UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA
LABORATORIO DE FORMAS EN GRUPOS

Cálculo integral y series de funciones

Ramón Bruzual
Marisela Domínguez

Caracas, Venezuela
Febrero 2005

Ramón Bruzual
Correo-E: rbruzual@euler.ciens.ucv.ve

Marisela Domínguez
Correo-E: mdomin@euler.ciens.ucv.ve

Laboratorio de Formas en Grupos
Centro de Análisis
Escuela de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad Central de Venezuela

http://euler.ciens.ucv.ve/~labfg

Nota: Este material está disponible en la página web
http://euler.ciens.ucv.ve/~labfg/guias.htm
En general mantenemos una réplica en un servidor externo a la Universidad Central de Venezuela, el vínculo se encuentra indicado en esa misma página web.

Prólogo

Esta guía ha sido concebida para ser utilizada en la segunda parte del curso de Análisis I de la Licenciatura en Matemática de la Facultad de Ciencias.

En este curso se debe dar una visión rigurosa del cálculo diferencial y del cálculo integral en una variable. Esta guía comienza con una discusión del concepto de integral.

Los siguientes temas son tratados con rigurosidad y en forma exhaustiva:

(1) Integral de Riemann, definición, funciones integrables, integrales superior e inferior, condición de integrabilidad de Riemann, ejemplos de funciones no integrables. Teorema fundamental del Cálculo, integración por partes.

(2) La función logarítmica, la función exponencial y las funciones trigonométricas.

(3) Series infinitas, convergencia absoluta y condicional, reordenamiento. Multiplicación de series.

(4) Sucesiones de funciones, convergencia uniforme, relación con continuidad, diferenciación e integración. Convergencia de series de funciones. Condiciones suficientes. Teorema de Weierstrass.

(5) Integrales impropias del primer tipo. Valor principal de Cauchy, pruebas de convergencia, integrales y series. Integrales impropias del segundo tipo.

(6) Series de potencia, intervalos de convergencia, derivadas. Teorema de Taylor.

Se ha incorporado un último capítulo, donde se hace una breve introducción a las series de Fourier.

Aunque la defínción rigurosa de las funciones exponencial, logarítmica y trigonométricas se hace en lo capítulos 2 y 3, estas funciones y sus propiedades son usadas, suponiendo un conocimiento previo intuitivo, en la parte previa a estos capítulos.

Tanto el trabajo de mecanografía como la elaboración de los gráficos estuvo a cargo de los autores. Agradecemos cualquier observación o comentario que deseen hacernos llegar.

Ramón Bruzual.
Marisela Domínguez.
Febrero 2005.

Índice general

CAPíTULO 1

Integrales.

1. Definición de la integral de Riemann.

DEFINICIÓN 1.1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Una *partición* del intervalo $[a, b]$ es una colección finita de puntos de $[a, b]$, de los cuales uno es a y otro es b.

Los puntos de una partición pueden ser numerados como $t_0, t_1, \dots, t_n$, de forma tal que el conjunto quede ordenado de la siguiente manera

$$a = t_o < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Al hablar de una partición siempre supondremos que está ordenada de la forma anterior.

DEFINICIÓN 1.2. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Sea $P = \{t_o, t_1, \dots, t_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$.

Para $1 \leq i \leq n$, sean

$$m_i = \text{ínf}\{f(x) : \; t_{i-1} \leq x \leq t_i\},$$

$$M_i = \sup\{f(x) : \; t_{i-1} \leq x \leq t_i\}.$$

La *suma inferior de f correspondiente a P*, se denotará por $L(f, P)$ y es

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}).$$

La *suma superior de f correspondiente a P*, se denotará por $U(f, P)$ y es

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}).$$

A continuación ilustramos, mediante ejemplos gráficos, el significado geométrico de $L(f, P)$ y de $U(f, P)$.

La suma de las áreas de los rectángulos sombreados es $L(f, P)$.

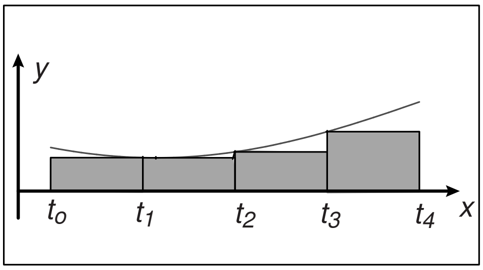


FIGURA 1.1. Suma inferior

La suma de las áreas de los rectángulos sombreados es $U(f, P)$.

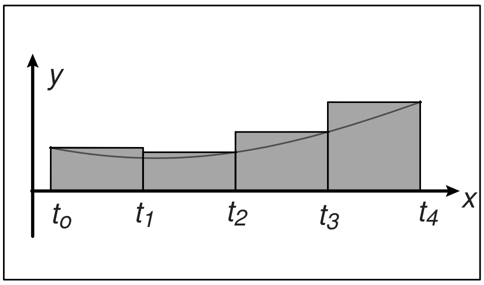


FIGURA 1.2. Suma superior

El siguiente dibujo nos ilustra la suma superior para la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0, 10]$, con la partición $\{0, 1, 2, \ldots, 10\}$.

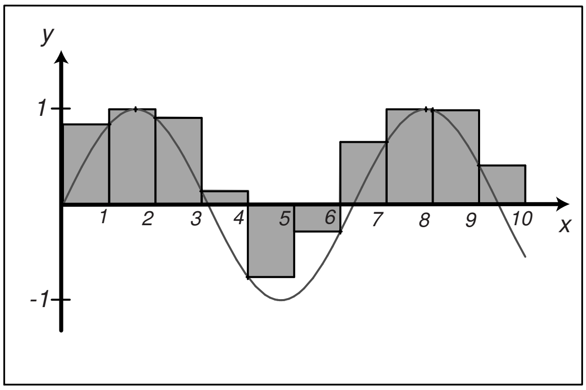


FIGURA 1.3. Suma superior para $f(x) = \operatorname{sen} x$

El siguiente dibujo nos ilustra la suma inferior para la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el mismo intervalo $[0, 10]$, con la misma partición $\{0, 1, 2, \ldots, 10\}$.

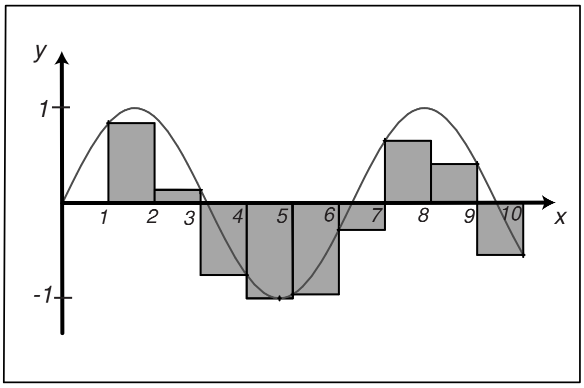


FIGURA 1.4. Suma inferior para $f(x) = \operatorname{sen} x$

OBSERVACIÓN 1.3. La hipótesis f acotada es esencial para poder garantizar que tanto M_i como m_i están definidos.

También es necesario definirlos como supremo e ínfimo y no como máximos y mínimos, ya que f no se supone continua.

El siguiente resultado es inmediato.

PROPOSICIÓN 1.4. *Si P es una partición de $[a, b]$, entonces*

$$L(f, P) \leq U(f, P).$$

LEMA 1.5. *Sea f una función acotada definida en el intervalo $[a, b]$. Si P y Q son dos particiones del intervalo $[a, b]$ tales que $P \subset Q$ entonces*

$$L(f, P) \leq L(f, Q) \leq U(f, Q) \leq U(f, P).$$

DEMOSTRACIÓN.

La desigualdad del medio es consecuencia de la Proposición 1.4.

Probaremos la desigualdad para sumas inferiores.

Consideremos primero el caso especial en que Q contiene exactamente un punto más que P, es decir, existe k tal que

$$P = \{t_0, t_1, \dots, t_{k-1}, t_k, \dots, t_n\}, \quad Q = \{t_0, t_1, \dots, t_{k-1}, u, t_k, \dots, t_n\},$$

donde

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < u < t_k < \ldots < t_n.$$

Sean

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{f(x) :\ t_{i-1} \leq x \leq t_i\}, \text{ para } i = 1, \dots, n, \\ m' &= \inf\{f(x) :\ t_{k-1} \leq x \leq u\}, \\ m'' &= \inf\{f(x) :\ \ \ u \leq x \leq t_k\}. \end{aligned}$$

Es claro que $m_k \leq m'$ y $m_k \leq m''$. De donde

$$m_k(t_k - t_{k-1}) = m_k(u - t_{k-1} + t_k - u) \leq m'(u - t_{k-1}) + m''(t_k - u).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} L(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} m_i(t_i - t_{i-1}) + m_k(t_k - t_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{k-1} m_i(t_i - t_{i-1}) + m'(u - t_{k-1}) + m''(t_k - u) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \\ &= L(f, Q) \end{aligned}$$

Claramente el caso general se obtiene fácilmente a partir de éste.

La prueba de la desigualdad para sumas superiores es análoga y queda como ejercicio.

□

Teorema 1.6. *Sea f una función acotada definida en el intervalo $[a, b]$.*
Si P y Q son particiones del intervalo $[a, b]$, entonces

$$L(f, P) \leq U(f, Q).$$

Demostración. Sea P' una partición que contiene a P y a Q. Por el Lema 1.5

$$L(f, P) \leq L(f, P') \leq U(f, P') \leq U(f, Q).$$

□

Definición 1.7. Una función acotada f definida en $[a, b]$ es *integrable sobre* $[a, b]$ si

$$\sup\{L(f, P) :\ P \text{ es una partición de } [a, b]\} = \inf\{U(f, P) :\ P \text{ es una partición de } [a, b]\}.$$

Definición 1.8. En caso de que f sea integrable el número común de la definición anterior recibe el nombre de *integral de f sobre* $[a, b]$ y se denota por

$$\int_a^b f.$$

Observación 1.9. La integral que se está desarrollando en estas notas lleva el nombre de integral de Riemann. Es usual hablar de función integrable Riemann y de integral de Riemann al referirse a los conceptos anteriores. La definición anterior no es la que originalmente fue dada por Riemann. Esta definición fue dada posteriormente por Darboux y es equivalente a la definición original de Riemann. Para más detalles ver la Sección 4.

Ejemplo 1.10. La función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

no es integrable Riemann porque

$$\sup\{L(f, P) : \ P \text{ es una partición de } [0, 1]\} = 0$$
$$\text{ínf}\{U(f, P) : \ P \text{ es una partición de } [0, 1]\} = 1.$$

Ejemplo 1.11. Sea $g : [0, 2] \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

entonces g es integrable en $[0, 2]$ y $\int_a^b g = 0$.

Para verificar esta última afirmación basta notar lo siguiente:
Si P es una partición de $[0, 2]$ entonces $L(g, P) = 0$.
Si $0 < \varepsilon < 1$ y consideramos la partición de $[0, 2]$ dada por

$$P = \{0, 1 - \varepsilon/2, 1 + \varepsilon/2, 2\},$$

obtenemos que $U(g, P) = \varepsilon$, de donde sigue que

$$\text{ínf}\{U(g, P) : \ P \text{ es una partición de } [0, 2]\} = 0.$$

Teorema 1.12. *Sea f una función acotada definida en el intervalo $[a, b]$. Entonces f es integrable sobre $[a, b]$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición P de $[a, b]$ tal que*

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

Demostración. Supongamos para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición P_ε tal que

$$U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Como

$$\begin{aligned} \inf\{U(f, P) : \ P \text{ es una partición de } [a, b]\} &\leq U(f, P_\varepsilon), \\ \sup\{L(f, P) : \ P \text{ es una partición de } [a, b]\} &\geq L(f, P_\varepsilon) \end{aligned}$$

se tiene que

$$0 \leq \inf_P\{U(f, P)\} - \sup_P\{L(f, P)\} \leq U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

De donde

$$0 \leq \inf_P\{U(f, P)\} - \sup_P\{L(f, P)\} < \varepsilon.$$

Como esto último es válido para todo $\varepsilon > 0$, tiene que ser

$$\inf_P\{U(f, P)\} = \sup_P\{L(f, P)\}.$$

De donde sigue que f es integrable.

Recíprocamente, supongamos que f es integrable. Entonces

$$\inf_P\{U(f, P)\} = \sup_P\{L(f, P)\} = \int_a^b f.$$

Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$ existen particiones P' y P'' del intervalo $[a, b]$ tales que

$$U(f, P'') < \int_a^b f + \varepsilon/2,$$

$$\int_a^b f - \varepsilon/2 < L(f, P').$$

Luego

$$U(f, P'') - L(f, P') < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} - \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Sea P una partición que contiene a P' y a P''. Entonces

$$U(f, P) \leq U(f, P'') \quad \text{y} \quad L(f, P') \leq L(f, P).$$

De donde

$$U(f,P)-L(f,P)\leq U(f,P'')-L(f,P')<\varepsilon.$$

□

Teorema 1.13. *Sea f una función continua definida en el intervalo $[a,b]$. Entonces f es integrable en $[a,b]$.*

Demostración. Como $[a,b]$ es compacto f es uniformemente continua en $[a,b]$.

Dado $\varepsilon>0$, sea $\delta>0$ tal que si x y x' están $[a,b]$ y $|x-x'|<\delta$ entonces

$$|f(x)-f(x')|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Sea $P=\{t_0,t_1,\dots,t_n\}$ una partición del intervalo $[a,b]$ tal que $|t_i-t_{i-1}|<\delta$ para $i=1,2,\dots,n$.

Para $1\leq i\leq n$, sean

$$m_i=\text{ínf}\{f(x):\ t_{i-1}\leq x\leq t_i\},$$

$$M_i=\sup\{f(x):\ t_{i-1}\leq x\leq t_i\}.$$

Por la continuidad de f existen y_i y $z_i\in[t_{i-1},t_i]$ tales que $f(y_i)=m_i$ y $f(z_i)=M_i$.

