UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA
LABORATORIO DE FORMAS EN GRUPOS

EJERCICIOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL EN VARIAS VARIABLES

Ramón Bruzual
Marisela Domínguez

Caracas, Venezuela
Julio 2005

Ramón Bruzual
Correo-E: rbruzual@euler.ciens.ucv.ve

Marisela Domínguez
Correo-E: mdomin@euler.ciens.ucv.ve

Laboratorio de Formas en Grupos
Centro de Análisis
Escuela de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad Central de Venezuela

http://euler.ciens.ucv.ve/~labfg

Contenido

El espacio métrico $\mathbb{R}^n$.

(1) Para $r \in [1, +\infty)$ y $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definimos

$$\| x \|_r = (|x_1|^r + \ldots + |x_n|^r)^{\frac{1}{r}} .$$

El objetivo del presente ejercicio es demostrar que $\| \, \|_r$ es una norma en $\mathbb{R}^n$. La única de las propiedades de la norma que presenta alguna dificultad es la desigualdad triangular para el caso $r > 1$. Proceder de la siguiente manera:

(a) Demostrar que si α y β son números reales no negativos y $\lambda \in (0, 1)$ entonces

$$\alpha^\lambda \, \beta^{1-\lambda} \leq \lambda \, \alpha + (1 - \lambda)\beta.$$

(Sugerencia: considerar la función $\varphi(t) = 1 - \lambda + \lambda t - t^\lambda$ para $t \geq 0$, demostrar que $\varphi(t) \geq \varphi(1)$ para todo $t \geq 0$ y considerar $t = \frac{\alpha}{\beta}$.

(b) Demostrar la desigualdad de Hölder:
Si $r, s \in (1, +\infty)$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$, $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \| x \|_r \| y \|_s .$$

(c) Demostrar la desigualdad de Minkowski:
Si $r \in (1, +\infty)$, , $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$\| x + y \|_r \leq \| x \|_r + \| y \|_r .$$

(2) Demostrar que en un espacio métrico una sucesión no puede tener dos límites diferentes.

Nota: esta propiedad se conoce como unicidad del límite.

(3) Sea X un conjunto no vacío y sea $\mathrm{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ una función que satisface:

(a) $\mathrm{d}(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$ para todo $x, y \in X$.

(b) $\mathrm{d}(x, z) \leq \mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(z, y)$ para todo $x, y, z \in X$.

Probar que d es una métrica en X.

(4) Representar gráficamente $B(0,1)$ en $\mathbb{R}^2$ con las métricas d_∞, d_1 y d_2.

(5) Sea X cualquier conjunto, definamos

$$\mathrm{d}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Demuestre que (X, d) es un espacio métrico.

(6) Sea (X, d) un espacio métrico. Demostrar que si $x_0 \in X$ y $r > 0$ entonces $B(x_0, r)$ es un conjunto abierto.

(7) Sea A un conjunto abierto y sea $x \in A$. Pruebe que $A - \{x\}$ es abierto.

(8) ¿ Cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ son abiertos? '¿ Cuáles son cerrados? Hallar su interior, sus puntos límites y su clausura.

(a) $\mathbb{N}$	(b) $\mathbb{Z}$	(c) $\mathbb{Q}$
(d) $(0,1)$	(e) $[0,1]$	(f) $(0,1]$
(g) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N},\ n \neq 0\}$	(h) $\{x \in \mathbb{R} : x \text{ es irracional}\}$	(i) $(-\infty,1) \cup (3,4) \cup (4,5]$
(j) $\{1,3,5\} \cup (1,2)$		

(9) ¿ Cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ son abiertos? ¿ Cuáles son cerrados? Hallar su interior, sus puntos límites y su clausura.

(a) $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$	(b) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
(c) $(0,1) \times (0,1)$	(d) $(0,1) \times [0,1]$
(e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$	(f) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1,\ x \geq 0\}$
(g) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \operatorname{sen} \frac{1}{x},\ x \in (0,1)\}$	

(10) Sea (X, d) un espacio métrico. Demuestre que:
   (a) La unión de una familia de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
   (b) La intersección de dos conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
   (c) La intersección de una familia finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

(11) Mostrar con un ejemplo que puede ocurrir que la intersección de una familia infinita de conjuntos abiertos no sea un conjunto abierto.

(12) Sea (X, d) un espacio métrico. Demuestre que:

(a) La intersección de una familia de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.
(b) La unión de dos conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.
(c) La unión de una familia finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

(13) Mostrar con un ejemplo que puede ocurrir que la unión de una familia infinita de conjuntos cerrados no sea un conjunto cerrado.

(14) Demostrar que todo subconjunto abierto y no vacío de $\mathbb{R}$ es una unión contable de intervalos abiertos disjuntos.

(15) Sea (X, d) un espacio métrico y sean $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ sucesiones en X tales que $x_n \to x$, $y_n \to y$. Probar que $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$.

(16) Sea (X, d) un espacio métrico. Definamos

$$D(x, y) = \frac{\mathrm{d}(x, y)}{1 + \mathrm{d}(x, y)}.$$

Demostrar que (X, D) también es un espacio métrico.

(17) Probar que $(C[a, b], d_\infty)$ es completo.

(18) Sean X e Y espacios métricos, sea $f : X \to Y$ una función. Demostrar que f es continua si y sólo si $f^{-1}(C)$ es cerrado en X para todo $C \subset Y$ cerrado.

(19) Demostrar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y $f(x + y) = f(x) + f(y)$ entonces existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ayuda: Pruebe primero que $f(x) = xf(1)$ para todo $x \in \mathbb{Q}$, hágalo primero para $x \in \mathbb{N}$, luego para $x \in \mathbb{Z}$ y finalmente para $x \in \mathbb{Q}$.

