

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA
LABORATORIO DE FORMAS EN GRUPOS

ESPACIOS DE BANACH

Ramón Bruzual
Marisela Domínguez

Caracas, Venezuela
Julio 2005

Ramón Bruzual

Correo-E: rbruzual@euler.ciens.ucv.ve

Marisela Domínguez

Correo-E: mdomin@euler.ciens.ucv.ve

Laboratorio de Formas en Grupos

Centro de Análisis

Escuela de Matemática

Facultad de Ciencias

Universidad Central de Venezuela

<http://euler.ciens.ucv.ve/~labfg>

Prólogo

Estas notas han sido concebidas para ser utilizadas en la primera parte del curso de Análisis Funcional de la Licenciatura en Matemática de la Universidad Central de Venezuela y son el resultado de la experiencia de los autores en el dictado de dicho curso.

En este curso se debe dar una visión rigurosa de los espacios normados y de Banach.

Los siguientes temas son tratados en forma exhaustiva:

- (1) Nociones básicas de la teoría de conjuntos.
- (2) Espacios normados y espacios de Banach.
- (3) Espacios de funciones continuas.
- (4) Operadores lineales entre espacios normados.
- (5) Dual topológico de un espacio normado. El teorema de Hahn Banach.
- (6) Bases de Schauder.
- (7) Algunos teoremas importantes: Categoría de Baire, aplicación abierta, gráfico cerrado, acotación uniforme y Banach-Steinhaus.
- (8) Dualidad. Topologías débiles.

El trabajo de mecanografía estuvo a cargo de los autores. Agradecemos cualquier observación o comentario que deseen hacernos llegar.

Ramón Bruzual.
Marisela Domínguez.
Julio 2005.

Contenido

Introducción.	1
Capítulo 1. Nociones de la teoría de conjuntos.	5
1. Introducción histórica.	5
2. Cardinalidad.	11
3. El lema de Zorn y el axioma de elección.	13
4. Espacios vectoriales.	15
5. Bases de Hamel.	17
Ejercicios 1.	19
Capítulo 2. Espacios normados y espacios de Banach.	21
1. Espacios normados.	21
2. Espacios métricos	24
3. Espacios de Banach.	25
4. Series.	28
5. Completitud para espacios producto y espacios cociente.	31
Ejercicios 2.	33
Capítulo 3. Espacios de funciones continuas.	39
1. Algebras.	39
2. Espacios de funciones continuas.	40
3. El teorema de Dini sobre la convergencia uniforme.	42
4. El teorema de Stone-Weierstrass. Caso real.	44
5. El teorema de Stone-Weierstrass. Caso complejo.	48
6. Equicontinuidad, el teorema de Arzela-Ascoli.	50
Ejercicios 3.	55
Capítulo 4. Operadores lineales.	59
1. Operadores lineales entre espacios normados.	59
2. Condiciones equivalentes de continuidad.	61

3. El espacio $L(X, Y)$.	62
4. Homeomorfismos entre espacios normados.	64
5. Caracterización de los espacios normados de dimensión finita.	65
Ejercicios 4.	73
Capítulo 5. Funcionales lineales.	77
1. Dual de un espacio normado.	77
2. El teorema de Hahn - Banach.	78
Ejercicios 5.	89
Capítulo 6. Bases de Schauder.	93
1. Resultados básicos.	93
2. El dual de l_p para $1 < p < \infty$.	96
3. El dual de l_1 .	98
Ejercicios 6.	101
Capítulo 7. Los teoremas fundamentales.	103
1. El teorema de categoría de Baire.	103
2. El teorema de la aplicación abierta.	108
3. El teorema del gráfico cerrado.	112
4. El principio de acotación uniforme y el teorema de Banach-Steinhaus.	116
Ejercicios 7.	119
Capítulo 8. Dualidad. Topologías débiles.	123
1. Dualidad.	123
2. Topología débiles.	124
3. La topología débil*.	129
Ejercicios 8.	133
Bibliografía	137
Índice	139

Introducción.

La idea de introducir coordenadas o números asociados a un objeto geométrico que lo caracterizan se la debemos a Descartes (1.596-1.650). A partir de esto surge, de manera natural, la introducción espacios n -dimensionales \mathbb{R}^n cuyos puntos son (x_1, \dots, x_n) .

Un punto x en \mathbb{R}^n puede ser visto como un vector, además se pueden definir la suma de vectores y la multiplicación por un escalar.

Si tomamos $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, la distancia de x a y es

$$d(x, y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \dots + |x_n - y_n|^2}$$

y el número

$$\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$$

es llamado la norma de x .

Con la norma se obtiene la distancia.

Lo hecho anteriormente se puede generalizar para \mathbb{C}^n considerando la norma

$$\|x\| = \sqrt{x_1 \bar{x}_1 + \dots + x_n \bar{x}_n}$$

donde \bar{x}_k indica el complejo conjugado de x_k , para $k = 1, \dots, n$.

Obsérvese que los vectores $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ pueden pensarse como funciones

$$x : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R},$$

definidas mediante

$$x(1) = x_1, \dots, x(n) = x_n.$$

Esto permite identificar cada punto con una función.

Tomando en cuenta esta interpretación Hilbert extendió primero la idea de Descartes a conjuntos infinitos

$$\{1, 2, \dots\}.$$

Luego otros investigadores la extendieron a conjuntos más generales, y aparecen espacios funcionales cuyos puntos son funciones.

Por ejemplo, cualquier función medible Lebesgue f definida en un intervalo $[a, b]$ puede ser considerada como un punto de un espacio “infinito dimensional”. Identificando funciones que sean iguales casi siempre, definimos la norma de f mediante

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

La distancia entre dos funciones es:

$$d(f, g) = \left(\int_a^b |f(t) - g(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Así surge el espacio $L^2[a, b]$ también denotado mediante $L^2([a, b], B([a, b], m))$ donde m representa a la medida de Lebesgue y $B([a, b])$ es la σ -álgebra de los borelianos en $[a, b]$.

En lugar de $([a, b], B([a, b], m))$ se puede considerar otro espacio de medida (X, F, μ) y así surge $L^2(X, F, \mu)$.

Pero resulta ser que para $1 \leq p < \infty$ tenemos que

$$\|f\| = \left(\int_X |f(t)|^p d\mu \right)^{1/p}$$

también es una norma (nuevamente hay que identificar las funciones que son iguales casi siempre). Esto da origen a los espacios $L^p(X, F, \mu)$. Pero esta norma no proviene de un producto interno. Estos espacios son el ejemplo clásico de espacios de Banach.

En muchos casos el espacio de medida (X, F, μ) da origen a espacios de dimensión infinita. Algunas diferencias muy importantes entre los espacios de dimensión infinita y los espacios de dimensión finita son:

(1) En el caso finito toda transformación lineal es continua.

En el caso infinito existen transformaciones lineales que no son continuas.

- (2) En el caso finito tenemos el teorema de Bolzano - Cauchy: toda sucesión de Cauchy es convergente.

En el caso infinito algunos espacios (como los $L^p(X, F, \mu)$) verifican esta propiedad, sin embargo hay otros que no la verifican. Pero siempre es posible completar el espacio para que valga el teorema.

- (3) En el caso finito tenemos el teorema de Bolzano - Weierstrass: $B(z, r)$ es compacta. En el caso infinito $B(z, r)$ nunca es compacta. Esta una de las principales dificultades del análisis funcional y por esta razón los operadores compactos (que transforman esferas en conjuntos compactos) son de especial importancia.

Muchos de los problemas que estudian los analistas no están relacionados originalmente con un objeto sencillo como una función, una medida o un operador, sino con una larga clase de objetos. Muchas de las clases importantes que aparecen son espacios vectoriales. Como el paso al límite juega un papel importante en todo problema analítico, estos espacios vectoriales son provistos de métricas (o al menos de topologías) que conllevan una relación natural con los objetos de que están hechos los espacios. La manera más simple de hacer esto es introduciendo una norma. El resultado es un espacio normado.

En 1932 apareció el famoso libro de Banach “Théorie des Opérations Linéaires” (Warsaw) en el que se presenta la teoría de operadores lineales en espacios normados que se desarrolló después de los trabajos decisivos de F. Riesz y de S. Banach. La aparición de este libro significó el comienzo del estudio sistemático de los espacios normados.

Los espacios de Banach son espacios normados en los que vale el teorema de Bolzano - Cauchy, es decir, son espacios en los que toda sucesión de Cauchy es convergente (esto se conoce actualmente como completitud).

En 1932 también apareció el libro de Stone “Linear Transformations in Hilbert Spaces” (Am. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 15, New York) en el que aparece la primera exposición sistemática de teoría de operadores lineales en espacios de Hilbert. Este libro se basa en los trabajos de Hilbert, F. Riesz, Schmidt, H. Weyl, Hahn, Carleman, V. Neumann, Hellinger y otros.

La teoría de espacios normados y de Hilbert creció mucho con:

- (1) la analogía con los resultados de algebra lineal y de análisis, especialmente con las ecuaciones integrales clásicas y la teoría de desarrollos en términos de autovalores, desarrollados por Poincaré, Fredholm, Hilbert, Carleman y otros;
- (2) el desarrollo de la teoría de momentos, la teoría de integración y el análisis de Fourier;
- (3) el desarrollo y la sistematización de las ideas en geometría y en álgebra.

Desde 1960 la actividad de investigación matemática en el área de espacios normados y de Banach creció considerablemente. Como resultado, la teoría de espacios de Banach ganó mucho en profundidad y en alcance. La mayoría de los problemas clásicos bien conocidos fueron resueltos, a su vez profundas conexiones entre la teoría de espacios de Banach y otras áreas de la matemática se establecieron.

La teoría de espacios normados es de gran importancia en otras teorías tales como: análisis armónico, teoría de aproximación, teoría ergódica, ecuaciones diferenciales, ecuaciones integrales.

Por sus muchas aplicaciones, el análisis funcional se ha convertido en una disciplina matemática muy popular. El propósito de estas notas es presentar los resultados principales del análisis funcional con énfasis en el estudio de los espacios de Banach.

CAPÍTULO 1

Nociones de la teoría de conjuntos.

1. Introducción histórica.

1.1. Galileo y el infinito.

Galileo leyó los trabajos del comentador de la matemática griega Simplicio (siglo VI d.C.) y los trabajos posteriores de Salviati. Del infinito en geometría Salviati llegó al infinito en aritmética, apuntando una correspondencia entre todos los enteros y todos los cuadrados perfectos. A pesar de que hay muchos números que no son cuadrados perfectos “debemos decir que hay tantos cuadrados perfectos como números”.

Al ver esto, Galileo se enfrentaba a la propiedad fundamental de un conjunto infinito: que una parte del conjunto puede tener tantos elementos como todo el conjunto, pero Galileo no llegó a esta conclusión.

Mientras que Salviati aseguró que el número de cuadrados perfectos NO es menor que el número de enteros, él no se atrevió a decir que eran iguales. El simplemente concluyó que los atributos “igual”, “mayor que” y “menor que” NO son aplicables a las cantidades infinitas. Además aseguró (ahora sabemos que incorrectamente) que NO se puede decir que un número infinito sea mayor que otro número infinito, ni que un número infinito sea mayor que un número finito.

1.2. Bolzano y el infinito.

De la paradoja de Galileo acerca de la correspondencia uno a uno entre enteros y cuadrados perfectos, el sacerdote Bernhard Bolzano (1.781 - 1.848) demostró que correspondencias similares entre los elementos de un conjunto infinito y un subconjunto propio son situaciones comunes. Bolzano reconoció que el intervalo de 0 a 1 tiene tantos puntos como el intervalo de 0 a 2.

También parece ser que se dio cuenta de que el conjunto de los números reales es de un infinito diferente al infinito de los números enteros.

1.3. Dedekind y el infinito.

Dedekind observó las paradojas de Bolzano no como anomalías, sino como una propiedad universal de los conjuntos infinitos y que tomó como una definición precisa:

“Un sistema S es infinito cuando es similar a una parte propia de sí mismo.”

“Un sistema S es finito cuando no es infinito”.

1.4. Cantor y la teoría intuitiva de conjuntos.

Georg F. Cantor (1.845 - 1.918) es el creador de la célebre teoría de los conjuntos. Fue el estudio de las series trigonométricas infinitas que condujo a la teoría de conjuntos de Cantor. Desafortunadamente el concepto de conjunto dado por Cantor es algo tan vago como el de “un saco lleno de elementos”. Sin embargo sus ideas estaban claramente muy por delante de su tiempo y levantaron grandes controversias. Sus contribuciones más originales giraron en torno a la palabra “infinito”. En el marco de la teoría de conjuntos las colecciones infinitas encuentran su lugar adecuado.

Cantor demostró que los números naturales, los cuadrados perfectos y las fracciones racionales tienen el mismo cardinal (se pueden poner en una correspondencia uno a uno).

Al ver esto, uno podría preguntarse si todos los infinitos son iguales, pero Cantor probó que eso no es cierto. Mediante reducción al absurdo Cantor demostró que hay más puntos en un segmento que en el conjunto de números naturales. Es un infinito mayor. Y los hay todavía mayores; en realidad hay infinitos infinitos.

Dado un segmento de longitud 1 y una recta ilimitada por ambos extremos, parece que la recta poseerá más puntos. Pero eso no es cierto: cada uno de los puntos del segmento curvilíneo de longitud 1 está en correspondencia uno-uno con un punto de la recta y viceversa. Por lo tanto hay tantos puntos en una recta como en una de sus partes.

Un hecho sorprendente es que la dimensión no aumenta la cardinalidad de un conjunto. Estos resultados eran tan sorprendentes que en una ocasión el mismo Cantor le escribió a Dedekind “Lo veo, pero no lo creo” y le pidió a su amigo que revisara la prueba. Los editores también estaban indecisos de aceptar sus trabajos y por eso muchas veces aparecían con mucho retraso.

Cuando Cantor expuso por primera vez -en pleno siglo XIX- estas desconcertantes opiniones, el mundo matemático se dividió en dos grandes grupos: el de los que se irritaron

y el de los que se entusiasmaron. Cantor lo pasó muy mal, pues en su conservadora época abundaban más los primeros que los segundos. Hoy, la situación es muy distinta y la teoría conjuntista se ha adueñado de toda la matemática.

1.5. Algunas antinomias famosas.

La crisis conjuntista de principios de siglo: A principios de siglo XX los conjuntos fueron protagonistas de algunos escándalos más que regulares. La casi totalidad de la culpa de tales escándalos la tuvieron las *antinomias* conjuntistas.

Veamos la antinomia más antigua, la de Epiménides. Aparentemente tiene poco que ver con la matemática moderna: se debe a la pluma de San Pablo, quien en la epístola a Tito advierte a este que los cretenses son siempre mentirosos; como testimonio de tal advertencia cita a un cretense Epiménides.

Analicemos más detenidamente la afirmación del apóstol; si Epiménides -que es cretense- afirma que todos los cretenses son embusteros, él mismo se incluye dentro de la categoría; luego miente. Pero si miente, al decir que todos mienten él también miente, y, por lo tanto, los cretenses no son embusteros. Pero entonces esos dicen la verdad, y, particularmente, Epiménides también la dice.

Bien se ve que es imposible llegar a una conclusión final. Se trata de una contradicción pura y simple, de una antinomia.

Cuando hablamos de que los cretenses mienten, estamos en nuestro derecho. Pero al afirmar que uno de los miembros de la cofradía de embusteros miente, debemos explicarnos más detenidamente. Un cretense puede mentir cuando se le antoje; pero si miente al referirse al enunciado particular que afirma que todos mienten, la contradicción salta a la vista.

Veamos una versión (tomada de *Mathematics in the Modern World*, de M. Kline) de la famosa paradoja de Russell. En las bibliotecas, las características, colocación, etc. de cada libro se agrupan en un catálogo. Si los libros son muchos, este catálogo es otro libro, que algunos bibliotecarios incluyen entre los que figuran en el mismo catálogo. Otros bibliotecarios no quieren esto. Pero si el jefe de todos los bibliotecarios ordenara hacer un catálogo que incluyera sólo todos aquellos catálogos que no figuran en ellos mismos, ese nuevo catálogo ¿debe catalogarse a sí mismo, o no?

Russell dio una explicación para afrontar paradojas. El método general para afrontarlas es el de distinguir entre lenguaje y metalenguaje. Por ejemplo, analicemos la siguiente expresión: “Esta frase es falsa”, ¿es o no es falsa? Esta forma de preguntar carece de sentido, puesto que nos lleva a contradicción. Pero, profundizando un poco, nos damos cuenta de que lo que realmente hubiéramos querido decir es: “Esta frase es falsa” es una frase falsa”, ¡lo cual es muy distinto!

Los dos adjetivos *falsa* que aparecen en la expresión no se refieren ni significan lo mismo. Está claro que si la expresión “Esta frase es falsa” está escrita en un determinado lenguaje, la expresión “Esta frase es falsa” es una frase falsa” lo está en un lenguaje distinto, en un lenguaje que hace referencia al lenguaje anterior, es decir en un *metalenguaje*.

El metalenguaje constituye en el lenguaje “un escalón más arriba”, y no es prudente mezclar sentencias en el lenguaje X con sentencias *acerca* del lenguaje X . No pertenecen a mundos iguales.

Todo lo que antecede lo hemos citado para preparar el terreno, porque si bien es verdad que en el dominio de la semántica pura hubo problemas en tiempo de Russell, en el de las matemáticas puras también los hubo, y grandes. Tal como ocurrió con la paradoja de Cantor.

1.6. La paradoja de Cantor.

La primera paradoja estrictamente matemática aparecida fue la de Cantor. Trabajando con su escala de números infinitos, Cantor probó que dado un conjunto A de x elementos -con x finito o infinito-, el conjunto formado por todas las partes de A tenía un número de elementos mayor que x .

La paradoja surge al considerar “el conjunto de todos los conjuntos”. Por un lado, el conjunto de sus partes debe ser más numeroso, en virtud del teorema de Cantor; por otro, como se trata del conjunto de *todos* los conjuntos, el conjunto de sus partes está incluido en sí mismo. Por lo tanto, el conjunto de sus partes es menos numeroso que el propio conjunto. He aquí una antinomia.

1.7. La axiomática.

Euclides construyó su geometría, una geometría que resistió el paso de casi dos mil años, utilizando un método de trabajo especialmente acertado: el método axiomático. Euclides

empezaba por enunciar una serie de verdades que le parecían evidentes por sí mismas y que aceptaba sin demostración previa. Una vez aceptados estos presupuestos básicos, las solas reglas del razonamiento le proporcionaban todo lo demás.

A partir de los enunciados primitivos, los *axiomas*, se iban encadenando una tras otra las deducciones que se desprendían de ellos; eran los *teoremas*. Y a partir de los teoremas surgían cada vez más teoremas. También surgían teoremas equivalentes, es decir, a enunciados que con distintas palabras, expresen la misma verdad.

El método de trabajo de las matemáticas modernas es muy semejante al de Euclides, sólo que más perfecto y acabado. Supongamos que queremos edificar una teoría matemática, por ejemplo la teoría de conjuntos. Empezaremos por definir una serie de axiomas que nos aclaren qué entendemos por conjunto y qué reglas de juego nos estarán permitidas con esos conjuntos; luego nos pondremos a deducir de acuerdo con las reglas de juego, y ésta será nuestra teoría de conjuntos.

Eligiendo los axiomas con cuidado no hay que temer a las antinomias; precisamente, los axiomas se pensarán de manera que las antinomias no puedan aparecer. Esta es la ventaja de una teoría formalizada frente a una teoría intuitiva como la de Cantor.

1.8. La teoría axiomática de conjuntos.

Era evidente que un concepto de conjunto tan vago como el de “un saco lleno de elementos” no podía llevarnos lejos. A partir de ahora, entenderemos por conjunto “aquello que satisface los axiomas de la teoría” y pensaremos tales axiomas de manera que no puedan surgir antinomias.

Una de las primeras axiomatizaciones de la teoría de conjuntos fue la de Zermelo-Fraenkel, enunciada en 1.908 y perfeccionada en 1.922. De acuerdo con ella, entendemos por conjunto aquello que verifica tales axiomas, prescindiendo por completo de las ideas intuitivas que hubiéramos podido sostener con anterioridad. La versión que aquí se da de ella está simplificada para hacer inteligible al no especialista una formulación original mucho más complicada.

Los axiomas de la teoría de conjuntos son:

- (1) Dos conjuntos son iguales si y sólo si poseen los mismos elementos.
- (2) Existe un conjunto sin elementos, \emptyset , llamado vacío.

