

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA
LABORATORIO DE FORMAS EN GRUPOS

PROBLEMAS DE ESPACIOS DE BANACH

Ramón Bruzual
Marisela Domínguez

Caracas, Venezuela
Julio 2005.

Ramón Bruzual

Correo-E: rbruzual@euler.ciens.ucv.ve

Marisela Domínguez

Correo-E: mdomin@euler.ciens.ucv.ve

Laboratorio de Formas en Grupos

Centro de Análisis

Escuela de Matemática

Facultad de Ciencias

Universidad Central de Venezuela

<http://euler.ciens.ucv.ve/~labfg>

Contenido

Nociones de la teoría de conjuntos.	1
Espacios normados y espacios de Banach.	3
Espacios de funciones continuas.	9
Operadores lineales.	13
Funcionales lineales.	17
Bases de Schauder.	21
Los teoremas fundamentales.	23
Dualidad. Topologías débiles.	27
Bibliografía	31

Nociones de la teoría de conjuntos.

- (1) Demostrar que $\text{card } \mathbb{N} < \text{card } \mathbb{R}$.
- (2) Demostrar que:
 - (a) $\text{card } \mathbb{Z} = \text{card } \mathbb{N}$,
 - (b) $\text{card } \mathbb{Q} = \text{card } \mathbb{N}$,
 - (c) $\text{card } (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \text{card } \mathbb{N}$,
 - (d) $\text{card } (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = \text{card } \mathbb{N}$,
 - (e) $\text{card } (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) = \text{card } \mathbb{N}$.
- (3) Demostrar que si a es un número cardinal infinito entonces $\text{card } \mathbb{N} \leq a$.
- (4) Sean a y b números cardinales. Demostrar que: Si a es finito y b es infinito entonces $a + b = b$.
- (5) Demostrar que si a es un número cardinal infinito entonces $a + a = a$.

Sugerencia: Sea A un conjunto tal que $\text{card } A = a$. Basta probar que $A \times \{0, 1\}$ es equipotente con A .

Sea F el conjunto de todas las funciones biyectivas f tales que el dominio de f es de la forma $B \times \{0, 1\}$ y el rango de f es B , donde B es un subconjunto de A . Utilizar el Lema de Zorn para demostrar la existencia de un elemento maximal en F .
- (6) Sean a y b números cardinales. Demostrar que: Si a y b son tales que por lo menos uno de ellos es infinito y $c = \max\{a, b\}$ entonces $a + b = c$.

(7) Demostrar que si a es un número cardinal infinito entonces $a \cdot a = a$.

Sugerencia: usar un argumento análogo al usado en el ejercicio (5).

(8) Sean a y b números cardinales. Demostrar que: Si a y b son tales que por lo menos uno de ellos es infinito y $c = \max\{a, b\}$ entonces $a \cdot b = c$.

(9) Dado un conjunto A , sea $PF(A)$ el conjunto formado por todos los subconjuntos finitos de A (partes finitas de A). Suponga que A es un conjunto infinito. ¿Cuál es el cardinal de $PF(A)$?

(10) Demostrar que $\text{card } \mathbb{R} = 2^{\text{card } \mathbb{N}}$. ¿Por qué este ejercicio resuelve también el ejercicio (1) ?

(11) Sea X un espacio vectorial. Demostrar que:

(a) Si A es un subconjunto linealmente independiente de X entonces existe una base de Hamel de X que contiene a A .

(b) Si B_1 y B_2 son bases de Hamel de X entonces

$$\text{card } B_1 = \text{card } B_2.$$

(12) Es claro que \mathbb{R} es un espacio vectorial sobre \mathbb{Q} . ¿Cuál es la dimensión de este espacio?

(13) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función que satisface la ecuación funcional

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Demostrar que si f es continua, entonces existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = ax \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

(14) Demostrar que existen funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} que no son continuas y que satisfacen la ecuación funcional

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

(15) ¿Cuál es el cardinal del conjunto de las funciones continuas de \mathbb{R} en \mathbb{R} ?

Espacios normados y espacios de Banach.

- (1) Demostrar que en la definición de espacio normado se puede cambiar

$$\text{“}\|x\| = 0 \text{ si y sólo si } x = 0\text{”}$$

por

$$\text{“}\|x\| = 0 \text{ implica } x = 0\text{”}.$$

- (2) Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Demostrar que si $x, y \in X$ entonces se cumple que

$$\|x\| \leq \max\{\|x + y\|, \|x - y\|\}.$$

Dar una interpretación geométrica.

- (3) Dado un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$. Para $x, y \in X$ sea

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Demuestre que d es una métrica en X .

- (4) Demuestre que NO toda métrica en un espacio vectorial proviene de una norma.

- (5) Sean (X, d) un espacio métrico y $\{x_n\}$ una sucesión en X .