(20) Sea X un conjunto no vacío y d la métrica dada por

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

(a) ¿ Cuándo una sucesión en X es de Cauchy ?
(b) ¿ Cuándo una sucesión en X es convergente ?
(c) ¿ Es X completo ?

(d) Caracterizar los subconjuntos abiertos de X.
(e) Si $x_0 \in X$ y $r > 0$, ¿ cómo es $B(x_0, r)$?
(f) Caracterizar las funciones $f : X \to \mathbb{R}$ que son continuas.

(21) En cada uno de los siguientes ejercicios sea S el conjunto de todos los puntos (x, y) del plano que satisfacen las condiciones dadas. Hacer un dibujo mostrando el conjunto S. Decir si S es abierto o si es cerrado y hallar su frontera. Indicar la frontera en el dibujo.
(a) $x^2 + y^2 < 1$.
(b) $3x^2 + 2y^2 < 6$.
(c) $|x| < 1$, $|y| < 1$.
(d) $x \geq 0$, $y > 0$.
(e) $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$.
(f) $x > 0$, $y < 0$.
(g) $xy < 1$.
(h) $1 \leq x \leq 2$, $3 < y < 4$.
(i) $1 < x < 2$, $3 < y < 4$.
(j) $x \geq y$.
(k) $y > x^2$, $|x| < 2$.
(l) $(x^2 + y^2 - 4)(4 - x^2 - y^2) \geq 0$.
(m) $(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2) \geq 0$.
(n) $(2x - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - x) > 0$.
(o) $1 < x^2 + y^2 < 2$.
(p) $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$.
(q) $1 \leq x^2 + y^2 < 2$.
(r) $y = x^2$.

(22) En cada uno de los siguientes ejercicios, sea S el conjunto de los puntos (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ que satisfacen las condiciones dadas. Determinar si S es abierto o no, si es cerrado o no y hallar su frontera.
(a) $z - x^2 - y^2 - 1 > 0$.
(b) $|x| < 1$, $|y| < 1$, $|z| < 1$.
(c) $x + y + z < 1$.
(d) $x + y + z < 1$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.
(e) $x^2 + y^2 < 1$.

(f) $x^2 + y^2 \leq 1$.
(g) $x^2 + y^2 < 1$, $z = 0$.
(h) $x^2 + z^2 < 3$.
(i) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} < 1$.

(23) Representar gráficamente la región del plano cuyas coordenadas polares satisfacen:
(a) $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$, $1 \leq r \leq 2$.
(b) $r \leq 1$, $|\theta| \leq \frac{\pi}{4}$.
(c) $r \operatorname{sen} \theta \leq 1$, $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$.
(d) $r \leq 4\cos\theta$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

(24) Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Demostrar que A es acotado si y sólo si el diámetro de A es finito.

(25) Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Demostrar:
(a) $\mathrm{int}(A) \subset A$.
(b) $\mathrm{int}(A)$ es abierto.
(c) Si B es un abierto y $B \subset A$ entonces $B \subset \mathrm{int}(A)$.
Esto se expresa diciendo que $\mathrm{int}(A)$ es el mayor abierto contenido en A.

(26) Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Demostrar:
(a) $A \subset \overline{A}$.
(b) $\overline{A}$ es cerrado.
(c) Si C es un cerrado y $A \subset C$ entonces $\overline{A} \subset C$.
Esto se expresa diciendo que $\overline{A}$ es el menor cerrado que contiene a A.

(27) Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Demostrar que A es cerrado si y sólo si $\overline{A} = A$.

(28) *Demostrar que $(C[a, b], d_1)$ y $(C[a, b], d_2)$ no son completos.

Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$.

(1) Hallar el dominio de cada una de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = \dfrac{e^{3x} - e^y}{e^x - e^y}$

(b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$

(c) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$

(d) $f(x,y) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x+y)}$

(e) $f(x,y,z) = \log(x + y - z)$

(f) $f(x,y) = \sqrt[5]{x^2 + y^2 - 4}$

(g) $f(x,y,z) = \dfrac{xy + z}{\sqrt{1-y}}$

(h) $f(x,y,z) = \arccos(x + y + z)$.

(2) Hallar y representar gráficamente el dominio, las curvas de nivel, el gráfico y la imagen de cada una de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

(b) $f(x,y) = x^2 + y^2$

(c) $f(x,y) = x + 2y$

(d) $f(x,y) = xy$.

(3) Decidir si existen los siguientes límites y en caso afirmativo calcularlo.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - x^2y + xy^2 - y^3}{x^2 + y^2}$.

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2 - y^2}{x^2 + 2y^2}$.

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy - 2x - y + 2}{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5}$.

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - 2xy + 5y^2}{3x^2 + 4y^2}$.

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2 + y^2}$.

(f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|y}{x^2+y^2}$.

(4) Usando la definición demostrar:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,3)} \frac{\tan(xy)}{x} = 3$.

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{(xy)^2} = \frac{1}{2}$.

(5) Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } |y| = x^2, \\ x^2/|y| & \text{si } |y| > x^2, \\ |y|/x^2 & \text{si } |y| < x^2. \end{cases}$$

Demostrar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe.

(6) Calcular los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{x+y}{x^2-y^2}$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{x}$.

(7) Probar que las siguientes funciones tienden a 0 si (x,y) tiende a $(0,0)$ a lo largo de cualquier recta, pero ni f ni g tienen límite en el origen.