- (3) Si A y B son conjuntos, $\{A, B\}$ es un conjunto.
- (4) La unión de un conjunto de conjuntos es un conjunto.
- (5) Existe por lo menos un conjunto X tal que $\emptyset \in X$ y tal que si $A \in X$, $A \cup \{A\} \in X$.
- (6) Para toda relación unívoca R y todo conjunto X , existe el conjunto Y formado por los elementos de X que satisfacen R .
- (7) Dado un conjunto, existe el conjunto de todas sus partes.
- (8) Dado un conjunto de conjuntos es posible elegir un elemento de cada uno de ellos.
- (9) Ningún conjunto es elemento de sí mismo.

Todas las teorías axiomáticas de conjuntos, como la de Zermelo-Fraenkel o la de Von Neumann-Bernays, tienen en común el renunciar a la concepción intuitiva de que cualquier propiedad de un objeto expresada en el lenguaje corriente otorgue entidad o carta de naturaleza al conjunto de objetos que satisfagan esa propiedad.

Las teorías axiomáticas toman la precaución de asegurarse que sus axiomas inhiben la existencia de conjuntos de satisfactibilidad arbitrarios. Sólo permiten la existencia a los conjuntos “buenos”; por ejemplo, “el conjunto de todos los conjuntos” del que hablaba Cantor, no es ningún conjunto, ya que, de acuerdo con los axiomas, no existe. Esto resuelve la paradoja de Cantor.

El modo de hacer matemáticas consiste en “partir de unos axiomas más o menos evidentes e ir deduciendo teoremas a partir de ellos mediante el uso de un conjunto de reglas de deducción o inferencia”, también postuladas por adelantado, se asemeja mucho a un juego. A un juego lógico, pero juego al fin y al cabo. Jugar al ajedrez es mucho más sencillo, pero no parece una actividad esencialmente diferente. Lo único que se la pide a este juego lógico es que no nos lleve a contradicciones, es decir, “que no podamos probar a la vez, a partir de los axiomas, un teorema y su negación”. Esta postura filosófica frente al quehacer matemático, interpretándolo como un juego simbólico más o menos complejo, es lo que se ha dado en llamar *formalismo*.

La axiomática no se aplica sólo a la teoría de conjuntos, sino a todas las teorías matemáticas. Todas ellas están formalizadas (es decir, estructuradas en axiomas, fórmulas y reglas de inferencia entre fórmulas) o lo estarán en fecha próxima, tan pronto como los matemáticos encuentren el tiempo necesario para ello. La axiomática es un método seguro de trabajo, fructífero, y que ha alcanzado un desarrollo impresionante, pero que en ningún caso está exento de dificultades.

2. Cardinalidad.

DEFINICIÓN 1.1. A cada conjunto A se le puede asociar un número llamado *cardinal* de A (denotado por $\text{card } A$), tal que sucede lo siguiente:

Si A y B son conjuntos entonces $\text{card } A = \text{card } B$ si y sólo si existe una biyección entre A y B .

En este caso se dice que A y B son *equivalentes* o *equipotentes*.

La definición de número cardinal se puede introducir de varias formas, cada una de ellas necesita un conocimiento más o menos profundo de un sistema de axiomas para la teoría de conjuntos. Una buena referencia es “Teoría intuitiva de los conjuntos” de Paul R. Halmos.

Estudiaremos algunas propiedades muy básicas de los números cardinales.

Tal como es natural, $\text{card } A \neq \text{card } B$ cuando no existe ninguna función biyectiva entre A y B .

DEFINICIÓN 1.2.

Se dice que $\text{card } A \leq \text{card } B$ si existe una función $f : A \rightarrow B$ inyectiva.

Se tiene $\text{card } A < \text{card } B$ si $\text{card } A \leq \text{card } B$ y $\text{card } A \neq \text{card } B$.

DEFINICIÓN 1.3.

Un conjunto A es *finito* cuando toda función inyectiva de A en A es sobreyectiva.

Un conjunto A es *infinito* cuando no es finito.

Los *números naturales* son los cardinales de los conjuntos finitos.

Se tiene que $\text{card } \mathbb{N}$ es el más pequeño de los cardinales infinitos.

DEFINICIÓN 1.4. Sean a y b números cardinales. Sean A y B conjuntos tales que $a = \text{card } A$ y $b = \text{card } B$. Se definen la *suma*, el *producto* y la *potencia* de la siguiente manera

- (i) $a + b = \text{card } (A \cup B)$ si A y B son disjuntos,
- (ii) $a \cdot b = \text{card } (A \times B)$
- (iii) $a^b = \text{card } (A^B)$, donde A^B es el conjunto de las funciones de B en A .

PROPOSICIÓN 1.5 (Algunas propiedades de la aritmética cardinal).

- (i) Si a y b son números cardinales tales que a es finito y b es infinito entonces $a+b = b$.
- (ii) Si a es un número cardinal infinito entonces $a + a = a$.
- (iii) Si a y b son números cardinales tales que por lo menos uno de ellos es infinito y $c = \max\{a, b\}$ entonces $a + b = c$.
- (iv) Si a es un número cardinal infinito entonces $a.a = a$.
- (v) Si a y b son números cardinales tales que por lo menos uno de ellos es infinito y $c = \max\{a, b\}$ entonces $a.b = c$.

La demostración de esta proposición queda como ejercicio.

Un resultado importante que no es nada inmediato es el siguiente:

TEOREMA 1.6 (Schröder - Bernstein).

Sean a y b números cardinales. Si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$.

(Para la demostración ver Halmos pág. 127 y Kolmogorov-Fomin pág. 26)

TEOREMA 1.7 (Cantor).

- (i) $\text{card } A < \text{card } P(A)$ para todo conjunto A .
- (ii) Sea a un número cardinal entonces $a < 2^a$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $g : A \rightarrow P(A)$ dada por $g(x) = \{x\}$. Como g es inyectiva tenemos que $\text{card } A \leq \text{card } P(A)$. Falta ver que esta desigualdad es estricta.

Sea $f : A \rightarrow P(A)$ una función demostraremos que f no puede ser sobreyectiva, lo que implicará que $\text{card } A < \text{card } P(A)$.

Sea

$$B = \{x \in A / x \notin f(x)\}.$$

Supongamos que f es sobreyectiva. Como $B \subset A$ se tiene que $B \in P(A)$ y así existe $x_o \in A$ tal que $f(x_o) = B$.

Si $x_o \in B$ entonces $x_o \notin f(x_o) = B$. Y esto es una contradicción.

Si $x_o \notin B$, como $B = f(x_o)$, tenemos $x_o \notin f(x_o)$. Por lo tanto $x_o \in B$. Esto también es una contradicción.

Luego f no es sobreyectiva.

Para la segunda parte basta notar que si $a = \text{card } A$ entonces

$$2^a = \text{card } (\{0, 1\}^A) = \text{card } P(A).$$

□

OBSERVACIÓN 1.8. Este teorema prueba, entre otras cosas, que:

- (a) existen conjuntos infinitos que no pueden ser puestos en correspondencia con \mathbb{N} .
- (b) no existe un número cardinal “más grande” que todos.

3. El lema de Zorn y el axioma de elección.

Consideremos el axioma de elección. Este aparentemente inofensivo axioma, introducido por Zermelo (1.871 - 1.953) establece un hecho casi trivial: afirma que en una colección arbitraria de conjuntos es posible elegir un elemento de cada uno de ellos. Por supuesto que si se tienen, pongamos por caso, 53 conjuntos, la cosa no ofrece duda: basta con “introducir la mano” en cada uno y repetir la operación 53 veces. Pero en el caso en que la colección de conjuntos sea infinita, la elección de un elemento de cada uno empieza por ser físicamente imposible. E intelectualmente, a veces parece razonable y a veces no.

La paradoja de Banach y Tarski es un excelente ejemplo de lo que puede llegarse a probar aceptando el axioma de elección. He aquí su enunciado: Se toma una esfera compacta, ¿es posible cortarla o dividirla en pedazos de alguna manera tal que al volver a pegarlos de modo distinto, claro está resulten, no una, sino dos esferas idénticas en tamaño a la de partida e igualmente compactas?

La casi inconcebible respuesta es sí. Esto fue probado en 1.924 por Banach y Tarski, célebres matemáticos polacos. Es más, se ha probado posteriormente que basta con dividir la esfera inicial en cinco pedazos. Por desgracia la prueba del teorema no incluye la receta mecánica con la cual realizar tan asombrosa operación; el modo de realizarla depende del axioma de elección, circunstancia que deja muy poco resquicio a la posibilidad de que nadie consiga efectuarla jamás. Y es que el susodicho axioma se limita a decir que *puede* elegirse un elemento, pero se guarda mucho de decirnos *cómo*. Así pues, *puede* efectuarse la operación Banach - Tarski; sin embargo, no se nos dice *cómo* debemos efectuarla.

En álgebra lineal se usa el axioma de elección para probar que todo espacio vectorial posee una base; en álgebra conmutativa se usa para probar que todo anillo posee un ideal maximal. En topología se usa para probar que todo filtro posee un ultrafiltro.

Ahora no viene al caso el significado de las palabras “base”, “ideal” o “ultrafiltro”; pero conviene remarcar que la existencia de tales entes matemáticos es algo muy poco evidente. De hecho, el axioma de elección sólo nos asegura que tales entes existen, dándonos una

tranquilidad que es de agradecer, porque sin ellos gran parte de la matemática desaparecería. Pero el axioma no nos enseña a construir ni una base, ni un ideal, ni un ultrafiltro. Simplemente nos dice que existen.

AXIOMA (Axioma de elección). *Si F es una colección no vacía de conjuntos no vacíos entonces existe una función f con dominio F tal que $f(A) \in A$ para todo $A \in F$.*

El axioma de elección, que resulta bastante natural, tiene consecuencias que no resultan tan naturales. Una de ellas es el Lema de Zorn.

DEFINICIÓN 1.9. Una *relación* es un conjunto de pares ordenados. Es decir, si X e Y son conjuntos una relación de X en Y es subconjunto C de $X \times Y$.

Sean $x \in X$, $y \in Y$ diremos que x *está relacionado* con y (xRy) cuando $(x, y) \in C$.

DEFINICIÓN 1.10. Una relación R en X es:

Reflexiva cuando para todo $x \in X$ se tiene que xRx .

Antisimétrica cuando para todo $x, y \in X$ se tiene que xRy , yRx implica $x = y$.

Transitiva cuando para todo $x, y, z \in X$ se tiene que xRy , yRz implica xRz .

DEFINICIÓN 1.11. Un *orden (orden parcial)* en X es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva en $X \times X$. En este caso se dice que X es un conjunto parcialmente ordenado.

Sean X un conjunto parcialmente ordenado y $F \subset X$.

Si $x, y \in X$ decimos que $x \leq y$ cuando xRy .

DEFINICIÓN 1.12. Decimos que:

(i) z es una *cota superior* de F cuando $x \leq z$ para todo $x \in F$,

(ii) z es una *cota inferior* de F cuando $z \leq x$ para todo $x \in F$,

(iii) x_o es el *supremo* de F cuando:

x_o es una cota superior de F y $x_o \leq z$ para toda cota superior z de F ,

(iv) x_o es el *ínfimo* de F cuando:

x_o es una cota inferior de F y $z \leq x_o$ para toda cota inferior z de F .

DEFINICIÓN 1.13. F es *totalmente ordenado* cuando para todo $x, y \in F$ se tiene: $x < y$, $y < x$ ó $x = y$.

DEFINICIÓN 1.14. Una *cadena* en X es un subconjunto totalmente ordenado de X .

DEFINICIÓN 1.15. Sea $x_o \in F$, se dice que x_o es un *elemento maximal* de F cuando $x \in F$ y $x_o \leq x$ implica $x_o = x$.

LEMA 1.16 (Lema de Zorn).

Sean F un conjunto. Si

- (i) $F \neq \emptyset$,
- (ii) F es parcialmente ordenado,
- (iii) toda cadena en F tiene una cota superior en F

entonces F tiene un elemento maximal (que está en F).

OBSERVACIÓN 1.17. Se puede demostrar que el Lema de Zorn y el Axioma de elección son equivalentes.

En la próxima sección veremos una aplicación del Lema de Zorn.

4. Espacios vectoriales.

En el siglo XVIII el auge del cálculo infinitesimal y los sucesivos fracasos en el intento de resolver la ecuación de quinto grado por radicales detuvieron el progreso del álgebra. Pero hacia la segunda mitad del siglo XIX, el álgebra se dirige rumbo a lo que hoy forma el muy importante estudio de las estructuras algebraicas.

El primero, de los nuevos entes que aparece es el vector. En esta dirección se deben mencionar las obras de Williams R. Hamilton y Herman Grassmann. Gauss también cooperó en la fundación del análisis vectorial en dos dimensiones. Hamilton se ocupó de vectores (el nombre fue invención suya) y creó un sistema de números complejos de cuatro unidades, a los cuales llamó “cuaterniones”, éstos satisfacen las propiedades de las operaciones usuales, con excepción de la propiedad conmutativa para el producto, constituyendo así el primer ejemplo de grupo no conmutativo.

La divulgación de los resultados de Grassmann se debe principalmente al libro *Análisis Vectorial* (1.881) de Josiah Williard Gibbs.

En una de sus obras Dieudonné escribió: “A pesar de los esfuerzos de Grassmann y Peano los aspectos intrínsecos y el punto de vista geométrico del álgebra lineal permanecieron ocultos en las bases hasta 1.900; uno hubiese podido hablar con Cayley de vectores y espacios lineales, pero invariablemente iban a ser considerados partes de algún \mathbb{R}^n ; en otras palabras,

todo en un espacio vectorial estaba referido a una base fija, y las transformaciones lineales las estudiaban a partir de sus matrices correspondientes a esa base”.

Los segmentos lineales que simbolizan las fuerzas, las velocidades y cosas análogas se denominan “vectores” y constituyen un instrumento esencial para la física. El hecho que estos y los números complejos se comporten de una forma matemática análoga hace posible analizar complicadas situaciones en las que un conjunto de fuerzas están actuando a la vez, por ejemplo: en la brújula giroscópica de un barco.

DEFINICIÓN 1.18. Un *espacio vectorial* (o un *espacio lineal*) consiste de:

- (1) un cuerpo de escalares \mathbb{K} ,
- (2) un conjunto X de objetos, llamados vectores,
- (3) una operación llamada *suma de vectores*, que asigna a cada par de vectores $x, y \in X$ un vector $x + y \in X$, llamado suma de x y de y , de manera que se cumplan las siguientes propiedades
 - (a) la suma es conmutativa, esto es, $x + y = y + x$, para todo $x, y \in X$
 - (b) la suma es asociativa, esto es, $x + (y + z) = (x + y) + z$, para todo $x, y, z \in X$
 - (c) existe un único vector 0 en X , llamado el *vector cero*, tal que $x + 0 = x$ para todo $x \in X$.
 - (d) para cada vector $x \in X$ existe un único vector $-x \in X$ tal que $x + (-x) = 0$,
- (4) una operación llamada *multiplicación por un escalar*, que asigna a cada escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ y a cada vector $x \in X$ un vector λx , llamado producto de λ y de x , de manera que se cumplan las siguientes propiedades
 - (a) $1x = x$ para todo $x \in X$.
 - (b) $(\lambda_1 \lambda_2)x = \lambda_1(\lambda_2 x)$, para todo $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, $x \in X$
 - (c) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, $x, y \in X$
 - (d) $(\lambda_1 + \lambda_2)x = \lambda_1 x + \lambda_2 x$, para todo $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, $x \in X$

Cuando no hay confusión con el cuerpo de escalares, podemos referirnos al espacio vectorial como X , pero a veces es deseable especificar el cuerpo de escalares y en ese caso decimos que X es un espacio vectorial sobre \mathbb{K} o un \mathbb{K} -espacio vectorial.

Diremos que X es un espacio real o complejo según el cuerpo de escalares \mathbb{K} sea \mathbb{R} ó \mathbb{C} .

En lo que sigue \mathbb{K} representará al cuerpo \mathbb{R} de los números reales o al cuerpo \mathbb{C} de los números complejos.

EJEMPLO 1.19.

- (1) \mathbb{K}^n es un \mathbb{K} -espacio vectorial.

- (2) El conjunto de las matrices $m \times n$ con entradas en \mathbb{K} es un \mathbb{K} -espacio vectorial.
 (3) Sea A un conjunto. El espacio de las funciones de A en \mathbb{K} es un \mathbb{K} -espacio vectorial.
 (4) El espacio de los polinomios de \mathbb{K} en \mathbb{K} es un \mathbb{K} -espacio vectorial.

5. Bases de Hamel.

Usaremos \mathbb{K} para representar al cuerpo \mathbb{R} de los números reales o al cuerpo \mathbb{C} de los números complejos.

Sea X un espacio vectorial sobre \mathbb{K} .

DEFINICIÓN 1.20. Sea $A \subset X$, decimos que A es *linealmente independiente* si dados un número natural n , dados $x_1, \dots, x_n \in A$ y escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ se tiene que

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$$

implica que

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

DEFINICIÓN 1.21. Sea $B \subset X$, decimos que B es una *base de Hamel* si:

- (a) B es linealmente independiente,
 (b) B genera X , es decir, el subespacio lineal más pequeño de X que contiene a B es X .

TEOREMA 1.22. *Todo espacio vectorial tiene una base de Hamel.*

DEMOSTRACIÓN. Sean F el conjunto de todos los subconjuntos linealmente independientes de X . Aplicaremos el Lema de Zorn al conjunto F .

Sabemos que F está parcialmente ordenado por la inclusión, además $F \neq \emptyset$.

Sea C una cadena en F . Veremos que C tiene una cota superior en F .

Sea

$$S = \bigcup_{A \in C} A.$$

Obviamente S es cota superior de C .

Veamos que S es linealmente independiente. Sean $x_1, \dots, x_n \in S$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ escalares tales que

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0.$$

Entonces existen $A_1, \dots, A_n \in C$ tales que $x_i \in A_i$ para $i = 1, \dots, n$. Como C es una cadena existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $A_i \subset A_j$ para $i = 1, \dots, n$. Como A_j es linealmente independiente debe ser

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Luego $S \in F$.

Por el Lema de Zorn existe $B \in F$ que es un elemento maximal.

Veamos que B es una base.

Como $B \in F$ ya tenemos que B es linealmente independiente.

Falta ver que todo elemento de X es combinación lineal (finita) de elementos de B .

Sea $x \in X$ y $x \neq 0$.

Caso 1: $x \in B$.

Entonces por supuesto que x es combinación lineal de elementos de B .

Caso 2: $x \notin B$.

Entonces B está contenido $B \cup \{x\}$. Y así $B \cup \{x\}$ no es linealmente independiente.

Luego existen $x_1, \dots, x_n \in B$ y escalares $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ no todos nulos tales que

$$\lambda x + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0.$$

Es fácil ver que $\lambda \neq 0$. Luego se tiene que

$$x = -\frac{\lambda_1}{\lambda} x_1 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda} x_n.$$

□

PROPOSICIÓN 1.23. *Si B_1 y B_2 son dos bases de Hamel de un espacio vectorial X entonces $\text{card } B_1 = \text{card } B_2$.*

La demostración de esta proposición queda como ejercicio.

Luego a todo espacio vectorial le podemos asignar como dimensión (algebraica) el cardinal de cualquier base de Hamel.

Ejercicios 1.

- (1) Demostrar que $\text{card } \mathbb{N} < \text{card } \mathbb{R}$.
- (2) Demostrar que:
 - (a) $\text{card } \mathbb{Z} = \text{card } \mathbb{N}$,
 - (b) $\text{card } \mathbb{Q} = \text{card } \mathbb{N}$,
 - (c) $\text{card } (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \text{card } \mathbb{N}$,
 - (d) $\text{card } (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = \text{card } \mathbb{N}$,
 - (e) $\text{card } (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) = \text{card } \mathbb{N}$.
- (3) Demostrar que si a es un número cardinal infinito entonces $\text{card } \mathbb{N} \leq a$.
- (4) Sean a y b números cardinales. Demostrar que: Si a es finito y b es infinito entonces $a + b = b$.
- (5) Demostrar que si a es un número cardinal infinito entonces $a + a = a$.

Sugerencia: Sea A un conjunto tal que $\text{card } A = a$. Basta probar que $A \times \{0, 1\}$ es equipotente con A .

Sea F el conjunto de todas las funciones biyectivas f tales que el dominio de f es de la forma $B \times \{0, 1\}$ y el rango de f es B , donde B es un subconjunto de A . Utilizar el Lema de Zorn para demostrar la existencia de un elemento maximal en F .
- (6) Sean a y b números cardinales. Demostrar que: Si a y b son tales que por lo menos uno de ellos es infinito y $c = \max\{a, b\}$ entonces $a + b = c$.

(7) Demostrar que si a es un número cardinal infinito entonces $a \cdot a = a$.