Demuestre que si $\{x_n\}$ es de Cauchy y una subsucesión de $\{x_n\}$ converge a $x \in X$ entonces la sucesión $\{x_n\}$ converge a x .

- (6) Sea X un espacio normado. Sean $x, y \in X$, sean $\{x_n\}_{n \geq 1}$ en X , $\{y_n\}_{n \geq 1}$ en X , además sean $\lambda \in \mathbb{C}$, $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ en \mathbb{C} . Demostrar que:

(a) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ entonces $\{x_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión acotada.

(b) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n x_n = \lambda x$.

(c) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|$. ¿Es cierto el recíproco?

(d) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$.

(e) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\| = \|x - y\|$.

(f) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = \|x - y\|$.

(7) Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $n \times n$ simétrica y definida positiva. Demostrar que en el espacio de los vectores columnas de tamaño n , puede introducirse la norma

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \right)^{1/2},$$

donde x_1, \dots, x_n son las coordenadas del vector x .

(8) Demuestre que la condición $d(x, y) \geq 0$ en la definición de métrica es consecuencia de las otras tres condiciones.

(9) Sea X un conjunto y sea $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación que satisface para todo $x, y, z \in X$:

(i) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$,

(ii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y)$.

Demostrar que d es una métrica.

(10) Demuestre que la equivalencia de normas es simétrica y transitiva.

(11) Demuestre que dos normas equivalentes inducen la misma topología.

(12) Demuestre que, en \mathbb{R}^n , las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ son equivalentes.

- (13) Demostrar que dos normas introducidas sobre un espacio vectorial son equivalentes si y sólo si de la convergencia de una sucesión según una de estas normas se desprende su convergencia según la otra.
- (14) Sean X un espacio normado y F una variedad lineal propia de X . Demuestre que F tiene interior vacío.
- (15) Sea X un espacio vectorial normado. Demuestre que:
- (a) Una bola en X no puede contener una variedad lineal no nula.
 - (b) Sea L una variedad lineal en X , $L \neq X$. Demostrar que L no contiene ninguna bola.
 - (c) La clausura de una variedad lineal es un subespacio.
- (16) Sean $(X, \| \cdot \|)$ un espacio normado y $M \subset X$ un subespacio. Pruebe que:
- (a) $\| [x] \| \leq \|x\|$
 - (b) Si $\Phi : X \rightarrow X/M$ está definida mediante $\Phi(x) = [x]$, entonces Φ es continua.
- (17) Sea X un espacio métrico. Demostrar que
- $$\overline{A} = \{x \in X : d(x, A) = 0\}.$$
- (18) Sea (X, d) un espacio métrico. Demostrar que:
- (a) Todo subconjunto de X , formado por un único punto es cerrado.
 - (b) Sean $x, y \in X$, $x \neq y$. Entonces existen vecindades abiertas, una de x y otra de y que no se intersectan.
 - (c) Si A es un subconjunto cerrado de X y x_o es un punto de X que no está en A entonces existen vecindades abiertas disjuntas de x y de A .

- (d) Si A y B son subconjuntos cerrados disjuntos de X se pueden hallar vecindades abiertas disjuntas de A y de B .
- (19) Sea (X, d) un espacio métrico. Demostrar que:
- (a) Cualquier conjunto cerrado es la intersección de una sucesión decreciente de conjuntos abiertos.
 - (b) Cualquier conjunto abierto es la unión de una sucesión creciente de conjuntos cerrados.
 - (c) Los recíprocos de (a) y (b) NO son ciertos.
- (20) Demuestre que, en un espacio métrico, puede ocurrir que la bola cerrada es distinta de la clausura de la bola abierta.
- (21) Demostrar que en un espacio normado la clausura de la bola abierta es la bola cerrada.
- (22) Demostrar que, en un espacio métrico, toda sucesión convergente es de Cauchy.
- (23) Demostrar que, en un espacio métrico, toda sucesión de Cauchy que tenga una subsucesión convergente resulta ser convergente. Además el límite de la sucesión coincide con el límite de la subsucesión.
- (24) Si $\| \cdot \|_a$ y $\| \cdot \|_b$ son normas equivalentes entonces: $(X, \| \cdot \|_a)$ es un espacio de Banach si y sólo si $(X, \| \cdot \|_b)$ es un espacio de Banach.
- (25) Sea l_∞ el espacio de todas las sucesiones de números reales tales que a partir de un cierto valor del subíndice (que depende de cada sucesión) todos sus elementos son nulos.
- (a) Demostrar que con la norma del supremo l_∞ es un espacio normado, pero no es completo.

(b) Demostrar que l_o es una variedad lineal de l_∞ .

(c) ¿Cuál es la clausura de l_o en l_∞ ?

(26) Demostrar que si $1 \leq p < q$ entonces l_p está contenido en l_q y la inclusión es propia.

(27) Dar un ejemplo de una sucesión que pertenece a c_o pero no pertenece a ningún l_p donde $1 \leq p < \infty$.