(a) $g(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2-x}$

(b) $f(x,y) = \dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$

Ayuda: considere parábolas que pasan por el origen.

(8) Demostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

no existe.

(9) Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right) & \text{si } y \neq 0; \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

Demuestre que $f(x,y)$ tiende a 0 si (x,y) tiende a $(0,0)$. ¿Qué puede decir de los límites iterados?

(10) Sea $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$ si $x^2y^2 + (x-y)^2 \neq 0$. Demostrar que

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y),$$

pero que $f(x,y)$ no tiene límite en el origen.
Ayuda: para $y = x$, f tiende a 1.

(11) Diga dónde son continuas las siguientes funciones.

(a) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x^2y)$

(b) $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$

(c) $f(x,y) = \dfrac{e^{x+y}}{x+y}$

(d) $f(x,y) = \log(\cos(x^2+y^2))$

(e) $f(x,y) = \dfrac{1}{y}\cos y^2$

(f) $f(x,y) = \tan\left(\frac{x^2}{y}\right)$

(g) $f(x,y) = \arccos\sqrt{\frac{x}{y}}$

(12) Demostrar que la siguiente función no es continua en (0,0)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(13) Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados:
(a) En (0,0),

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(b) En los puntos de la recta x = y,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ x + y & \text{si } x = y \end{cases}$$

(c) En (1, 1)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x + y - 2)}{x + y - 2} & \text{si } x + y \neq 2 \\ 1 & \text{si } x + y = 2 \end{cases}$$

(14) ¿Cuáles de las siguientes funciones se pueden extender en forma continua a todo el plano?

(a) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$ (b) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^4 + y^4)}{x^2 + y^2}$

(c) $f(x,y) = x^2 \log(x^2 + y^2)$

(15) Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \text{ ó } y \geq x^2 \\ 1 & \text{si } 0 < y < x^2 \end{cases}$$

(a) Demostrar que $f(x,y)$ tiende a 0 cuando (x,y) tiende a $(0,0)$ a lo largo de cualquier recta que pase por el origen.
(b) Hallar una curva que pase por el origen a lo largo de la cual f tome valor constante igual a 1.
(c) ¿ Es f continua en el origen ?.

(16) Diga si se puede definir f en $(0,0)$ de manera tal que f sea continua.

(a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ (b) $f(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x^2 + y^4}$

(17) Demuestre el siguiente Teorema:

Sea $D \subset \mathbb{R}^n$, $\vec{a}$ un punto límite de D y $f : D \to \mathbb{R}^m$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x})$ existe y cada una de sus coordenadas es finita. .

(b) Para cada sucesión $\{\vec{x}_n\}$ tal que $\vec{x}_n \in D$, $\vec{x}_n \neq \vec{a}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{a}$ se tiene que la sucesión $\{f(\vec{x}_n)\}$ converge.

Más aún, si $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{L}$ entonces $\lim_{n\to\infty} f(\vec{x}_n) = \vec{L}$ para toda sucesión $\{\vec{x}_n\}$ tal que $\vec{x}_n \in D$, $\vec{x}_n \neq \vec{a}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{a}$.

(18) Considere la función $f(x, y) = \left(x, y^2, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

(a) Determine el dominio más grande en el puede definirse.

(b) Demuestre que no tiene límite cuando (x, y) tiende al punto $(0, b) \in \mathbb{R}^2$.

(19) Sea $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ y sea $V_a \subset \mathbb{R}$ un entorno de a.

Si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ existe y si $\lim_{y\to b} f(x, y)$ existe para cada $x \in V_a$ entonces

$$\lim_{x\to a} \lim_{y\to b} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y).$$

(20) Demuestre que la función

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y} \qquad \text{si} \qquad x + y \neq 0$$

no tiene límite cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$.

(21) Demuestre la siguiente proposición (precisar las hipótesis faltantes):

Sean $f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))$ y $\vec{L} = (L_1, \dots, L_m)$.

$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{L}$ si y sólo si $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f_k(\vec{x}) = L_k$ para todo $k = 1, \dots, m$.

(22) Demuestre la siguiente proposición:

Sean $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $\vec{a}$ un punto límite de D, sean $f, g : D \to \mathbb{R}^m$ funciones tales que $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x})$ y $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} g(\vec{x})$ existen y son finitos (en cada coordenada). Entonces

(a) $\displaystyle\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \lambda f(\vec{x}) = \lambda \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x})$.

(b) $\displaystyle\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} (f(\vec{x}) + g(\vec{x})) = \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) + \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} g(\vec{x})$.

(c) $\displaystyle\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \langle f(\vec{x}), \vec{v}\rangle = \langle \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}), \vec{v}\rangle$.

(23) Demuestre la siguiente proposición (precisar las hipótesis faltantes):
Sea $f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))$
f es continua en $\vec{a}$ si y sólo si f_k es continua en $\vec{a}$ para $k = 1, \dots, m$.

(24) Demuestre la siguiente proposición:
Si $f : D \to \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ son continuas entonces la función $g \circ f : D \to \mathbb{R}^k$ es una función continua.

(25) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función. Supongamos que existen constantes positivas K y α tales que

$$\|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| \leq K\|\vec{x} - \vec{y}\|^\alpha,$$

para todo $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.
Demostrar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$.

Bases del cálculo diferencial en varias variables.

(1) Hallar las derivadas parciales respecto a x e y.

(a) $f(x,y) = 2x^2 - 3xy + 4$.

(b) $f(x,y) = x^2y^4 + 2xy - 6$.

(c) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

(d) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

(e) $f(x,y) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{1+y}\right)$.

(f) $f(x,y) = \cos(xe^y)$.