Sugerencia: usar un argumento análogo al usado en el ejercicio (5).

(8) Sean a y b números cardinales. Demostrar que: Si a y b son tales que por lo menos uno de ellos es infinito y $c = \max\{a, b\}$ entonces $a \cdot b = c$.

(9) Dado un conjunto A , sea $PF(A)$ el conjunto formado por todos los subconjuntos finitos de A (partes finitas de A). Suponga que A es un conjunto infinito. ¿Cuál es el cardinal de $PF(A)$?

(10) Demostrar que $\text{card } \mathbb{R} = 2^{\text{card } \mathbb{N}}$. ¿Por qué este ejercicio resuelve también el ejercicio (1) ?

(11) Sea X un espacio vectorial. Demostrar que:

(a) Si A es un subconjunto linealmente independiente de X entonces existe una base de Hamel de X que contiene a A .

(b) Si B_1 y B_2 son bases de Hamel de X entonces

$$\text{card } B_1 = \text{card } B_2.$$

(12) Es claro que \mathbb{R} es un espacio vectorial sobre \mathbb{Q} . ¿Cuál es la dimensión de este espacio?

(13) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función que satisface la ecuación funcional

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Demostrar que si f es continua, entonces existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = ax \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

(14) Demostrar que existen funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} que no son continuas y que satisfacen la ecuación funcional

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

(15) ¿Cuál es el cardinal del conjunto de las funciones continuas de \mathbb{R} en \mathbb{R} ?

CAPÍTULO 2

Espacios normados y espacios de Banach.

1. Espacios normados.

Nuevamente, sea \mathbb{K} el cuerpo \mathbb{R} de los números reales o el cuerpo \mathbb{C} de los números complejos y sea X un espacio vectorial sobre \mathbb{K} (los elementos de \mathbb{K} son los escalares) .

DEFINICIÓN 2.1. Sea X un espacio vectorial sobre \mathbb{K} . Una *norma* en X es una función $\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

- (i) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in X$,
- (ii) $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$,
- (iii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ para todo $x \in X$, para todo escalar $\lambda \in \mathbb{K}$,
- (iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in X$.

Se dice que $(X, \| \cdot \|)$ es un *espacio normado*.

DEFINICIÓN 2.2. Sea X un espacio vectorial. Sean $\| \cdot \|_a$ y $\| \cdot \|_b$ dos normas en el espacio X . Se dice que $\| \cdot \|_a$ y $\| \cdot \|_b$ son *equivalentes* si existen dos constantes positivas c_1 y c_2 tales que

$$c_1 \|x\|_a \leq \|x\|_b \leq c_2 \|x\|_a$$

para todo $x \in X$.

Esto lo denotaremos mediante $\| \cdot \|_a \approx \| \cdot \|_b$.

La demostración de las siguientes proposiciones queda como ejercicio.

PROPOSICIÓN 2.3. \approx es una relación de simétrica y transitiva.

PROPOSICIÓN 2.4. Dos normas equivalentes inducen la misma topología en X .

1.1. Descartes. El plano cartesiano.

El aristócrata francés René Descartes (1.596 - 1.650) rompió con la tradición griega de considerar x^2 y x^3 como un área y un volumen, las interpretó como líneas.

La Géométrie contiene una explicación de cómo las operaciones algebraicas pueden ser interpretadas geoméricamente. Luego Descartes indica la aplicación del álgebra a determinados problemas geométricos:

“Si queremos resolver un problema, primero suponemos que la solución ya se encontró, y le damos nombres a todas las líneas que parecen necesarias para su construcción (a las que conocemos y a las que desconocemos). Luego, sin hacer distinciones entre las conocidas y las desconocidas, debemos desenmarañar la dificultad de cualquier manera que muestre más naturalmente la relación entre estas líneas, hasta que encontremos posible expresar una cantidad de dos maneras. Esto constituirá una ecuación (con una sola incógnita), ya que los términos de una de estas dos expresiones juntos son iguales a los términos del otro.

Descartes nunca usó el sistema coordenado que hoy en día lleva su nombre, él refería sus construcciones a un sistema de ejes oblicuos o sólo al eje de las abscisas. Pero a raíz de *La Géométrie* se ha propugnado la idea de que un par de números pueden determinar una posición en una superficie: un número como una distancia medida horizontalmente, el otro como una distancia medida verticalmente.

La idea de Descartes tiene sentido en espacios más generales que \mathbb{R} y eso es lo que veremos a continuación.

1.2. Producto de espacios normados.

Sean $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios normados. Sea

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}.$$

$X \times Y$ es un espacio lineal.

Es fácil ver que las siguientes funciones definen normas en $X \times Y$.

$$\|(x, y)\|_1 = \|x\|_X + \|y\|_Y,$$

$$\|(x, y)\|_\infty = \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}.$$

PROPOSICIÓN 2.5. $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ son equivalentes.

1.3. Espacio cociente o espacio módulo subespacios.

La siguiente terminología es usual en la teoría de espacios normados.

Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio normado.

DEFINICIÓN 2.6. Sea $V \subset X$, V es una *variedad lineal* si $V \neq \emptyset$ y V es estable con respecto a las operaciones de suma y producto por un escalar. (Esto es lo que en álgebra lineal usualmente se llama subespacio).

DEFINICIÓN 2.7. Sea M un subconjunto de X , M es un *subespacio* si M es una variedad lineal y M es cerrado.

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea $M \subset X$ una variedad lineal, definimos

$$X/M = \{x + M : x \in X\}.$$

Usaremos la siguiente notación:

$$[x] = x + M.$$

Si $x, y \in X$, si λ es un escalar definimos

$$[x] + [y] = [x + y].$$

$$\lambda[x] = [\lambda x].$$

Con estas operaciones, resulta que X/M es un espacio vectorial.

Si además M es un subespacio, para $[x] \in X/M$ definimos:

$$\|[x]\|_{X/M} = \text{dist}(x, M) = \inf_{m \in M} \|x + m\|_X.$$

Es fácil verificar que $\|[x]\|_{X/M}$ está bien definida.

PROPOSICIÓN 2.8. $\|\cdot\|_{X/M}$ es una norma en X/M .

DEMOSTRACIÓN.

(a) Es evidente que $\|[x]\|_{X/M} \geq 0$ para todo $[x] \in X/M$.

(b) Si $\|[x]\|_{X/M} = 0$ entonces

$$\text{dist}(x, M) = 0.$$

Como M es cerrado tenemos que $x \in M$. De donde $[x] = 0$.

(c) Sean $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x \in X$

$$\begin{aligned} \|\lambda[x]\|_{X/M} &= \inf_{m' \in M} \|\lambda x + m'\|_X = \inf_{m \in M} \|\lambda x + \lambda m\|_X \\ &= \inf_{m \in M} |\lambda| \|x + m\|_X = |\lambda| \|[x]\|_{X/M}. \end{aligned}$$

(d) Sean $x, y \in X$. Si $m_1, m_2 \in M$ entonces

$$\|x + y + m_1 + m_2\|_X \leq \|x + m_1\|_X + \|y + m_2\|_X.$$

Luego

$$\begin{aligned} \|[x] + [y]\|_{X/M} &= \|[x + y]\|_{X/M} = \inf_{m \in M} \|x + y + m\|_X = \inf_{m_1, m_2 \in M} \|x + y + m_1 + m_2\|_X \\ &\leq \inf_{m_1 \in M} \|x + m_1\|_X + \inf_{m_2 \in M} \|y + m_2\|_X = \|[x]\|_{X/M} + \|[y]\|_{X/M}. \end{aligned}$$

□

PROPOSICIÓN 2.9.

- (a) $\|[x]\|_{X/M} \leq \|x\|_X$.
 (b) Sea $\Phi : X \rightarrow X/M$ definida mediante

$$\Phi(x) = [x].$$

Entonces Φ es continua. Es decir, la función $x \rightarrow [x]$ es continua.

La demostración de esta proposición queda como ejercicio.

2. Espacios métricos

DEFINICIÓN 2.10. Sea X un conjunto no vacío. Sea $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que d es una *métrica* en X cuando se verifican:

- (a) $d(x, y) \geq 0$ para todos $x, y \in X$.
 (b) $d(x, y) = d(y, x)$ para todos $x, y \in X$.
 (c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todos $x, y, z \in X$.
 (d) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

El número real $d(a, b)$ recibe el nombre de *distancia* entre a y b .

En este caso se dice que (X, d) es un *espacio métrico*.

PROPOSICIÓN 2.11. Dado un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$. Para $x, y \in X$ sea

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

entonces d es una métrica en X .

OBSERVACIÓN 2.12. Existen métricas que no provienen de una norma.

Sea (X, d) un espacio métrico.

DEFINICIÓN 2.13. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en X . Decimos que $\{x_n\}$ *converge* a un punto $x \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que si $n \in \mathbb{N}$ y $n > N$ entonces $d(x_n, x) < \varepsilon$.

Esto se abrevia mediante:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{en } (X, d).$$

DEFINICIÓN 2.14. La sucesión $\{x_n\}$ en X es *convergente* si existe $x \in X$ tal que $\{x_n\}$ converge a x en (X, d) .

DEFINICIÓN 2.15. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en X . Decimos que $\{x_n\}$ es una *sucesión de Cauchy* si para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ si $n, m > N$.

La demostración de las siguientes proposiciones queda como ejercicio.

PROPOSICIÓN 2.16. *Toda sucesión convergente es de Cauchy.*

El recíproco de la proposición anterior no es cierto.

PROPOSICIÓN 2.17. *Toda sucesión de Cauchy que tenga una subsucesión convergente resulta ser convergente. Además el límite de la sucesión coincide con el límite de la subsucesión.*

DEFINICIÓN 2.18. Sea $A \subset X$. Decimos que A es *completo* cuando toda sucesión de Cauchy converge a un punto de A .

Como ejercicio dé algunos ejemplos de espacios que son completos y de espacios que no lo son.

3. Espacios de Banach.

La aparición del libro *Théorie des opérations linéaires* de Banach significó el comienzo del estudio sistemático de los espacios vectoriales normados. Desde ese momento muchos problemas han sido resueltos, muchas áreas nuevas se han desarrollado y conexiones profundas entre la teoría de espacios de Banach y otras áreas de la matemática se han establecido.

DEFINICIÓN 2.19. Sea X un espacio vectorial normado y sea d la métrica asociada. Si X es un espacio métrico completo con respecto a d se dice que X es un *espacio de Banach*.

EJEMPLO 2.20. Los siguientes son ejemplos de espacios de Banach

- (1) \mathbb{R} con la norma dada por el valor absoluto.
- (2) \mathbb{C} con la norma usual.

(3) $l_p^n = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ donde

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

para $1 \leq p < \infty$.

(4) $l_\infty^n = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ donde

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}.$$

(5) Para $1 \leq p < \infty$ sea

$$l_p = \left\{ (x_n)_{n \geq 1} : x_n \in \mathbb{R} \text{ y } \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \right\}.$$

Donde para $x = (x_n)_{n \geq 1} \in l_p$ se define

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

Hacemos notar que la desigualdad triangular falla para $0 < p < 1$.

EJERCICIO 2.21. ¿Cuál es la relación de contención entre l_1 y l_2 ?

EJEMPLO 2.22. A continuación damos otros ejemplos de espacios de Banach.

(1) Sea

$$l_\infty = \{(x_n)_{n \geq 1} : x_n \in \mathbb{R} \text{ y } \sup_{n \geq 1} |x_n| < \infty\}.$$

Donde para $x = (x_n)_{n \geq 1} \in l_\infty$ se define

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \geq 1} |x_n|.$$

(2) $c = \{(x_n)_{n \geq 1} : x_n \in \mathbb{R} \text{ y existe } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n\}$ con $\|\cdot\|_\infty$.

(3) $c_o = \{(x_n)_{n \geq 1} : x_n \in \mathbb{R} \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$ con $\|\cdot\|_\infty$.

En los ejemplos anteriores \mathbb{R} puede ser reemplazado por \mathbb{C} , también $\{n \geq 1\}$ puede ser reemplazado por \mathbb{Z} y así surgen estos otros espacios de Banach.

(4) Para $1 \leq p < \infty$ sea

$$l_p(\mathbb{Z}) = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} : x_n \in \mathbb{C} \text{ y } \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^p < \infty \right\}.$$

Donde para $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in l_p(\mathbb{Z})$ se define

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^p \right)^{1/p}.$$

Hacemos notar que la desigualdad triangular falla para $0 < p < 1$.

(5) Sea

$$l_\infty(\mathbb{Z}) = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} : x_n \in \mathbb{C} \text{ y } \sup_{n \in \mathbb{Z}} |x_n| < \infty \right\}.$$

Donde para $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in l_\infty(\mathbb{Z})$ se define

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|.$$

(6) Sabiendo teoría de la medida podemos considerar el siguiente ejemplo. Sea (Ω, F, μ) un espacio de medida, para $1 \leq p < \infty$ sea

$$L^p(\Omega, F, \mu) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tales que } f \text{ es } F\text{-medible y } \int_\Omega |f(\omega)|^p d\mu < \infty \right\}$$

con

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(\omega)|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

(7) Sea (Ω, F, μ) un espacio de medida consideremos

$$L^\infty(\Omega, F, \mu) = \{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tales que } f \text{ es } F\text{-medible y } \mu\text{-esencialmente acotada} \}$$

con

$$\|f\|_\infty = \text{sup es } |f|.$$

OBSERVACIÓN 2.23. En particular si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$, para $1 \leq p < \infty$ podemos considerar $L^p([a, b], B([a, b]), m)$ donde $B([a, b])$ son los borelianos de $[a, b]$ y m es la medida de Lebesgue en $[a, b]$. Estos espacios los denotaremos por $L^p[a, b]$.

EJERCICIO 2.24. ¿Cuál es la relación de contención entre $L^1[a, b]$ y $L^2[a, b]$?

EJEMPLO 2.25.

$$C[a, b] = \{ g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tales que } g \text{ es continua} \}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$ con

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(x)|, x \in [a, b]\}$$

es un espacio de Banach.

PROPOSICIÓN 2.26. Si $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_b$ son normas equivalentes en X entonces: $(X, \|\cdot\|_a)$ es un espacio de Banach si y sólo si $(X, \|\cdot\|_b)$ es un espacio de Banach.

La demostración de esta proposición queda como ejercicio.

4. Series.

Sea X un espacio normado.

DEFINICIÓN 2.27. Una serie es un par $(\{x_n\}, \{s_n\})$ donde $\{x_n\}$ es una sucesión de elementos de X y

$$s_n = x_1 + \cdots + x_n = \sum_{k=1}^n x_k.$$

La siguiente terminología es usual:

- (1) a x_n se le llama término general de la serie.
- (2) a la sucesión $\{s_n\}$ se le llama sucesión de sumas parciales de la serie.

La siguiente notación es usual:

En vez de referirse a las series como un par es usual hablar de la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

DEFINICIÓN 2.28. Sea $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$ decimos que:

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ converge cuando la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ es convergente.

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ diverge cuando la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ es divergente.

Sea $s \in X$, si la sucesión $\{s_n\}$ converge a s se suele escribir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s \quad \text{en } X.$$

Esto también puede abreviarse mediante

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n x_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = s \quad \text{en } X.$$

Pero las expresiones anteriores, realmente significan:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{k=1}^n x_k - s \right\|_X = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|s_n - s\|_X = 0.$$

En esto último debe quedar claro que:

- (a) $s \in X$ (s es un vector)
- (a) s no se obtiene simplemente por adición, s es el límite de una sucesión de sumas.

DEFINICIÓN 2.29. Sea $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$ decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge absolutamente cuando

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty.$$

Obviamente esta convergencia es en \mathbb{R} .

Es importante recalcar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ no es una suma infinita de vectores, sino una suma infinita de números reales, y por lo tanto en el caso en que converja su límite es un número real.

A continuación daremos dos resultados para el caso en que X cumple la hipótesis adicional de ser completo, es decir, cuando X es un espacio de Banach.

TEOREMA 2.30 (Criterio de Cauchy). *Sea X un espacio de Banach. Sea $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ converge en X si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 tal que*

$$\left\| \sum_{n=K}^M x_n \right\|_X < \varepsilon$$

si $M \geq K \geq n_0$.

DEMOSTRACIÓN. Si $M \geq K$ entonces

$$s_M - s_{K-1} = \sum_{n=1}^M x_n - \sum_{n=1}^{K-1} x_n = \sum_{n=K}^M x_n$$

entonces

$$\|s_M - s_{K-1}\| = \left\| \sum_{n=K}^M x_n \right\|.$$

Como X es completo, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ converge si y sólo si la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ es de Cauchy.

De estos dos hechos es inmediato el resultado. \square

COROLARIO 2.31. *Sea X un espacio de Banach. Si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ converge en X entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.*

PROPOSICIÓN 2.32. *Sea X un espacio de Banach. Si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|$ converge entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ converge en X .*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la serie numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|$ converge. Sea $\varepsilon > 0$, por la desigualdad triangular y por el Teorema 2.30 existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq k \geq N$

entonces

$$\left\| \sum_{n=k}^m x_n \right\| \leq \left| \sum_{n=k}^m \|x_n\| \right| < \varepsilon.$$

Usando el Teorema 2.30 se sigue que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ converge. \square

El siguiente resultado da un criterio para decidir cuándo un espacio normado es de Banach.

TEOREMA 2.33. *Sea $(X, \| \cdot \|)$ un espacio normado. X es completo si y sólo si toda serie en X absolutamente convergente es convergente.*

DEMOSTRACIÓN.

(\Rightarrow) Sigue de la Proposición 2.32.

(\Leftarrow) Sea $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$ una sucesión de Cauchy.

Sea $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x_{n_1}\| < 1/2 \quad \text{si } n \geq n_1.$$

Sea $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n_2 > n_1$ y además

$$\|x_n - x_{n_2}\| < 1/2^2 \quad \text{si } n \geq n_2.$$

Así obtenemos una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ tal que

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < 1/2^k.$$

Luego

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} 1/2^k.$$

y la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ es absolutamente convergente. Por lo tanto, es convergente.

Sea

$$x = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}).$$

Como

$$\sum_{k=1}^N (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = x_{n_N} - x_{n_1}$$

se tiene que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} x_{n_N} = x + x_{n_1}.$$

Por lo tanto $\{x_{n_k}\}$ converge.

Como $\{x_n\}$ es de Cauchy, se sigue que $\{x_n\}$ converge. \square

5. Completitud para espacios producto y espacios cociente.

PROPOSICIÓN 2.34. $X \times Y$ es completo si y sólo si X, Y son completos.

Como ejercicio dejamos al estudiante la precisión de las hipótesis y la demostración de esta proposición (ver sección 1.2 para la definición de la norma en $X \times Y$).

TEOREMA 2.35. Si X es un espacio de Banach y M es un subespacio (cerrado) de X entonces X/M es un espacio de Banach.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{[x_n]\}_{n \geq 1}$ una sucesión en X/M tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|[x_n]\|_{X/M} < \infty.$$

Para cada n tenemos que

$$\|[x_n]\|_{X/M} = \inf_{y \in M} \|x_n + y\|_X.$$

Por la definición de ínfimo podemos encontrar $y_n \in M$ (note que $[y_n] = M = [0]$) tal que

$$\|x_n + y_n\|_X \leq \|[x_n]\|_{X/M} + 1/2^n.$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n + y_n\|_X < \infty.$$

Como X es un espacio de Banach, toda serie absolutamente convergente es convergente. Luego $\sum_{n=1}^{\infty} x_n + y_n$ converge. Sea

$$x = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N x_n + y_n.$$

Como la función $x \rightarrow [x]$ es continua tenemos que

$$\begin{aligned} [x] &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sum_{n=1}^N x_n + y_n \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N [x_n] + [y_n] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N [x_n]. \end{aligned}$$

Hemos probado que toda serie en X/M que sea absolutamente convergente es convergente. Por el teorema 2.33 tenemos que X/M es un espacio de Banach.

□

Ejercicios 2.

- (1) Demostrar que en la definición de espacio normado se puede cambiar

$$“\|x\| = 0 \text{ si y sólo si } x = 0”$$

por

$$“\|x\| = 0 \text{ implica } x = 0”.$$

- (2) Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Demostrar que si $x, y \in X$ entonces se cumple que

$$\|x\| \leq \max\{\|x + y\|, \|x - y\|\}.$$

Dar una interpretación geométrica.

- (3) Dado un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$. Para $x, y \in X$ sea

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Demuestre que d es una métrica en X .

- (4) Demuestre que NO toda métrica en un espacio vectorial proviene de una norma.

- (5) Sean (X, d) un espacio métrico y $\{x_n\}$ una sucesión en X .