(28) Considere l_1 como subespacio de l_∞ , pruebe que su clausura es c_o .

(29) Sea X un espacio normado. Sea

$$S(0, 1) = \{x \in X \text{ tales que } \|x\| = 1\}.$$

Demuestre que X es un espacio de Banach si y sólo si $S(0, 1)$ es completo.

(30) $X \times Y$ es completo si y sólo si X, Y son completos.

(31) Verificar que los espacios dados (en las notas teóricas) como ejemplos de espacios de Banach, realmente son normados y completos.

(32) Considere el espacio $C[-1, 1]$ con $\| \cdot \|_\infty$.

Diga si los siguientes conjuntos de funciones forman un subespacio de $C[-1, 1]$:

(a) las funciones monótonas,

(b) las funciones pares,

(c) los polinomios,

(d) los polinomios de grado $\leq k$,

(e) las funciones continuamente diferenciables,

(f) las funciones lineales y continuas a trozos.

(33) (a) Demostrar que el espacio c_0 es un subespacio en el espacio c .

(b) Demostrar que el espacio c es un subespacio en el espacio l_∞ .

(34) (a) Dar ejemplos de un espacio normado que no es de Banach.

(b) Dar ejemplos de dos normas no equivalentes en un espacio lineal X .

(35) Demostrar que un subespacio de un espacio de Banach es un espacio de Banach.

(36) Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Sean Y, Z subespacios (cerrados) de X tales que $X = Y \oplus Z$ (suma directa algebraica). Para $x = y + z$ con $y \in Y, z \in Z$ definimos

$$\|x\|_o = \|y\| + \|z\|.$$

Demuestre que $(X, \|\cdot\|_o)$ es un espacio de Banach.

(37) Sea M un subespacio (cerrado) de un espacio normado X .

Demuestre que si M y X/M son espacios de Banach entonces X es un espacio de Banach.

(38) Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio normado. Demostrar que $(X, \|\cdot\|_X)$ se puede completar. Es decir, existe un espacio de Banach $(Y, \|\cdot\|_Y)$ tal que:

(a) X es una variedad lineal en Y

(b) $\|\cdot\|_Y$ restringida a X coincide con $\|\cdot\|_X$.

(c) X es denso en Y .

(39) Demostrar que la completación de un espacio normado es "única salvo isomorfismos isométricos".

Espacios de funciones continuas.

En lo que sigue \mathbb{K} representará al cuerpo \mathbb{R} de los números reales o al cuerpo \mathbb{C} de los números complejos.

(1) Demostrar que si existe la unidad de un álgebra entonces es única.

(2) Demuestre que $C(X, \mathbb{K})$ es un álgebra conmutativa con unidad.

(3) Demostrar que si $f, g \in C(X, \mathbb{C})$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ entonces

(a) $\overline{f} \in C(X, \mathbb{C})$

(b) $\overline{f + g} = \overline{f} + \overline{g}$,

(c) $\overline{\lambda f} = \overline{\lambda} \overline{f}$,

(d) $\overline{f \cdot g} = \overline{f} \cdot \overline{g}$,

(e) $\overline{\overline{f}} = f$,

(f) $\|\overline{f}\| = \|f\|$.

(4) Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ integrable. Para $n \geq 0$ los momentos de f son

$$M_n(f) = \int_0^1 t^n f(t) dt.$$

Sean $f, g \in C[0, 1]$.

Probar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $f = g$

(b) $M_n(f) = M_n(g)$ para todo $n \geq 0$.

(5) Sean X, Γ espacios métricos compactos y sea $F : X \times \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua.

Demostrar que F se puede aproximar uniformemente por funciones de la forma

$$\sum_{k=1}^n f_k g_k$$

donde $f_k : X \rightarrow \mathbb{C}$ y $g_k : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ son funciones continuas.

(6) Sea $F \subset C([a, b], \mathbb{R})$ tal que cada elemento de F es diferenciable en (a, b) .

Demuestre que si existe $M > 0$ tal que

$$|f'(t)| \leq M$$

para toda $f \in F$ y para todo t en (a, b) entonces F es equicontinuo.

(7) Demostrar que:

Si Δ es compacto entonces equicontinuidad implica equicontinuidad uniforme.

(8) Sea Δ un espacio métrico compacto. Sea $\{f_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión en $C(\Delta, \mathbb{R})$.

Demuestre que si $\{f_n\}_{n \geq 1}$ es equicontinua y para cada $t \in \Delta$ existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$$

entonces $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge en $C(\Delta, \mathbb{R})$.

(9) Sea $\{f_n\}_{n \geq 1}$ contenida en $C([a, b], \mathbb{K})$ una sucesión equicontinua que converge puntualmente hacia f .

Demostrar que $f \in C([a, b], \mathbb{K})$.

(10) Demostrar que:

(a) $L^1[0, 2\pi]$ es un álgebra conmutativa sin unidad, donde el producto a considerar es la convolución.