(2) Hallar f_x y f_y en los valores indicados.

(a) $f(x,y) = x \operatorname{arcsen}(x-y)$ en $x = 1$, $y = 2$.

(b) $f(x,y) = e^{xy} \sec\left(\frac{x}{y}\right)$ en $x = y = 3$.

(3) Si $z = f(x,y) = \ln\left(\dfrac{x}{y}\right)$, demostrar que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

(4) Dada $z = u(x,y)e^{ax+by}$ donde u es tal que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$. Hallar valores de a y b de manera que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0.$$

(5) Sea $v(r,t) = t^u e^{-\frac{r^2}{4t}}$. Hallar un valor de la constante u tal que v satisfaga la siguiente ecuación

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right).$$

(6) Demostrar que las siguientes funciones son diferenciables:

(a) $f(x,y) = 3x^2y - xy^2$.

(b) $f(x,y) = y \operatorname{sen}(xy)$.

(7) Demostrar que la función $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ es continua en $(0,0)$. Pero no es diferenciable en $(0,0)$.

(8) Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{x+y}\right) & \text{si } x+y \neq 0; \\ 0 & \text{si } x+y = 0. \end{cases}$$

Demostrar que

(a) f es diferenciable en $(0,0)$.

(b) Las derivadas parciales de f son discontinuas en $(0,0)$.

(9) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, si $(x,y) \neq (0,0)$.

(b) Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c) Demostrar que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.

(d) Explicar porqué no se cumple el resultado dado en clase sobre independencia del orden de derivación al calcular las derivadas parciales.

(10) Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $\vec{x}_0 \in D$ y $f : D \to \mathbb{R}$ una función. Considerar las seis proposiciones siguientes:

(a) f es continua en $\vec{x}_0$.

(b) f es diferenciable en $\vec{x}_0$.

(c) $D_{\vec{v}} f(\vec{x}_0)$ existe para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

(d) Existen todas las derivadas parciales de f en un entorno de $\vec{x}_0$.

(e) Existen todas las derivadas parciales de f en un entorno de $\vec{x}_0$ y son continuas en $\vec{x}_0$.

(f) $f(\vec{x}) = \|\vec{x} - \vec{x}_0\|$

En una tabla como la siguiente, marcar con una V (de verdadero) si la proposición de la fila (x) implica la proposición de la columna (y). Por ejemplo, si fuese cierto que (a) implica (b), se debe poner una V en el segundo cuadrado de la primera fila.

	a	b	c	d	e	f
a	V					
b		V				
c			V			
d				V		
e					V	
f						V

(11) Sea $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $p(x, y) = xy$. Demostrar, directamente de la definición, que p es diferenciable en todo punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ y que $dp_{(a,b)}(x, y) = bx + ay$.

(12) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Demostrar, a partir de la definición, que f es diferenciable en todo punto $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ y hallar $df_{\vec{v}}$.

(13) Para cada función halle el vector gradiente en cada punto en el que exista.
(a) $f(x, y) = e^{xy} \cos y$. (b) $f(x, y, z) = xyz$. (c) $f(x, y, z) = x^2y^3z^4$.

(14) Hallar ∇f en el punto dado.
(a) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1) + e^{2xy}$ en $(0, -2)$.
(b) $f(x, y, z) = \cos xy + \cos xz + \cos yz$ en $(1, 2, -1)$.

(15) Hallar la ecuación del plano tangente y la recta normal a la superficie en el punto dado:
(a) $z = x^2 + 2y^2$ en $(2, -1, 6)$.
(b) $z = xy$ en $(2, -1, -2)$.
(c) $z = x^2y^2$ en $(-2, 2, 16)$.
(d) $z = e^{2x} \cos 3y$ en $(1, \frac{\pi}{3}, -e^2)$.
(e) $z = \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ en $(-3, 4, \ln 5)$.

(16) Probar que todo plano tangente al cono $x^2 + y^2 = z^2$ pasa por el origen.

(17) Hallar las ecuaciones de la recta tangente a la intersección de las dos superficies dadas en el punto dado. (Verifique antes que el punto dado realmente pertenece a la intersección de las dos superficies).

(a) $z = x^2 + y^2$, $z = 2x + 4y + 20$, $(4, -2, 20)$.

(b) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 2x - 3y - 13$, $(3, -4, 5)$.

(18) Halle los puntos de la superficie $z = x^2 - 2y^2 + 3y - 6$ donde el plano tangente es paralelo al plano $2x + 3y + z = 5$.

(19) Usando diferenciales calcule un valor aproximado de $\sqrt{(3,02)^2 + (1,99)^2 + (5,97)^2}$.

(20) Usar la regla de la cadena para obtener las derivadas parciales $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial t}$.

(a) $z = x^2 + y^2$ para $x = s^2 - t^2$, $y = 2st$.

(b) $z = \dfrac{x}{x+y}$ para $x = s\cos t$, $y = s \operatorname{sen} t$.

(c) $z = e^x \cos y$ para $x = s^2 + 2t^2$, $y = 3 \operatorname{sen} t$.

(21) Usar la regla de la cadena para calcular las derivadas parciales indicadas en los valores dados.

(a) $z = x^2 - y^2$, para $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$, calcular $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ en $r = \sqrt{2}$, $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

(b) $w = xy + yz + zx$, para $x = t\cos t$, $y = t \operatorname{sen} t$, $z = t$, calcular $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ en $t = \dfrac{\pi}{4}$.

(c) $w = e^{xyz}\cos xyz$, para $x = r^2 + t^2$, $y = t^2 + r$, $z = r + t$, calcular $\dfrac{\partial w}{\partial r}$ y $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ en $r = 2$, $t = -2$.