Demstrar que si $\{x_n\}$ es de Cauchy y una subsucesión de $\{x_n\}$ converge a $x \in X$ entonces la sucesión $\{x_n\}$ converge a x .

- (6) Sea X un espacio normado. Sean $x, y \in X$, sean $\{x_n\}_{n \geq 1}$ en X , $\{y_n\}_{n \geq 1}$ en X , además sean $\lambda \in \mathbb{C}$, $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ en \mathbb{C} . Demostrar que:

(a) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ entonces $\{x_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión acotada.

(b) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n x_n = \lambda x$.

(c) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|$. ¿Es cierto el recíproco?

(d) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$.

(e) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\| = \|x - y\|$.

(f) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = \|x - y\|$.

(7) Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $n \times n$ simétrica y definida positiva. Demostrar que en el espacio de los vectores columnas de tamaño n , puede introducirse la norma

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \right)^{1/2},$$

donde x_1, \dots, x_n son las coordenadas del vector x .

(8) Demuestre que la condición $d(x, y) \geq 0$ en la definición de métrica es consecuencia de las otras tres condiciones.

(9) Sea X un conjunto y sea $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación que satisface para todo $x, y, z \in X$:

(i) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$,

(ii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y)$.

Demostrar que d es una métrica.

(10) Demuestre que la equivalencia de normas es simétrica y transitiva.

(11) Demuestre que dos normas equivalentes inducen la misma topología.

(12) Demuestre que, en \mathbb{R}^n , las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ son equivalentes.

- (13) Demostrar que dos normas introducidas sobre un espacio vectorial son equivalentes si y sólo si de la convergencia de una sucesión según una de estas normas se desprende su convergencia según la otra.
- (14) Sean X un espacio normado y F una variedad lineal propia de X . Demuestre que F tiene interior vacío.
- (15) Sea X un espacio vectorial normado. Demuestre que:
- (a) Una bola en X no puede contener una variedad lineal no nula.
 - (b) Sea L una variedad lineal en X , $L \neq X$. Demostrar que L no contiene ninguna bola.
 - (c) La clausura de una variedad lineal es un subespacio.
- (16) Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $M \subset X$ un subespacio. Pruebe que:
- (a) $\|[x]\| \leq \|x\|$
 - (b) Si $\Phi : X \rightarrow X/M$ está definida mediante $\Phi(x) = [x]$, entonces Φ es continua.
- (17) Sea X un espacio métrico. Demostrar que
- $$\overline{A} = \{x \in X : d(x, A) = 0\}.$$
- (18) Sea (X, d) un espacio métrico. Demostrar que:
- (a) Todo subconjunto de X , formado por un único punto es cerrado.
 - (b) Sean $x, y \in X$, $x \neq y$. Entonces existen vecindades abiertas, una de x y otra de y que no se intersectan.
 - (c) Si A es un subconjunto cerrado de X y x_o es un punto de X que no está en A entonces existen vecindades abiertas disjuntas de x y de A .

- (d) Si A y B son subconjuntos cerrados disjuntos de X se pueden hallar vecindades abiertas disjuntas de A y de B .
- (19) Sea (X, d) un espacio métrico. Demostrar que:
- (a) Cualquier conjunto cerrado es la intersección de una sucesión decreciente de conjuntos abiertos.
 - (b) Cualquier conjunto abierto es la unión de una sucesión creciente de conjuntos cerrados.
 - (c) Los recíprocos de (a) y (b) NO son ciertos.
- (20) Demuestre que, en un espacio métrico, puede ocurrir que la bola cerrada es distinta de la clausura de la bola abierta.
- (21) Demostrar que en un espacio normado la clausura de la bola abierta es la bola cerrada.
- (22) Demostrar que, en un espacio métrico, toda sucesión convergente es de Cauchy.
- (23) Demostrar que, en un espacio métrico, toda sucesión de Cauchy que tenga una subsucesión convergente resulta ser convergente. Además el límite de la sucesión coincide con el límite de la subsucesión.
- (24) Si $\| \cdot \|_a$ y $\| \cdot \|_b$ son normas equivalentes entonces: $(X, \| \cdot \|_a)$ es un espacio de Banach si y sólo si $(X, \| \cdot \|_b)$ es un espacio de Banach.
- (25) Sea l_∞ el espacio de todas las sucesiones de números reales tales que a partir de un cierto valor del subíndice (que depende de cada sucesión) todos sus elementos son nulos.
- (a) Demostrar que con la norma del supremo l_∞ es un espacio normado, pero no es completo.

- (b) Demostrar que l_o es una variedad lineal de l_∞ .
- (c) ¿Cuál es la clausura de l_o en l_∞ ?
- (26) Demostrar que si $1 \leq p < q$ entonces l_p está contenido en l_q y la inclusión es propia.
- (27) Dar un ejemplo de una sucesión que pertenece a c_o pero no pertenece a ningún l_p donde $1 \leq p < \infty$.
- (28) Considere l_1 como subespacio de l_∞ , pruebe que su clausura es c_o .
- (29) Sea X un espacio normado. Sea

$$S(0, 1) = \{x \in X \text{ tales que } \|x\| = 1\}.$$

Demuestre que X es un espacio de Banach si y sólo si $S(0, 1)$ es completo.

- (30) $X \times Y$ es completo si y sólo si X, Y son completos.
- (31) Verificar que los espacios dados (en las notas teóricas) como ejemplos de espacios de Banach, realmente son normados y completos.
- (32) Considere el espacio $C[-1, 1]$ con $\| \cdot \|_\infty$.

Diga si los siguientes conjuntos de funciones forman un subespacio de $C[-1, 1]$:

- (a) las funciones monótonas,
- (b) las funciones pares,
- (c) los polinomios,
- (d) los polinomios de grado $\leq k$,
- (e) las funciones continuamente diferenciables,

(f) las funciones lineales y continuas a trozos.

(33) (a) Demostrar que el espacio c_0 es un subespacio en el espacio c .

(b) Demostrar que el espacio c es un subespacio en el espacio l_∞ .

(34) (a) Dar ejemplos de un espacio normado que no es de Banach.

(b) Dar ejemplos de dos normas no equivalentes en un espacio lineal X .

(35) Demostrar que un subespacio de un espacio de Banach es un espacio de Banach.

(36) Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Sean Y, Z subespacios (cerrados) de X tales que $X = Y \oplus Z$ (suma directa algebraica). Para $x = y + z$ con $y \in Y, z \in Z$ definimos

$$\|x\|_o = \|y\| + \|z\|.$$

Demuestre que $(X, \|\cdot\|_o)$ es un espacio de Banach.

(37) Sea M un subespacio (cerrado) de un espacio normado X .

Demuestre que si M y X/M son espacios de Banach entonces X es un espacio de Banach.

(38) Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio normado. Demostrar que $(X, \|\cdot\|_X)$ se puede completar. Es decir, existe un espacio de Banach $(Y, \|\cdot\|_Y)$ tal que:

(a) X es una variedad lineal en Y

(b) $\|\cdot\|_Y$ restringida a X coincide con $\|\cdot\|_X$.

(c) X es denso en Y .

(39) Demostrar que la completación de un espacio normado es “única salvo isomorfismos isométricos”.

CAPÍTULO 3

Espacios de funciones continuas.

1. Álgebras.

Nuevamente \mathbb{K} denotará al cuerpo de los números reales o números complejos.

DEFINICIÓN 3.1. Un *álgebra* A es un \mathbb{K} -espacio vectorial tal que existe una aplicación $P : A \times A \rightarrow A$ llamada *producto*, que denotaremos mediante $P(a, b) = a \cdot b$ para todo $a, b \in A$, que verifica las siguientes propiedades: para todo $a, b, c \in A$ y para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ se cumple:

- (i) $\lambda \cdot (a \cdot c) = (\lambda a) \cdot c$
- (ii) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- (iii) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- (iv) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

DEFINICIÓN 3.2. Se dice que un álgebra A es *conmutativa* cuando $a \cdot b = b \cdot a$ para todo $a, b \in A$.

DEFINICIÓN 3.3. Un álgebra A tiene *unidad* cuando existe un elemento $e \in A$ tal que $e \cdot a = a \cdot e = a$ para todo $a \in A$. Al elemento e se le llama unidad del álgebra.

PROPOSICIÓN 3.4. *Si existe la unidad de un álgebra entonces es única.*

La demostración de esta proposición queda como ejercicio.

EJEMPLO 3.5. El espacio

$$C([a, b], \mathbb{R}) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tales que } f \text{ es continua}\}$$

es un álgebra conmutativa con unidad.

DEFINICIÓN 3.6. Sea A un álgebra y sea B un subconjunto de A . Decimos que B es una *subálgebra* de A cuando B es una variedad lineal y $a \cdot b \in B$ para todo $a, b \in B$. Es decir, B es estable con respecto a la suma, el producto por un escalar y el producto.

EJEMPLO 3.7. Recordemos que un polinomio p es una función de la forma

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$$

para $t \in \mathbb{R}$.

Sea

$$P([a, b], \mathbb{R}) = \{f \in C([a, b], \mathbb{R}) \text{ tales que } f \text{ es un polinomio}\}.$$

Entonces $P([a, b], \mathbb{R})$ es una subálgebra de $C([a, b], \mathbb{R})$.

2. Espacios de funciones continuas.

Dados un espacio topológico Δ y un espacio normado Y sea:

$$C(\Delta, Y) = \{f : \Delta \rightarrow Y \text{ tales que } f \text{ es continua y acotada}\}$$

con la norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in \Delta} \|f(t)\|_Y$$

para $f \in C(\Delta, Y)$.

Establecer, a manera de ejercicio el siguiente resultado

TEOREMA 3.8. $(C(\Delta, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach real. $(C(\Delta, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach complejo.

Si $f, g \in C(\Delta, \mathbb{K})$ entonces $f \cdot g \in C(\Delta, \mathbb{K})$, además

$$\|f \cdot g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty.$$

PROPOSICIÓN 3.9. $C(\Delta, \mathbb{K})$ es un álgebra conmutativa con unidad. La función constantemente igual a uno es la unidad de esta álgebra.

La demostración de esta proposición queda como ejercicio.

OBSERVACIÓN 3.10. Dada $f \in C(\Delta, \mathbb{K})$ sea

$$p(f) = a_0 + a_1 f + \dots + a_n f^n,$$

entonces $p(f) \in C(\Delta, \mathbb{K})$.

En esta sección usaremos las siguientes igualdades ($c, d \in \mathbb{R}$):

$$(3.1) \quad \max\{c, d\} = \frac{c + d + |c - d|}{2}$$

$$(3.2) \quad \min\{c, d\} = \frac{c + d - |c - d|}{2}$$

DEFINICIÓN 3.11. Un *reticulado (lattice)* es un conjunto L , parcialmente ordenado en el que cada par de elementos tiene supremo e ínfimo en L .

Sean $f, g \in C(\Delta, \mathbb{R})$.

El orden parcial en $C(\Delta, \mathbb{R})$ es $f \leq g$ si

$$f(t) \leq g(t)$$

para todo $t \in \Delta$.

Definimos las funciones $\sup\{f, g\}$, $\inf\{f, g\}$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ por

$$\sup\{f, g\}(t) = \sup\{f(t), g(t)\},$$

$$\inf\{f, g\}(t) = \inf\{f(t), g(t)\},$$

$$\max\{f, g\}(t) = \max\{f(t), g(t)\},$$

$$\min\{f, g\}(t) = \min\{f(t), g(t)\}.$$

PROPOSICIÓN 3.12. $C(\Delta, \mathbb{R})$ es un reticulado.

DEMOSTRACIÓN. Sean $f, g \in C(\Delta, \mathbb{R})$ y $t \in \Delta$. Como $\{f(t), g(t)\}$ es finito obviamente

$$\sup\{f(t), g(t)\} = \max\{f(t), g(t)\},$$

$$\inf\{f(t), g(t)\} = \min\{f(t), g(t)\}.$$

Usando las igualdades (3.1) y (3.2) se sigue que $\inf\{f, g\}, \sup\{f, g\} \in C(\Delta, \mathbb{R})$.

□

PROPOSICIÓN 3.13. Si $f, g \in C(\Delta, \mathbb{C})$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ entonces

- (a) $\overline{\overline{f}} \in C(\Delta, \mathbb{C})$
- (b) $\overline{f + g} = \overline{f} + \overline{g}$,
- (c) $\overline{\lambda f} = \overline{\lambda} \overline{f}$,
- (d) $\overline{f \cdot g} = \overline{f} \cdot \overline{g}$,
- (e) $\overline{\overline{f}} = f$,
- (f) $\|\overline{f}\|_{\infty} = \|f\|_{\infty}$.

La demostración de esta proposición queda como ejercicio.

3. El teorema de Dini sobre la convergencia uniforme.

TEOREMA 3.14 (Dini). Sean Δ un espacio compacto, $\{f_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión en $C(\Delta, \mathbb{R})$ y $f \in C(\Delta, \mathbb{R})$. Si

- (a) $\{f_n\}_{n \geq 1}$ es creciente,
- (b) $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge puntualmente a f .

Entonces la convergencia es uniforme.

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$g_n = f - f_n.$$

Entonces $\{g_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión en $C(\Delta, \mathbb{R})$, $\{g_n\}_{n \geq 1}$ es decreciente y $\{g_n\}_{n \geq 1}$ converge puntualmente a 0.

Dados $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ sea

$$D_n = g_n^{-1}(-\infty, \varepsilon) = \{t \in \Delta \text{ tales que } g_n(t) < \varepsilon\}.$$

D_n es abierto (porque g_n es continua) y $\{D_n\}_{n \geq 1}$ es creciente (porque $\{g_n\}_{n \geq 1}$ es decreciente).

Por la convergencia puntual: Si $t \in \Delta$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_o$ entonces $g_n(t) < \varepsilon$. Es decir, $t \in D_n$ si $n \geq n_o$. De donde

$$\Delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n.$$

Como Δ es compacto, este cubrimiento tiene un subcubrimiento finito. Luego existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\Delta = \bigcup_{n=1}^N D_n.$$

Como $\{D_n\}_{n \geq 1}$ es creciente entonces

$$\bigcup_{n=1}^N D_n = D_N.$$

Y así $\Delta = D_N$.

Entonces para todo $t \in \Delta$: $g_N(t) < \varepsilon$.

Como $\{g_n\}_{n \geq 1}$ es decreciente entonces para todo $t \in \Delta$: $g_n(t) < \varepsilon$ si $n \geq N$.

Como N no depende de t , tenemos que la convergencia es uniforme. □

La siguiente proposición será usada más adelante y la probaremos usando el Teorema de Dini.

PROPOSICIÓN 3.15. Dado $\varepsilon > 0$ existe un polinomio P tal que

$$P(0) = 0 \quad \text{y} \quad ||t| - P(t)| < \varepsilon \text{ para todo } t \in [-1, 1].$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $t \in [-1, 1]$. Definamos inductivamente la siguiente sucesión

$$\begin{aligned} P_0(t) &= 0, \\ P_{n+1}(t) &= P_n(t) + \frac{1}{2} (|t| - P_n(t)) (|t| + P_n(t)). \end{aligned}$$

Primer paso: Probaremos que $0 \leq P_n(t) \leq |t|$.

Tenemos que

$$P_1(t) = \frac{1}{2}t^2 < t^2 < |t|.$$

Supongamos que $0 \leq P_k(t) \leq |t|$. Entonces $P_{k+1}(t) \geq 0$ y

$$\begin{aligned} |t| - P_{k+1}(t) &= |t| - P_k(t) - \frac{1}{2} (|t| - P_k(t)) (|t| + P_k(t)) \\ &= (|t| - P_k(t)) \left(1 - \frac{1}{2} (|t| + P_k(t)) \right) \\ &\geq (|t| - P_k(t)) (1 - |t|) \geq 0. \end{aligned}$$

(el penúltimo paso es consecuencia de la hipótesis inductiva).

Segundo paso: $\{P_n\}_{n \geq 1}$ es monótona creciente.

Tomando en cuenta el primer paso, esto es inmediato.

Tercer paso: Probaremos que $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(t) = |t|$.

Tenemos que $\{P_n(t)\}_{n \geq 1}$ es una sucesión monótona creciente acotada por $|t|$ entonces existe $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(t)$. Sea

$$g(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(t).$$

Entonces

$$\begin{aligned} g(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P_{n+1}(t) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(t) + \frac{1}{2} (|t| - P_n(t)) (|t| + P_n(t)) \\ &= g(t) + \frac{1}{2} (|t| - g(t)) (|t| + g(t)). \end{aligned}$$

Luego

$$(|t| - g(t)) (|t| + g(t)) = 0.$$

De donde $g(t) = |t|$.

Cuarto paso: Aplicaremos el teorema de Dini.

Sabemos que $[-1, 1]$ es compacto. Además $\{P_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión de funciones continuas y la función módulo también es continua, así que en virtud del teorema de Dini la convergencia es uniforme.

Es decir, dado $\varepsilon > 0$ existe N tal que

$$||t| - P_n(t)| < \varepsilon$$

para todo $n \geq N$ y para todo $t \in [-1, 1]$. □

4. El teorema de Stone-Weierstrass. Caso real.

DEFINICIÓN 3.16. Un espacio topológico Δ es de *Hausdorff* cuando dados $t, s \in \Delta$ con $t \neq s$ existen entornos disjuntos de t y de s .

LEMA 3.17. Sea Δ un espacio de *Hausdorff* compacto. Toda subálgebra cerrada de $C(\Delta, \mathbb{R})$ es un sub-reticulado de $C(\Delta, \mathbb{R})$.

DEMOSTRACIÓN. Sea A una subálgebra cerrada de $C(\Delta, \mathbb{R})$.

Las igualdades (3.1) y (3.2) muestran lo siguiente: para ver que A es un sub-reticulado de $C(\Delta, \mathbb{R})$, basta probar que

$$f \in A \text{ implica } |f| \in A.$$

Sea $f \in A$. Por la Proposición 3.15 anterior: dado $\varepsilon > 0$ existe un polinomio P definido en $[-1, 1]$ tal que

$$P(0) = 0 \quad \text{y} \quad ||s| - P(s)| < \frac{\varepsilon}{\|f\|_\infty}.$$

Sean $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$P(s) = a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n.$$

Como $f(t)/\|f\|_\infty \in [-1, 1]$ para todo $t \in \Delta$, entonces

$$\left| \frac{|f(t)|}{\|f\|_\infty} - P\left(\frac{f(t)}{\|f\|_\infty}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{\|f\|_\infty}.$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} P\left(\frac{f}{\|f\|_\infty}\right) &= a_1 \left(\frac{f}{\|f\|_\infty}\right) + a_2 \left(\frac{f}{\|f\|_\infty}\right)^2 + \dots + a_n \left(\frac{f}{\|f\|_\infty}\right)^n \\ &= \frac{1}{\|f\|_\infty} \left(a_1 f + a_2 \frac{f^2}{\|f\|_\infty} + \dots + a_n \frac{f^n}{\|f\|_\infty^{n-1}} \right) \end{aligned}$$

Sea

$$g = a_1 f + a_2 \frac{f^2}{\|f\|_\infty} + \dots + a_n \frac{f^n}{\|f\|_\infty^{n-1}}$$

entonces

$$P\left(\frac{f}{\|f\|_\infty}\right) = \frac{g}{\|f\|_\infty}.$$

Además $g \in A$ (porque $f \in A$).

Como

$$\begin{aligned} ||f(t)| - g(t)| &= \|f\|_\infty \left| \frac{|f(t)|}{\|f\|_\infty} - \frac{g(t)}{\|f\|_\infty} \right| \\ &< \|f\|_\infty \frac{\varepsilon}{\|f\|_\infty} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

tenemos que $|f| \in \overline{A}$.

Como A es cerrada se obtiene que $|f| \in A$.

□

LEMA 3.18. Sean Δ un espacio de Hausdorff compacto. Si Δ tiene más de un punto y si L es un sub-reticulado cerrado de $C(\Delta, \mathbb{R})$ tal que dados $a, b \in \mathbb{R}$, $t, s \in \Delta$ con $t \neq s$ existe $h_{ts} \in L$ tal que $h_{ts}(t) = a$, $h_{ts}(s) = b$. Entonces $L = C(\Delta, \mathbb{R})$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $f \in C(\Delta, \mathbb{R})$. Como L es cerrado basta probar que f es un punto de acumulación de L .

Veremos que cada entorno de f contiene funciones de L que son diferentes de f . Es decir probaremos que para cada $\varepsilon > 0$ existe $g \in L$ tal que

$$f(u) - \varepsilon < g(u) < f(u) + \varepsilon$$

para todo $u \in \Delta$.

Fijemos $\varepsilon > 0$, construiremos la función g .