(b) Si $f, g \in L^1[0, 2\pi]$ entonces

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

(11) Dada $f \in L^1[0, 2\pi]$ los coeficientes de Fourier de f se definen mediante

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$$

para $n \in \mathbb{Z}$.

Sea

$$A = \{\widehat{f} : f \in L^1[0, 2\pi]\}.$$

(a) Probar que A es un álgebra con el producto usual.

(b) Probar que $\widehat{f} \in A$ implica

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_1.$$

(c) Probar que

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} \widehat{f}(n) = 0$$

para todo $\widehat{f} \in A$.

(d) Sea

$$B = \left\{ \widehat{f} \in A : \|\widehat{f}\|_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| < \infty \right\}.$$

Probar que B es una subálgebra de A .

(e) Demostrar que, para $f, g \in B$,

$$\widehat{f \cdot g}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n-k) \widehat{g}(k).$$

Sea W el álgebra de Wiener, es decir,

$$W = \{f \in L^1[0, 2\pi] : \widehat{f} \in B\}.$$

(f) Sea

$$S_n f = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{kt}.$$

Observar que: $f \in W$ si y sólo si $\{S_n f\}$ converge absolutamente.

Deducir que

$$W \subset C[0, 2\pi].$$

(g) Demostrar que W es una subálgebra de $C[0, 2\pi]$, donde el producto a considerar es el producto usual de funciones.

Operadores lineales.

- (1) Sea $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal. Sea $\text{Ker}(T)$ el núcleo de T .

Demostrar que si T es acotado entonces $\text{Ker}(T)$ es un subespacio cerrado de X .

- (2) Dar un ejemplo de un operador lineal de un espacio normado a otro espacio normado que no es continuo.

- (3) Dar un ejemplo donde la identidad NO sea una isometría.

- (4) (a) Demuestre que $L(X, Y)$ es un espacio vectorial con las operaciones usuales dadas por:

$$(\lambda T)(x) = \lambda T(x),$$

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x).$$

donde $T, T_1, T_2 \in L(X, Y)$ y λ es un escalar.

- (b) Para $T \in L(X, Y)$ definimos

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|.$$

Demuestre que $\|\cdot\|$ es una norma en $L(X, Y)$.

- (5) Demuestre que: Si $T \in L(X, Y)$ entonces

(a) $\|T(x)\| \leq \|T\| \|x\|.$

(b) $\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}.$

(c) $\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\|.$

(d) $\|T\| = \inf\{M : \|T(x)\| \leq M\|x\| \text{ para todo } x \in X\}$.

(6) Sea X un espacio vectorial en el que están dadas dos normas equivalentes.

Sea $T : X \rightarrow X$ un operador lineal.

Demostrar que en ambas normas, T será simultáneamente acotado o no acotado.

(7) Demostrar que los siguientes operadores lineales son acotados y dar la estimación más precisa que pueda de sus normas

(a) $T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, definido mediante

$$(Tf)(t) = \int_0^t f(s)ds.$$

(b) $T : C[-1, 1] \rightarrow C[0, 1]$, definido mediante

$$(Tf)(t) = f(t).$$

(c) $T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, definido mediante

$$(Tf)(t) = t^2 f(t).$$

(d) $T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, definido mediante

$$(Tf)(t) = f(t^2).$$

(e) $T : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$, definido mediante

$$(Tf)(t) = \int_0^t f(s)ds.$$

(f) $T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, definido mediante

$$(Tf)(t) = t^2 f(0).$$

(8) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Sean

$$C[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tales que } f \text{ es continua}\},$$

$$C^1[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tales que } f \text{ es continuamente diferenciable en } [a, b]\}.$$

Se tiene que $C[a, b]$ y $C^1[a, b]$ son espacios vectoriales sobre \mathbb{R} y $C^1[a, b]$ es una variedad lineal contenida en $C[a, b]$. Además si $f \in C[a, b]$ entonces $f' \in C[a, b]$.

En $C[a, b]$ vamos a considerar la siguiente norma

$$\|f\|_{\infty} = \max\{|f(x)| : x \in [a, b]\}.$$

Se sabe que $(C[a, b], \|\cdot\|_{\infty})$ es un espacio de Banach.

- (i) Demostrar que $C^1[a, b]$ no es un subespacio de $(C[a, b], \|\cdot\|_{\infty})$ y por lo tanto $(C^1[a, b], \|\cdot\|_{\infty})$ no es un espacio de Banach.

Sea $D : C^1[a, b] \rightarrow C[a, b]$ definido por

$$Df = f'.$$

Claramente D es un operador lineal.

- (ii) Demostrar que

$$D : (C^1[a, b], \|\cdot\|_{\infty}) \rightarrow (C[a, b], \|\cdot\|_{\infty})$$

no es continuo.