Por lo tanto

$$M_i-m_i=f(z_i)-f(y_i)\leq\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\quad\text{para}\quad i=1,2,\dots,n.$$

De donde

$$\begin{aligned}U(f,P)-L(f,P)&=\sum_{i=1}^n M_i(t_i-t_{i-1})-\sum_{i=1}^n m_i(t_i-t_{i-1})\\&=\sum_{i=1}^n(M_i-m_i)(t_i-t_{i-1})\\&\leq\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{i=1}^n(t_i-t_{i-1})\\&=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.\end{aligned}$$

Por lo tanto f es integrable.

□

Observación 1.14. El recíproco del teorema anterior no es cierto, ver Ejemplo 1.11.

Definición 1.15. Si $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ es una partición del intervalo $[a, b]$, *la norma de* P se define por

$$\|P\| = \max\{t_i - t_{i-1} : i = 1, \dots, n\}.$$

De la demostración del Teorema 1.13 se obtiene fácilmente el siguiente resultado.

Teorema 1.16. *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función continua. Entonces para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(t_i - t_{i-1}) \ - \int_a^b f \right| < \varepsilon$$

para toda partición $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ *de* $[a, b]$ *tal que* $\|P\| < \delta$ *y para cualquier conjunto de puntos* $\{c_i\}$ *tales que* $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

Observación 1.17. El resultado anterior se suele expresar de la siguiente manera:

Si f es continua en $[a, b]$ entonces

$$\int_a^b f = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(t_i - t_{i-1})$$

$c_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

Las sumas que aparecen en la fórmula anterior se conocen con el nombre de *sumas de Riemann de* f.

La demostración del siguiente teorema es bastante sencilla y quedará como ejercicio.

Teorema 1.18. *Sean* $a < c < b$. *Entonces* f *es integrable sobre* $[a, b]$ *si y sólo si* f *es integrable sobre* $[a, c]$ *y sobre* $[c, b]$. *En este caso*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Ejemplo 1.19. Veamos cómo calcular

$$\int_0^b x^2 dx.$$

Sea $P_n = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ la partición de $[0, b]$ dada por

$$t_i = \frac{i \cdot b}{n}.$$

La integral será el límite cuando n tiende a infinito de la siguiente suma

$$\sum_{i=1}^{n} t_i^2(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} i^2 \frac{b^2}{n^2}(t_i - t_{i-1}) = \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2.$$

Usando que

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1)$$

obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} t_i^2(t_i - t_{i-1}) = \frac{b^3}{6} \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}.$$

Tomamos límite cuando n tiende a infinito:

$$\int_0^b x^2 dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{b^3}{6} \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} = \frac{b^3}{3}.$$

La demostración del siguiente teorema quedará como ejercicio

Teorema 1.20.

(i) *Si f y g son funciones integrables sobre $[a,b]$ entonces $f+g$ es integrable sobre $[a,b]$ y además*

$$\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

(ii) *Si f es integrable sobre $[a,b]$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces λf es integrable sobre $[a,b]$ y*

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f.$$

Teorema 1.21. *Sea f integrable sobre $[a,b]$, tal que*

$$m \leq f(x) \leq M$$

para todo x de $[a,b]$.

Entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

Demostración. Sea $P = \{t_o, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición de $[a,b]$. Entonces

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \geq m \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = m(t_n - t_0) = m(b-a).$$

Análogamente
$$U(f,P) \leq M(b-a).$$

De la definición de integral
$$m(b-a) \leq L(f,P) \leq \int_a^b f \leq U(f,P) \leq M(b-a).$$
□

OBSERVACIÓN 1.22. Si f es integrable sobre $[a,b]$ entonces existe
$$\int_a^x f$$
para todo $x \in [a,b]$.

En este caso si queremos indicar la variable de integración debemos escoger una letra diferente de x. Podría ser t, luego
$$\int_a^x f = \int_a^x f(t)dt.$$

Podemos definir $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por
$$F(x) = \int_a^x f.$$

TEOREMA 1.23. *Si f es integrable sobre $[a,b]$ y F está definida por*
$$F(x) = \int_a^x f$$
entonces F es continua en $[a,b]$.

DEMOSTRACIÓN. Por ser f integrable tenemos que f es acotada. Es decir existe $M > 0$ tal que
$$|f(x)| \leq M \quad \text{para todo } x \text{ de } [a,b].$$

Sea $c \in [a,b]$, vamos a ver que f es continua en c.

Sea $h > 0$, entonces
$$F(c+h) - F(c) = \int_a^{c+h} f - \int_a^c f = \int_c^{c+h} f.$$

Como $-M \leq f(x) \leq M$ se tiene que
$$-Mh \leq \int_c^{c+h} f \leq Mh.$$

De donde
$$|F(c+h) - F(c)| = \left| \int_c^{c+h} f \right| \leq Mh \text{ si } h > 0.$$

Con un argumento análogo para $h < 0$ se prueba que

$$|F(c+h) - F(c)| \leq M|h| \text{ para todo } h.$$

De esto último sigue inmediatamente la continuidad de f en c.

$\square$

2. Teorema fundamental del cálculo.

TEOREMA 1.24. *Sea f integrable sobre $[a,b]$ y definamos F sobre $[a,b]$ por*

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Sea $c \in (a,b)$. Si f es continua en c, entonces F es derivable en c y

$$F'(c) = f(c).$$

Además, si f es continua en a entonces $F'_+(a) = f(a)$ y si f es continua en b entonces $F'_-(b) = f(b)$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos $c \in (a,b)$ (el caso en que $c = a$ ó $c = b$ quedará como ejercicio).

Es claro que

$$\begin{aligned}
\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) &= \frac{1}{h}\left(\int_a^{c+h} f - \int_a^c f\right) - f(c) \\
&= \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(t)dt - \frac{1}{h}hf(c) \\
&= \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(t)dt - \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(c)dt \\
&= \frac{1}{h}\int_c^{c+h} (f(t) - f(c))dt.
\end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$ entonces existe $\delta > 0$ tal que si $t \in [a,b]$ y $|t - c| < \delta$ implica $|f(t) - f(c)| < \varepsilon$.

Sea h tal que $|h| < \delta$.

Note que si $h > 0$ y $t \in [c, c+h]$ entonces $|t - c| < |h| < \delta$. Por otro lado si $h < 0$ y $t \in [c-h, c]$ entonces $|t - c| < |h| < \delta$.

Si $h > 0$

$$\begin{aligned} \left|\frac{F(c+h)-F(c)}{h} - f(c)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_c^{c+h}(f(t)-f(c))dt\right| \\ &\leq \left|\frac{1}{h}\right|\int_c^{c+h}|f(t)-f(c)|dt \\ &\leq \left|\frac{1}{h}\right|\varepsilon|h| = \varepsilon. \end{aligned}$$

Análogamente para $h < 0$. Por lo tanto

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(c+h)-F(c)}{h} = f(c).$$

□

Corolario 1.25. *Si f es continua en $[a,b]$ y $f = g'$ para alguna función g entonces*

$$\int_a^b f = g(b) - g(a).$$

Teorema 1.26 (Teorema fundamental del cálculo). *Si f es integrable sobre $[a,b]$ y $f = g'$ para alguna función g, entonces*

$$\int_a^b f = g(b) - g(a).$$

Demostración. Sea $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ una partición cualquiera del intervalo $[a,b]$.

Por el teorema del valor medio, para cada i, $1 \leq i \leq n$ existe un punto x_i en el intervalo (t_{i-1}, t_i) tal que

$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(x_i)(t_i - t_{i-1}) = f(x_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Sean

$$m_i = \inf\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$$

$$M_i = \sup\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$$

entonces

$$m_i(t_i - t_{i-1}) \leq f(x_i)(t_i - t_{i-1}) \leq M_i(t_i - t_{i-1})$$

o, lo que es lo mismo

$$m_i(t_i - t_{i-1}) \leq g(t_i) - g(t_{i-1}) \leq M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Sumando estas desigualdades para $i = 1, \dots, n$ obtenemos

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n g(t_i) - g(t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1}) = U(f,P).$$

Como
$$\sum_{i=1}^{n} g(t_i) - g(t_{i-1}) = g(b) - g(a)$$
tenemos que
$$L(f,P) \le g(b) - g(a) \le U(f,P).$$
Como f es integrable entonces
$$\int_a^b f = \sup_P \{L(f,P)\} \le g(b) - g(a) \le \inf_P \{U(f,P)\} = \int_a^b f.$$
Por lo tanto
$$\int_a^b f = g(b) - g(a).$$
□

3. Integración por partes.

TEOREMA 1.27. *Sean f y g funciones con derivada continua en $[a,b]$. Entonces*
$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$
Este teorema es consecuencia inmediata de la fórmula para la derivada del producto, su demostración quedará como ejercicio.

4. Lectura adicional: Equivalencia entre la integral de Riemann y la de Darboux.

La idea intuitiva de calcular el área de una figura dividiéndola en pequeños rectángulos se remonta a la antigüedad, apareciendo en las culturas griega y egipcia.

La formalización del concepto de integral que ha sido desarrollada en estas notas usualmente es llamada integral de Riemann. Sin embargo otros matemáticos también realizaron contribuciones muy significativas en lo que se refiere a esta formalización, destacándose los siguientes matemáticos:

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)

Jean Gaston Darboux (1842-1917)

La definición que originalmente dió Riemann fue la siguiente.

Definición 1.28 (Integrable según Riemann). Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y acotado y sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es *integrable Riemann* en $[a, b]$ si existe $A \in \mathbb{R}$ que satisface lo siguiente: para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ es una partición de $[a, b]$, $\{c_1, \ldots, c_n\} \in [a, b]$ son tales que $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$ y $\|P\| < \delta$, entonces

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(t_i - t_{i-1}) \ - A \right| < \varepsilon.$$

Ejercicio 1.29. Demostrar que si f es integrable Riemann en $[a, b]$, entonces el número A que aparece en la definción anterior es único.

Al número A que aparece en la Definción 1.28 se le llama *integral de Riemann de f sobre* $[a, b]$. A las sumas que aparecen en esta definición se le llaman *sumas de Riemann.*

Ejercicio 1.30. Demostrar que si f es integrable Riemann en $[a, b]$ entonces f es acotada en $[a, b]$.

Indicación. Considerando $\varepsilon = 1$ en la definición obtenemos que existe $\delta > 0$ tal que si $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ es una partición de $[a, b]$, $\{c_1, \ldots, c_n\} \in [a, b]$ son tales que $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$ y $\|P\| < \delta$, entonces

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(t_i - t_{i-1}) \ - A \right| < 1.$$

Fijemos una partición $P_o = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ de $[a, b]$, de norma menor que δ. Sea $x \in [a, b]$; por simplicidad supongamos $x \in [a, x_1]$.

Entonces tenemos que

$$\left| \sum_{i=1}^{N} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \ - A \right| < 1.$$

y

$$\left| f(x)(x_1 - a) + \sum_{i=2}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \ - A \right| < 1.$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
|(f(x)-f(x_1))(x_1-a)| &= \\
&= \left| f(x)(x_1-a) + \sum_{i=2}^{n} f(x_i)(x_i-x_{i-1}) \ - A - \left(\sum_{i=1}^{N} f(x_i)(x_i-x_{i-1}) \ - A \right) \right| \\
&\leq 2.
\end{aligned}
$$

De esta última desigualdad acotamos $f(x)$ en términos de $|f(x_1)|$ y $x_1 - a$. De igual manera podemos proceder en el resto de los intervalos de la partición.

□

Para facilitar la lectura precisamos un poco la Definición 1.7.

DEFINICIÓN 1.31 (Integrable según Darboux). Una función f definida en $[a,b]$ es *integrable Darboux sobre* $[a,b]$ si f es acotada y

$$\sup\{L(f,P):\ P \text{ es una partición de } [a,b]\} = \inf\{U(f,P):\ P \text{ es una partición de } [a,b]\}.$$

A este valor común se le llama *integral de Darboux* de f sobre $[a,b]$.

Las sumas superior e inferior de una función con respecto a una partición también son conocidas con el nombre de *sumas de Darboux*.

Se tiene que la integral de Riemann y la integral de Darboux son equivalentes, más precisamente se cumple el siguiente resultado.

TEOREMA 1.32. *Sea* $[a,b]$ *un intervalo cerrado y acotado y sea* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *una función. Entonces* f *es integrable Riemann si y sólo si* f *es integrable Darboux y ambas integrales coinciden.*

Damos una serie de indicaciones para la demostración.

Para demostrar que si f es integrable Riemann entonces f es integrable Darboux y ambas integrales coinciden utilizar el Teorema 1.12.

Para demostrar que si f es integrable Darboux entonces f es integrable Riemann y ambas integrales coinciden proceder de la siguiente manera:

Supongamos f integrable Darboux.

Demostrar primero el siguiente resultado.

Proposición 1.33. *Sea M tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$ y sea P una partición de $[a,b]$.*

(a) *Demostrar que si $c \in [a,b]$ entonces*
$$U(f,P) - U(f,P \cup \{c\}) \leq 2M\|P\|$$
y
$$L(f,P \cup \{c\}) - L(f,P) \leq 2M\|P\|$$

(b) *Demostrar que si Q es una partición que contiene a lo sumo n puntos más que P entonces*
$$U(f,P) - U(f,Q) \leq 2nM\|P\|$$
y
$$L(f,Q) - L(f,P) \leq 2nM\|P\|$$

Sea $\varepsilon > 0$, por el Teorema 1.12 existe una partición P_o tal que
$$U(f,P_o) - L(f,P_o) < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Sea n el número de elementos de P_o y sea $\delta = \dfrac{\varepsilon}{8nM}$.

Por la Proposición anterior, si P es una partición de $[a,b]$ tal que $\|P\| < \delta$ entonces
$$U(f,P) - U(f,P \cup P_o) \leq \frac{\varepsilon}{4}$$
y
$$L(f,P \cup P_o) - L(f,P) \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$
Utilizar esto para demostrar el siguiente resultado.

