structure of the real number system.* Van Nostrand, 1963. 107, 108

[4] Deminovich, B. *Problemas y ejercicios de Análisis Matemático.*MIR

[5] Halmos, P. *Teoría intuitiva de los conjuntos.* CECSA, 1971. 107

[6] Horváth, J. *Introducción a la topología general* Monografía N 9, Serie de Matemática. O.E.A. 24

[7] Lick, D. *The advanced calculus of one variable.* Appleton-Century-Crofts, 1971.

[8] Protter, M. H. and Morrey, C. B. *A First Course in Real Analysis.*

[9] Rudin, W. *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw Hill 107

[10] Spivack, M. *Calculus.* Tomos 1 y 2. Reverté, 1981

[11] Stromberg, H. *An Introduction to Classical Real Analysis.*

[12] White, A. *Real Analysis; An Introduction.*

Índice alfabético