En $C^1[a, b]$ consideremos la norma

$$\|f\|_{d1} = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty}.$$

- (iii) Demostrar que $(C^1[a, b], \|\cdot\|_{d1})$ es un espacio de Banach.

- (iv) Demostrar que

$$D : (C^1[a, b], \|\cdot\|_{d1}) \rightarrow (C[a, b], \|\cdot\|_{\infty})$$

es continuo y hallar su norma.

- (9) Sea X un espacio normado de dimensión infinita.

Demostrar que dado cualquier espacio normado Y (no trivial) siempre existe un operador lineal $T : X \rightarrow Y$ que no es continuo.

- (10) Demuestre que: Si X, Y son espacios normados y $T : X \rightarrow Y$ es un operador acotado con inverso acotado entonces:

X es de Banach si y sólo si Y es de Banach.

- (11) Demuestre que si X, Y son espacios normados y $T : X \rightarrow Y$ es un operador acotado con inverso acotado entonces

$$\dim X = \dim Y.$$

- (12) Sea B un subespacio vectorial (cerrado) de $C([0, 1], \mathbb{R})$ tal que:

(a) Cada $f \in B$ es diferenciable en $(0, 1)$.

(b) Existe $M > 0$ tal que si $f \in B$ y $\|f\|_\infty \leq 1$ entonces $|f'(x)| \leq M$ para todo $x \in (0, 1)$.

Demuestre que B tiene dimensión finita.

- (13) Demostrar que si X es un espacio normado de dimensión finita entonces toda variedad lineal de X es un subespacio.

- (14) Demostrar que todo espacio vectorial normado de dimensión finita es de Banach.

Funcionales lineales.

(1) Sean X un espacio vectorial normado y $f \in X^*$. Demostrar que:

(a) $\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$

(b) $\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$

(c) $\|f\| = \sup_{\|x\|=1} f(x)$, si el espacio X es real.

(2) Sea $F : c \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$F(\{x_n\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

(a) Demostrar que F es un funcional lineal y continuo

(b) Estimar su norma.

(3) Demostrar que:

(a) si $\{x_n\} \in l_2$ entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$$

converge.

(b) si $T : l_2 \rightarrow \mathbb{R}$ se define por

$$T(\{x_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$$

entonces T es un funcional lineal continuo.

Además dé un estimado su norma.

(4) Demostrar que las siguientes funcionales f son lineales continuas y estimar sus normas.

(a) Para $g \in C[-1, 1]$ sea

$$f(g) = 2(g(1) - g(0)).$$

(b) Para $g \in C[-1, 1]$ sea

$$f(g) = \int_0^1 g(s) ds.$$

(c) Para $a = \{a_n\}_{n \geq 1} \in l^2$ sea

$$f(a) = a_1 + a_2.$$

(d) Para $a = \{a_n\}_{n \geq 1} \in c$ sea

$$f(a) = a_1 + a_2.$$

(5) Sea X un espacio vectorial normado. Sea $\{f_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión en X^* .

Demostrar que $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge en X^* si y sólo si $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge uniformemente en la clausura de $B(0, 1)$.

(6) Sea X un espacio vectorial normado. Sean $x, y \in X$, $x \neq y$.

Demostrar que existe $f \in X^*$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

(7) Sea X un espacio vectorial normado y sea $x \in X$. Demostrar que

$$\|x\| = \sup_{f \in X^*, \|f\|=1} |f(x)|.$$

(8) Sea X un espacio vectorial normado.

Demostrar que si X es de dimensión infinita entonces X^* también lo es.

(9) Sean X, Y dos espacios normados (sobre el mismo cuerpo de escalares).

Sea $T \in L(X, Y)$. Demuestre que

$$\|T\| = \sup\{|g(T(x))| : x \in X, g \in Y^*, \|x\| \leq 1, \|g\| \leq 1\}.$$

(10) Sea X un espacio de Banach. Investigue qué quiere decir que X sea separable.

(11) Demostrar que si X^* es separable entonces X es separable.

(12) (*) Sean X, Y espacios normados, $X \neq \{0\}$.

Demostrar que si $L(X, Y)$ es un espacio de Banach entonces Y es de Banach.

(13) (**) Límite generalizado de Banach:

Demostrar que existe $\Phi : l_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ lineal y continuo tal que:

(a) $\|\Phi\| = 1$.

(b) $\Phi(x_1, x_2, \dots) \geq 0$ si $x_j \geq 0$ para todo j .

(c) $\Phi(x_1, x_2, \dots) = \Phi(x_2, x_3, \dots)$

(d) Si $\{x_n\}$ converge entonces $\Phi(x_1, x_2, \dots) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

(e) $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \Phi(x_1, x_2, \dots) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Indicación:

(i) Sea

$$M_o = \{(x_1, x_2, \dots) \in l_\infty : \text{existe } K \text{ tal que } |x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq K \text{ para todo } n \geq 1\}$$

Demuestre que: M_o es una variedad lineal

(ii) Sea $e = (1, 1, 1, \dots)$.