(22) Consideremos un campo escalar de clase $\mathcal{C}^2$ f definido en $\mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y)$ sólo depende de la distancia de (x,y) al origen, es decir, $f(x,y) = g(r)$ donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(a) Demostrar que para $(x,y) \neq (0,0)$ tenemos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{r} g'(r) + g''(r).$$

(b) Supongamos que además f satisface la *ecuación de Laplace*,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

para todo $(x,y) \neq (0,0)$.

Demostrar que, para $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$f(x, y) = a \ln(x^2 + y^2) + b,$$

donde a y b son constantes.

(23) *Laplaciano bi-dimensional en coordenadas polares.* La introducción de coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, transforma $f(x, y)$ en $g(r, \theta)$. Demostrar las siguientes fórmulas (suponer f de clase $\mathcal{C}^2$):

(a) $\|\nabla f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\|^2 = \left(\dfrac{\partial g}{\partial r}\right)^2 + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial g}{\partial \theta}\right)^2.$

(b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial r}.$

(24) *Laplaciano tridimensional en coordenadas esféricas.* La introducción de coordenadas esféricas

$$x = \rho\cos\theta\operatorname{sen}\varphi, \qquad y = \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \qquad z = \rho\cos\varphi,$$

transforma $f(x, y, z)$ en $F(\rho, \theta, \varphi)$. Este ejercicio indica como hay que proceder para expresar el laplaciano $\nabla^2 f$ en función de las derivadas parciales de F (suponer f de clase $\mathcal{C}^2$).

(a) Introducir primero las coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ para transformar $f(x, y, z)$ en $g(r, \theta, z)$. Utilizar el ejercicio anterior para demostrar que

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}.$$

(b) Luego transformar $g(r, \theta, z)$ en $F(\rho, \theta, \varphi)$ tomando $z = \rho\cos\varphi$, $r = \rho\operatorname{sen}\varphi$. Observar que, salvo un cambio de notación, esta es la misma transformación que se utilizó en la parte (a). Deducir que

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{\cos\varphi}{\rho^2\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial F}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho^2\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}.$$

(25) Sea f una función de tres variables con derivadas parciales continuas y definamos $g(t) = f(tx, ty, tz)$. Demostrar que:

$$g'(t) = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}.$$

(26) En cierto instante la altura h de un cono circular recto es de 30 cm. y está creciendo a razón de 2cm/seg. En ese mismo instante el radio r de la base es de 20cm. y está creciendo a razón de 1cm/seg. ¿A qué velocidad crece el área lateral A del cono?

(27) En cierto instante el radio r de la base de un cilindro circular recto es de 10 cm. y la altura h es de 15 cm. En ese instante el radio decrece a razón de 5 cm/seg y la altura crece a razón de 4 cm/seg. ¿Con qué rapidez cambia el volumen V?

(28) Halle la derivada direccional en el punto p en la dirección $\vec{pp'}$. Es decir, si $\vec{v}_0$ es el vector unitario en la dirección de $\vec{pp'}$, debe hallar $D_{\vec{v}_0} f(p)$.
(a) $f(x, y, z) = x^2 + 3xy + y^2 + z^2 \qquad p = (1, 0, 2), p' = (-1, 3, 4)$.
(b) $f(x, y, z) = e^x \cos y + e^y \operatorname{sen} z \qquad p = (2, 1, 0), p' = (-1, 2, 2)$.
(c) $f(x, y, z) = x \cos y + y \cos z + z \cos y \qquad p = (2, 1, 0), p' = (1, 4, 2)$.

(29) Demostrar que la siguiente función f tiene derivada en cada dirección en $(0, 0)$ pero no es diferenciable en $(0, 0)$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{|x|y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(30) Para las dos funciones que siguen, demostrar que existen todas las derivadas direccionales en $(0, 0)$. ¿ Son las funciones continuas en $(0, 0)$?

$$\text{(a)}\ f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^3 + y^6} & \text{si } x^3 + y^6 \neq 0; \\ 0 & \text{si } x^3 + y^6 = 0. \end{cases}$$

$$\text{(b)}\ g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(31) Un campo escalar f está definido en $\mathbb{R}^3$ mediante la ecuación $f(\vec{x}) = \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle$, donde $\vec{a}$ es un vector constante. Calcular la derivada de f en la dirección de cualquier vector unitario.

(32) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal dada, consideremos el campo escalar en $\mathbb{R}^2$ definido mediante la ecuación $f(\vec{x}) = \langle \vec{x}, T\vec{x} \rangle$. Calcular la derivada de f en la dirección de cualquier vector unitario.

(33) Hallar los valores de las constantes a, b, c tales que la derivada direccional de $f(x, y, z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$ en el punto $(1, 2, -1)$ tenga el valor máximo 64 en la dirección paralela al eje z.

(34) Encontrar y clasificar los puntos críticos de las siguientes funciones:
(a) $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$ (b) $f(x, y) = x^2 + 1 - y^2$.

(35) Encontrar el desarrollo de Taylor de grado 2 alrededor del punto (x_0, y_0) para las funciones $f_1(x, y) = e^x \cos y$ y $f_2(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$.

(36) Demostrar la unicidad del diferencial de una función.