Sea $t \in \Delta$ (fijo por ahora). Sea $s \in \Delta$ tal que $t \neq s$ entonces existe $h_{ts} \in L$ tal que

$$h_{ts}(t) = f(t), \quad h_{ts}(s) = f(s).$$

Sea

$$H_{ts} = (h_{ts} - f)^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon) = \{u \in \Delta : h_{ts}(u) < f(u) + \varepsilon\}.$$

Claramente $t \in H_{ts}$, $s \in H_{ts}$, H_{ts} es abierto. Luego

$$\{H_{ts} : s \in \Delta, s \neq t\}$$

es un cubrimiento abierto de Δ .

Como Δ es compacto este cubrimiento tiene un subcubrimiento finito: $H_{ts_1}, \dots, H_{ts_n}$.
Sea

$$g_t = \min\{h_{ts_1}, h_{ts_2}, \dots, h_{ts_n}\}.$$

Entonces $g_t \in L$, $g_t(t) = f(t)$, además se puede probar que

$$g_t(u) < f(u) + \varepsilon$$

para todo $u \in \Delta$.

Sea

$$G_t = (g_t - f)^{-1}(-\varepsilon, \infty) = \{u \in \Delta : g_t(u) > f(u) - \varepsilon\}.$$

Claramente $t \in G_t$, G_t es abierto. De donde

$$\{G_t : t \in \Delta\}$$

es un cubrimiento abierto de Δ .

Como Δ es compacto este cubrimiento tiene un subcubrimiento finito: G_{t_1}, \dots, G_{t_m} . Sea

$$g = \max\{g_{t_1}, g_{t_2}, \dots, g_{t_m}\}.$$

Entonces $g \in L$, además se puede probar que

$$f(u) - \varepsilon < g(u) < f(u) + \varepsilon$$

para todo $u \in \Delta$. □

DEFINICIÓN 3.19. Sea F un conjunto de funciones definidas en un espacio Δ . Se dice que F separa los puntos de Δ cuando dados $t, s \in \Delta$ con $t \neq s$ existe $f \in F$ tal que $f(t) \neq f(s)$.

PROPOSICIÓN 3.20. Sea Δ un espacio topológico. Si $C(\Delta, \mathbb{R})$ separa puntos de Δ entonces Δ es un espacio de Hausdorff.

DEMOSTRACIÓN. Sean $t, s \in \Delta$ con $t \neq s$ entonces existe $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f(t) \neq f(s)$.

Como \mathbb{R} es un espacio de Hausdorff existen entornos disjuntos V_1 y V_2 de $f(t)$ y $f(s)$.

Como f es continua $f^{-1}(V_1)$ y $f^{-1}(V_2)$ son entornos disjuntos de t y de s . De donde Δ es Hausdorff. □

TEOREMA 3.21. Sea Δ un espacio de Hausdorff compacto. Sea A una subálgebra cerrada de $C(\Delta, \mathbb{R})$ que separa puntos de Δ y que contiene las funciones constantes. Entonces $A = C(\Delta, \mathbb{R})$.

DEMOSTRACIÓN.

Para la prueba usaremos el Lema 3.18.

Es claro que podemos suponer que Δ posee más de un punto.

Como A es una subálgebra cerrada de $C(\Delta, \mathbb{R})$, en virtud del Lema 3.17 tenemos que A es un sub-reticulado de $C(\Delta, \mathbb{R})$.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y sean $t, s \in \Delta$ con $t \neq s$.

Sabemos que A separa puntos de Δ y por lo tanto tenemos que existe $g \in A$ tal que

$$g(t) \neq g(s).$$

Sea

$$f(u) = a \frac{g(u) - g(s)}{g(t) - g(s)} + b \frac{g(u) - g(t)}{g(s) - g(t)}$$

entonces

$$f(t) = a, \quad f(s) = b.$$

Usamos que A contiene las funciones constantes para asegurar que $f \in A$.

Del Lema 3.18 se sigue que $A = C(\Delta, \mathbb{R})$.

□

Otra manera de enunciar este teorema es la siguiente:

TEOREMA 3.22 (Stone - Weierstrass, caso Real).

Sea Δ un espacio de Hausdorff compacto. Sea A una subálgebra de $C(\Delta, \mathbb{R})$ tal que

- (a) A separa puntos de Δ
- (b) A contiene las constantes

Entonces A es densa en $C(\Delta, \mathbb{R})$.

COROLARIO 3.23.

El álgebra de los polinomios $P([a, b], \mathbb{R})$ es densa en $C([a, b], \mathbb{R})$.

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que $[a, b]$ es un espacio de Hausdorff compacto.

También sabemos que $P([a, b], \mathbb{R})$ es una subálgebra de $C([a, b], \mathbb{R})$.

Además $P([a, b], \mathbb{R})$ separa los puntos de $[a, b]$. En efecto si $s, u \in [a, b]$ son tales que $s \neq u$ definimos

$$P_{su}(t) = (t + s)(t + u),$$

entonces $P_{su} \in P([a, b], \mathbb{R})$ y $P_{su}(s) \neq P_{su}(u)$.

Por el Teorema de Stone - Weierstrass (caso real) se tiene que $P([a, b], \mathbb{R})$ es denso en $C([a, b], \mathbb{R})$.

□

El conocido teorema de Weierstrass dice que los polinomios son densos en este espacio, o equivalentemente que la clausura del álgebra de los polinomios es $C([a, b], \mathbb{R})$.

COROLARIO 3.24 (Teorema de Weierstrass).

Sean $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ y $\varepsilon > 0$ entonces existe un polinomio p tal que $\|f - p\|_\infty < \varepsilon$.

COROLARIO 3.25. Sean $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ y $\varepsilon > 0$ entonces existe un polinomio p tal que $|f(t) - p(t)| < \varepsilon$ para todo $t \in [a, b]$.

Observe que la Proposición 3.15 es un caso particular del Teorema de Weierstrass, pero en estas notas la hemos probado usando el Teorema de Dini.

5. El teorema de Stone-Weierstrass. Caso complejo.

A continuación estudiaremos el caso complejo. Esta es la única sección de estas notas para las que hace falta tener algunos conocimientos de funciones holomorfas o analíticas.

El siguiente ejemplo demuestra que las condiciones que garantizan que una subálgebra de $C(\Delta, \mathbb{R})$ sea densa no son suficientes en el caso complejo.

EJEMPLO 3.26. Sean

$$B(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

y

$$D = \overline{B(0, 1)} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}.$$

D es un espacio métrico compacto.

Sea

$$A(D) = \{f \in C(D, \mathbb{C}) : f \text{ es analítica en } B(0, 1)\}.$$

$A(D)$ es una subálgebra cerrada propia de $C(D, \mathbb{C})$ que separa puntos y que contiene las constantes.

Sea

$$g(z) = \bar{z}$$

entonces g no es analítica, g no se puede aproximar uniformemente por una sucesión de funciones analíticas de donde $g \notin \overline{A(D)}$.

Sin embargo $g \in C(D, \mathbb{C})$.

Por lo tanto: las condiciones que garantizan que una subálgebra de $C(\Delta, \mathbb{R})$ sea densa no son suficientes en el caso complejo.

OBSERVACIÓN 3.27. Sea

$$f_o(z) = z.$$

Entonces $f_o \in A(D)$.

El ejemplo anterior indica que $\overline{f_o} \notin A(D)$.

En conclusión: $f \in A(D)$ no implica $\overline{f} \in A(D)$.

La extensión a \mathbb{C} del teorema de Stone - Weierstrass es la siguiente:

TEOREMA 3.28 (Stone - Weierstrass, caso complejo).

Sea Δ un espacio de Hausdorff compacto. Sea A una subálgebra de $C(\Delta, \mathbb{C})$ tal que

- (a) A separa puntos de Δ
- (b) A contiene las funciones constantes
- (c) A es estable con respecto a la conjugación

Entonces A es densa en $C(\Delta, \mathbb{C})$.

DEMOSTRACIÓN. La haremos por partes:

(1) $\overline{A} \cap C(\Delta, \mathbb{R})$ es una subálgebra de $C(\Delta, \mathbb{R})$. (Verifíquelo).

(2) $\overline{A} \cap C(\Delta, \mathbb{R})$ separa los puntos de Δ .

Veámoslo: Sean $t, s \in \Delta$, por hipótesis tenemos que A separa los puntos de Δ , entonces existe $f \in A$ tal que

$$(3.3) \quad f(t) \neq f(s).$$

Como $f \in A$, por hipótesis tenemos que $\overline{f} \in A$, luego

$$\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in A.$$

Obviamente $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in C(\Delta, \mathbb{R})$ luego

$$\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in \overline{A} \cap C(\Delta, \mathbb{R}).$$

De la ecuación (3.3) tenemos que

$$\operatorname{Re} f(t) \neq \operatorname{Re} f(s) \quad \text{ó} \quad \operatorname{Im} f(t) \neq \operatorname{Im} f(s).$$

De donde $\overline{A} \cap C(\Delta, \mathbb{R})$ separa los puntos de Δ .

(3) $\overline{A} \cap C(\Delta, \mathbb{R})$ contiene las funciones constantes.

En efecto: Por hipótesis estas funciones están en A y por lo tanto también están en \bar{A} , además son continuas.

$$(4) \overline{\bar{A} \cap C(\Delta, \mathbb{R})} = C(\Delta, \mathbb{R}).$$

Esto es consecuencia del teorema de Stone - Weierstrass en el caso real y de lo hecho en los puntos (1), (2) y (3).

$$(5) \bar{A} \cap C(\Delta, \mathbb{R}) = C(\Delta, \mathbb{R}).$$

Veámoslo. Como $C(\Delta, \mathbb{R})$ y \bar{A} son cerrados en $C(\Delta, \mathbb{C})$ entonces $\bar{A} \cap C(\Delta, \mathbb{R})$ es una subálgebra cerrada de $C(\Delta, \mathbb{C})$ y por lo tanto es igual a su clausura:

$$\bar{A} \cap C(\Delta, \mathbb{R}) = \overline{\bar{A} \cap C(\Delta, \mathbb{R})}$$

Usando el resultado (4) obtenemos $\bar{A} \cap C(\Delta, \mathbb{R}) = C(\Delta, \mathbb{R})$.

$$(6) \bar{A} = C(\Delta, \mathbb{C}).$$

En efecto: si $f \in C(\Delta, \mathbb{C})$ entonces

$$\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in C(\Delta, \mathbb{R}).$$

Usando el resultado (5) obtenemos que

$$\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in \bar{A}.$$

Y así $f \in \bar{A}$.

□

6. Equicontinuidad, el teorema de Arzela-Ascoli.

Sean Δ, Γ espacios métricos. Sea \mathbb{K} igual a \mathbb{R} ó a \mathbb{C} .

DEFINICIÓN 3.29. Sean F un subconjunto de $C(\Delta, \Gamma)$ y $t \in \Delta$ decimos que F es *equicontinuo en t* cuando dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_t > 0$ tal que: $d_\Delta(t, t') < \delta_t$ implica

$$d_\Gamma(f(t), f(t')) < \varepsilon$$

para todo $f \in F$.

EJEMPLO 3.30. Sea F un subconjunto finito de $C(\Delta, \Gamma)$, $F = \{f_1, \dots, f_n\}$ entonces F es equicontinuo en cada punto t de Δ . Basta tomar

$$\delta_t = \min\{\delta_t(f_1), \dots, \delta_t(f_n)\}$$

donde $\delta_t(f_k)$ es el que se obtiene de la continuidad de f_k , para cada $k = 1, \dots, n$.

DEFINICIÓN 3.31. Sea F un subconjunto de $C(\Delta, \Gamma)$ decimos que F es *equicontinuo* cuando F es equicontinuo en cada punto de Δ .

Es decir, cuando dados $t \in \Delta$, $\varepsilon > 0$ existe $\delta_t > 0$ tal que: $d_\Delta(t, t') < \delta_t$ implica

$$d_\Gamma(f(t), f(t')) < \varepsilon$$

para todo $f \in F$.

DEFINICIÓN 3.32. Sea F un subconjunto de $C(\Delta, \Gamma)$ decimos que F es *uniformemente equicontinuo en Δ* cuando dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que: para todo $t, t' \in \Delta$ $d_\Delta(t, t') < \delta$ implica

$$d_\Gamma(f(t), f(t')) < \varepsilon$$

para todo $f \in F$.

PROPOSICIÓN 3.33. *Si Δ es compacto entonces equicontinuidad implica equicontinuidad uniforme.*

La demostración de esta proposición queda como ejercicio.

Sea K un subconjunto de un espacio métrico. Se sabe que si K es compacto entonces K es cerrado y acotado. ¿Será cierto el recíproco?

En espacios de dimensión finita sabemos que la respuesta sí. Pero, tal como veremos más adelante, el teorema de F. Riesz sobre la compacidad de la bola cerrada en un espacio normado demuestra que el recíproco no es cierto en espacios de dimensión infinita.

Sin embargo cuando el espacio métrico es el espacio de las funciones continuas tenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 3.34 (Arzela - Ascoli). *Sea Δ un espacio métrico compacto. Sea F un subconjunto cerrado de $C(\Delta, \mathbb{K})$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (i) F es compacto
- (ii) F es acotado y equicontinuo.

DEMOSTRACIÓN.

Sea d la métrica en Δ .

(i) \Rightarrow (ii) Supongamos que F es compacto. Es claro que F es acotado.

Probemos que F es equicontinuo. Sea $\varepsilon > 0$ entonces

$$\{B(f, \frac{\varepsilon}{3}) : f \in F\}$$

es un cubrimiento abierto de F .

Como F es compacto existen $f_1, \dots, f_n \in F$ tales que

$$F \subset \bigcup_{j=1}^n B(f_j, \frac{\varepsilon}{3}).$$

Sea $j \in \{1, \dots, n\}$, como f_j es uniformemente continua entonces existe $\delta_j > 0$ tal que $d(t, t') < \delta_j$ implica

$$|f_j(t) - f_j(t')| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sea

$$\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\}.$$

Sea $f \in F$ entonces existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tal que

$$\|f - f_k\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Si $d(t, t') < \delta$ entonces

$$\begin{aligned} |f(t) - f(t')| &\leq |f(t) - f_k(t)| + |f_k(t) - f_k(t')| + |f_k(t') - f(t')| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Luego F es equicontinua.

(ii) \Rightarrow (i) Supongamos que F es acotado y equicontinuo.

Probaremos que F es secuencialmente compacto (ver Definición 4.24). Esto es, probaremos que toda sucesión contenida en F tiene una subsucesión convergente a un punto de F .

Sea $\{f_n\}_{n \geq 1} \subset F$ una sucesión.

Como F es acotado existe una constante M tal que

$$|f_n(t)| \leq M$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, para todo $t \in \Delta$.

Como Δ es un espacio métrico compacto, contiene un subconjunto denso y numerable $\{t_1, \dots, t_n, \dots\}$.

Tenemos que $\{f_n(t_1)\}_{n \geq 1}$ es una sucesión (numérica) acotada y por lo tanto tiene una sub-sucesión convergente $\{f_{1n}(t_1)\}_{n \geq 1}$.

Nuevamente $\{f_{1n}(t_2)\}_{n \geq 1}$ es una sucesión (numérica) acotada y por lo tanto tiene una subsucesión convergente $\{f_{2n}(t_2)\}_{n \geq 1}$.

Y así sucesivamente.

Sea

$$g_j = f_{jj}.$$

Entonces

- (a) $\{g_n\}_{n \geq 1}$ es una subsucesión de $\{f_n\}_{n \geq 1}$,
- (b) para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $\{g_n(t_k)\}_{n \geq 1}$ converge.

A continuación probaremos que $\{g_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión de Cauchy.

Sea $\varepsilon > 0$ como F es uniformemente equicontinuo existe $\delta > 0$ tal que

$$d(t, t') < \delta \text{ implica } |f(t) - f(t')| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ para todo } f \in F.$$

Tenemos que

$$\{B(t_n, \delta) : n \geq 1\}$$

es un cubrimiento abierto de Δ .

Como Δ es compacto existen $t_1, \dots, t_N \in \Delta$ tales que

$$\Delta \subset \bigcup_{k=1}^N B(t_k, \delta).$$

Por (b) para cada $k \in \{1, \dots, N\}$ existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$|g_m(t_k) - g_n(t_k)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

si $m, n \geq n_k$.

Sea $n_o = \max\{n_1, \dots, n_N\}$. Entonces

$$|g_m(t_k) - g_n(t_k)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

si $m, n \geq n_o$, para todo $k \in \{1, \dots, N\}$.

Sea $t \in \Delta$ y sean $m, n \geq n_o$.

Existe $k_o \in \{1, \dots, N\}$ tal que $d(t, t_{k_o}) < \delta$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} |g_m(t) - g_n(t)| &\leq |g_m(t) - g_m(t_{k_o})| + |g_m(t_{k_o}) - g_n(t_{k_o})| + |g_n(t_{k_o}) - g_n(t)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Luego $\{g_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión de Cauchy.

Como F es cerrado tenemos que $\{g_n\}_{n \geq 1}$ converge a un punto de F .

□

Como veremos a continuación, otra manera de enunciar este teorema es usando conjuntos precompactos.

DEFINICIÓN 3.35. Sea Δ un espacio topológico. Sea A un subconjunto de Δ . Decimos que A es *precompacto* o *relativamente compacto* cuando \overline{A} es compacto.

TEOREMA 3.36. Sea Δ un espacio métrico compacto. Sea F un subconjunto de $C(\Delta, K)$. F es precompacto si y sólo si F es acotado y equicontinuo.

La demostración de este resultado se sigue de la demostración del teorema anterior.

Ejercicios 3.

En lo que sigue \mathbb{K} representará al cuerpo \mathbb{R} de los números reales o al cuerpo \mathbb{C} de los números complejos.

(1) Demostrar que si existe la unidad de un álgebra entonces es única.

(2) Demuestre que $C(X, \mathbb{K})$ es un álgebra conmutativa con unidad.

(3) Demostrar que si $f, g \in C(X, \mathbb{C})$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ entonces

(a) $\overline{f} \in C(X, \mathbb{C})$

(b) $\overline{f + g} = \overline{f} + \overline{g}$,

(c) $\overline{\lambda f} = \overline{\lambda} \overline{f}$,

(d) $\overline{f \cdot g} = \overline{f} \cdot \overline{g}$,

(e) $\overline{\overline{f}} = f$,

(f) $\|\overline{f}\| = \|f\|$.

(4) Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ integrable. Para $n \geq 0$ los momentos de f son

$$M_n(f) = \int_0^1 t^n f(t) dt.$$

Sean $f, g \in C[0, 1]$.

Probar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $f = g$

(b) $M_n(f) = M_n(g)$ para todo $n \geq 0$.

(5) Sean X, Γ espacios métricos compactos y sea $F : X \times \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua.

Demostrar que F se puede aproximar uniformemente por funciones de la forma

$$\sum_{k=1}^n f_k g_k$$

donde $f_k : X \rightarrow \mathbb{C}$ y $g_k : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ son funciones continuas.

(6) Sea $F \subset C([a, b], \mathbb{R})$ tal que cada elemento de F es diferenciable en (a, b) .

Demuestre que si existe $M > 0$ tal que

$$|f'(t)| \leq M$$

para toda $f \in F$ y para todo t en (a, b) entonces F es equicontinuo.

(7) Demostrar que:

Si Δ es compacto entonces equicontinuidad implica equicontinuidad uniforme.

(8) Sea Δ un espacio métrico compacto. Sea $\{f_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión en $C(\Delta, \mathbb{R})$.

Demuestre que si $\{f_n\}_{n \geq 1}$ es equicontinua y para cada $t \in \Delta$ existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$$

entonces $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge en $C(\Delta, \mathbb{R})$.

(9) Sea $\{f_n\}_{n \geq 1}$ contenida en $C([a, b], \mathbb{K})$ una sucesión equicontinua que converge puntualmente hacia f .

Demostrar que $f \in C([a, b], \mathbb{K})$.

(10) Demostrar que:

(a) $L^1[0, 2\pi]$ es un álgebra conmutativa sin unidad, donde el producto a considerar es la convolución.

(b) Si $f, g \in L^1[0, 2\pi]$ entonces

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

(11) Dada $f \in L^1[0, 2\pi]$ los coeficientes e Fourier de f se definen mediante

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$$

para $n \in \mathbb{Z}$.

Sea

$$A = \{\widehat{f} : f \in L^1[0, 2\pi]\}.$$

(a) Probar que A es un álgebra con el producto usual.

(b) Probar que $\widehat{f} \in A$ implica

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_1.$$

(c) Probar que

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} \widehat{f}(n) = 0$$

para todo $\widehat{f} \in A$.

(d) Sea

$$B = \left\{ \widehat{f} \in A : \|\widehat{f}\|_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| < \infty \right\}.$$

Probar que B es una subálgebra de A .