Demuestre que: $e \in l_\infty$, $e \notin M_o$ y $\text{dist}(e, M_o) = 1$.

(iii) Demuestre que existe $\Phi \in l_\infty^*$ tal que:

$$\Phi(e) = 1,$$

$$\Phi(x) = 0 \text{ para todo } x \in M_o \text{ y}$$

$$\|\Phi\| = 1.$$

(iv) Demostrar que Φ satisface (a), (b), (c), (d) y (e).

(14) (**) EL DUAL DEL ESPACIO DE LAS FUNCIONES CONTINUAS.

Utilizando el teorema de Hahn Banach se puede probar el teorema de representación de Riesz para los funcionales lineales continuos en $C[a, b]$.

El enunciado de este teorema es el siguiente.

Teorema de Representación de Riesz

Sea X un espacio métrico compacto. A cada funcional lineal y continuo ϕ en $C(X, \mathbb{R})$ le corresponde una única medida μ en X de Borel tal que para todo $f \in C(X, \mathbb{R})$

$$\phi(f) = \int_X f d\mu.$$

Además $\|\phi\| = |\mu|(X)$.

Lea sobre este tema en algún libro de Análisis Funcional. Puede consultar el libro de Kolmogorov-Fomin (pág. 413), el libro de Rudin (pág. 189), el libro de Cotlar-Cignoli (pág. 313) o algún otro libro.

Bases de Schauder.

(1) Dar un ejemplo de una base de Schauder para los siguientes espacios:

- (i) c ,
- (ii) c_o ,
- (iii) l_p para $1 \leq p < \infty$.

(2) Demostrar que todo espacio de Banach con base de Schauder es separable.

(3) Construcción de una base de Schauder para el espacio $C[0, 1]$:

Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ 2(1-t) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sean

f_2 la restricción de g a $[0, 1]$,

f_3 la restricción de $g(2t)$ a $[0, 1]$,

f_4 la restricción de $g(2t - 1)$ a $[0, 1]$.

Para $k = 1, \dots, 2^n$, f_{2^n+k} denotará la restricción de $g(2^n t - k + 1)$ al intervalo $[0, 1]$.

(a) Sea

$$C_o[0, 1] = \{f \in C[0, 1] : f(0) = f(1) = 0\}.$$

Demostrar que $\{f_2, f_3, \dots\}$ es una base de Schauder de $C_o[0, 1]$.

(b) Sean

$$f_o(t) = t,$$

$$f_1(t) = 1 - t.$$

Demostrar que $\{f_o, f_1, \dots\}$ es una base de Schauder de $C[0, 1]$.

(4) Demostrar que:

(a) l_1^* es isomorfo a l_∞ .

(b) c_o^* es isomorfo a l_1 .

Ayuda: ver libro de Kolmogorov, Fomin en la página 197.

(5) (a) Demostrar que l_∞ NO es separable.

(b) Demostrar que si $1 \leq p < \infty$ entonces l_p es separable.

(c) ¿El espacio c será separable?

(d) ¿El espacio c_o será separable?

(6) Sabemos que si X^* es separable entonces X es separable.

¿Es válida la afirmación inversa?

(7) Demostrar que el l_∞^* no es isomorfo a l_1 .

Ayuda: ver libro de Dunford, Schwarz, volumen 1, en la página 296.

Los teoremas fundamentales.

- (1) Dar un ejemplo de una familia decreciente $\{F_n\}_{n \geq 1}$ de subconjuntos cerrados no vacíos en un espacio métrico completo tal que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset.$$

- (2) Sea X un espacio normado. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes

(a) X es completo

(b) toda sucesión decreciente de bolas cerradas tiene intersección no vacía.

- (3) (*) Demostrar o dar un contraejemplo:

Si X es un espacio métrico completo y $\{F_n\}_{n \geq 1}$ es una familia decreciente de subconjuntos cerrados no vacíos de X tales que $\text{diam}(F_1) < \infty$ entonces

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n \neq \emptyset.$$

- (4) Demostrar que un espacio de Banach de dimensión infinita no puede tener una base de Hamel numerable.

- (5) Sea $\alpha = \{\alpha_n\}$ una sucesión acotada de números reales y sea $M_\alpha : l_2 \rightarrow l_2$ definido por

$$M_\alpha(x_1, x_2, \dots) = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots).$$

¿Bajo qué condiciones sobre la sucesión $\{\alpha_n\}$ existe el operador M_α^{-1} ?

¿Es siempre continuo este operador ?