Lema 1.34. *Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|P\| < \delta$, entonces*
$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

Ya de este último resultado concluye la prueba.

Ejercicio 1.35. Demostrar que la conclusión del Teorema 1.16 se cumple suponiendo solamente que f es integrable. Por lo tanto si f es integrable se cumple que
$$\int_a^b f = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(t_i - t_{i-1}),$$

donde $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ se supone que es una partición de $[a, b]$ y $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

Observación 1.36. Posteriormente a esta integral se han desarrollado otros tipos de integrales entre las que destacan la de Lebesgue y la de Denjoy.

Ejercicios.
Integrales.

(1) Sean $a < b < c < d$ y f una función integrable sobre el intervalo $[a, d]$. Demostrar que f es integrable sobre $[b, c]$.

(2) Demostrar que si f es integrable sobre $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para todo x de $[a, b]$ entonces
$$\int_a^b f \geq 0.$$

(3) Demostrar que si f y g son integrables sobre $[a, b]$ y $f(x) \geq g(x)$ para todo x de $[a, b]$ entonces
$$\int_a^b f \geq \int_a^b g.$$

(4) Sea f una función definida en el intervalo $[a, b]$ que es acotada y que es continua en todo punto de $[a, b]$, con la excepción de $x_0 \in (a, b)$. Demostrar que f es integrable sobre $[a, b]$.

Puede dar una generalización del resultado anterior?

(5) Supóngase que f es integrable sobre $[a, b]$. Demostrar que existe x en $[a, b]$ tal que
$$\int_a^x f = \int_x^b f.$$

(6) Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$ tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Demostrar que si
$$\int_a^b f = 0$$
entonces $f(x) = 0$ para todo x de $[a, b]$.

(7) Supóngase que f es continua sobre $[a, b]$ y que
$$\int_a^b fg = 0$$
para toda función g continua en $[a, b]$. Demostrar que $f(x) = 0$ para todo x de $[a, b]$.

(8) Sea f una función integrable en $[a, b]$ tal que $m \leq f(x) \leq M$ para todo x de $[a, b]$. Demostrar que existe que existe un número real $\mu \in [m, M]$ tal que
$$\int_a^b f = (b - a)\mu.$$

Interpretar geométricamente.

(9) (Primer teorema del valor medio para integrales) Demostrar que si f es continua sobre $[a,b]$ entonces existe $x \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f = (b-a)f(x).$$

Interpretar geométricamente.

(10) (Segundo teorema del valor medio para integrales) Supóngase que f es continua sobre $[a,b]$ y que g es integrable y no negativa sobre $[a,b]$. Demostrar que existe $\xi \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b fg = f(\xi)\int_a^b g.$$

Dar un ejemplo que muestre que la hipótesis sobre g es esencial.

(11) Demostrar que si f es una función integrable sobre el intervalo $[a,b]$ entonces $|f|$ es integrable sobre $[a,b]$ y

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$

(12) (Desigualdad de Cauchy-Schwartz) Demostrar que si f y g son funciones integrables sobre el intervalo $[a,b]$, entonces

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b (f(x))^2\,dx\right)\left(\int_a^b (g(x))^2\,dx\right).$$

(13) Supóngase que f es continua en $[0,+\infty)$ y que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$. Demostrar que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = a.$$

(14) Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones

(a) $F(x) = \displaystyle\int_1^{x^5} \cos^3 t dt$

(b) $F(x) = \displaystyle\int_1^{\int_1^{x^6} \cos t\, dt} \frac{\cos t}{2+\operatorname{sen}^2 t}dt$

(c) $F(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} e^{-u^2} du$

(d) $F(x) = \cos\left(\displaystyle\int_0^{e^x} \cos^2\left(\int_0^u \cos^3 t\, dt\right) du\right)$

(15) Para cada una de las siguientes funciones f, sea $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$. ¿En cuáles puntos x se cumple $F'(x) = f(x)$?

$$\text{(a)} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1; \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

$$\text{(b)} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1; \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

$$\text{(c)} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0; \\ x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

(16) Sean h una función continua, f y g funciones derivables y F la función definida por

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)\, dt.$$

Hallar una expresión para $F'(x)$ en términos de f, f', g, g' y h.

(17) Hallar las siguientes primitivas

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+1} dx$

(b) $\displaystyle\int \operatorname{arc\,sen} \sqrt{x}\, dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{x}{1+\operatorname{sen} x} dx$

(d) $\displaystyle\int \arctan x\, dx$

(e) $\displaystyle\int \sqrt{\tan x}\, dx$

(18) (*) Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es irracional;} \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{q} & \text{si } x = \dfrac{p}{q} \text{ como fracción irreducible.} \end{cases}$$

Demostrar que f es integrable sobre $[0,1]$ y que $\int_0^1 f = 0$.

Indicación:

Como todas las sumas inferiores para esta función son iguales a 0, basta demostrar que para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición P de $[0,1]$ tal que $U(f,P) < \varepsilon$.

Dado $\varepsilon > 0$, sea n tal que $1/n < \varepsilon/2$ y sean $\{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ todos los puntos racionales de $[0,1]$ de la forma p/q con $q < n$.

Escoger una partición $P = \{t_o, \dots, t_k\}$ tal que la suma de las longitudes de los intervalos $[t_{i-1,t_i}]$ que contiene a algún x_j sea menor que $\varepsilon/2$.

Demostrar que $U(f,P) < \varepsilon$.

(19) (*) Hallar dos funciones f y g que sean integrables, pero cuya composición $g \circ f$ no lo sea.

Indicación: El ejercicio anterior puede ser de utilidad.

CAPíTULO 2

Las funciones exponencial y logarítmica.

Este capítulo, escrito a manera de ejercicios, tiene por propósito mostrar como se definen la función logarítmica y la función exponencial.

Definición 2.1. Para $x \in \mathbb{R}$ y $x > 0$, se define

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt.$$

Ejercicio 2.2.

(1) Trazar el gráfico aproximado de la función log.
(2) Demostrar que si $x, y > 0$ entonces

$$\log(xy) = \log x + \log y.$$

(Indicación: Derivar la función $f(x) = \log(xy)$).
(3) Demostrar que si n es un entero positivo y $x > 0$ entonces

$$\log x^n = n \log x.$$

(4) Demostrar que si $x, y > 0$ entonces

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y.$$

(5) Demostrar que la imagen de la función log es todo $\mathbb{R}$
(Indicación: Es claro que log es una función creciente, además $\log 2 > 0$ y $\log 2^n = n \log 2$).

Definición 2.3. Si $x \in \mathbb{R}$, se define

$$\exp x = \log^{-1} x.$$

Observación 2.4. Notar que la función exp (la función exponencial) es la inversa, como función, de log. Como la imagen de log es $\mathbb{R}$ el dominio de exp es $\mathbb{R}$. Como el dominio de log es $(0, +\infty)$ se tiene que $\exp x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 2.5.

(1) Demostrar que
$$\exp' x = \exp x$$
para todo $x \in \mathbb{R}$.

(2) Demostrar que si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces
$$\exp(x+y) = (\exp x)(\exp y).$$

(3) Sea $\boldsymbol{a} = \exp 1$. Demostrar que $2 < \boldsymbol{a} < 4$.

(4) Utilizar el teorema de Taylor para demostrar que
$$\exp x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$
(Deberá utilizar el ejercicio anterior para demostrar que el resto tiende a 0)

(5) Demostrar que
$$e = \exp 1.$$
Nota: no olvidar que e ya fue definido como
$$e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}.$$

Definición 2.6. Si $x \in \mathbb{R}$, se define
$$e^x = \exp x.$$
Si $a > 0$ y $x \in \mathbb{R}$, se define
$$a^x = e^{x \log a}.$$

Ejercicio 2.7.

(1) Demostrar que si $a > 0$ entonces
$$\left(a^b\right)^c = a^{bc}$$
para todo $b, c \in \mathbb{R}$.

(2) Demostrar que si $a > 0$ entonces
$$a^1 = a$$
$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$
para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

(3) Demostrar que la definición de a^x es consistente con la que ya teníamos para el caso en que x es racional.

(4) Trazar el gráfico aproximado de a^x, considerando los casos $0 < a < 1$ y $a > 1$.

(5) Demostrar que si

$$f(x) = a^x,$$

entonces

$$f'(x) = a^x \log a.$$

(6) Definir la función $\log_a$ (logaritmo en base a) y hallar su derivada.

CAPíTULO 3

Las funciones trigonométricas.

Este capítulo, escrito a manera de ejercicios, tiene por propósito mostrar como se definen las funciones trigonométricas.

DEFINICIÓN 3.1.

$$\pi = 2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx.$$

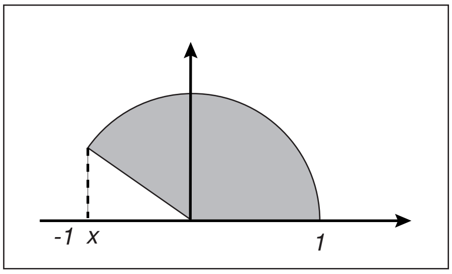
¿Por qué π es el área de un círculo de radio 1 ?

DEFINICIÓN 3.2. Para $-1 \leq x \leq 1$, sea

$$A(x) = \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{2} + \int_{x}^{1} \sqrt{1 - t^2}\, dt.$$

EJERCICIO 3.3.

(1) Interpretar geométricamente el significado de $A(x)$.
Indicación:
Considerar los siguientes gráficos



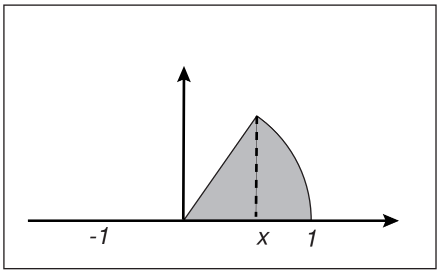


FIGURA 3.1. El área de la región sombreada es A(x)

(2) Demostrar que $A(x)$ es decreciente, $A(-1) = \dfrac{\pi}{2}$ y $A(1) = 0$

DEFINICIÓN 3.4. Si $0 \leq x \leq \pi$, entonces $\cos x$ es el único número de $[-1, 1]$ tal que

$$A(\cos x) = \frac{x}{2},$$

¿Por qué es natural definir cos de esta manera?

Definición 3.5. Si $0 \leq x \leq \pi$, entonces $\operatorname{sen} x$ se define por

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{1 - (\cos x)^2}\ .$$

Ejercicio 3.6. Demostrar que las funciones sen y cos son derivables en $(0, \pi)$ y que para $0 < x < \pi$, se tiene que

$$\cos' x = -\operatorname{sen} x,$$
$$\operatorname{sen}' x = \cos x.$$

Indicación: Notar que si $B = 2A$ entonces cos es la inversa de B. Usar la fórmula para la derivada de la función inversa.

Definición 3.7. Para $\pi \leq x \leq 2\pi$, se define

$$\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(2\pi - x),$$
$$\cos x = \cos(2\pi - x).$$

Notar que con la definición anterior tenemos definidas las funciones sen y cos en el intervalo $[0, 2\pi]$. Para definirlas en toda la recta hacemos lo siguiente.

Definición 3.8. Si $x = 2k\pi + x'$ para algún entero k y algún $x' \in [0, 2\pi]$, se define

$$\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} x',$$
$$\cos x = \cos x'.$$

Ejercicio 3.9.

(1) Trazar los gráficos de las funciones sen y cos.
(2) Definir tangente, secante, etc y trazar los gráficos.
(3) Definir las funciones trigonométricas inversas.

Ejercicio 3.10.

(1) Demostrar que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
(2) Demostrar que las funciones sen y cos son derivables en $\mathbb{R}$ y

$$\cos' x = -\operatorname{sen} x,$$
$$\operatorname{sen}' x = \cos x.$$

(3) Hallar las derivadas de las funciones tan, sec, etc. y de las funciones trigonométricas inversas.

Ejercicio 3.11.

Demostrar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función dos veces derivable tal que

$$\begin{aligned} f'' + f &= 0, \\ f(0) &= 0, \\ f'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Entonces $f = 0$.

Indicación: Hallar la derivada de la función

$$(f')^2 + f^2.$$

Ejercicio 3.12.

Demostrar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función dos veces derivable tal que existen números reales a y b tales que

$$\begin{aligned} f'' + f &= 0, \\ f(0) &= a, \\ f'(0) &= b. \end{aligned}$$

Entonces $f(x) = b \operatorname{sen} x \, + \, a \cos x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Indicación: Considerar $g(x) = f(x) - b \operatorname{sen} x \, - \, a \cos x$ y utilizar el ejercicio anterior.

Ejercicio 3.13.

Demostrar que si x e y son números reales, entonces

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \, \cos y \, + \, \operatorname{sen} y \, \cos x.$$

Indicación: Utilizar el ejercicio anterior.

Ejercicio 3.14.

Demostrar las siguientes identidades:

$$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \operatorname{sen} y \cos x$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\operatorname{sen} x \cos y = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(x - y) + \operatorname{sen}(x + y))$$

$$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y))$$

CAPíTULO 4

Series numéricas.

1. Definiciones y resultados básicos.

DEFINICIÓN 4.1. Una *serie* es un par $(\{a_n\}, \{s_n\})$ donde $\{a_n\}$ es una sucesión de números reales y

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

La siguiente terminología es usual:

(1) A a_n se le llama *término general* de la serie.
(2) A la sucesión $\{s_n\}$ se le llama sucesión de *sumas parciales* de la serie.

La siguiente notación es usual:
En vez de referirse a las series como un par es usual hablar de la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

DEFINICIÓN 4.2. Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge* cuando la sucesión de sumas parciales$\{s_n\}$ es convergente, en otro caso se dice que *diverge*.

Sea $s \in \mathbb{R}$, si la sucesión $\{s_n\}$ converge a s se suele escribir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s.$$

En otras palabras, la expresión anterior quiere decir:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to+\infty} s_n = s.$$

En esto último debe quedar claro que s no se obtiene simplemente por adición, s es el límite de una sucesión de sumas.