(37) Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $\vec{x_0} \in D$, $f : D \to \mathbb{R}$ y $g : D \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables en $\vec{x_0}$. Demostrar que:
(a) $\nabla(f + g)(\vec{x_0}) = \nabla f(\vec{x_0}) + \nabla g(\vec{x_0})$.
(b) $\nabla(f.g)(\vec{x_0}) = g(\vec{x_0})\nabla f(\vec{x_0}) + f(\vec{x_0})\nabla g(\vec{x_0})$.
(c) $\nabla \left(\frac{f}{g}\right)(\vec{x_0}) = \dfrac{g(\vec{x_0})\nabla f(\vec{x_0}) - f(\vec{x_0})\nabla g(\vec{x_0})}{(g(\vec{x_0}))^2}$ si $g(\vec{x_0}) \neq 0$.

(38) Encuentre el desarrollo de Taylor de tercer grado de $(u + v)^3$
(a) Alrededor del punto $(u_0, v_0) = (0, 0)$.
(b) Alrededor del punto $(u_0, v_0) = (1, 2)$.

(39) Encuentre la mejor aproximación de segundo grado de la función $f(x, y) = xe^y$ cerca del punto $(x_0, y_0) = (2, 0)$.
(Respuesta: $2 + (x - 2) + 2y + y^2 + (x - 2)y$.)

(40) (a) Calcule el desarrollo de Taylor de segundo grado de $f(x, y, z) = xy^2z^3$ alrededor de $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, -1)$.

(b) Exprese el polinomio $f(x, y, z) = xy^2z^3$ como un polinomio en $(x-1), y, (z+1)$.

(41) Demostrar que f es diferenciable en todos los puntos del dominio y determinar su matriz jacobiana en los siguientes casos:
  (a) $f(x,y,z) = (xz, y+z)$.
  (b) $f(x,y,z) = (xy, y^2, z^2x)$.
  (c) $f(x,y,z) = (x/y\,, 2y+1, xz^2)$.

(42) Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dos campos vectoriales definidos del modo siguiente:

$$f(x,y) = (e^{x+2y}, \operatorname{sen}(y+2x)),$$
$$g(u,v,w) = (u + 2v^2 + 3w^3, 2v - u^2).$$

  (a) Calcular cada una de las matrices jacobianas Df y Dg.
  (b) Hallar la función compuesta $h(u,v,w) = f(g(u,v,w))$.
  (c) Calcular la matriz jacobiana Dh en $(1,-1,1)$.

(43) Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dos campos vectoriales definidos del modo siguiente

$$f(x,y,z) = (x^2 + y + z, 2x + y + z^2),$$
$$g(u,v,w) = (uv^2w^2, w^2 \operatorname{sen} v, u^2e^v).$$

  (a) Calcular cada una de las matrices jacobianas Df y Dg.
  (b) Calcular la función compuesta $h(u,v,w) = f(g(u,v,w))$.
  (c) Calcular la matriz jacobiana $Dh(u,0,w)$.

(44) Sean f, g funciones de clase $\mathcal{C}^2$ y a una constante. Consideremos la función u dada por

$$u(x,t) = f(x - at) + g(x + at).$$

Demostrar que

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

(45) Demostrar que si $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable entonces

$$\frac{d}{dx} g(x,x) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,x) + \frac{\partial g}{\partial y}(x,x)$$

(46) La sustitución

$$u = \frac{x-y}{2}, \quad v = \frac{x+y}{2}$$

cambia $f(u,v)$ en $F(x,y)$. Aplicar la regla de la cadena para expresar $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ en función de $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial v}$.

(47) Halle una fórmula para $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)$ en los siguientes casos:

(a) $P(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$, $Q(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

(b) $P(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $Q(x,y) = y(xy + \ln(x + \sqrt{x^2+y^2}))$.

(48) Sea F un campo vectorial derivable dado por $F = (P, Q, R)$. Halle una fórmula para

$$\text{rot}F = \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right), \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right).$$

en los siguientes casos:
(a) $F(x,y,z) = (y^2, xy, xz)$,
(b) $F(x,y,z) = (y-z, yz, -xz)$.

(49) Sea F un campo vectorial derivable dado por $F = (P, Q, R)$. En los siguientes casos halle una fórmula para

$$\text{div}F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

(a) $F(x,y,z) = (x,y,z)$,
(b) $F(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$.

(50) El siguiente ejercicio ilustra los peligros de denotar funciones como variables reales.

Sean $w = f(x,y,z)$ y $z = g(x,y)$ entonces

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

ya que $\dfrac{\partial x}{\partial x} = 1$ y $\dfrac{\partial y}{\partial x} = 0$. Por lo tanto, $\dfrac{\partial w}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$.

Sin embargo, para el caso particular en que $w = x+y+z$ se tiene que $\dfrac{\partial w}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} = 1$, de donde $1 = 0$. ¿ Dónde está el error?

Teorema de la función implícita.

(1) Utilizar el método de la tangente de Newton modificado para construir una sucesión de números racionales que converja a $\sqrt{3}$.

(2) Sea $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

  (a) Demuestre que para todo punto $(x_o, y_o) \neq (0, 0)$ la restricción de f a un entorno de (x_o, y_o) tiene inversa.

  (b) Demuestre que si no se restringe su dominio, f no tiene inversa.

  (c) Si f^{-1} es la inversa de f en un entorno del punto $(1, 2)$, halle la transformación afín que aproxima mejor a f^{-1} cerca de $f(1, 2) = (-3, 4)$.

(3) Encuentre la función afín que aproxima mejor a la inversa de la función $f(x, y) = (x^3 + 2xy + y^2, x^2 + y)$, cerca del punto f(1,1). Note que no es fácil hallar f^{-1}.

(4) Sea $D = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ y sea $T : D \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta).$$

  (a) Hallar $dT_{(r,\theta)}$ y su inversa en los puntos que exista.