- (6) Dar un ejemplo de un operador lineal continuo de un espacio normado a otro espacio normado que es biyectivo y su inverso no es continuo.
- (7) (a) Dar un ejemplo de un operador lineal discontinuo de un espacio de Banach a un espacio normado cuyo gráfico es cerrado.
 (b) Dar un ejemplo de un operador lineal discontinuo de un espacio normado a un espacio de Banach cuyo gráfico es cerrado.
- (8) Sea $\{a_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}$ una sucesión de números positivos tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Demuestre que existe una sucesión $\{y_n\}_{n \geq 1} \subset (0, \infty)$ tal que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \text{ converge.}$$

- (9) Sea $1 \leq p \leq \infty$, sea q el índice conjugado de p .
 Sea (X, F, μ) un espacio de medida σ -finita. Sea f una función medible.

Demuestre que si $f \cdot g \in L^1(X, \mu)$ para cada $g \in L^p(X, \mu)$ entonces $f \in L^q(X, \mu)$.

- (10) Sean X, Y, Z espacios de Banach. Sean $T : X \rightarrow Z, U : Y \rightarrow Z$ lineales y continuas. Supongamos que para cada $x \in X$ la ecuación

$$T(x) = U(y)$$

tiene solución única $y \in Y$.

Demuestre que la ecuación $V(x) = y$ define un operador lineal y continuo.

- (11) Dar un ejemplo de una familia $\{T_\alpha\}$ de operadores lineales continuos de un espacio normado X en un espacio normado Y tal que

$$\sup_{\alpha} \|T_\alpha(x)\| < \infty \text{ para cada } x \in X$$

y sin embargo

$$\sup_{\alpha} \|T_\alpha\| = \infty.$$

(12) Sea $\{y_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \text{ converge}$$

para cada $\{x_n\}_{n \geq 1} \in c_0$.

Demuestre que $\{y_n\}_{n \geq 1} \in l_1$.

(13) Sea $a = \{a_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}$ tal que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \text{ converge condicionalmente}$$

para cada sucesión $x = \{x_n\}_{n \geq 1} \in l^3$.

Demuestre que $a \in l^{3/2}$.

(14) Sea X un espacio de Banach. Sea F un subespacio cerrado de X . Sea $\varphi : X \rightarrow X/F$ definida mediante

$$\varphi(x) = x + F = \bar{x}.$$

Demuestre que φ es continua y abierta.

(15) Consideremos el operador $A : \mathcal{C}[0, 1] \rightarrow \mathcal{C}[0, 1]$ definido por

$$(Af)(t) = \int_0^t f(u) du + f(t).$$

- (a) Demostrar que $\text{Núcleo}(A) = \{0\}$, y por lo tanto A es inyectivo.
- (b) ¿Es A acotado?
- (c) ¿Es A sobreyectivo?
- (d) En caso de que la respuesta anterior sea afirmativa, hallar A^{-1} y decir si A^{-1} es acotado o no.

PROYECCIONES

Sea X un espacio vectorial. Una proyección es un operador lineal $P : X \rightarrow X$ tal que $P^2 = P$.

- (16) Sea $P : X \rightarrow X$ una proyección. Demostrar:
- (a) $x \in \text{Rango}(P)$ si y sólo si $Px = x$.
 - (b) $\text{Núcleo}(P) = \text{Rango}(I - P)$.
 - (c) $I - P$ es una proyección.
 - (d) $X = \text{Rango}(P) \oplus \text{Núcleo}(P)$.
- (17) Demostrar que si $X = X_1 \oplus X_2$ (X_1 y X_2 variedades lineales) entonces existe una proyección $P : X \rightarrow X$ tal que $\text{Rango}(P) = X_1$ y $\text{Núcleo}(P) = X_2$.
- (18) Supóngase que X es un espacio normado. Demostrar que si $P : X \rightarrow X$ es una proyección continua, entonces $\text{Rango}(P)$ y $\text{Rango}(I - P)$ son subespacios de X .
- (19) Sea X un espacio de Banach y sea $P : X \rightarrow X$ una proyección tal que $\text{Rango}(P)$ y $\text{Rango}(I - P)$ son cerrados. Demostrar que P es continua.
- (20) Sea X un espacio de Banach y sea $\{P_n\}_{n \geq 1} \subset L(X)$ una sucesión de proyecciones tales que para cada $x \in X$ existe $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x)$. Demostrar que existe una proyección continua $P : X \rightarrow X$ tal que para cada $x \in X$ se tiene que

$$Px = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x).$$

Dualidad. Topologías débiles.

(1) Para cada $x \in X$ sea \hat{x} la función $\hat{x} : X^* \rightarrow \mathbb{K}$ dada por

$$\hat{x}(f) = f(x)$$

para cada $f \in X^*$. Demuestre que

- (a) \hat{x} es lineal.
- (b) $|\hat{x}(f)| \leq \|x\| \|f\|$ para cada $f \in X^*$.
- (c) $\hat{x} \in X^{**}$ y $\|\hat{x}\| \leq \|x\|$.

(2) Sea X un espacio normado de dimensión finita. Demostrar que:

- (a) $\dim X^* = \dim X$.
- (b) X es reflexivo.