(e) Demostrar que, para $f, g \in B$,

$$\widehat{f \cdot g}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n-k) \widehat{g}(k).$$

Sea W el álgebra de Wiener, es decir,

$$W = \{f \in L^1[0, 2\pi] : \widehat{f} \in B\}.$$

(f) Sea

$$S_n f = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{kt}.$$

Observar que: $f \in W$ si y sólo si $\{S_n f\}$ converge absolutamente.

Deducir que

$$W \subset C[0, 2\pi].$$

(g) Demostrar que W es una subálgebra de $C[0, 2\pi]$, donde el producto a considerar es el producto usual de funciones.

CAPÍTULO 4

Operadores lineales.

1. Operadores lineales entre espacios normados.

La presencia de una topología en un espacio vectorial conduce naturalmente a la noción de operadores acotados.

Sean X, Y dos espacios normados (sobre el mismo cuerpo de escalares).

DEFINICIÓN 4.1. Sea $T : X \rightarrow Y$ decimos que T es un *operador lineal* si

- (i) $T(x + y) = T(x) + T(y)$ para todo $x, y \in X$,
- (ii) $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ para todo $x \in X$, para todo escalar λ .

EJEMPLO 4.2. Sean $X = C^1[0, 1]$, $Y = C[0, 1]$, $Tf = f'$. Entonces T es un operador lineal.

PROPOSICIÓN 4.3. Sea $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal. Si existe $M > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq M$ para todo $x \in X$ entonces $T = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existe x_o tal que $T(x_o) \neq 0$, luego $\|T(x_o)\|_Y \neq 0$. Por la propiedad arquimediana se tiene que existe $\lambda > 0$ tal que

$$\lambda \|T(x_o)\|_Y > M.$$

Luego

$$\|T(\lambda x_o)\|_Y = \lambda \|T(x_o)\|_Y > M.$$

Pero esto es una contradicción. □

La proposición anterior nos indica que los operadores que verifican la definición de función acotada no tienen interés. A continuación damos una propiedad diferente que también es llamada acotación. Es imprescindible distinguir entre función acotada y operador acotado.

DEFINICIÓN 4.4. Sea $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal. Decimos que T es un *operador acotado* cuando existe $c > 0$ tal que

$$\|T(x)\|_Y \leq c \|x\|_X \quad \text{para todo } x \in X.$$

EJEMPLO 4.5. Sea $T : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$Tf = \int_a^b f(t)dt.$$

Tenemos que

$$|Tf| \leq \int_a^b |f(t)|dt \leq (b-a)\|f\|_\infty$$

por lo tanto T es un operador acotado.

EJEMPLO 4.6. Sea $T : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ dado por

$$(Tf)(t) = \int_a^t f(s)ds.$$

Tenemos que

$$|(Tf)(t)| = \left| \int_a^t f(s)ds \right| \leq \int_a^t |f(s)|ds \leq \int_a^b |f(s)|ds \leq \int_a^b \|f\|_\infty ds = (b-a)\|f\|_\infty.$$

Luego

$$\|Tf\|_\infty = \sup_t |(Tf)(t)| \leq (b-a)\|f\|_\infty.$$

De donde T es un operador acotado.

EJEMPLO 4.7. Conociendo los espacios $L^1[0, 2\pi]$ y $l_\infty(\mathbb{Z})$ podemos introducir este ejemplo.

Para $f \in L^1[0, 2\pi]$ y n entero, los coeficientes de Fourier se definen mediante

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int} dt.$$

Sean $X = L^1[0, 2\pi]$, $Y = l_\infty(\mathbb{Z})$, definimos $T : X \rightarrow Y$ por $Tf = \widehat{f}$.

$$|\widehat{f}(n)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|dt = \frac{1}{2\pi} \|f\|_1.$$

Luego

$$\|Tf\|_\infty = \|\widehat{f}\|_\infty = \sup_n |\widehat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_1.$$

Por lo tanto T es un operador acotado.

2. Condiciones equivalentes de continuidad.

En lo que sigue usaremos la siguiente notación

$$B(x_o, r) = \{x \in X : \|x - x_o\| < r\}.$$

TEOREMA 4.8. Sean X, Y dos espacios normados (sobre el mismo cuerpo de escalares). Sea $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) T es continuo,
- (b) T es continuo en $x = 0$,
- (c) T es continuo en algún punto $x_o \in X$,
- (d) Existen $x_o \in X$ y $r > 0$ tales que $T(B(x_o, r))$ es acotado.
- (e) $T(B(0, 1))$ es acotado.
- (f) $T(A)$ es acotado para todo subconjunto A de X que sea acotado.
- (g) T es un operador acotado.

DEMOSTRACIÓN.

- (a) \Rightarrow (b) es inmediato.
- (b) \Rightarrow (c) es inmediato.
- (c) \Rightarrow (d) Sea $y_o = T(x_o)$. Por la continuidad en x_o , existe $\delta > 0$ tal que si $\|x - x_o\|_X < \delta$ entonces

$$\|T(x) - y_o\|_Y < 1.$$

Es decir, existe $\delta > 0$ tal que

$$T(B(x_o, \delta)) \subset B(y_o, 1).$$

Luego $T(B(x_o, \delta))$ es acotado.

- (d) \Rightarrow (e) Sabemos que existe $r > 0$ y $x_o \in X$ tales que $T(B(x_o, r))$ es acotado. Como

$$B(0, 1) = \frac{1}{r}(B(x_o, r) - x_o)$$

y T es lineal, entonces

$$T(B(0, 1)) = T\left(\frac{1}{r}(B(x_o, r) - x_o)\right) = \frac{1}{r}T(B(x_o, r)) - \frac{1}{r}T(x_o).$$

Luego $T(B(0, 1))$ es acotado.

(e) \Rightarrow (f) Sea A un subconjunto acotado de X . Sea M tal que $\|x\|_X < M$ para todo $x \in A$. Entonces

$$\frac{1}{M} A \subset B(0, 1).$$

Luego

$$T(A) = M T\left(\frac{1}{M} A\right) \subset M T(B(0, 1)).$$

Este último conjunto es acotado. Luego $T(A)$ es acotado.

(f) \Rightarrow (g) Como $B(0, 2)$ es acotado entonces existe $M > 0$ tal que $\|T(z)\|_Y \leq M$ para todo $z \in B(0, 2)$. Sea $x \in X$.

Si $x = 0$ entonces $\|T(0)\|_Y = 0 \leq M\|0\|_X$.

Si $x \neq 0$ entonces $x/\|x\|_X \in B(0, 2)$. Luego

$$\left\| T\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right) \right\|_Y \leq M.$$

Por linealidad:

$$\|T(x)\|_Y = \left\| T\left(\|x\|_X \frac{x}{\|x\|_X}\right) \right\|_Y = \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right) \right\|_Y \|x\|_X \leq M\|x\|_X.$$

(g) \Rightarrow (a) Sea $x_o \in X$. Dado $\varepsilon > 0$ sea $\delta = \varepsilon/M$.

Si $\|x - x_o\| < \delta$, entonces

$$\|T(x) - T(x_o)\|_Y = \|T(x - x_o)\|_Y \leq M\|x - x_o\|_X < \varepsilon.$$

Luego T es continua en x_o . Por lo tanto T es continua.

□

3. El espacio $L(X, Y)$.

Sean X, Y dos espacios normados sobre el mismo cuerpo de escalares.

DEFINICIÓN 4.9. Sea

$$L(X, Y) = \{T : X \rightarrow Y \text{ tales que } T \text{ es un operador lineal y continuo}\}.$$

PROPOSICIÓN 4.10. $L(X, Y)$ es un espacio vectorial con las operaciones usuales

$$(\lambda T)(x) = \lambda T(x),$$

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x).$$

La demostración de esta proposición queda como ejercicio.

DEFINICIÓN 4.11. Para $T \in L(X, Y)$ definimos

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|.$$

La demostración de las dos proposiciones siguientes queda como ejercicio.

PROPOSICIÓN 4.12.

$$(a) \|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\|.$$

$$(b) \|T\| = \inf\{M : \|T(x)\| \leq M\|x\| \text{ para todo } x \in X\}.$$

PROPOSICIÓN 4.13. $\|\cdot\|$ es una norma en $L(X, Y)$.

TEOREMA 4.14 (Una condición para que $L(X, Y)$ sea un espacio de Banach).
Si Y es un espacio de Banach entonces $L(X, Y)$ es un espacio de Banach.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{T_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de Cauchy en $L(X, Y)$.

Sea $x \in X$ y sea $\varepsilon > 0$ entonces existe N tal que

$$(4.1) \quad \|T_n - T_m\| < \frac{\varepsilon}{\|x\|_X} \quad \text{si } n, m \geq N.$$

Luego

$$\|T_n(x) - T_m(x)\|_Y \leq \|T_n - T_m\| \|x\|_X < \varepsilon$$

si $n, m \geq N$. De donde $\{T_n(x)\}_{n \geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en Y .

Como Y es un espacio de Banach entonces existe $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$ en Y . Sea

$$T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x).$$

Luego T es un operador lineal.

Como $\{T_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión de Cauchy entonces es acotada, es decir, existe $M > 0$ tal que $\|T_n\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De donde

$$\|T_n(x)\|_Y \leq \|T_n\| \|x\|_X \leq M\|x\|_X.$$

Luego

$$\|T(x)\|_Y = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) \right\|_Y = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(x)\|_Y \leq M\|x\|_X.$$

Y así T es un operador acotado, es decir, $T \in L(X, Y)$.

Sea $x \in X$ tal que $\|x\|_X = 1$.

Sean $m, n \geq N$, por (4.1) tenemos que

$$\|T_n(x) - T_m(x)\|_Y \leq \|T_n - T_m\| \leq \varepsilon.$$

Luego

$$\|T_n(x) - T(x)\|_Y = \lim_{m \rightarrow \infty} \|T_n(x) - T_m(x)\|_Y \leq \varepsilon.$$

Por lo tanto

$$\|T_n - T\| \leq \varepsilon.$$

De donde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = 0.$$

□

4. Homeomorfismos entre espacios normados.

Sean X, Y dos espacios normados.

DEFINICIÓN 4.15. Una aplicación $f : X \rightarrow Y$ es un *homeomorfismo* si es biyectiva y bicontinua. Es decir, si tiene inversa f^{-1} y f^{-1} es continua.

¿Cuándo un operador $T \in L(X, Y)$ tiene inverso continuo?

DEFINICIÓN 4.16. Sea $T : X \rightarrow Y$. Decimos que T es *acotado inferiormente* cuando existe $m > 0$ tal que

$$m\|x\|_X \leq \|T(x)\|_Y$$

para todo $x \in X$.

PROPOSICIÓN 4.17. Sea $T \in L(X, Y)$ entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) T es invertible, con inverso acotado
- (b) T es sobreyectivo y T es acotado inferiormente.

DEMOSTRACIÓN.

(a) \Rightarrow (b) Supongamos que existe un operador $S \in L(Y, X)$ tal que:

$$ST = I_X, \quad TS = I_Y.$$

Obviamente T es sobreyectivo.

Dado $x \in X$, sea $y = T(x)$. Entonces $x = S(y)$. Como S es acotado

$$\|x\| = \|S(y)\| \leq \|S\| \|y\| \leq \|S\| \|T(x)\|.$$

Tomando $M = 1/\|S\|$ se sigue el resultado.

(b) \Rightarrow (a) Si T es sobreyectivo y acotado inferiormente, entonces existe $m > 0$ tal que

$$m\|x\| \leq \|T(x)\|$$

para todo $x \in X$.

Sean $x, x' \in X$ tales que

$$T(x) = T(x')$$

entonces

$$m\|x - x'\| \leq \|T(x - x')\| = \|T(x) - T(x')\| = 0.$$

De donde $x = x'$.

Luego T tiene inverso.

Es fácil ver que el inverso es acotado (verifíquelo). □

La demostración de las proposiciones siguientes queda como ejercicio.

PROPOSICIÓN 4.18. *Sea $T \in L(X, Y)$ tal que existe T^{-1} y $T^{-1} \in L(Y, X)$ entonces: X es de Banach si y sólo si Y es de Banach.*

PROPOSICIÓN 4.19. *Sea $T \in L(X, Y)$ tal que existe T^{-1} y $T^{-1} \in L(Y, X)$ entonces:*

$$\dim X = \dim Y.$$

5. Caracterización de los espacios normados de dimensión finita.

5.1. Espacios de dimensión finita.

Para $1 \leq p < \infty$ sea $l_p^n = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ donde

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}.$$

LEMA 4.20. *Sea X un espacio vectorial normado de dimensión finita n . Si $T : l_1^n \rightarrow X$ es un operador lineal entonces*

(i) T es acotado

(ii) Si T es inyectivo entonces T es biyectivo y $T^{-1} : X \rightarrow l_1^n$ es acotado.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{e_k\}_{1 \leq k \leq n}$ la base canónica de \mathbb{R}^n ,

(i) Sea $x = (x_1, \dots, x_n)$ entonces

$$T(x) = \sum_{k=1}^n x_k T(e_k).$$

Luego

$$\begin{aligned}\|T(x)\|_X &\leq \sum_{k=1}^n |x_k| \|T(e_k)\|_X \\ &\leq \left(\max_{k=1, \dots, n} \|T(e_k)\|_X \right) \sum_{k=1}^n |x_k| \\ &= \|x\|_1 \left(\max_{k=1, \dots, n} \|T(e_k)\|_X \right).\end{aligned}$$

(ii) Si T es inyectivo entonces es claro que T (como función) tiene inverso

$$T^{-1} : X \rightarrow l_1^n.$$

Supongamos que T^{-1} no es acotado. Entonces existe una sucesión $\{a_k\}$ en X tal que $\|a_k\| = 1$ para todo k y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|T^{-1}(a_k)\|_1 = \infty.$$

Sea

$$b_k = \frac{T^{-1}(a_k)}{\|T^{-1}(a_k)\|_1}.$$

Entonces $\{b_k\}_{k \geq 1} \subset l_1^n$ y $\|b_k\|_1 = 1$.

Como la esfera unitaria en l_1^n es compacta entonces $\{b_k\}_{k \geq 1}$ tiene una subsucesión $\{b_{k_j}\}_{j \geq 1}$ que converge a $b \in l_1^n$ y $\|b\|_1 = 1$.

Como T es continuo se tiene que

$$T(b) = \lim_{j \rightarrow \infty} T(b_{k_j}).$$

Luego

$$\begin{aligned}\|T(b)\|_X &= \lim_{j \rightarrow \infty} \|T(b_{k_j})\|_X \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\|T(T^{-1}(a_{k_j}))\|_X}{\|T^{-1}(a_{k_j})\|_1} \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\|a_{k_j}\|_X}{\|T^{-1}(a_{k_j})\|_1} \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\|T^{-1}(a_{k_j})\|_1} = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto $T(b) = 0$. De donde $b = 0$.

Pero esto no puede ser pues $\|b\|_1 = 1$.

Así hemos llegado a una contradicción.

□

LEMA 4.21. Sean X_1, X_2 dos espacios vectoriales normados tales que

$$\dim X_1 = \dim X_2 < \infty.$$

Entonces todo operador lineal biyectivo $T : X_1 \rightarrow X_2$ es acotado y su inverso también es acotado.

DEMOSTRACIÓN. Sean

$$B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}, \quad B_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$$

bases de X_1 y X_2 respectivamente.

Consideremos los operadores $T_1 : l_1^n \rightarrow X_1$ y $T_2 : l_1^n \rightarrow X_2$ definidos por

$$T_1(x) = \sum_{k=1}^n x_k v_k, \quad T_2(x) = \sum_{k=1}^n x_k w_k$$

para $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Por el lema anterior, T_1 y T_2 son acotados y tienen inverso acotado.

Sea

$$\tilde{T} = T_2^{-1} T T_1$$

entonces $\tilde{T} : l_1^n \rightarrow l_1^n$ es un operador lineal biyectivo.

Por el lema anterior, \tilde{T} y \tilde{T}^{-1} son operadores acotados. Luego

$$T = T_2 \tilde{T} T_1^{-1} \quad \text{y} \quad T^{-1} = T_1 (\tilde{T})^{-1} T_2^{-1}$$

son operadores acotados. □

TEOREMA 4.22. Sea X un espacio vectorial de dimensión finita n , entonces:

- (a) Todas las normas en X son equivalentes.
- (b) Si $\| \cdot \|$ es una norma entonces $(X, \| \cdot \|)$ es un espacio de Banach.
- (c) X es isomorfo a \mathbb{R}^n (o \mathbb{C}^n).

DEMOSTRACIÓN. Supondremos el espacio real (el caso complejo es análogo).

- (a) Sean $\| \cdot \|_a$ y $\| \cdot \|_b$ dos normas en X . Consideremos el operador

$$I : (X, \| \cdot \|_a) \rightarrow (X, \| \cdot \|_b)$$

dado por $I(x) = x$. Entonces I es biyectivo.

Por el lema anterior, I es acotado y su inverso también es acotado.

Luego existen constantes m y M positivas tales que

$$m \|x\|_a \leq \|I(x)\|_b = \|x\|_b \leq M \|x\|_a.$$

(b) Dada $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de X definimos

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k v_k \right\| = |x_1| + \dots + |x_n|.$$

Es fácil probar que X es completo con respecto a esa norma. Por (a) X es completo con cualquier norma.

(c) Es inmediato. □

TEOREMA 4.23. *Sea X un espacio vectorial de dimensión finita n , sea Y un espacio normado, sea $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal. Entonces T es continuo (con cualquier norma en X).*

IDEA DE LA PRUEBA. Demostrar que $T(X)$ es un subespacio de dimensión finita de Y y de este hecho deducir el resultado deseado. □

5.2. El teorema de Bolzano-Weierstrass.

La historia de la matemática tiene varios casos de simultaneidad en los descubrimientos y el trabajo de Cauchy es un caso de esto, por la semejanza desarrollada acerca del mismo tema por Bolzano.

Bernhard Bolzano (1.781 - 1.848) era un sacerdote checoslovaco cuyos puntos de vista teológicos fueron desaprobados por su iglesia y cuyo trabajo matemático fue inmerecidamente pasado por alto por sus contemporáneos eclesiásticos.

Bolzano dio muchas definiciones y resultados similares a los de Cauchy. La semejanza en su aritmetización del cálculo y sus definiciones de límite, derivada, continuidad y convergencia fue sólo una coincidencia.

Como ya hemos indicado Bolzano enfrentó la idea de que había diferentes tipos de infinito. El se acercó más a ciertas partes de la matemática moderna que sus más famosos contemporáneos. Pareciera que Gauss y Cauchy le tenían mucho temor al infinito.

Pasaron alrededor de 50 años entre el trabajo de Bolzano y el de Weierstrass, pero la unidad del esfuerzo en este medio siglo y la necesidad de redescubrir el trabajo de Bolzano

fueron tales que existe un famoso teorema que lleva el nombre de ambos hombres, el teorema de Bolzano-Weierstrass. Este teorema fue probado por Bolzano y aparentemente también era conocido por Cauchy, pero fue el trabajo de Weierstrass lo que lo hizo familiar a los matemáticos. Enunciaremos dos versiones de este teorema.

TEOREMA (Bolzano-Weierstrass). *En \mathbb{R} , un conjunto acotado que contiene infinitos elementos contiene al menos un punto de acumulación.*

TEOREMA (Bolzano-Weierstrass). *En \mathbb{R} , toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.*

Recordaremos algunas propiedades y definiciones topológicas:

DEFINICIÓN 4.24. Un subconjunto A de un espacio topológico X es *secuencialmente compacto* si y sólo si toda sucesión de A contiene una subsucesión que converge a un punto de A .

OBSERVACIÓN 4.25.

- (a) Para dar un ejemplo de un conjunto que no es secuencialmente compacto considere el conjunto $(0, 1)$ y la sucesión $\{1/n\}_{n \geq 1}$.
- (a) Existen espacios topológicos compactos que no son secuencialmente compactos y viceversa.

PROPOSICIÓN 4.26. *En espacios métricos compacto es lo mismo que secuencialmente compacto.*

Por lo que vimos en la sección anterior, si consideramos cualquier norma en \mathbb{R}^n , tenemos que

PROPOSICIÓN 4.27. *La esfera unitaria en \mathbb{R}^n es compacta y secuencialmente compacta.*

OBSERVACIÓN 4.28. En general se puede probar, tal como veremos a continuación, que en el caso finito dimensional vale el análogo del teorema de Bolzano - Weierstrass: $\overline{B(z, r)}$ es compacta. Este resultado también se suele enunciar de la siguiente manera: “en espacios de dimensión finita toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente”.