Teorema 4.3 (Criterio de Cauchy). *La serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge si y sólo si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un número natural* N *tal que*

$$\left| \sum_{n=k}^{m} a_n \right| < \varepsilon$$

si $m \geq k \geq N$.

Demostración. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge si y sólo si la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ es de Cauchy.

Además, si $m \geq k$ entonces

$$s_m - s_{k-1} = \sum_{n=1}^{m} a_n - \sum_{n=1}^{k-1} a_n = \sum_{n=k}^{m} a_n.$$

De estos dos hechos es inmediato el resultado.

□

Ejemplo 4.4.

Consideremos la serie armónica: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$

$$\begin{aligned} s_{2n} - s_n &= \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &= n\,\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Del criterio de Cauchy podemos concluir que la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

diverge.

Teorema 4.5. *Si la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge entonces* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Demostración. Basta tomar $k = m$ y usar una sola de las implicaciones del criterio de Cauchy. □

Observación 4.6. El recíproco del Teorema 4.5 no es cierto: la serie armónica es divergente, sin embargo su término general tiende a 0 (ver Ejemplo 4.4).

Ejemplo 4.7. El Teorema 4.5 puede ser útil para mostrar que una serie es divergente, tal como lo ilustran los siguiente ejemplos.

(i) Como $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n$ no existe entonces

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$$

diverge.

(ii) Como $\lim_{n\to+\infty} 2^n = \infty$ entonces

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n$$

diverge.

PROPOSICIÓN 4.8. *Sea* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *una serie convergente. Entonces si*

$$c_k = \sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n$$

se tiene que

$$\lim_{k\to+\infty} c_k = 0.$$

(La sucesión $\{c_k\}$ es llamada la "cola" de la serie).

DEMOSTRACIÓN. Por supuesto que la expresión para c_k quiere decir:

$$c_k = \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=k+1}^{m} a_n.$$

Supongamos que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge a s. Entonces

$$c_k = \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=1}^{m} a_n - \sum_{n=1}^{k} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \sum_{n=1}^{k} a_n = s - s_k.$$

Por lo tanto dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq N$ entonces

$$|c_k - 0| = |s - s_k| < \varepsilon.$$

De donde $\lim_{k\to+\infty} c_k = 0$. □

TEOREMA 4.9. *Si la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ *converge entonces la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge. Sea $\varepsilon > 0$, por la desigualdad triangular y por el Teorema 4.3 existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq k \geq N$ entonces

$$\left|\sum_{n=k}^{m} a_n\right| \leq \left|\sum_{n=k}^{m} |a_n|\right| < \varepsilon.$$

Usando el Teorema 4.3 se sigue que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge. □

Por este último Teorema las series de términos no negativos son de particular interés. Por ello una de las siguientes secciones está dedicada al estudio de este tipo de series.

1.1. La serie geométrica.

Comenzaremos esta sección con la paradoja del corredor: Un corredor no puede alcanzar nunca la meta porque siempre ha de recorrer la mitad de una distancia antes de recorrer la distancia total.

La afirmación de Zenón de que un número ilimitado de cantidades positivas no puede tener una suma finita, fue contradicha dos mil años más tarde con la creación de las series infinitas.

La serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n$$

se conoce con el nombre de serie geométrica (de razón r).

Si $|r| \geq 1$ entonces $\lim_{n\to+\infty} r^n \neq 0$. Luego $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n$ diverge si $|r| \geq 1$.

Veamos que ocurre en el caso $|r| < 1$. Consideremos las sumas parciales

$$s_n = 1 + r + \cdots + r^n.$$

Entonces

$$rs_n = r + r^2 + \cdots + r^{n+1}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}(1-r)s_n &= s_n - rs_n \\ &= (1 + r + \cdots + r^n) - (r + r^2 + \cdots + r^{n+1}) \\ &= 1 - r^{n+1}\end{aligned}$$

de donde

$$s_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Como $|r| < 1$, $\lim_{n\to+\infty} r^n = 0$.

Luego

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r}.$$

En conclusión, si $|r| < 1$ entonces la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n$ converge a $\dfrac{1}{1-r}$, es decir,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1 - r}.$$

En otro caso la serie diverge.

2. Series de términos no negativos.

Si $\{a_n\}$ es una sucesión de términos no negativos es claro que las sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ forman una sucesión monótona creciente, por lo tanto el siguiente resultado es inmediato.

TEOREMA 4.10. *Una serie de términos no negativos converge si y sólo si la sucesión de sus sumas parciales es acotada.*

DEMOSTRACIÓN.
Sea $\{s_n\}$ la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.
Si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge entonces $\{s_n\}$ converge y por lo tanto $\{s_n\}$ es acotada.
Recíprocamente, ahora supongamos que $\{s_n\}$ es acotada. Como $a_n \geq 0$ tenemos que $\{s_n\}$ es creciente. Tenemos pues que $\{s_n\}$ es una sucesión creciente y acotada, por lo tanto $\{s_n\}$ es convergente. De donde la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

□

El siguiente resultado es un corolario inmediato del Teorema anterior.

TEOREMA 4.11 (criterio de comparación). *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones no negativas tales que $b_n \leq a_n$ para todo n.*
Si $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ también converge.

DEMOSTRACIÓN.
Sean $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ y $t_n = b_1 + \cdots + b_n$.
Si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge entonces $\{s_n\}$ es acotada. Como $0 \leq b_k \leq a_k$ para todo k entonces $t_n \leq s_n$ para todo n. De donde $\{t_n\}$ es acotada. Luego la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge.

□

TEOREMA 4.12 (criterio de la raíz). *Sea $\{a_n\}$ una sucesión no negativa y sea $\alpha = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Entonces*

(i) *Si $\alpha < 1$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.*
(ii) *Si $\alpha > 1$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.*
(iii) *Si $\alpha = 1$ no hay información (puede ser que converja o puede ser que diverja).*

DEMOSTRACIÓN.
Sabemos que

$$\alpha = \limsup \sqrt[n]{a_n} = \inf_{k\geq 1} \sup_{n\geq k} \sqrt[n]{a_n}$$

(i) Si $\alpha < 1$. Sea $\beta \in (\alpha, 1)$ entonces existe $k \geq 1$ tal que

$$\sup_{n \geq k} \sqrt[n]{a_n} < \beta$$

luego

$$\sqrt[n]{a_n} < \beta \text{ si } n \geq k.$$

Por lo tanto $a_n < \beta^n$ para $n \geq k$.

Como $\sum_{n=1}^{+\infty} \beta^n$ es una serie geomértrica de razón $\beta < 1$ entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} \beta^n$ converge. Por el criterio de comparación tenemos que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

(ii) Si $\alpha > 1$ entonces existe una sucesión creciente de números naturales $\{n_k\}$ tal que

$$\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \to \alpha.$$

De donde sigue que $a_n > 1$ para infinitos valores de n y por lo tanto $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$. Usando el Teorema 4.5 obtenemos que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

(iii) Basta considerar las series

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

$\square$

Teorema 4.13 (criterio del cociente). *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de términos positivos.*

(i) *Si* $\limsup \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ *entonces la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge.*

(ii) *Si existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ *para todo* $n \geq n_0$ *entonces la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverge.*

(iii) *Si* $\liminf \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ *entonces la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverge.*

(iv) *Si* $\liminf \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \leq \limsup \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ *el criterio no da información.*

Demostración.

(i) Sea

$$\alpha = \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1.$$

Sea $\beta \in (\alpha, 1)$ entonces existe $N \geq 1$ tal que

$$\sup_{n \geq N} \frac{a_{n+1}}{a_n} < \beta$$

luego
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \beta \text{ si } n \geq N.$$
Note que a_N es un número fijo. Usando la desigualdad anterior obtenemos
$$\begin{aligned}
&a_{N+1} < \beta a_N \\
&a_{N+2} < \beta a_{N+1} < \beta^2 a_N \\
&a_{N+3} < \beta a_{N+2} < \beta^3 a_N \\
&\quad \cdots\cdots \\
&a_{N+k} < \beta^k a_N \text{ para todo } k \geq 1.
\end{aligned}$$

Además, como $\sum_{k=1}^{+\infty} \beta^k$ es una serie geomértrica de razón $\beta < 1$ entonces $\sum_{k=1}^{+\infty} \beta^k$ converge. Por el criterio de comparación tenemos que $\sum_{k=1}^{+\infty} a_{N+k}$ converge.

Pero
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{k=1}^{+\infty} a_{N+k}.$$
Por lo tanto $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

(ii) En este caso $a_{n+1} \geq a_{n_0}$ para todo $n \geq n_0$. De aquí es fácil ver que a_n no tiende a cero. Usando el Teorema 4.5 obtenemos que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

(iii) Este caso se reduce fácilmente al anterior. En efecto sea
$$1 < \alpha = \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} = \sup_{k \geq 1} \inf_{n \geq k} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$
entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que
$$1 < \inf_{n \geq n_0} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$
luego
$$1 < \frac{a_{n+1}}{a_n} \text{ si } n \geq n_0.$$
Usando (ii) se obtiene que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

(iv) Basta considerar las series
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$
$\square$

Corolario 4.14 (criterio simplificado del cociente). *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de términos positivos tal que existe $\alpha = \lim_{n \to +\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$*

(i) *Si $\alpha < 1$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.*

(ii) *Si* $\alpha > 1$ *entonces la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverge.*
(iii) *Si* $\alpha = 1$ *el criterio no da información.*

El siguiente Teorema dice que el criterio de la raíz es “más fino” que el criterio del cociente, es decir, si podemos concluir convergencia a partir del criterio del cociente también lo podemos hacer a partir del criterio de la raíz.

TEOREMA 4.15. *Si* $\{c_n\}$ *es una sucesión de números positivos entonces*

$$\liminf \frac{c_{n+1}}{c_n} \leq \liminf \sqrt[n]{c_n} \leq \limsup \sqrt[n]{c_n} \leq \limsup \frac{c_{n+1}}{c_n}.$$

DEMOSTRACIÓN.

La segunda desigualdad es inmediata.

Se probará la última desigualdad. La primera es análoga y se dejará como ejercicio. Sea

$$\alpha = \limsup \frac{c_{n+1}}{c_n}.$$

Si $\alpha = +\infty$ el resultado es inmediato.

Supongamos α finito. Sea $\beta > \alpha$. Entonces existe un número natural N tal que

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} \leq \beta \quad \text{si} \quad n \geq N.$$

Luego, para cada natural k

$$c_{N+k+1} \leq \beta c_{N+k}.$$

Combinando las desigualdades anteriores se obtiene

$$c_{N+k} \leq \beta^k c_N$$

o, lo que es lo mismo

$$c_n \leq c_N \beta^{-N} \beta^n \quad \text{si} \quad n \geq N$$

tomando raíz n-ésima

$$\sqrt[n]{c_n} \leq \sqrt[n]{c_N \beta^{-N}}\, \beta$$

de donde

$$\limsup \sqrt[n]{c_n} \leq \beta.$$

Como $\beta > \alpha$ es arbitrario tenemos

$$\limsup \sqrt[n]{c_n} \leq \alpha.$$

$\square$

Teorema 4.16 (criterio de la integral). *Supóngase que f es una función positiva y monótona decreciente definida en $[1,+\infty)$ y que $f(n) = a_n$ para todo n natural.*

Entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

converge si y sólo si existe el límite

$$\lim_{A\to+\infty} \int_1^A f(x)\,dx.$$

La demostración de este último resultado quedará como ejercicio (Ayuda: elaborar un gráfico y comparar las sumas parciales de la serie con $\int_1^N f(x)\,dx$).

3. Convergencia absoluta y convergencia condicional.

Definición 4.17. Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge absolutamente* si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge. Una serie que converge, pero que no converge absolutamente se llama *condicionalmente convergente.*

Teorema 4.18. *Toda serie absolutamente convergente es convergente. Una serie es absolutamente convergente si y sólo si la serie formada con sus términos positivos y la serie formada con sus términos negativos son convergentes.*

Demostración. La primera parte ya fue demostrada (ver Teorema 4.9).

Sea $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie. Consideremos

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & \text{si } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$$

$$a_n^- = \begin{cases} 0 & \text{si } a_n \geq 0 \\ a_n & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$$

de modo que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+$ es la serie formada con los términos positivos y $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^-$ es la serie formada con los términos negativos.

Si estas dos serie convergen entonces como

$$|a_n| = a_n^+ - a_n^-$$

se tendrá que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge absolutamente.

Supongamos que $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge.

Entonces como

$$0 \leq a_n^+ \leq |a_n|$$

$$0 \leq -a_n^- \leq |a_n|$$

se tendrá que las sumas parciales de las series de términos no negativos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+ \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} -a_n^-$$

son acotadas. Por lo tanto estas dos últimas series convergen, de donde sigue que también la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^-$ converge. □

Teorema 4.19 (Fórmula de sumación por partes). *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones. Sea $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ si $n \geq 0$, $A_{-1} = 0$. Entonces, si $0 \leq p \leq q$ se tiene que*

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q-1} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p.$$

Demostración. Claramente

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q} (A_n - A_{n-1}) b_n = \sum_{n=p}^{q} A_n b_n - \sum_{n=p-1}^{q-1} A_n b_{n+1}$$

y además

$$\sum_{n=p}^{q} A_n b_n = A_q b_q + \sum_{n=p}^{q-1} A_n b_n,$$

$$\sum_{n=p-1}^{q-1} A_n b_{n+1} = \sum_{n=p}^{q-1} A_n b_{n+1} + A_{p-1} b_p.$$

Luego

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = A_q b_q + \sum_{n=p}^{q-1} A_n b_n - \sum_{n=p}^{q-1} A_n b_{n+1} - A_{p-1} b_p,$$

de donde se obtiene el resultado.

□

Teorema 4.20 (Criterio de Dirichlet). *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones tales que*

(a) *Las sumas parciales A_n de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ forman una sucesión acotada.*
(b) $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq 0$.
(c) $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$.

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ converge.