(3) Sea X un espacio de Banach. Demostrar que X es reflexivo si y sólo si X^* lo es.

(4) Sean X un espacio normado y $C \subset X$. Demostrar que son equivalentes las siguientes condiciones:

- (a) C es acotado
- (b) $f(C)$ es acotado para todo $f \in X^*$.

(5) Demostrar que: Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ entonces $w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

(6) Demostrar que: El límite débil de una sucesión es único.

- (7) Sea X un espacio normado. Demostrar que si $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$ es una sucesión que converge débilmente a $x \in X$ entonces

$$\|x\| \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|.$$

- (8) Sea X un espacio normado, separable. Demostrar que toda sucesión acotada en X^* contiene una subsucesión débilmente convergente.

- (9) (a) Sea A un subconjunto de X . Demostrar que: Si A es débilmente cerrado entonces A es cerrado.

- (b) Demostrar que el recíproco de la condición (a) NO es cierto (dar un contraejemplo).

- (10) Sea X un espacio normado y sea M denso en X^* . Sea $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$, una sucesión acotada tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x) \text{ para toda } f \in M.$$

Demostrar que

$$\text{w-} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

- (11) ¿Qué quiere decir convergencia débil para los siguientes espacios X ?

- (a) $X = \mathbb{R}^n$ para $n \in \mathbb{N}$.

- (b) $X = l_p$ para $1 < p < \infty$.

- (c) $X = l_1$.

- (d) $X = L^p[a, b]$ para $1 < p < \infty$.

- (e) $X = L^1[a, b]$ para $1 < p < \infty$.

- (f) $X = L^p(X, F, \mu)$ para $1 < p < \infty$, donde (X, F, μ) es un espacio de medida.

(g) $X = L^1(X, F, \mu)$, donde (X, F, μ) es un espacio de medida.

(12) Sean $x = \{x_m\}_{m \geq 1}$ y $x^n = \{x_m^n\}_{m \geq 1}$ para cada $n \geq 1$.

Sea $1 < p < \infty$, y supongamos que $x \in l_p$ y $x^n \in l_p$ para cada $n \geq 1$.

Probar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\{x^n\}_{n \geq 1}$ converge débilmente a x

(b) $\{\|x^n\|\}_{n \geq 1}$ es acotada y para cada m se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_m^n = x_m$.

(13) Sea $f \in X^*$, $\{f_n\}_{n \geq 1} \subset X^*$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge a f en la topología débil*.

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.

(14) Pruebe que:

Si X es reflexivo entonces la topología débil y la débil* en X^* coinciden.

(15) Sea X un espacio normado. Demostrar que:

X^* es un espacio de Hausdorff con respecto a la topología débil*.

(16) ¿Qué querrá decir convergencia débil* en X^* para los siguientes espacios X ?

(a) $X = \mathbb{R}^n$ para $n \in \mathbb{N}$.

(b) $X = l_p$ para $1 < p < \infty$.

(c) $X = l_1$.

(d) $X = L^p[a, b]$ para $1 < p < \infty$.

(e) $X = L^1[a, b]$ para $1 < p < \infty$.

(f) $X = L^p(X, F, \mu)$ para $1 < p < \infty$, donde (X, F, μ) es un espacio de medida.

(g) $X = L^1(X, F, \mu)$, donde (X, F, μ) es un espacio de medida.

Bibliografía

- [1] BACHMAN, G. AND NARICI, L. *Functional analysis*. Academic Press.
- [2] BROWN AND PAGE *Elements of functional analysis*. Van Nostrand.
- [3] BROWN, A. AND PEARCY, C. *Introduction to operator theory I*. Springer Verlag.
- [4] COTLAR, M. AND CIGNOLI, R. *An introduction to functional analysis*. North Holland, 1974.
- [5] DEVITO, C. *Functional Analysis*. Academic Press, 1978.
- [6] DUNFORD, SCHWARTZ *Linear operators*. Part I.
- [7] HALMOS, P. *Teoría intuitiva de los conjuntos*. CECSA, 1971.
- [8] KOLMOGOROV, A. Y FOMIN, S. *Elementos de la teoría de funciones y de análisis funcional*. MIR, 1975.
- [9] KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons, 1978.
- [10] LINDENSTRAUSS, J. AND TZAFRIRI, L. *Classical Banach Spaces I*. Springer Verlag, 1977.
- [11] ROYDEN, H. L. *Real analysis*. Collier Macmillan, 1968.
- [12] RUDIN, W. *Real and complex analysis*. Mc Graw-Hill, 1966.
- [13] TAYLOR, A. *Introduction to Functional Analysis*. John Wiley & Sons, 1958.
- [14] TRENQUIN, PISARIEVSKI, SÓBOLEVA *Problemas y ejercicios de análisis funcional*.
- [15] YOSIDA, K. *Functional Analysis*. Springer Verlag, 1965.