  (b) Hallar una expresión explícita para T^{-1}, aclarando cuál debe ser su dominio. ¿Qué puede decir de la continuidad de T^{-1}?

(5) Sea $U = \{(\rho, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3 : \rho > 0, 0 < \theta < 2\pi, 0 < \phi < \pi/2\}$ y sea $T : U \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(\rho, \theta, \phi) = (\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \phi).$$

  (a) Hallar $dT_{(\rho,\theta,\phi)}$ y su inversa en los puntos que exista.

  (b) Hallar una expresión explícita para T^{-1}, aclarando cuál debe ser su dominio. ¿Qué puede decir de la continuidad de T^{-1}?

(6) Si

$$\begin{cases} x = u + v + w, \\ y = u^2 + v^2 + w^2, \\ z = u^3 + v^3 + w^3. \end{cases}$$

Calcular $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ en la imagen $(x, y, z) = (2, 6, 8)$ de $(u, v, w) = (1, 2, -1)$.

(7) Sea $f(u, v) = (u^2 + u^2 v + 10v, u + v^3)$.

(a) Demuestre que f tiene una inversa f^{-1} en un entorno del punto $(1, 1)$.

(b) Encontrar un valor aproximado de $f^{-1}(11.8, 2.2)$

(8) Supongamos que $f(x, y, z)$ y $g(x, y, z)$ son campos escalares diferenciables. Demostrar que la función $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$F(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), f(x, y, z) + g(x, y, z))$$

no puede tener una inversa diferenciable.

(9) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(a) Demostrar que df_0 es inyectiva y por lo tanto invertible.

(b) Demostrar que f no tiene inversa en ningún entorno de 0

(c) ¿Por qué lo anterior no contradice al teorema de la función inversa?

(10) El punto $(x, y, t) = (0, 1, -1)$ satisface las ecuaciones

$$xyt + \operatorname{sen} xyt = 0 \qquad x + y + t = 0.$$

¿Están x e y definidas implícitamente como funciones de t en un entorno de -1?

(11) En los siguientes casos, demostrar que la solución de la ecuación $F(x, y) = 0$ se puede representar en la forma $y = f(x)$, en un entorno del punto (x_o, y_o). Calcular $f'(x_o)$ en cada caso. Si es posible, hacer una representación gráfica.

(a) $F(x,y) = x + y + x\operatorname{sen} y$, para $(x_o, y_o) = (0,0)$.

(b) $F(x,y) = xe^y - y + 1$, para $(x_o, y_o) = (-1,0)$.

(c) $F(x,y) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - 4$, para $(x_o, y_o) = (1, 3\sqrt{3})$.

(d) $F(x,y) = xy + x\ln(xy) - 1$, para $(x_o, y_o) = (1,1)$.

(12) Encontrar un ejemplo de un campo escalar F, definido en un subconjunto abierto D de $\mathbb{R}^3$ y de clase $\mathcal{C}^1$, tal que para algún $(x_o, y_o, z_o) \in D$ se tiene que:
(a) $F(x_o, y_o, z_o) = 0$.
(b) $F_x(x_o, y_o, z_o) = F_y(x_o, y_o, z_o) = F_z(x_o, y_o, z_o) = 0$.
(c) Es posible representar la solución de la ecuación $F(x,y,z) = 0$ en la forma $z = f(x,y)$, en un entorno del punto (x_o, y_o, z_o).

(13) Encontrar un ejemplo de un campo escalar F, definido en un subconjunto abierto D de $\mathbb{R}^3$ y de clase $\mathcal{C}^1$, tal que para algún $(x_o, y_o, z_o) \in D$ se tiene que:
(a) $F(x_o, y_o, z_o) = 0$.
(b) $F_x(x_o, y_o, z_o) = F_y(x_o, y_o, z_o) = F_z(x_o, y_o, z_o) = 0$.
(c) No es posible representar la solución de la ecuación $F(x,y,z) = 0$ en la forma $z = f(x,y)$, en un entorno del punto (x_o, y_o, z_o).

(14) Resolver los análogos de los problemas 12 y 13 para el caso de un campo escalar $F(x_1, \ldots, x_n, y)$ definido en $\mathbb{R}^{n+1}$.

(15) En los siguientes casos, demostrar que el conjunto de los puntos de $\mathbb{R}^3$ que satisfacen las ecuaciones $F(x,y,z) = 0$ y $G(x,y,z) = 0$, se puede representar en la forma $y = f(x)$, $z = g(x)$ en un entorno del punto $P_o = (x_o, y_o, z_o)$, donde f y g son funciones diferenciables en un entorno del punto x_o.

(a) $F(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - z^2 - 2$, $G(x,y,z) = 2x - y + z - 1$, para $P_o = (2,1,-2)$.

(b) $F(x,,y,z) = x^2 - xy + 2y^2 - 4xz + 2z^2 - 10$, $G(x,y,z) = xyz - 6$, para $P_o = (2,3,1)$.

(16) En los siguientes casos, demostrar que el conjunto de los puntos de $\mathbb{R}^4$ que satisfacen las ecuaciones $F(x,y,u,v)=0$ y $G(x,y,u,v)=0$, se puede representar en la forma $u=f(x,y)$, $v=g(x,y)$ en un entorno del punto $P_o=(x_o,y_o,u_o,v_o)$, donde f y g son funciones diferenciables en un entorno del punto (x_o,y_o).

(a) $F(x,y,u,v)=x^2-y^2+uv-v^2+3$, $G(x,y,u,v)=x+y^2+u^2+uv-2$, para $P_o=(2,1,-1,2)$.