5.3. El teorema de F. Riesz sobre la compacidad de la bola cerrada.

El siguiente lema nos va a permitir probar que en el caso infinito-dimensional la bola unitaria cerrada nunca es compacta.

LEMA 4.29 (F. Riesz).

Sea X un espacio normado y M un subespacio propio de X . Si $\theta \in (0, 1)$ entonces existe $x_\theta \in X$ tal que $\|x_\theta\| = 1$ y $\text{dist}(x_\theta, M) \geq \theta$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\theta \in (0, 1)$. Sea $x \in X$ tal que $x \notin M$ entonces $\text{dist}(x, M) = d > 0$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $x_\varepsilon \in M$ tal que

$$\|x - x_\varepsilon\| \leq d + \varepsilon.$$

En particular sea $\varepsilon = d(1/\theta - 1)$. Entonces $d + \varepsilon = d/\theta$. Sea

$$x_\theta = \frac{(x - x_\varepsilon)}{\|x - x_\varepsilon\|}.$$

Sea $m \in M$ entonces

$$(x_\varepsilon + \|x - x_\varepsilon\|m) \in M.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \|x_\theta - m\| &= \left\| \frac{x - x_\varepsilon}{\|x - x_\varepsilon\|} - m \right\| \\ &= \frac{1}{\|x - x_\varepsilon\|} \|x - x_\varepsilon - \|x - x_\varepsilon\|m\| \\ &\geq \frac{d}{d + \varepsilon} \\ &= \theta. \end{aligned}$$

De donde $\text{dist}(x_\theta, M) \geq \theta$. □

TEOREMA 4.30 (F. Riesz).

Sea X un espacio normado y sea

$$S = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}.$$

Las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) $\dim X$ es finita.
- (b) S es compacto.

DEMOSTRACIÓN.

(a) \Rightarrow (b) Es un resultado conocido que un subconjunto cerrado y acotado de \mathbb{R}^n , con la norma euclidiana, es compacto. De esto y el Teorema 4.22 obtenemos el resultado.

(b) \Rightarrow (a) Supongamos que $\dim X$ es infinita.

Sea $x_1 \in X$ tal que $\|x_1\| = 1$.

Sea M_1 el subespacio generado por x_1 . Se tiene que $\dim M_1 = 1$. Como $\dim X = \infty$ entonces $M_1 \neq X$.

Por el Lema de Riesz (Lema 4.29) existe $x_2 \in X$ tal que

$$\|x_2\| = 1 \quad \text{y} \quad \text{dist}(x_2, M_1) \geq 1/2.$$

Luego

$$\|x_2 - x_1\| \geq 1/2.$$

Sea M_2 el subespacio generado por x_1 y x_2 . Se tiene que $\dim M_2 \leq 2$. Como $\dim X = \infty$ entonces $M_2 \neq X$.

Por el Lema de Riesz (Lema 4.29) existe $x_3 \in X$ tal que

$$\|x_3\| = 1 \quad \text{y} \quad \text{dist}(x_3, M_2) \geq 1/2.$$

Luego

$$\|x_3 - x_2\| \geq 1/2,$$

$$\|x_3 - x_1\| \geq 1/2.$$

Así se construye una sucesión $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset S$ que no es de Cauchy y tal que

$$\|x_m - x_n\| \geq 1/2 \quad \text{si} \quad m \geq n.$$

Por lo tanto $\{x_n\}_{n \geq 1}$ no tiene ninguna subsucesión convergente, es decir, S no es compacto por sucesiones.

Usando la Proposición 4.26 obtenemos que S no es compacto.

□

Ejercicios 4.

- (1) Sea $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal. Sea $\text{Ker}(T)$ el núcleo de T .

Demostrar que si T es acotado entonces $\text{Ker}(T)$ es un subespacio cerrado de X .

- (2) Dar un ejemplo de un operador lineal de un espacio normado a otro espacio normado que no es continuo.

- (3) Dar un ejemplo donde la identidad NO sea una isometría.

- (4) (a) Demuestre que $L(X, Y)$ es un espacio vectorial con las operaciones usuales dadas por:

$$(\lambda T)(x) = \lambda T(x),$$

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x).$$

donde $T, T_1, T_2 \in L(X, Y)$ y λ es un escalar.

- (b) Para $T \in L(X, Y)$ definimos

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|.$$

Demuestre que $\|\cdot\|$ es una norma en $L(X, Y)$.

- (5) Demuestre que: Si $T \in L(X, Y)$ entonces

(a) $\|T(x)\| \leq \|T\| \|x\|.$

(b) $\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}.$

(c) $\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\|.$

(d) $\|T\| = \inf\{M : \|T(x)\| \leq M\|x\| \text{ para todo } x \in X\}$.

(6) Sea X un espacio vectorial en el que están dadas dos normas equivalentes.

Sea $T : X \rightarrow X$ un operador lineal.

Demostrar que en ambas normas, T será simultáneamente acotado o no acotado.

(7) Demostrar que los siguientes operadores lineales son acotados y dar la estimación más precisa que pueda de sus normas

(a) $T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, definido mediante

$$(Tf)(t) = \int_0^t f(s)ds.$$

(b) $T : C[-1, 1] \rightarrow C[0, 1]$, definido mediante

$$(Tf)(t) = f(t).$$

(c) $T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, definido mediante

$$(Tf)(t) = t^2 f(t).$$

(d) $T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, definido mediante

$$(Tf)(t) = f(t^2).$$

(e) $T : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$, definido mediante

$$(Tf)(t) = \int_0^t f(s)ds.$$

(f) $T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, definido mediante

$$(Tf)(t) = t^2 f(0).$$

(8) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Sean

$$C[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tales que } f \text{ es continua}\},$$

$$C^1[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tales que } f \text{ es continuamente diferenciable en } [a, b]\}.$$

Se tiene que $C[a, b]$ y $C^1[a, b]$ son espacios vectoriales sobre \mathbb{R} y $C^1[a, b]$ es una variedad lineal contenida en $C[a, b]$. Además si $f \in C[a, b]$ entonces $f' \in C[a, b]$.

En $C[a, b]$ vamos a considerar la siguiente norma

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : x \in [a, b]\}.$$

Se sabe que $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach.

- (i) Demostrar que $C^1[a, b]$ no es un subespacio de $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ y por lo tanto $(C^1[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ no es un espacio de Banach.

Sea $D : C^1[a, b] \rightarrow C[a, b]$ definido por

$$Df = f'.$$

Claramente D es un operador lineal.

- (ii) Demostrar que

$$D : (C^1[a, b], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$$

no es continuo.

En $C^1[a, b]$ consideremos la norma

$$\|f\|_{d1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

- (iii) Demostrar que $(C^1[a, b], \|\cdot\|_{d1})$ es un espacio de Banach.

- (iv) Demostrar que

$$D : (C^1[a, b], \|\cdot\|_{d1}) \rightarrow (C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$$

es continuo y hallar su norma.

- (9) Sea X un espacio normado de dimensión infinita.

Demostrar que dado cualquier espacio normado Y (no trivial) siempre existe un operador lineal $T : X \rightarrow Y$ que no es continuo.

- (10) Demuestre que: Si X, Y son espacios normados y $T : X \rightarrow Y$ es un operador acotado con inverso acotado entonces:

X es de Banach si y sólo si Y es de Banach.

- (11) Demuestre que si X, Y son espacios normados y $T : X \rightarrow Y$ es un operador acotado con inverso acotado entonces

$$\dim X = \dim Y.$$

- (12) Sea B un subespacio vectorial (cerrado) de $C([0, 1], \mathbb{R})$ tal que:

(a) Cada $f \in B$ es diferenciable en $(0, 1)$.

(b) Existe $M > 0$ tal que si $f \in B$ y $\|f\|_\infty \leq 1$ entonces $|f'(x)| \leq M$ para todo $x \in (0, 1)$.

Demuestre que B tiene dimensión finita.

- (13) Demostrar que si X es un espacio normado de dimensión finita entonces toda variedad lineal de X es un subespacio.

- (14) Demostrar que todo espacio vectorial normado de dimensión finita es de Banach.

CAPÍTULO 5

Funcionales lineales.

1. Dual de un espacio normado.

Sea X un espacio vectorial sobre el cuerpo de escalares \mathbb{K} (donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

DEFINICIÓN 5.1. Un *funcional lineal* en X es una función $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ que es lineal.

DEFINICIÓN 5.2. El *dual algebraico* de X es

$$X' = \{f : X \rightarrow \mathbb{K} \text{ tal que } f \text{ es funcional lineal}\}.$$

DEFINICIÓN 5.3. El *dual topológico* de X es

$$X^* = L(X, \mathbb{K}) = \{f : X \rightarrow \mathbb{K} \text{ tales que } f \text{ es un funcional lineal y continuo}\}.$$

PROPOSICIÓN 5.4. *Sea X un espacio normado entonces X^* es un espacio de Banach.*

La demostración de esta proposición queda como ejercicio.

DEFINICIÓN 5.5. Dado un funcional lineal f el *núcleo* de f es:

$$\ker(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}.$$

TEOREMA 5.6. *Sean X un espacio normado y f un funcional lineal en X , entonces f es continuo si y sólo si $\ker(f)$ es cerrado.*

DEMOSTRACIÓN.

(\Rightarrow) Como $\ker(f) = f^{-1}\{0\}$, tenemos que $\ker(f)$ es la imagen inversa de un conjunto cerrado a través de una función continua, por lo tanto $\ker(f)$ es cerrado.

(\Leftarrow) Sea $M = \ker(f)$ un subespacio (cerrado) de X .

Supongamos que $M = X$. Entonces $f = 0$ y por lo tanto f es continuo.

Supongamos que $M \neq X$. Entonces existe $x_1 \in X$ tal que $x_1 \notin M$. Luego $f(x_1) \neq 0$. Sea $x_o = x_1/f(x_1)$. Entonces $f(x_o) = 1$ y por lo tanto $x_o \notin M$.

Como M es cerrado $d = \text{dist}(x_o, M) > 0$.

Sea $x \in X$ entonces $x - f(x)x_o \in M$. Luego

$$X = M + \{\lambda x_o : \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

(a) Si $x \in M$ entonces $f(x) = 0$.

(b) Si $x \notin M$ entonces existen $m \in M$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, no nulo, tal que $x = m + \lambda x_o$. Luego

$$f(x) = f(m + \lambda x_o) = \lambda f(x_o) + f(m) = \lambda.$$

Por otro lado

$$d \leq \|x_o + m/\lambda\| = \frac{1}{|\lambda|} \|m + \lambda x_o\| = \frac{1}{|\lambda|} \|x\|.$$

Por lo tanto

$$|f(x)| = |\lambda| \leq \frac{\|x\|}{d}.$$

En ambos casos:

$$|f(x)| \leq \frac{\|x\|}{d}.$$

□

2. El teorema de Hahn - Banach.

Uno de los resultados básicos del análisis funcional es el teorema de Hahn - Banach, el cual asegura la existencia de extensiones de funcionales lineales mayoradas por una funcional sublineal.

2.1. Teorema de Hahn - Banach para espacios vectoriales.

DEFINICIÓN 5.7. Sea X un espacio vectorial real. Un *funcional sublineal* en X es una función $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface

(i) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ para todo $x, y \in X$

(ii) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ para todo $\lambda \geq 0$, para todo $x \in X$.

En análisis es muy común considerar funcionales lineales reales dominados por un funcional sublineal p

$$f(x) \leq p(x) \quad \text{para todo } x \in M$$

donde M es un subespacio de un espacio vectorial X .

Por ejemplo, si $b = \{b_n\}$ es una sucesión entonces

$$f(b) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

es un funcional lineal. Además el límite superior

$$p(b) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$$

es un funcional sublineal y se cumple

$$f(b) \leq p(b).$$

Análogamente, sabiendo Teoría de la Medida se puede introducir el siguiente ejemplo: la integral de Lebesgue de una función integrable h es un funcional lineal f :

$$f(h) = \int h(t) dt.$$

La integral superior

$$p(h) = \overline{\int} h(t) dt$$

es un funcional sublineal (no es lineal porque no es aditiva). Además

$$f(h) \leq p(h).$$

En ambos ejemplos p está definida en espacios que contienen estrictamente el dominio de f .

Una de las razones por las que se quiere extender f a un espacio más grande, tratando de conservar la mayoración, es porque si p es una seminorma y f es un funcional lineal real entonces $f(x) \leq p(x)$ significa que f es continua en la métrica asociada a p .

LEMA 5.8. Sean X un espacio vectorial real y V una variedad lineal propia de X , $x_o \in X \setminus V$ y

$$V_1 = V + \{\lambda x_o : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Sean $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional sublineal y $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal tales que

$$f(x) \leq p(x) \text{ para todo } x \in V.$$

Entonces existe $f_1 : V_1 \rightarrow \mathbb{R}$ funcional lineal extensión de f tal que

$$f_1(x) \leq p(x) \text{ para todo } x \in V_1.$$

DEMOSTRACIÓN.

Notemos que si existe f_1 como en la conclusión del teorema, ésta debe cumplir:

$$f_1(x + \lambda x_o) = f(x) + \lambda f_1(x_o),$$

para $x \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Por lo tanto para definir f_1 basta determinar $f_1(x_o)$.

Sean $x, y \in V$ entonces

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) &= f(x + y) \leq p(x + y) \\ &= p(x - x_o + x_o + y) \leq p(x - x_o) + p(y + x_o). \end{aligned}$$

Luego

$$f(x) - p(x - x_o) \leq p(y + x_o) - f(y).$$

Sea

$$a = \sup\{f(x) - p(x - x_o), x \in V\}.$$

Entonces

$$(5.1) \quad f(x) - p(x - x_o) \leq a \leq p(y + x_o) - f(y).$$

Definamos $f_1 : V_1 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f_1(x + \lambda x_o) = f(x) + \lambda a,$$

para $x \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces $f_1(x_o) = a$.

Usando la definición de f_1 y la desigualdad (5.1) obtenemos que para todo $x, y \in V$:

$$f_1(x - x_o) = f(x) - a \leq p(x - x_o),$$

$$f_1(y + x_o) = f(y) + a \leq p(y + x_o).$$

A partir de estas dos desigualdades se puede deducir que

$$f_1(x + \lambda x_o) \leq p(x + \lambda x_o)$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

□

TEOREMA 5.9 (Hahn-Banach para un espacio vectorial, caso real). *Sean X un espacio vectorial real y $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional sublineal. Sean M una variedad lineal propia de X y f un funcional lineal definido en M . Si $f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in M$ entonces existe un funcional lineal $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

- (i) $F(x) = f(x)$ para todo $x \in M$
- (ii) $F(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$.

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (E, g) \text{ tales que} \\ E \text{ es una variedad lineal de } X, \quad M \subset E, \\ g : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ es un funcional lineal, } \quad g(x) \leq p(x) \text{ si } x \in E \\ \text{y } g|_M = f \end{array} \right\}.$$

Definimos una relación de orden en Ω

Si (E_1, g_1) y $(E_2, g_2) \in \Omega$ diremos que

$$(E_1, g_1) \prec (E_2, g_2)$$

si g_2 es una extensión de g_1 , es decir, si E_1 está contenido en E_2 y $g_2|_{E_1} = g_1$.

Algunas propiedades de Ω son:

- (a) $\Omega \neq \emptyset$ porque $(M, f) \in \Omega$.
- (b) Ω está parcialmente ordenado por \prec , ya que \prec es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva.
- (c) Toda cadena en Ω tiene una cota superior. En efecto:

Si $\{(E_\gamma, g_\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma}$ es una cadena en Ω podemos definir E_s y g_s de la siguiente manera:

E_s es la menor variedad lineal que contiene a $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma$.

$$g_s(x) = g_\gamma(x) \quad \text{si } x \in E_\gamma.$$

Entonces E_s es una variedad lineal de X que contiene a M , $g_s : E_s \rightarrow \mathbb{R}$ es un funcional lineal, $g_s|_M = f$ y $g_s(x) \leq p(x)$ si $x \in E_s$.

Luego $(E_s, g_s) \in \Omega$ y

$$(E_\gamma, g_\gamma) \prec (E_s, g_s) \quad \text{si } \gamma \in \Gamma.$$

Por lo tanto se cumple (c).

De (a), (b) y (c), por el lema de Zorn, se sigue que Ω tiene un elemento maximal, llamémoslo (V, F) .

Si probamos que $V = X$, el teorema quedará demostrado.

Supongamos que no son iguales. Entonces existe $x_o \in X$ tal que $x_o \notin V$. Sea

$$V_1 = V + \{\lambda x_o : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Por el Lema anterior existe $F_1 : V_1 \rightarrow \mathbb{R}$ funcional lineal extensión de F tal que

$$F_1(x) \leq p(x) \text{ para todo } x \in V_1.$$

Luego $(V_1, F_1) \in \Omega$.

Esto contradice la maximalidad de (V, F) . De donde $V = X$.

□

A continuación damos algunos resultados que nos permitirán considerar el caso de escalares complejos.

Sea X un espacio vectorial complejo.

PROPOSICIÓN 5.10. *Sea f una funcional lineal compleja en X , entonces existen u y v funcionales \mathbb{R} -lineales, a valores reales tales que $f = u + iv$.*

DEMOSTRACIÓN. Para cada $x \in X$ sean

$$u(x) = \operatorname{Re} f(x), \quad v(x) = \operatorname{Im} f(x).$$

Sean $x_1, x_2 \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} u(\lambda x_1 + x_2) + iv(\lambda x_1 + x_2) &= f(\lambda x_1 + x_2) = \lambda f(x_1) + f(x_2) = \\ &= \lambda u(x_1) + u(x_2) + i(\lambda v(x_1) + v(x_2)) \end{aligned}$$

Como $\lambda, u(x_1), u(x_2), v(x_1), v(x_2) \in \mathbb{R}$ entonces

$$\begin{aligned} u(\lambda x_1 + x_2) &= \operatorname{Re} f(\lambda x_1 + x_2) = \lambda u(x_1) + u(x_2), \\ v(\lambda x_1 + x_2) &= \operatorname{Im} f(\lambda x_1 + x_2) = \lambda v(x_1) + v(x_2). \end{aligned}$$

□

PROPOSICIÓN 5.11. *Sea f una funcional lineal compleja en X y sea $u = \operatorname{Re} f$ entonces $f(x) = u(x) - iu(ix)$. Es decir,*

$$\operatorname{Im} f(x) = -\operatorname{Re} f(ix).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $v = \operatorname{Im} f$, entonces

$$u(ix) + iv(ix) = f(ix) = if(x) = i(u(x) + iv(x)) = iu(x) - v(x).$$

De donde

$$u(x) = v(ix), \quad u(ix) = -v(x).$$

Luego

$$\operatorname{Re} f(ix) = -\operatorname{Im} f(x).$$

□

COROLARIO 5.12. *Hay una correspondencia biunívoca entre los funcionales lineales reales y los funcionales lineales complejos.*

La prueba es consecuencia de las proposiciones 5.10 y 5.11.

PROPOSICIÓN 5.13. *Sea X un espacio vectorial complejo. Dado $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal real, consideremos el funcional lineal complejo $f(x) = u(x) - iu(ix)$. Entonces para cada $x \in X$ existe $\alpha(x) \in \mathbb{R}$ tal que*

$$|f(x)| = u(e^{-i\alpha(x)}x).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$f(x) = |f(x)|e^{i\alpha(x)}.$$

Entonces $e^{i\alpha(x)}$ es un escalar y

$$\begin{aligned} |f(x)| &= e^{-i\alpha(x)}f(x) = f(e^{-i\alpha(x)}x) \\ &= u(e^{-i\alpha(x)}x) - iu(ie^{-i\alpha(x)}x). \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} |f(x)| &= u(e^{-i\alpha(x)}x), \\ u(ie^{-i\alpha(x)}x) &= 0. \end{aligned}$$

□

A continuación daremos la extensión del teorema de Hahn - Banach a espacios complejos dada por Bohnenblust y Sobczyk.

DEFINICIÓN 5.14. *Sea X un espacio vectorial complejo. Una seminorma en X es una función $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

- (i) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ para todo $x, y \in X$
- (ii) $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ para todo $x \in X$.

TEOREMA 5.15 (Hahn - Banach para un espacio vectorial en el caso complejo). *Sea X un espacio vectorial complejo y sea $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ una seminorma. Sea M una variedad lineal propia de X y sea $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ un funcional lineal tal que $|f(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in M$.*

Entonces existe un funcional lineal $F : X \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

- (i) $F(x) = f(x)$ para todo $x \in M$
- (ii) $|F(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in X$.