DEMOSTRACIÓN. Sea $M > 0$ tal que $|A_n| \leq M$ para todo n. Dado $\varepsilon > 0$ sea N un entero positivo tal que $b_N = |b_N| < \frac{\varepsilon}{2M}$.

Sean p y q tales que $N \leq p \leq q$. Por la fórmula de sumación por partes

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=p}^{q} a_n b_n\right| &= \left|\sum_{n=p}^{q-1} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p\right| \\
&\leq \sum_{n=p}^{q-1} |A_n||b_n - b_{n+1}| + |A_q||b_q| + |A_{p-1}||b_p| \\
&\leq M\left(\sum_{n=p}^{q-1}(b_n - b_{n+1}) + b_q + b_p\right) \\
&= M((b_p - b_q) + b_q + b_p) \\
&= 2M b_p \leq 2M b_N < \varepsilon
\end{aligned}$$

Usando el criterio de Cauchy obtenemos que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ converge. $\square$

Como corolario del Teorema anterior se obtiene

TEOREMA 4.21 (Criterio de Leibnitz). *Sea $\{c_n\}$ una sucesión tal que*

(a) $c_0 \geq c_1 \geq \cdots \geq 0$.
(b) $\lim_{n\to+\infty} c_n = 0$.

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n c_n$ converge.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos las sucesiones $a_n = (-1)^n$ y $b_n = c_n$. Notemos que si $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ entonces $|A_n| \leq 1$.

Aplicando el criterio de Dirichlet se obtiene que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n c_n$ converge. $\square$

DEFINICIÓN 4.22. Una *reordenación* de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es una serie de la forma $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ donde $b_n = a_{f(n)}$ y $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una biyección.

EJEMPLO 4.23. Sea

$$a_n = \begin{cases} 2k & \text{si } n = 2k+1 \\ 2k+1 & \text{si } n = 2k \end{cases}$$

Tomemos $b_n = n$ entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} n$ es una reordenación de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

La demostración de los siguientes teoremas se dejará como ejercicio.

Teorema 4.24. *Si la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge absolutamente entonces toda reordenación* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *de* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *también converge absolutamente y*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.$$

Teorema 4.25. *Si la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge condicionalmente entonces para todo número real* α *existe una reordenación* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *de* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *tal que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \alpha.$$

4. Producto de series.

Teorema 4.26. *Suponga que*

(a) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *converge absolutamente.*
(b) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = A$.
(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = B$.
(d) $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ *para* $n = 0, 1, 2, \dots$.

Entonces

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = AB.$$

Es decir,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right).$$

Demostración.
Consideremos las sumas parciales

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k.$$

Entonces

$$\begin{aligned} C_n &= c_0 + \cdots + c_n \\ &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + \cdots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0) \\ &= a_0(b_0 + \cdots + b_n) + a_1(b_0 + \cdots + b_{n-1}) + \cdots + a_nb_0 \\ &= a_0B_n + a_1B_{n-1} + \cdots + a_nB_0 \end{aligned}$$

Sea

$$\beta_n = B_n - B$$

entonces

$$\begin{aligned} C_n &= a_0(B + \beta_n) + a_1(B + \beta_{n-1}) + \cdots + a_n(B + \beta_0) \\ &= A_n B + a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \cdots + a_n\beta_0. \end{aligned}$$

Sea

$$\gamma_n = a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \cdots + a_n\beta_0.$$

Como $A_n B \to AB$, para probar que $C_n \to AB$, es suficiente probar que

$$\lim_{n\to+\infty} \gamma_n = 0.$$

Como $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge absolutamente, existe un número real α tal que

$$\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|.$$

Por (c) $\beta_n \to 0$, por lo tanto dado $\varepsilon > 0$ existe N tal que $|\beta_n| < \varepsilon$ si $n \geq N$.

Sea $n \geq N$ entonces

$$\begin{aligned} |\gamma_n| &= |a_n\beta_0 + \cdots + a_0\beta_n| \\ &\leq |\beta_0 a_n + \cdots + \beta_N a_{n-N}| + |\beta_{N+1}||a_{n-N-1}| + \cdots + |\beta_n||a_0| \\ &\leq |\beta_0 a_n + \cdots + \beta_N a_{n-N}| + \varepsilon\,(|a_{n-N-1}| + \cdots + |a_0|) \\ &\leq |\beta_0||a_n| + \cdots + |\beta_N||a_{n-N}| + \varepsilon\alpha. \end{aligned}$$

Como la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge, el término general tiende a cero. Por lo tanto, si $n \to +\infty$ obtenemos

$$\limsup_{n\to+\infty} |\gamma_n| \leq \varepsilon\alpha.$$

Como ε es arbitrario, esto último termina la demostración.

$\square$

Ejercicios.
Series Numéricas.

(1) Clasificar cada una de las siguientes series como convergente o divergente y, en caso de que corresponda, absolutamente convergente o condicionalmente convergente.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n^3}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+n}}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{n!}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^5}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(\log n)^2}$

(k) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2(\log n)}$

(l) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\log(\log n)}$

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

(n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$

(o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$

(p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$

(q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)$

(s) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

(t) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$

(u) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^3+5} - \sqrt{n^3+3}$

(v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n^9 - n^5 + 1}$

(w) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2^n}\right)$

(x) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

(y) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^2+5} - \sqrt{n^2+3}$

(z) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+4} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

(2) Para cuales valores de a converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n n!}{n^n}.$$

(3) Demostrar que si las series $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2$ convergen, entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$$

también converge.

(4) Demostrar que si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ converge entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n}$$

converge.

(5) El siguiente resultado es el Criterio de condensación de Cauchy.

Supóngase que $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente y que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Demostrar que si $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, entonces

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$$

converge. Notar que de este criterio se puede concluir que la serie armónica diverge.

(6) Demostrar el siguiente Teorema:

Si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge absolutamente entonces toda reordenación $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ también converge absolutamente y

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.$$

(7) Demostrar el siguiente Teorema:

Si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge condicionalmente entonces para todo número real α existe una reordenación $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ tal que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \alpha.$$

(8) Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones de términos positivos y supongamos que existe

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

Consideremos las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

(a) Demostrar que si $\alpha \neq 0$ y finito se tiene que ambas series convergen o ambas series divergen.
(b) Demostrar que si $\alpha = 0$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
(c) Demostrar que si $\alpha \neq 0$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

(9) Hallar la suma de la serie
$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \ldots$$

(10) Determinar para cuales valores de p y q es convergente la serie
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \log^q n}.$$

(11) (**) Estudiar el carácter de la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n}.$$

(12) (*) Utilizar el criterio de la integral para demostrar que la integral
$$\int_1^{\infty} \frac{e^x}{x^x}\, dx$$
converge.

(13) (*) Utilizar el criterio de la integral para demostrar que la serie
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$$
converge.

CAPíTULO 5

Sucesiones y series de funciones.

1. Motivación y algunos ejemplos.

El teorema de Taylor dice que, bajo ciertas condiciones,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k \quad + \quad \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

donde el punto c está entre a y x.

Si ocurre que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}=0$$

entonces se tendrá la igualdad

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k.$$

Los siguientes ejemplos deben ser conocidos

$$\begin{aligned}
e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\dots\\
\operatorname{sen} x &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots\\
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots\\
\arctan x &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots \quad \text{si} \quad |x|\le 1
\end{aligned}$$

En las igualdades anteriores no se trata de series numéricas, como las ya estudiadas. Se trata de series de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

donde cada f_n es una función.

Notemos que si derivamos la serie de e^x término a término nos vuelve a dar ella misma, si derivamos la de $\operatorname{sen} x$ término a término nos da la de $\cos x$ y si derivamos término a término la de $\cos x$ nos da la de $-\operatorname{sen} x$.

Lo que vamos a estudiar en este capítulo es cuales propiedades importantes de las funciones se preservan al pasar al límite, por ejemplo, si las funciones f_n son diferenciables o integrables, es lo mismo cierto para la función límite f. ¿Cuál es la relación entre f_n' y f', o entre la integral de f y la de f_n?

El siguiente ejemplo muestra que el límite de una sucesión de funciones continuas no necesariamente resulta ser una función continua.

Ejemplo 5.1. Sea $\{f_n\}$ la sucesión de funciones definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n & \text{si } \ 0 \leq x \leq 1; \\ 1 & \text{si } \ x > 1. \end{cases}$$

Es claro que todas esta funciones son continuas, sin embargo

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ 0 \leq x < 1; \\ 1 & \text{si } \ x \geq 1; \end{cases}$$

no es una función continua.

Los siguientes gráficos ilustran la situación.

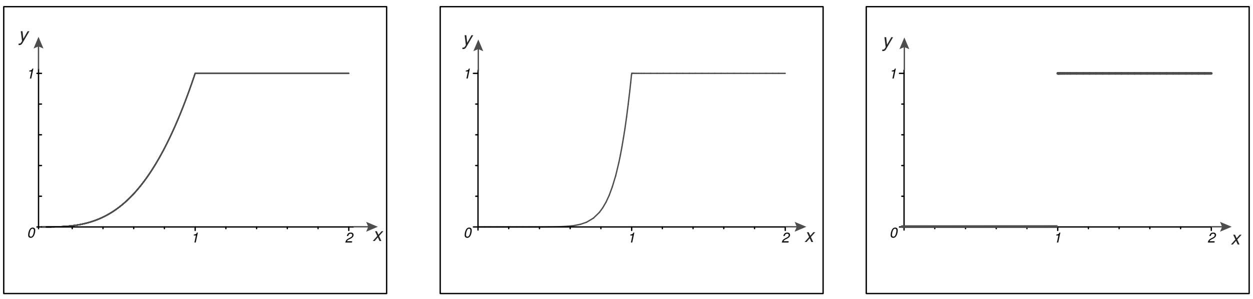


Figura 5.1. Gráficos de f_3, f_{10} y f

Consideremos ahora el siguiente ejemplo

Ejemplo 5.2. Sea $\{g_n\}$ la sucesión de funciones definida por

$$g_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq -\dfrac{1}{n}; \\ \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi x}{2}\right) & \text{si } -\dfrac{1}{n} < x < \dfrac{1}{n}; \\ 1 & \text{si } x \geq \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

Todas estas funciones son diferenciables, sin embargo

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0; \\ 0 & \text{si } x = 0; \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

no es una función diferenciable

Ejercicio 5.3. Dar un ejemplo de una sucesión de funciones continuas $\{f_n\}$ definidas en $[0,1]$ tales que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ para todo x en $[0,1]$ y sin embargo $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$ para todo n.

Los ejemplos anteriores muestran que al pasar al límite, las propiedades de continuidad y diferenciabilidad se pueden perder. En las siguientes secciones estudiaremos, entre otras cosas, que condiciones adicionales nos permiten garantizar la preservación de estas propiedades.

2. Convergencia uniforme.

Antes de introducir este concepto es conveniente precisar lo siguiente:

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas en $A \subset \mathbb{R}$ y sea f una función también definida en A.

Definición 5.4. Se dice que la sucesión $\{f_n\}$ *converge puntualmente a* f *en* A si $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para todo x de A. Es decir, $\{f_n\}$ *converge puntualmente a* f *en* A si para cada x de A y para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que si $n \geq N$ entonces $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Definición 5.5. Se dice que la sucesión $\{f_n\}$ *converge uniformemente a* f *en* A si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que si $n \geq N$ entonces $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo x de A.

Geométricamente: f_n converge uniformemente a f si dada una franja de longitud 2ε centrada alrededor del gráfico de f, todos los gráficos de las f_n se encuentran en esta franja de algún lugar en adelante.

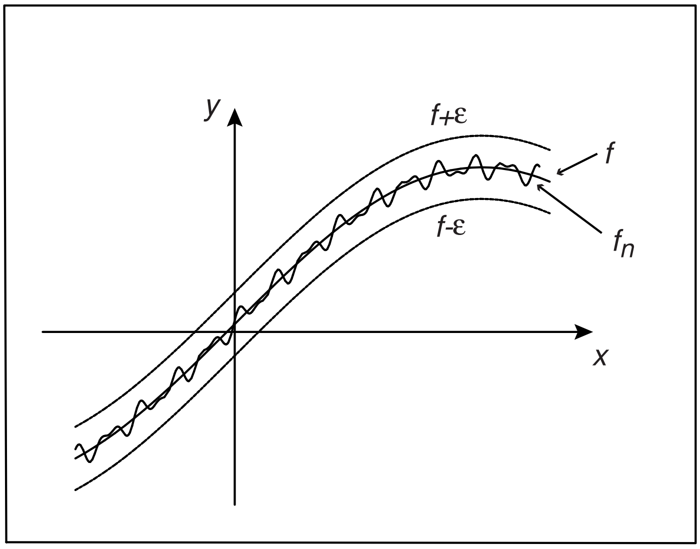


FIGURA 5.2. Convergencia uniforme

Claramente convergencia uniforme implica convergencia puntual (pero no recíprocamente).

TEOREMA 5.6. *Supóngase que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones continuas definidas en $[a,b]$, que converge uniformemente en $[a,b]$ a una función f. Entonces f también es continua en $[a,b]$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in (a,b)$ (la continuidad en los extremos se prueba en forma análoga).

Sea $\varepsilon > 0$ dado.

Como la convergencia es uniforme existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_N(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{para todo } y \in [a,b].$$

Como f_N es continua existe $\delta > 0$ tal que si $|h| < \delta$ entonces

$$|f_N(x+h) - f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Si $|h| < \delta$ entonces

$$\begin{aligned}
|f(x+h) - f(x)| &= |f(x+h) - f_N(x+h) + f_N(x+h) - f_N(x) + f_N(x) - f(x)| \\
&\le |f(x+h) - f_N(x+h)| + |f_N(x+h) - f_N(x)| + |f_N(x) - f(x)| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Luego

$$|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon.$$

Lo cual prueba que f es continua en x. □

OBSERVACIÓN 5.7. El Teorema 5.6 puede ser útil para mostrar que algunas sucesiones de funciones no convergen uniformemente, tal como lo ilustra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5.8. Sea $f_n : [0,2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Ya sabemos que si $0 \le x < 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ y $\lim_{n\to\infty} 1 = 1$. Por lo tanto si definimos

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

tenemos que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para cada $x \in [0,2]$.