(b) $F(x,,y,u,v)=2x-y+2u-v$, $G(x,y,u,v)=3x+2y+u+v$, para $P_o=(0,0,0,0)$.

(17) Demostrar que un subespacio vectorial k-dimensional de $\mathbb{R}^n$ es una variedad de dimensión k.

(18) Encontrar los puntos en los cuales la siguiente función alcanza su valor más grande y más pequeño.
$f(x,y)=x^2+24yx+8y^2$ en la región $x^2+y^2\leq 25$.

(19) Una caja rectangular sin tapa ha de tener una superficie de área S. Encontrar las dimensiones de la caja de máximo volumen.

(20) Encontrar los puntos más lejanos del origen que están en la curva
$x=\cos t, y=\operatorname{sen} t, z=\operatorname{sen}(t/2)$.

(21) Encontrar el valor máximo de la función $f(x,y,z)=x(y+z)$ dado que $x^2+y^2=1, xz=1$.

(22) Sea $f(x,y)=3x^4-4x^2y+y^2$. Demostrar que sobre toda recta $y=mx$ la función tiene un mínimo en $(0,0)$ pero que no existe mínimo en ningún entorno bidimensional.

(23) Determinar los valores extremos absolutos y relativos y los puntos de ensilladura para la función $f(x,y)=xy(1-x^2-y^2)$ en el cuadrado $0\leq x\leq 1$, $0\leq y\leq 1$.

(24) Encuentre la distancia del punto $(2,-3,1)$ al plano de ecuación $z=2x+5y-3$.

(25) Hallar los valores extremos de la función $f(x,y) = \cos^2 x + \cos^2 y$ con la condición $x - y = \pi/4$.

(26) Hallar los valores extremos de $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$ en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(27) Hallar los puntos de la superficie $z^2 - xy = 1$ más próximos al origen.

Para facilitar el trabajo del estudiante recordamos los principales teoremas que se necesitan para poder resolver estos problemas.

Estos son: el teorema de la función inversa, el teorema de la función implícita y el teorema de los multiplicadores de Lagrange.

Teorema de la función inversa:

Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : D \to \mathbb{R}^n$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Sea $\vec{x}_o \in D$ tal que $f'(\vec{x}_o)$ tiene inversa. Entonces existe un conjunto abierto $U \subset D$ tal que:

(a) $\vec{x}_o \in U$.
(b) $f(U)$ es abierto.
(c) $f|_U : U \to f(U)$ es inyectiva y su inversa $g : f(U) \to U$ es de clase $\mathcal{C}^1$.
(d) Si $\vec{x} \in U$ entonces $f'(x)$ es invertible y

$$g'(f(\vec{x})) = (f'(\vec{x}))^{-1}$$

para todo $\vec{x} \in U$.

(e) La inversa local $g : V \to U$ es el límite de la sucesión $\{g_k\}$ de aproximaciones sucesivas definidas inductivamente por

$$g_1(\vec{y}) = \vec{x}_o, \qquad g_{k+1}(\vec{y}) = g_k(\vec{y}) - f'(\vec{x}_o)^{-1}[\, f(g_k(\vec{y})) - \vec{y}\,]$$

para $\vec{y} \in V$.

Teorema de la función implícita:

Sea $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$ un abierto y $F : D \to \mathbb{R}^m$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Si para algún $\vec{x_0} \in \mathbb{R}^n$ y algún $\vec{y_0} \in \mathbb{R}^m$ se tiene que

(i) $F(\vec{x_0}, \vec{y_0}) = \vec{0}$.

(ii) $F_{\vec{y}}(\vec{x_0}, \vec{y_0})$ tiene inversa .

Entonces existe un entorno B de $\vec{x_0}$, un entorno V de $(\vec{x}_o, \vec{y}_o)$ y una función $f : B \to \mathbb{R}^m$ de clase $\mathcal{C}^1$ tal que

(a) $f(\vec{x_0}) = \vec{y_0}$,

(b) $(\vec{x}, f(\vec{x})) \in D$ para todo $\vec{x} \in B$,

(c) $F(\vec{x}, f(\vec{x})) = \vec{0}$ para todo $\vec{x} \in B$,

(d) Si $\vec{x} \in B$ entonces la ecuación

$$F(\vec{x}, \vec{y}) = 0$$

para $(\vec{x}, \vec{y}) \in V$, tiene solución única y está dada por

$$\vec{y} = f(\vec{x}).$$

Además

$$f'(\vec{x}) = -(F_{\vec{y}}(\vec{x}, f(\vec{x})))^{-1} F_{\vec{x}}(\vec{x}, f(\vec{x}))$$

para todo $\vec{x} \in B$.

Teorema de los multiplicadores de Lagrange:

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, sea m tal que $m < n$ y sea $g : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ tal que si $g = (g_1, \dots, g_m)$ entonces los vectores $\nabla g_1(\vec{x}), \dots, \nabla g_m(\vec{x})$ son linealmente independientes para todo $\vec{x} \in \Omega$.

Sea S la superficie definida implícitamente por las ecuaciones $g_1(\vec{x}) = 0$, $\dots$, $g_m(\vec{x}) = 0$, es decir,

$$S = \{\vec{x} \in \Omega : g_1(\vec{x}) = 0, \dots, g_m(\vec{x}) = 0\}.$$

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable, si $f|_S$ alcanza un máximo o un mínimo en $\vec{x_o}$ entonces existen constantes λ_1, $\dots$, $\lambda_m \in \mathbb{R}$ tales que

$$\nabla f(\vec{x_o}) = \lambda_1 \nabla g_1(\vec{x_o}) + \cdots + \lambda_m \nabla g_m(\vec{x_o}).$$