Es decir, en este caso hay convergencia puntual, como f no es continua, por el Teorema anterior $\{f_n\}$ no converge uniformemente.

TEOREMA 5.9. *Sean $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables sobre $[a,b]$ y f una función integrable sobre $[a,b]$. Si $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en $[a,b]$ entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\varepsilon > 0$ entonces $\varepsilon/(b-a) > 0$. Por la convergencia uniforme, existe N tal que si $n \ge N$ entonces $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/(b-a)$ para todo x de $[a,b]$.

Para $n \geq N$ tendremos

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx\\ &\leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx\\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Estudiemos ahora el siguiente ejemplo:

Sea

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\,\mathrm{sen}(n^2 x).$$

Entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente a 0, sin embargo $f_n'(x) = n\cos(n^2 x)$ no es convergente. El siguiente dibujo ayuda a comprender mejor esta situación.

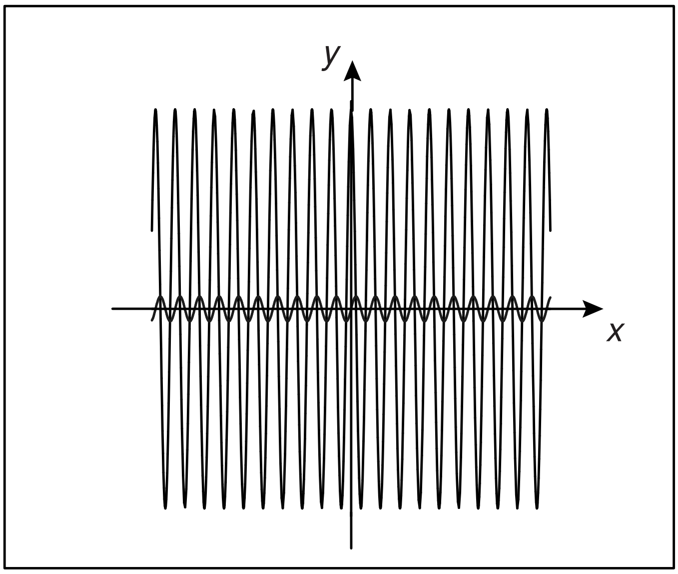


FIGURA 5.3. Gráficos de $f_4(x) = \dfrac{\mathrm{sen}(16x)}{4}$ y $f_4'(x) = 4\cos(16x)$

La situación para las derivadas es más delicada y se tiene el siguiente resultado.

TEOREMA 5.10. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones diferenciables definidas en $[a,b]$ que satisface:*

(a) *$\{f_n\}$ converge puntualmente a una función f en $[a,b]$.*
(b) *Para cada n, f_n' es continua en $[a,b]$.*

(c) $\{f_n'\}$ *converge uniformemente en* $[a,b]$ *a una función continua* g.

Entonces f *es derivable y*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \quad \text{para todo } x \in [a,b].$$

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 5.9 aplicado en el intervalo $[a,x]$ se tiene que para todo x de $[a,b]$

$$\int_a^x g(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)\,dt.$$

Por el Teorema fundamental del cálculo

$$\begin{aligned}\int_a^x g(t)\,dt &= \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)\,dt \\ &= \lim_{n\to\infty} (f_n(x) - f_n(a)) \\ &= f(x) - f(a)\end{aligned}$$

Es decir,

$$\int_a^x g(t)\,dt = f(x) - f(a).$$

Como g es continua, por el Teorema fundamental del cálculo se tiene que $\int_a^x g(t)\,dt$ es derivable. Por lo tanto f es derivable y

$$f'(x) = g(x) = \lim_{n\to\infty} fn'(x).$$

$\square$

OBSERVACIÓN 5.11. Se puede dar una prueba del resultado anterior sin suponer la continuidad de las derivadas, ver el libro Principles of Mathematical Analysis de W. Rudin [**10**].

DEFINICIÓN 5.12. Sean $A \subset \mathbb{R}$, y f una función acotada definida en A

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in A} |f(x)| = \sup\{|f(x)| : x \in A\}.$$

PROPOSICIÓN 5.13. *Sean* $A \subset \mathbb{R}$, $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones acotadas definidas en* A *y* f *una función acotada definida en* A. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\{f_n\}$ *converge uniformemente a* f *en* A.

(ii) $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Sólo daremos la idea principal, los detalles quedan como ejercicio.

Para probar que (ii) implica (i) se usa:

Si $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$ entonces

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$$

luego $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in A$.

Para probar que (i) implica (ii) se usa:

Si $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in A$, entonces ε es una cota superior del conjunto $\{|f_n(x) - f(x)| : x \in A\}$, luego

$$\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

De donde $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$. $\square$

3. Series de funciones.

Dada $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas en $A \subset \mathbb{R}$ y dado $x \in A$, consideramos

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

Cuando hay convergencia puntual esto dá origen a una función f definida en A mediante

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

A esta función la llamamos una *serie de funciones.*

Definición 5.14. La serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge uniformemente a la función f en $A \subset \mathbb{R}$* si la sucesión de sus sumas parciales

$$f_1, \quad f_1 + f_2, \quad f_1 + f_2 + f_3, \ldots$$

converge uniformemente a f en A.

De los Teoremas probados en la sección anterior siguen inmediatamente los siguientes resultados:

Teorema 5.15. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas definidas en $[a, b]$. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente a la función f en $[a, b]$ entonces f es continua en $[a, b]$.*

Teorema 5.16. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas en $[a,b]$. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente a la función f en $[a,b]$, si f es integrable en $[a,b]$ y si cada una de las funciones f_n es integrable en $[a,b]$ entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Es decir,

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Demostración.

Sea

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} f_n$$

entonces

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \lim_{N\to\infty} S_N,$$

y la convergencia es uniforme en $[a,b]$.

Como todas las f_n son integrables en $[a,b]$ entonces S_N es integrable en $[a,b]$. Por el Teorema 5.9

$$\begin{aligned}
\int_a^b f &= \int_a^b \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \int_a^b S_N \\
&= \lim_{N\to\infty} \int_a^b \sum_{n=1}^{N} f_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_a^b f_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n.
\end{aligned}$$

□

Teorema 5.17. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas en $[a,b]$ tal que cada f_n es diferenciable y f_n' es continua. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge puntualmente a f en $[a,b]$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ converge uniformemente en $[a,b]$ a una función continua, entonces f es derivable y*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Teorema 5.18 (Criterio M_n de Weierstrass). *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas en $A \subset \mathbb{R}$ y sea $\{M_n\}$ una sucesión de números tales que:*

(i) $|f_n(x)| \leq M_n$ *para todo x de A.*

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ *converge.*

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *converge absolutamente para todo* x *de* A *y* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge uniformemente en* A *a la función* $f : A \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *.*

Demostración.

Sea $x \in A$ fijo, como $0 \leq |f_n(x)| \leq M_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, por el criterio de comparación tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ converge.

Luego $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge absolutamente para todo x de A

Dado $x \in A$, sea

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} f_n$$

entonces

$$\begin{aligned}
|f(x) - S_N(x)| &= |f(x) - (f_1(x) + \cdots + f_N(x))| \\
&= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(x)| \\
&\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} M_n
\end{aligned}$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, por la Proposición 4.8

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} M_n = 0.$$

Luego, dado $\varepsilon > 0$ existe $N_o \in \mathbb{N}$ tal que $N \geq N_o$ implica

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} M_n < \varepsilon$$

(es importante notar que N_o solamente depende de ε).

De donde, para $N \geq N_o$,

$$|f(x) - S_N(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} M_n < \varepsilon.$$

Por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en A.

□

Ejemplo 5.19. Consideremos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

para $|x| \leq 1$.

En este caso trabajaremos con $A = [-1, 1]$, $f_n(x) = x^n/n!$.

Si $|x| \leq 1$ entonces

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right| \leq \frac{1}{n!}.$$

Sea $M_n = 1/n!$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{M_{n+1}}{M_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.
\end{aligned}$$

Por el criterio del cociente, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

converge.

Usando el Criterio M_n de Weierstrass obtenemos que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

converge absolutamente para todo x de $[-1, 1]$ y converge uniformemente en el intervalo $[-1, 1]$.

4. Series de potencias.

Definición 5.20. Sea $z \in \mathbb{R}$, una *serie de potencias centrada en* z es una serie de funciones de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - z)^n,$$

donde $\{a_n\}$ es una sucesión numérica.

Primero estudiaremos series de potencias centradas en 0, es decir series de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Los resultados obtenidos se extenderán en forma muy natural y sencilla al caso general.

El resultado principal es el siguiente

Teorema 5.21. *Sea $x_0 \neq 0$, si la serie numérica*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$$

converge entonces la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

converge uniformemente (y absolutamente) en todo intervalo de la forma $[-r, r]$*, donde* $0 < r < |x_0|$.

Demostración. Sea $0 < r < |x_0|$. Como $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ converge se tiene que la sucesión $\{a_n x_0^n\}$ tiende a 0 y por lo tanto está acotada, es decir existe $K > 0$ tal que $|a_n x_0^n| \leq K$.

Si $x \in [-r, r]$ entonces $|x| \leq r$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} |a_n x^n| &\leq |a_n| r^n = |a_n||x_0^n| \left(\frac{r^n}{|x_0|^n} \right) \\ &\leq K \left(\frac{r^n}{|x_0|^n} \right) = K \left(\frac{r}{|x_0|} \right)^n. \end{aligned}$$

Pero $r/|x_0| < 1$. Por lo tanto la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} K \left(\frac{r}{|x_0|} \right)^n$$

converge.

Del criterio M_n de Weierstrass, con $M_n = K\,(r/|x_0|)^n$ sigue que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

converge uniformemente (y absolutamente) en $[-r, r]$. □

Teorema 5.22. *Consideremos la serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$*. Entonces una y sólo una de las siguientes afirmaciones es cierta*

(a) *La serie converge solamente en* $x = 0$.
(b) *La serie converge absoluta y uniformemente en todo intervalo cerrado y acotado.*
(c) *Existe un número positivo* R *tal que la serie es absolutamente convergente para* $|x| < R$ *, divergente para* $|x| > R$ *y es uniformemente convergente en cualquier intervalo cerrado de la forma* $[-r, r]$ *para todo* $r < R$.

Demostración. Claramente es suficiente probar que si no se cumplen (a) y (b) entonces se tiene que cumplir (c).

Como no se cumple (a) existe $x_0 \neq 0$ tal que la serie converge para $x = x_0$. Por el teorema anterior la serie converge si $|x| < |x_0|$.

Como no se cumple (b) debe existir x_1 tal que la serie no converge en x_1.

Sea

$$R = \sup\{r > 0 : \text{ la serie converge si } |x| \leq r\}.$$

Entonces $0 < R < +\infty$.

Del Teorema anterior sigue que se satisface (c). □

Definición 5.23. El número R que aparece en el Teorema anterior se suele llamar *radio de convergencia de la serie* y el intervalo abierto $(-R, R)$ se llama *intervalo de convergencia de la serie.*

Observación 5.24. Es importante notar que el Teorema no dice nada acerca de lo que puede ocurrir si $|x| = R$.

Observación 5.25. Existe otra forma de definir el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, que de paso nos da una fórmula para calcularlo.

La serie va a converger absolutamente si

$$|x| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} < 1.$$

Es decir, si

$$|x| < \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Si la sucesión $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ no es acotada entonces la serie solamente converge si $x = 0$. Si el límite superior es 0 entonces la serie converge para todo x de $\mathbb{R}$.

Sea

$$V = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Si $V \in (0, \infty)$ entonces la serie converge si $|x| < V$ y diverge si $|x| > V$ de manera que el radio de convergencia R de la serie es igual V, es decir,

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Observación 5.26. Los argumentos de la observación anterior también son válidos para el criterio del cociente en lugar del criterio de la raíz, usando

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}.$$

Como veremos en los ejemplos, hay casos en que el criterio del cociente es más útil que el de la raíz para hallar el radio de convergencia de una serie.

Ejemplo 5.27. Consideremos la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n.$$

Aplicaremos el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} n+1 = \infty.$$

Entonces $R = 0$. Es decir, el radio de convergencia es 0.

Por lo tanto esta serie converge solamente en $x = 0$ (el radio de convergencia es 0).

Ejemplo 5.28. Consideremos la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Aplicaremos el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Entonces $R = \infty$.

Por lo tanto la serie converge para cualquier valor de x, converge uniformemente en cualquier intervalo acotado.

Observación 5.29. En casos como el del ejemplo anterior se suele decir que el radio de convergencia es ∞ y que el intervalo de convergencia es $(-\infty, \infty)$.

Ejemplo 5.30. Consideremos la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^n}{3n+1}.$$

Aplicaremos el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(-1)^{n+1}2^{n+1}}{3(n+1)+1}\right|}{\left|\frac{(-1)^n 2^n}{3n+1}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(3n+1)}{3n+4} = 2.$$

Entonces $R = 1/2$.

Por lo tanto la serie converge si $|x| < 1/2$ y diverge si $|x| > 1/2$. El radio de convergencia es $1/2$. El intervalo de convergencia es $(-1/2, 1/2)$.

Veamos qué ocurre en los extremos del intervalo de convergencia.

En $x = 1/2$ la serie es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$$

que converge (probarlo usando criterios de series alternadas).

En $x = -1/2$ la serie es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$$

que diverge (para probarlo relacionarla con la serie armónica).

De los resultados ya probados para series numéricas y lo que ya hemos probado para series de potencias sigue inmediatamente el siguiente resultado:

Teorema 5.31. *Si* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *para* $|x| < R_1$, *y* $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ *para* $|x| < R_2$ *entonces*

(a) $f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ *para* $|x| < R$.

(b) $f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) x^n$ *para* $|x| < R$.

donde $R = \text{mín}(R_1, R_2)$.

Demostración.

(a) es inmediato.

(b) sigue del Teorema 4.26. □

Teorema 5.32. *Supóngase que la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *converge para* $|x| < R$ *y definamos la función* f *por*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (si |x| < R).$$

Entonces la función f *es continua y diferenciable en el intervalo* $(-R, R)$ *y además*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Demostración. Sea $x_0 \in (-R, R)$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $x_0 \in [-R + \varepsilon, R - \varepsilon]$. La serie converge uniformemente en el intervalo $[-R + \varepsilon, R - \varepsilon]$, por lo tanto f es límite uniforme de funciones continuas. Luego f es continua en x_0. Por lo tanto f es continua en $(-R, R)$.

A continuación usaremos el criterio de intercambio de series con derivadas. Para eso hallaremos primero el radio de convergencia de la serie de las derivadas $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Como $\text{lím sup}_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ tenemos que

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

por lo que la serie de las derivadas, $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, también converge uniformemente en el intervalo $[-R + \varepsilon, R - \varepsilon]$.

Por el Teorema 5.17 se obtiene

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

$\square$

Corolario 5.33. *Supóngase que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para $|x| < R$ y definamos la función f por*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (\text{ si } |x| < R).$$

Entonces la función f tiene derivadas de todos los órdenes en $(-R, R)$, que están dadas por

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\, a_n x^{n-k}.$$

En particular $f^{(k)}(0) = k! a_k$.

Es decir,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n \qquad (si |x| < R).$$

Corolario 5.34. *Si las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ convergen para $|x| < R$ y además*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

en $(-R, R)$ entonces $a_k = b_k$ para todo k.

Observación 5.35. El corolario anterior proporciona la unicidad de los coeficientes de una serie de potencias.

Ejemplo 5.36. Hallar la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$

para $x \in A$ donde A (a determinar) es el conjunto donde la serie converge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \right) = x \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' = x \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Por supuesto la igualdad anterior es cierta en el intervalo de convergencia de la serie, que es $(-1, 1)$.

Observación 5.37. Los resultados obtenidos para serie de potencias de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ se extienden en forma natural a series de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - z)^n$.

Quedará como ejercicio escribir los teoremas correspondientes para este tipo de series.

5. El Teorema de aproximación de Weierstrass.

Lema 5.38 (Caso particular del teorema de Weierstrass).

Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *es una función continua tal que* $f(0) = f(1) = 0$ *entonces existe una sucesión de polinomios* $\{P_n\}$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} P_n = f$$

uniformemente en el intervalo $[0,1]$.

Demostración. Por conveniencia extenderemos f a todo $\mathbb{R}$ definiendo $f(x)$ como 0 si x no pertenece a $[0,1]$. Así tendremos que f es uniformemente continua en todo $\mathbb{R}$.

Consideremos los polinomios

$$Q_n(x) = c_n(1-x^2)^n \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

donde

$$c_n = \frac{1}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx}.$$

Luego

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)\, dx = 1 \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

Sea

$$P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t)\, Q_n(t)\, dt \qquad (0 \leq x \leq 1).$$

Como hemos supuesto $f(x) = 0$ si $x \notin [0,1]$ con un cambio de variables se llega fácilmente a que

$$P_n(x) = \int_{-x}^{1-x} f(x+t)\, Qn(t)\, dt = \int_{0}^{1} f(u)\, Q_n(u-x)\, du$$

y es claro que esta última integral es un polinomio en x. Por lo tanto $\{P_n\}$ es una sucesión de polinomios.

Será necesario estimar los c_n. Consideremos la función $h(x) = (1-x^2)^n - 1 - nx^2$ entonces $h(0) = 0$ y $h'(x) > 0$ si $x \in (0,1)$. Usando esto, es fácil probar que

$$(1-x^2)^n \geq 1 - nx^2.$$

Usando que el integrando es positivo y que $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq 1$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n \, dx &= 2\int_{0}^{1} (1-x^2)^n \, dx \\
&\geq 2\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1-x^2)^n \, dx \\
&\geq 2\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1-nx^2) \, dx \\
&= \frac{4}{3\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$c_n < \sqrt{n}.$$

Sea $\delta > 0$ se tiene que

$$Q_n(x) \leq \sqrt{n}(1-\delta^2)^n \qquad\qquad \delta \leq |x| \leq 1,$$

por lo tanto, si $n \to \infty$ tenemos que $Q_n \to 0$ uniformemente en $A_\delta = \{x \in \mathbb{R} : \delta \leq |x| \leq 1\}$.

Sea $\varepsilon > 0$, por la continuidad de f, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $|x-y| < \delta(\varepsilon)$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$.

Como f es continua en el compacto $[0,1]$ entonces alcanza el máximo dentro de ese conjunto, sea $M = \max |f(x)|$.

Sea

$$\gamma = \frac{\varepsilon}{8M(1-\delta)}.$$

Como $Q_n \to 0$ uniformemente en $A_{\delta(\varepsilon)}$ entonces para este $\gamma > 0$ existe N tal que si $n \geq N$ y $t \in A_{\delta(\varepsilon)}$ entonces $Q_n(t) < \gamma$.

Para $0 \leq x \leq 1$ y $n \geq N$ tenemos que

$$\begin{aligned}
|P_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{-1}^{1} f(x+t) Q_n(t) \, dt - f(x) \int_{-1}^{1} Q_n(t) \, dt \right| \\
&= \left| \int_{-1}^{1} [f(x+t) - f(x)] \, Q_n(t) \, dt \right| \\
&\leq \int_{-1}^{1} |f(x+t) - f(x)| \, Q_n(t) \, dt
\end{aligned}$$

Como

$$|f(x+t) - f(x)| \leq |f(x+t)| + |f(x)| \leq 2M$$

resulta que

$$\begin{aligned}
|P_n(x) - f(x)| &\leq 2M \int_{-1}^{-\delta} Q_n(t)\,dt + \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t)\,dt + 2M\int_{\delta}^{1} Q_n(t)\,dt \\
&\leq 2M \int_{-1}^{-\delta} \gamma\,dt + \frac{\varepsilon}{2}\int_{-1}^{1} Q_n(t)\,dt + 2M\int_{\delta}^{1} \gamma\,dt \\
&= 2M\gamma(1-\delta) + \frac{\varepsilon}{2} + 2M\gamma(1-\delta) \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Esto prueba la convergencia uniforme en $[0,1]$. □

TEOREMA 5.39 (Weierstrass). *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua entonces existe una sucesión de polinomios $\{P_n\}$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} P_n = f$$

uniformemente en el intervalo $[a,b]$.

DEMOSTRACIÓN. Es claro que basta demostrar el Teorema para el caso en que $[a,b] = [0,1]$.

Dada f general podemos considerar la función

$$g(x) = f(x) - f(0) - x[f(1) - f(0)].$$

Se tiene que $g(0) = g(1) = 0$.

Por el Lema 5.38 g se puede obtener como límite uniforme de polinomios.

Además $f - g$ es un polinomio.

Como $f = (f-g) + g$ obtenemos que f se puede obtener como límite uniforme de polinomios.

□

Ejercicios.
Sucesiones y series de funciones.

(1) Para cada una de las siguientes sucesiones $\{f_n\}$:

(i) determinar el límite puntual de $\{f_n\}$ (si existe) en el intervalo indicado,

(ii) decir si $\{f_n\}$ converge uniformemente o no.

(a) $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$, en $[0,1]$.

(b) $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq n; \\ x-n & \text{si } x \geq n; \end{cases}$
en $\mathbb{R}$.

(c) $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq n; \\ x-n & \text{si } x \geq n; \end{cases}$
en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$.

(d) $f_n(x) = e^{-nx^2}$ en $[-1,1]$.

(2) Hallar cada una de las siguientes sumas infinitas

(a) $1 - x + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dots$

(b) $1 - x^3 + x^6 - x^9 + \dots$

(c) $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3\cdot 2} + \dfrac{x^4}{4\cdot 3} - \dfrac{x^5}{5\cdot 4} + \dots$

(3) Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x \neq 0; \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Hallar $f^{(k)}(0)$ para $k = 1, 2, 3, \dots$

(4) Para $x \in (-R, R)$ sea

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Demostrar que:

(a) si f es par, entonces $a_n = 0$ para n impar,

(b) si f es impar entonces $a_n = 0$ para n par.

(5) Sea f una función diferenciable en $\mathbb{R}$. Demostrar que la función f' es el límite puntual de una sucesión de funciones continuas.

(6) Consideremos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2 x}.$$

(a) ¿Para cuáles valores de x la serie converge absolutamente?

(b) ¿En cuáles intervalos converge uniformemente?

(c) ¿En cuáles intervalos falla la convergencia uniforme?

(d) ¿Es f continua en el conjunto donde la serie converge?

(e) ¿Es f acotada?

(7) Demostrar que toda sucesión uniformemente convergente de funciones acotadas es uniformemente acotada.

(8) Demostrar que si $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ son sucesiones de funciones que convergen uniformemente en un conjunto E entonces $\{f_n + g_n\}$ también converge uniformemente en E. Demostrar que si además las funciones f_n y g_n son acotadas entonces $\{f_n g_n\}$ también converge uniformemente en E.

(9) Construir un par de sucesiones $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ que convergen uniformemente en E pero sin embargo su producto $\{f_n\, g_n\}$ no converge uniformemente en E.

(10) Demostrar que si f es continua en $[a,b]$ y

$$\int_a^b f(x)\, x^n\, dx = 0 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

entonces $f(x) = 0$ para todo x en $[a,b]$.

(11) Supóngase que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge. Entonces es claro que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es uniformemente convergente en $[-a, a]$ para $0 < a < 1$. Sin embargo puede no converger uniformemente en $[-1, 1]$; de hecho puede no converger en el punto -1 (ejemplo: la serie de $\ln(1 + x)$).

Un Teorema de Abel dice que si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge entonces la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformemente en $[0, 1]$ y por lo tanto la función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

es continua en $[0, 1]$. Esto implica que, en este caso,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Demostrar el Teorema de Abel.

Sugerencia:
Demostrar primero el lema de Abel:
Si $\{b_n\}$ es una sucesión monótona decreciente, no negativa y

$$m \leq a_1 + \cdots + a_n \leq M \quad \text{para todo } n$$

entonces

$$b_1 m \leq a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \leq b_1 M.$$

(Indicación:
Sea $s_k = a_1 + \cdots + a_k$, entonces

$$\begin{aligned} a_1\, b_1 + \cdots + a_n\, b_n &= b_1\, s_1 + b_2\, (s_2 - s_1) + \cdots + b_n\, (s_n - s_{n-1}) \\ &= s_1\, (b_1 - b_2) + s_2\, (b_2 - b_3) + \cdots + s_{n-1}\, (b_{n-1} - b_n) + s_n\, b_n, \end{aligned}$$

notar que, para cada i, $b_i - b_{i-1} \geq 0$ y $m \leq s_i \leq M$)

Deducir que

$$b_k m \leq a_k b_k + \cdots + a_n b_n \leq b_k M.$$

(12) Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ es sumable Abel si existe

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Por el ejercicio anterior toda sucesión sumable es sumable Abel. Hallar una sucesión que no sea sumable y que sin embargo si sea sumable Abel.

(13) Determinar el conjunto de convergencia de cada una de las siguientes series. Investigar en cuáles conjuntos la convergencia es uniforme y en cuáles conjuntos la convergencia es absoluta.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!x^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n^x}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)x^n}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n^{\log x}}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n-1)x}{(2n-1)^2}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^5 x^{2n}}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \operatorname{sen}\left(\frac{x}{3^n}\right)$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\,3^n(x-5)^n}$

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{e^{nx}}$

(l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{x^{n^n}}$

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\, e^{-n\operatorname{sen} x}$

(n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n + \frac{1}{nx^n}$

(o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}$

(p) $\displaystyle\sum_{n=-1}^{\infty} x^n$

(14) Hallar el intervalo de convergencia de cada una de las siguientes series de potencias, e investigar la convergencia en los extremos de dicho intervalo.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{n^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n\,3^n\log n}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2(n-1)}}{2n-1}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}\, x^{2n-1}}{(4n-3)^2}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^{n!}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5 x^{2n}}{2n+1}$

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$

(l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right) x^n$

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2}\, x^{n^2}$

(n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n\,(x+3)^n$

(o) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n$

(p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{2n\, 4^n}$

(q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} (x-1)^n$

(r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-\pi)^n}{n!}$

(s) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,(x+3)^n}{n^n}$

(t) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\log(n+1)}$

(u) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\,\log(n+1)\,)\; x^n$

(v) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (\,2^n\, \log n\,)\; (x-25)^n$

(15) Demostrar la convergencia uniforme de cada una de las siguientes series en los intervalos que se indican:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ en el intervalo $[-1,1]$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{2^n}$ en toda la recta

CAPíTULO 6

Integrales impropias.

Al definir la integral de Riemann de una función f sobre un intervalo $[a,b]$ era necesario suponer:

(i) f es acotada

(ii) $[a,b]$ es un intervalo cerrado y acotado

En este capítulo vamos a ver cómo, en algunos casos, es posible extender el concepto de integral a funciones no acotadas y también integrar sobre intervalos no acotados.

1. Integrales impropias del primer tipo.

Definición 6.1. Sea $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ una función. Si $\int_a^b f(x)\,dx$ existe para todo $b>a$ y si además $\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ existe y es finito entonces el límite anterior es, por definición, *la integral de f sobre* $[a,+\infty)$ y se denota por $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Es decir,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

En este caso se dice que $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

Ejemplo 6.2.

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{-1}{x}\right]_1^b = \lim_{b\to+\infty} 1-\frac{1}{b} = 1.$$

Ejemplo 6.3.

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left[(\ln x)\right]_1^b = \lim_{b\to+\infty}\ln b = +\infty.$$

Observación 6.4. Las integrales de la forma $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ se definen en forma análoga.

La integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ se define de la siguiente manera:

Definición 6.5. Si existe c tal que $\int_{-\infty}^c f(x)\,dx$ y $\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$ convergen entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Observación 6.6. Es fácil verificar que la suma anterior no depende de c.

Este tipo de integrales, en las que el intervalo de integración no es acotado, se llaman *integrales impropias del primer tipo.*

En caso de que el límite que aparece al definir la integral impropia no existe o no es finito se dice que la integral es *divergente.*

Los siguientes criterios de convergencia son análogos a los de series, su demostración, que no debe dar ningún problema al alumno quedará como ejercicio.

TEOREMA 6.7. *Si $f(x) \geq 0$ para todo $x \geq a$ entonces $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge si y sólo si existe $M \geq 0$ tal que*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

para todo $b > a$.

TEOREMA 6.8. *Si $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para todo $x \geq a$ y $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge entonces $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ también converge y*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$

TEOREMA 6.9. *Si $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge entonces $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ también converge y*

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)\,dx\right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx.$$

2. Integrales impropias del segundo tipo.

DEFINICIÓN 6.10. Sea $f : (a,b] \to \mathbb{R}$. Supongamos que $\int_\alpha^b f(x)\,dx$ existe para $a < \alpha < b$. La integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ se define por $\lim_{\alpha\to a^+} \int_\alpha^b f(x)\,dx$, en caso de que el límite exista y sea finito. Es decir,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to a^+} \int_\alpha^b f(x)\,dx.$$

En este caso se dice que la integral es *convergente.*

Este tipo de integrales impropias se llaman *integrales impropias del segundo tipo.*

OBSERVACIÓN 6.11. Si f está definida en $[a,b)$ y es integrable en $[a,\beta]$ para $a < \beta < b$ entonces la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ se define en forma completamente análoga.

EJEMPLO 6.12.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{a\to 0^+} \left[\frac{-1}{x}\right]_a^1 = \lim_{a\to 0^+} -1 + \frac{1}{a} = +\infty.$$

Si f está definida en un conjunto de la forma $[a, c) \cup (c, d]$ y existen las integrales impropias $\int_a^c f(x)\,dx$ y $\int_c^b f(x)\,dx$ se define $\int_a^b f(x)\,dx$ como $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$. Es decir,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Por supuesto para este tipo de integrales valen criterios análogos a los ya enunciados. Tanto su enunciado como su demostración quedarán como ejercicio.

También es claro que la definición de $\int_a^b f(x)\,dx$ se puede extender al caso en que f no está definida en una cantidad finita de puntos del intervalo $[a, b]$.

Ejemplo 6.13.

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\alpha \to 0^+} \int_\alpha^1 \frac{1}{x}\,dx = +\infty$$

Por lo tanto la integral impropia

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$$

NO converge.

Sin embargo

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \int_{-1}^{-\alpha} \frac{1}{x}\,dx + \int_\alpha^1 \frac{1}{x}\,dx = 0.$$

Por eso se define el valor principal de esta integral como 0, y suele escribirse

$$v.p. \int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx = 0.$$

Ejercicios.
Integrales impropias.

(1) Estudiar la convergencia de cada una de las siguientes integrales impropias

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}\, dx$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\, dx$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$

(d) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\log x}{1-x}\, dx$

(2) Para un cierto valor de C la integral

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} - \frac{C}{x+1} \right) dx$$

converge. Determinar C y calcular la integral.

(3) Demostrar que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$ converge.

(4) Demostrar que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right| dx$ diverge.

(5) La función Γ se define por

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt.$$

(a) Demostrar que la integral impropia $\Gamma(x)$ está definida si $x > 0$.

(b) Demostrar que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ si $x > 0$.

(c) Demostrar que $\Gamma(1) = 1$ y deducir que $\Gamma(n) = (n-1)!$ si n es un entero positivo.

(d) Hallar $\Gamma(\frac{1}{2})$.

CAPíTULO 7

Series de Fourier.

En este capítulo se da una muy breve introducción a las Series de Fourier. Muchos de los resultados que se dan son válidos bajo condiciones mucho más generales. El lector interesado puede encontrar más información en [**3**]

1. Polinomios trigonométricos y funciones periódicas.

EJERCICIO 7.1. Sean m y n enteros positivos. Demostrar que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n; \\ \pi, & \text{si } m = n. \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx = 0.$$

DEFINICIÓN 7.2. Un *polinomio trigonométrico* es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ de la forma

$$P(x) = \frac{\alpha_o}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos kx + \beta_k \operatorname{sen} kx, \tag{7.1}$$

donde $\alpha_o, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ y $\beta_1, \dots, \beta_n$ son constantes reales.

EJERCICIO 7.3. Demostrar que si P un polinomio trigonométrico de la forma (7.1), entonces

$$\begin{aligned} \alpha_o &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(x)\, dx \\ \alpha_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(x) \cos kx\, dx \quad \text{para } k = 1, \dots, n \\ \beta_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(x) \operatorname{sen} kx\, dx \quad \text{para } k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Observación 7.4. Como $\cos 0 = 1$ tenemos que las dos primeras fórmulas del Ejercicio 7.3 se reducen a

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(x)\cos kx\,dx \quad \text{para } k = 0,\dots,n.$$

Definición 7.5. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función. Decimos que f es *periódica* cuando existe un número real T, no nulo, tal que $f(x+T) = f(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$. En este caso se dice que T es un *período* para f.

Ejemplo 7.6.

(a) Las funciones sen y cos tienen período 2π.
(b) La función u definida por $u(x) = \cos(2x)$ tiene período π.
(c) La función v definida por $v(x) = \operatorname{sen}(3x)$ tiene período $\frac{2\pi}{3}$.
(d) La función f definida por $f(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{2}x)$ tiene período $\sqrt{2}\pi$.
(e) La función g definida por $g(x) = 1 + \cos(2x) + \operatorname{sen}(3x)$ tiene período 2π.
(f) La función h definida por $h(x) = 1 + \cos(2x) + \operatorname{sen}(4x)$ tiene período π.
(g) Todo polinomio trigonométrico tiene período 2π.

Ejercicio 7.7. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función de período T. Demostrar que si f es integrable sobre un intervalo de longitud T entonces f es integrable sobre cualquier intervalo de longitud T y para cualquier $a\in\mathbb{R}$ se tiene que

$$\int_{-a}^{T-a} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx.$$

2. Coeficientes y serie de Fourier

Definición 7.8. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función de período 2π, integrable en el intervalo $[-\pi,\pi]$.

Los *coeficientes de Fourier* de f son

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \qquad (k = 0,1,\dots), \tag{7.2}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} kx\,dx \qquad (k = 1,2,\dots). \tag{7.3}$$

La *serie de Fourier* de f es la siguiente suma formal

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx + b_k\operatorname{sen} kx \tag{7.4}$$

Ejemplo 7.9. Consideremos la función f definida por

$$f(x) = x^2 \quad \text{para } -\pi \leq x \leq \pi,$$

extendida por periodicidad a toda la recta (el período es 2π).

Verificar, a manera de ejercicio, que los coeficientes de Fourier de f están dado por

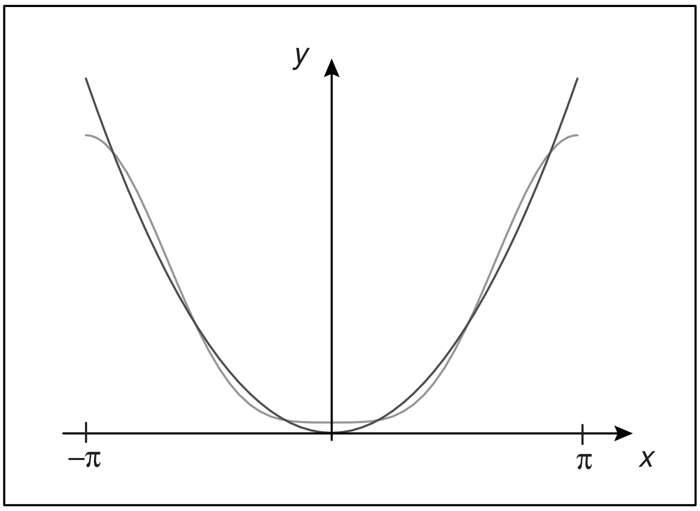
$$a_o = \frac{2\pi^2}{3}$$
$$a_k = 4\,\frac{(-1)^k}{k^2} \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots$$
$$b_k = 0 \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots$$

Por lo tanto la serie de Fourier de f es

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kx).$$

En la siguiente figura vemos los gráficos de f y de la suma parcial

$$S_2(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos(x) + \cos(2x).$$



Observamos que el gráfico de la suma parcial se aproxima al gráfico de la función. Esto no es casualidad, en la próxima sección veremos que, bajo ciertas condiciones, la serie de Fourier de una función converge a la función.

3. Convergencia puntual de la Serie de Fourier.

El siguiente resultado, que dejamos como ejercicio, lo necesitaremos para probar el resultado fundamental de esta sección.

LEMA 7.10 (Riemann-Lebesgue). *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(x)\operatorname{sen}(\lambda x)\,dx = \lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(x)\cos(\lambda x)\,dx = 0.$$

INDICACIÓN. Demostrarlo primero para funciones diferenciables, usando la fórmula de integración por partes. Pasar de las funciones diferenciables a las continuas usando argumentos de aproximación.

$\square$

PROPOSICIÓN 7.11. *Si $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sen}(\frac{x}{2}) \neq 0$ y n es un número natural, entonces*

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}. \tag{7.5}$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\left(2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)\left(\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx\right) =$$
$$= \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos x + \cdots + 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos nx$$

Para $k = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}
2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos kx &= \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2} - kx\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2} + kx\right)\\
&= \operatorname{sen}\left(\left(\frac{1}{2} - k\right)x\right) + \operatorname{sen}\left(\left(\frac{1}{2} + k\right)x\right)\\
&= -\operatorname{sen}\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)x\right) + \operatorname{sen}\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)x\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left(2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)\left(\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx\right) =$$
$$= \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{3x}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{3x}{2}\right) + \cdots - \operatorname{sen}\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right) + \operatorname{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)$$
$$= \operatorname{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right).$$

$\square$

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de período 2π, integrable en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Sea $\{S_n\}$ la sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de f, es decir

$$S_n(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx, \tag{7.6}$$

donde a_k y b_k son los coeficientes de Fourier de f.

Si substituimos las fórmulas (7.2) y (7.3) en la expresión (7.6) obtenemos

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt \cos kx + \operatorname{sen} kt \operatorname{sen} kx \right] dt,$$

de la identidad para el coseno de la suma, sigue que

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(\, k(t-x)\,) \right] dt,$$

por la fórmula de sumación obtenida en la Proposición 7.11 tenemos que

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, \frac{\operatorname{sen}((n+\frac{1}{2})(t-x))}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}(t-x))} \, dt.$$

Si hacemos el cambio de variable $\tau = t - x$ y usamos que, si una función tiene período 2π, entonces su integral sobre cualquier intervalo de longitud 2π es independiente del intervalo, obtenemos

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+\tau) \frac{\operatorname{sen}((n+\frac{1}{2})\tau)}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\tau)} \, d\tau. \tag{7.7}$$

La sucesión de funciones definida por

$$D_n(t) = \frac{\operatorname{sen}((n+\frac{1}{2})t)}{2\pi \operatorname{sen}(\frac{1}{2}t)}$$

se conoce con el nombre de *núcleo de Dirichlet*.

De la igualdad (7.7) se obtiene que, para f como antes,

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) \, dt. \tag{7.8}$$

De la fórmula obtenida en la Proposición 7.11 se deduce que

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} (\cos t + \cos 2t + \cdots \cos nt)$$

y de esta última igualdad se obtiene que

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\, dt = 1,$$

TEOREMA 7.12. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable de período 2π. Entonces la serie de Fourier de f converge puntualmente a f.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in \mathbb{R}$. Sea $\{S_n(x)\}$ la sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de f, entonces

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t)\, dt.$$

Luego

$$\begin{aligned} S_n(x) - f(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t)\, dt - f(x) \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\, dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (\, f(x+t) - f(x)\,) D_n(t)\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{f(x+t) - f(x)}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}t)} \right) \operatorname{sen}\left(\left(n + \tfrac{1}{2}\right) t \right)\, dt \end{aligned}$$

Sea

$$g(t) = \frac{f(x+t) - f(x)}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}t)},$$

claramente

$$g(t) = \left(\frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right) \left(\frac{t}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}t)} \right),$$

de las hipótesis sobre f sigue inmediatamente que existe $\lim_{t\to 0} g(t)$ y que si definimos $g(0)$ como este límite entonces g es continua en $[-\pi, \pi]$.

Por el Lema de Riemann-Lebesgue (ver Lema 7.10) tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{f(x+t) - f(x)}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}t)} \right) \operatorname{sen}\left(\left(n + \tfrac{1}{2}\right) t \right)\, dt = 0.$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x).$$

□

Bibliografía

[1] Apostol, T. *Calculus.* Tomos 1 y 2. Reverté.

[2] Apostol, T. *Mathematical Analysis.*

[3] Bruzual, R. y Domínguez, M. *Series de Fourier.* Libro elaborado para el III y IV Taller de Formación Matemática. 77

[4] Cohen, L. and Ehrlich, G. *The structure of the real number system.* Van Nostrand, 1963.

[5] Deminovich, B. *Problemas y ejercicios de Análisis Matemático.*MIR

[6] Halmos, P. *Teoría intuitiva de los conjuntos.* CECSA, 1971.

[7] Horváth, J. *Introducción a la topología general* Monografía N 9, Serie de Matemática. O.E.A.

[8] Lick, D. *The advanced calculus of one variable.* Appleton-Century-Crofts, 1971.

[9] Protter, M. H. and Morrey, C. B. *A First Course in Real Analysis.*

[10] Rudin, W. *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw Hill 55

[11] Spivack, M. *Calculus.* Tomos 1 y 2. Reverté, 1981

[12] Stromberg, H. *An Introduction to Classical Real Analysis.*

[13] White, A. *Real Analysis; An Introduction.*

Índice alfabético