DEMOSTRACIÓN. Para $x \in M$ sea $u(x) = \operatorname{Re} f(x)$, por la Proposición 5.11 sabemos que

$$f(x) = u(x) - iu(ix).$$

Entonces

$$u(x) = \operatorname{Re} f(x) \leq |f(x)| \leq p(x).$$

X puede ser considerado como un espacio vectorial real. Por el teorema de Hahn-Banach para el caso real, existe un funcional lineal $U : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $U(x) = u(x)$ para todo $x \in M$ y $U(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$.

Sea

$$F(x) = U(x) - iU(ix).$$

Notemos que F extiende a f porque U extiende a u (pruébelo).

Por la Proposición 5.13

$$|F(x)| = U(e^{-i\alpha(x)}x).$$

De donde

$$|F(x)| = U(e^{-i\alpha(x)}x) \leq p(e^{-i\alpha(x)}x) = |e^{-i\alpha(x)}|p(x) = p(x).$$

□

2.2. Teorema de Hahn - Banach para espacios normados.

Sea X un espacio normado y M un subespacio de X . Sea $f \in M^*$ y F una extensión de f a X tal que $F \in X^*$. ¿Cómo se relacionan las normas de ambos funcionales?

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1, x \in M} |f(x)| \leq \sup_{\|x\|=1, x \in X} |F(x)| = \|F\|.$$

Es decir, “si el espacio crece entonces la norma sólo puede crecer o mantenerse igual”.

¿Se podrá conseguir una extensión tal que la norma no crezca?

PROPOSICIÓN 5.16. *Sea X un espacio vectorial complejo y normado. Dado $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal real y continuo, consideremos el funcional lineal complejo $f(x) = u(x) - iu(ix)$. Entonces f es continuo y*

$$\|f\| = \|u\|.$$

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 5.13

$$|f(x)| = u(e^{-i\alpha(x)}x) \leq \|u\| \|x\|.$$

De donde f es continuo y $\|f\| \leq \|u\|$.

Por otro lado

$$|u(x)| \leq \sqrt{(u(x))^2 + (u(ix))^2} = |f(x)| \leq \|f\| \|x\|.$$

De donde $\|u\| \leq \|f\|$.

□

COROLARIO 5.17 (Hahn-Banach para un espacio normado).

Sean X un \mathbb{K} -espacio normado, M un subespacio propio de X y $f : M \rightarrow \mathbb{K}$ un funcional lineal continuo. Entonces existe un funcional lineal continuo $F : X \rightarrow \mathbb{K}$ tal que

- (i) $F(x) = f(x)$ para todo $x \in M$
- (ii) $\|F\| = \|f\|$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$p(x) = \|f\| \|x\|.$$

Tenemos que p es un funcional sublineal y es una seminorma.

Veamos el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Claramente

$$f(x) \leq |f(x)| \leq \|f\| \|x\| = p(x)$$

si $x \in M$. Por el Teorema 5.9 existe una extensión lineal F a X tal que $F(x) \leq p(x)$ si $x \in X$. Tenemos que

$$-F(x) = F(-x) \leq p(-x) = p(x).$$

De donde $-p(x) \leq F(x)$. Y así

$$|F(x)| \leq p(x) = \|f\| \|x\|.$$

De donde F es acotado y $\|F\| \leq \|f\|$.

Como F extiende a f tenemos que $\|f\| \leq \|F\|$.

Por lo tanto $\|F\| = \|f\|$.

El caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ es sencillo (pruébelo usando el Teorema 5.15).

□

Hasta ahora no sabemos si en un espacio normado cualquiera existen funcionales lineales continuas no triviales. Como consecuencia del teorema de Hahn - Banach tendremos que existen muchos funcionales lineales continuos en un espacio normado X . Más precisamente, un corolario de este teorema es: Si X es un espacio vectorial normado no trivial entonces el dual no es trivial.

COROLARIO 5.18. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea $x_o \in X$, $x_o \neq 0$ entonces existe $F \in X^*$ tal que $F(x_o) = \|x_o\| \neq 0$ y $\|F\| = 1$.

DEMOSTRACIÓN. Sea M es el subespacio generado por x_o : $M = \{\lambda x_o : \lambda \text{ es escalar}\}$. Definimos un funcional lineal en M por

$$f(\lambda x_o) = \lambda \|x_o\|.$$

Entonces

$$|f(\lambda x_o)| = |\lambda| \|x_o\| = \|\lambda x_o\|.$$

De donde f es continua y $\|f\| \leq 1$.

Como $f(x_o) = \|x_o\|$ entonces

$$1 = \frac{|f(x_o)|}{\|x_o\|} \leq \sup_{x \in M} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \|f\|.$$

Por lo tanto $\|f\| = 1$.

Por el Corolario 5.17 tenemos que f se puede extender a $F \in X^*$ tal que

$$\|F\| = \|f\| = 1.$$

□

COROLARIO 5.19. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea $x_o \in X$. Si $F(x_o) = 0$ para todo $F \in X^*$ entonces $x_o = 0$.

COROLARIO 5.20. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, sea M un subespacio (cerrado) de X y sea $x_o \in X$ tal que $d = \text{dist}(x_o, M) > 0$, entonces existe $F \in X^*$ tal que

$$F(M) = \{0\}, \quad F(x_o) = 1, \quad \|F\| = 1/d.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea V el subespacio generado por M y $\{x_o\}$. Sea $x \in V$ entonces existen $m \in M$ y λ escalar, tales que $x = m + \lambda x_o$. Definimos $f : V \rightarrow \mathbb{K}$ por

$$f(x) = \lambda.$$

Es claro que $f(M) = \{0\}$ y $f(x_o) = 1$. También se tiene que f es lineal (pruébelo).

Si $x = m + \lambda x_o$ con $m \in M$ y $\lambda \neq 0$ entonces

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |\lambda| = d|\lambda|/d \leq \|m/\lambda + x_o\| |\lambda|/d \\ &= \|m + \lambda x_o\|/d = \|x\|/d. \end{aligned}$$

Si $x = m + \lambda x_o$ con $m \in M$ y $\lambda = 0$ entonces

$$|f(x)| = |f(m)| = 0 \leq \|x\|/d.$$

Luego f es continua y

$$\|f\| \leq 1/d.$$

Para probar que en realidad vale la igualdad procedemos de la siguiente manera. Sea $\varepsilon > 0$ entonces existe $m_o \in M$ tal que

$$\|m_o - x_o\| < d + \varepsilon.$$

Sea

$$x_1 = \frac{m_o - x_o}{\|m_o - x_o\|}$$

entonces $x_1 \in V$, $\|x_1\| = 1$ y

$$|f(x_1)| = \frac{|f(m_o - x_o)|}{\|m_o - x_o\|} = \frac{|-1|}{\|m_o - x_o\|} > \frac{1}{d + \varepsilon}.$$

Como $d \neq 0$ y esto es cierto para todo $\varepsilon > 0$ concluimos que

$$|f(x_1)| \geq 1/d.$$

Luego

$$\|f\| = \sup_{x \in X} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \geq 1/d.$$

Tenemos que

$$\|f\| = 1/d.$$

Del Corolario 5.17 se obtiene el resultado.

□

Ejercicios 5.

(1) Sean X un espacio vectorial normado y $f \in X^*$. Demostrar que:

(a) $\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$

(b) $\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$

(c) $\|f\| = \sup_{\|x\|=1} f(x)$, si el espacio X es real.

(2) Sea $F : c \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$F(\{x_n\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

(a) Demostrar que F es un funcional lineal y continuo

(b) Estimar su norma.

(3) Demostrar que:

(a) si $\{x_n\} \in l_2$ entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$$

converge.

(b) si $T : l_2 \rightarrow \mathbb{R}$ se define por

$$T(\{x_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$$

entonces T es un funcional lineal continuo.

Además dé un estimado su norma.

(4) Demostrar que las siguientes funcionales f son lineales continuas y estimar sus normas.

(a) Para $g \in C[-1, 1]$ sea

$$f(g) = 2(g(1) - g(0)).$$

(b) Para $g \in C[-1, 1]$ sea

$$f(g) = \int_0^1 g(s) ds.$$

(c) Para $a = \{a_n\}_{n \geq 1} \in l^2$ sea

$$f(a) = a_1 + a_2.$$

(d) Para $a = \{a_n\}_{n \geq 1} \in c$ sea

$$f(a) = a_1 + a_2.$$

(5) Sea X un espacio vectorial normado. Sea $\{f_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión en X^* .

Demostrar que $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge en X^* si y sólo si $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge uniformemente en la clausura de $B(0, 1)$.

(6) Sea X un espacio vectorial normado. Sean $x, y \in X$, $x \neq y$.

Demostrar que existe $f \in X^*$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

(7) Sea X un espacio vectorial normado y sea $x \in X$. Demostrar que

$$\|x\| = \sup_{f \in X^*, \|f\|=1} |f(x)|.$$

(8) Sea X un espacio vectorial normado.

Demostrar que si X es de dimensión infinita entonces X^* también lo es.

(9) Sean X, Y dos espacios normados (sobre el mismo cuerpo de escalares).

Sea $T \in L(X, Y)$. Demuestre que

$$\|T\| = \sup\{|g(T(x))| : x \in X, g \in Y^*, \|x\| \leq 1, \|g\| \leq 1\}.$$

- (10) Sea X un espacio de Banach. Investigue qué quiere decir que X sea separable.
- (11) Demostrar que si X^* es separable entonces X es separable.
- (12) (*) Sean X, Y espacios normados, $X \neq \{0\}$.
Demostrar que si $L(X, Y)$ es un espacio de Banach entonces Y es de Banach.
- (13) (**) Límite generalizado de Banach:
Demostrar que existe $\Phi : l_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ lineal y continuo tal que:

- (a) $\|\Phi\| = 1$.
- (b) $\Phi(x_1, x_2, \dots) \geq 0$ si $x_j \geq 0$ para todo j .
- (c) $\Phi(x_1, x_2, \dots) = \Phi(x_2, x_3, \dots)$
- (d) Si $\{x_n\}$ converge entonces $\Phi(x_1, x_2, \dots) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.
- (e) $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \Phi(x_1, x_2, \dots) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Indicación:

- (i) Sea

$$M_o = \{(x_1, x_2, \dots) \in l_\infty : \text{existe } K \text{ tal que } |x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq K \text{ para todo } n \geq 1\}$$

Demuestre que: M_o es una variedad lineal

- (ii) Sea $e = (1, 1, 1, \dots)$.
Demuestre que: $e \in l_\infty$, $e \notin M_o$ y $\text{dist}(e, M_o) = 1$.
- (iii) Demuestre que existe $\Phi \in l_\infty^*$ tal que:
 $\Phi(e) = 1$,
 $\Phi(x) = 0$ para todo $x \in M_o$ y
 $\|\Phi\| = 1$.
- (iv) Demostrar que Φ satisface (a), (b), (c), (d) y (e).

(14) (**) EL DUAL DEL ESPACIO DE LAS FUNCIONES CONTINUAS.

Utilizando el teorema de Hahn Banach se puede probar el teorema de representación de Riesz para los funcionales lineales continuos en $C[a, b]$.

El enunciado de este teorema es el siguiente.

Teorema de Representación de Riesz

Sea X un espacio métrico compacto. A cada funcional lineal y continuo ϕ en $C(X, \mathbb{R})$ le corresponde una única medida μ en X de Borel tal que para todo $f \in C(X, \mathbb{R})$

$$\phi(f) = \int_X f d\mu.$$

Además $\|\phi\| = |\mu|(X)$.

Lea sobre este tema en algún libro de Análisis Funcional. Puede consultar el libro de Kolmogorov-Fomin (pág. 413), el libro de Rudin (pág. 189), el libro de Cotlar-Cignoli (pág. 313) o algún otro libro.

CAPÍTULO 6

Bases de Schauder.

1. Resultados básicos.

Sea X un espacio vectorial sobre el cuerpo de escalares \mathbb{K} (donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

DEFINICIÓN 6.1. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Una sucesión $\{v_n\}_{n \geq 1}$ en X es una *base de Schauder* de X si para cada vector $\alpha \in X$ existe una única sucesión de escalares $\{\alpha_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{K}$ tal que

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n v_n \quad \text{en } \|\cdot\|.$$

Un espacio X con una base de Schauder $\{v_n\}_{n \geq 1}$ puede ser considerado como un espacio de sucesiones identificando cada $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n v_n$ con la única sucesión de coeficientes $\{\alpha_n\}_{n \geq 1}$.

Es importante notar que para describir una base de Schauder hay que definir los vectores de la base no sólo como un conjunto, sino que como una sucesión ordenada.

Sea

$$(6.1) \quad e^n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$$

donde 1 se encuentra en el n -ésimo lugar.

EJEMPLO 6.2. Si $1 \leq p < \infty$ entonces $\{e^n\}_{n \geq 1}$ es una base de Schauder de l_p .

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach con base de Schauder $\{v_n\}_{n \geq 1}$. Para cada $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n v_n$ en X la expresión

$$\|\|\alpha\|\| = \sup_{N \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n v_n \right\|$$

es finita.

PROPOSICIÓN 6.3.

- (i) $\|\|\cdot\|\|$ es una norma en X .
- (ii) $\|\alpha\| \leq \|\|\alpha\|\|$ para todo $\alpha \in X$.

$$(iii) |\alpha_n| \leq 2\|\alpha\|/\|v_n\|.$$

DEMOSTRACIÓN. Solamente probaremos (iii), lo demás queda como ejercicio.

Si $\alpha \in X$ y $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n v_n$ entonces

$$\alpha_n v_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k v_k.$$

Luego

$$\|\alpha_n v_n\| \leq 2\|\alpha\|.$$

De esta expresión sigue la desigualdad (iii). □

TEOREMA 6.4. $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.

DEMOSTRACIÓN. Veamos que $(X, \|\cdot\|)$ es completo.

Sea $\{\alpha^N\}_{N \geq 1}$ una sucesión de Cauchy en $(X, \|\cdot\|)$. Entonces para cada N existe $\{\alpha_n^N\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{K}$ tal que

$$\alpha^N = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^N v_n \quad \text{en } \|\cdot\|.$$

De la Proposición 6.3 (iii), sigue que $\{\alpha_n^N\}_{N \geq 1}$ es una sucesión de escalares que es de Cauchy en $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ (pruébelo). Como \mathbb{K} es completo entonces $\{\alpha_n^N\}_{N \geq 1}$ converge. Sea

$$\beta_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \alpha_n^N \quad \text{en } \mathbb{K}.$$

Vamos a probar que:

- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n v_n$ converge en $\|\cdot\|$ a algún punto $\beta \in X$,
- (ii) $\lim_{N \rightarrow \infty} \|\alpha^N - \beta\| = 0$.

Veámoslo.

(i) Como $\{\alpha^N\}_{N \geq 1}$ una sucesión de Cauchy en $\|\cdot\|$ tenemos que dado $\varepsilon > 0$ existe $N_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\alpha^N - \alpha^M\| < \varepsilon/4 \quad \text{si } N, M \geq N_o.$$

Si $i, j \in \mathbb{N}$ entonces

$$\sum_{n=i}^{i+j} (\alpha_n^N - \alpha_n^M) v_n = \sum_{n=1}^{i+j} (\alpha_n^N - \alpha_n^M) v_n - \sum_{n=1}^{i-1} (\alpha_n^N - \alpha_n^M) v_n.$$

De donde

$$\left\| \sum_{n=i}^{i+j} (\alpha_n^N - \alpha_n^M) v_n \right\| \leq 2 \|\alpha^N - \alpha^M\| < \varepsilon/2.$$

Tomando límite cuando $M \rightarrow \infty$ se obtiene que

$$\left\| \sum_{n=i}^{i+j} (\alpha_n^N - \beta_n) v_n \right\| < \varepsilon/2$$

si $N \geq N_o$.

Como

$$\alpha^{N_o} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{N_o} v_n \quad \text{en } \|\cdot\|,$$

obviamente esta serie es convergente en $\|\cdot\|$. Luego existe $i_o \in \mathbb{N}$ tal que para $i \geq i_o$ y $j \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\left\| \sum_{n=i}^{i+j} \alpha_n^{N_o} v_n \right\| < \varepsilon/2.$$

Luego

$$\left\| \sum_{n=i}^{i+j} \beta_n v_n \right\| \leq \left\| \sum_{n=i}^{i+j} (\beta_n - \alpha_n^{N_o}) v_n \right\| + \left\| \sum_{n=i}^{i+j} \alpha_n^{N_o} v_n \right\| < \varepsilon.$$

Por lo tanto existe $\beta \in X$ tal que

$$\beta = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n v_n \quad \text{en } \|\cdot\|.$$

Hemos probado (i).

(ii) Por definición de $\|\cdot\|$ tenemos que

$$\left\| \sum_{n=1}^j (\alpha_n^N - \alpha_n^M) v_n \right\| \leq \|\alpha^N - \alpha^M\|.$$

Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $N_o \in \mathbb{N}$ tal que $\|\alpha^N - \alpha^M\| < \varepsilon$ si $N, M \geq N_o$.

Luego para todo $j \in \mathbb{N}$:

$$\left\| \sum_{n=1}^j (\alpha_n^N - \alpha_n^M) v_n \right\| < \varepsilon,$$

si $N, M \geq N_o$.

Tomando límite cuando $M \rightarrow \infty$ obtenemos que para todo $j \in \mathbb{N}$:

$$\left\| \sum_{n=1}^j (\alpha_n^N - \beta_n) v_n \right\| < \varepsilon,$$

si $N \geq N_o$.

Tomando supremo en j obtenemos

$$\|\alpha^N - \beta\| \leq \varepsilon$$

si $N \geq N_o$. Hemos probado (ii).

De (ii) se sigue que $\{\alpha^N\}_{N \geq 1}$ converge en $(X, \|\cdot\|)$.

□

TEOREMA 6.5. Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $\{v_n\}_{n \geq 1}$ una base de Schauder de X . Para cada $k \in \mathbb{N}$ sea $f_k : X \rightarrow \mathbb{K}$ dada por

$$f_k(\alpha) = \alpha_k.$$

para $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n v_n$ (f_k es la k -ésima proyección). Entonces f_k es un funcional lineal y continuo en $(X, \|\cdot\|)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\alpha \in X$, si $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n v_n$ entonces

$$|f_k(\alpha)| = |\alpha_k| \leq \frac{1}{\|v_k\|} 2 \|\alpha\|.$$

□

2. El dual de l_p para $1 < p < \infty$.

Vamos a ver una caracterización de l_p^* para $1 < p < \infty$.

OBSERVACIÓN 6.6. Dado $1 < p < \infty$ sea q el índice conjugado de p , esto es $1/p + 1/q = 1$. Por la desigualdad de Hölder, si $x = (x_n)_{n \geq 1} \in l_p$, $y = (y_n)_{n \geq 1} \in l_q$ se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \right)^{1/q} = \|x\|_p \|y\|_q.$$

PROPOSICIÓN 6.7. Dado $1 < p < \infty$. Para $y = (y_n)_{n \geq 1} \in l_q$ sea $f_y : l_p \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

para cada $x = (x_n)_{n \geq 1} \in l_p$. Entonces

- (a) f_y es un funcional lineal en l_p .
- (b) f_y es un funcional continuo tal que

$$\|f_y\| \leq \|y\|_q.$$

La demostración de esta proposición queda como ejercicio.

Con esta proposición hemos pasado de la sucesión de l_q a un funcional lineal en l_p .

TEOREMA 6.8. Dado $1 < p < \infty$ se tiene que l_p^* es isomorfo a l_q , donde q es el índice conjugado de p .

DEMOSTRACIÓN. Sea $F : l_q \rightarrow l_p^*$ definida por

$$F(y) = f_y.$$

Es claro que si $y \in l_q$ entonces $f_y \in l_p^*$ por lo tanto F está bien definida.

Vamos a probar que F es un isomorfismo isométrico, es decir:

- (a) F es lineal,
- (b) F es inyectiva,
- (c) F es sobreyectiva,
- (d) F es isométrica.

Es fácil probar que se cumple (a) (hágalo). Además se tiene que (d) implica (b). Por lo tanto, basta probar (c) y (d).

(c) Veamos que F es sobreyectiva.

Sean $f \in l_p^*$ y e^n como en (6.1).

Definimos $y = (y_n)_{n \geq 1}$ donde $y_n = f(e^n)$. Claramente

$$f_y(e^n) = f(e^n).$$

Veamos que $y \in l_q$.

Si $n_o \in \mathbb{N}$ y $x = (x_n)_{n \geq 1} \in l_p$ es tal que $x_n = 0$ para cada $n > n_o$ entonces

$$x = \sum_{n=1}^{n_o} x_n e^n \quad f(x) = \sum_{n=1}^{n_o} x_n y_n.$$

Como $f \in l_p^*$ tenemos que

$$(6.2) \quad \left| \sum_{n=1}^{n_o} x_n y_n \right| = |f(x)| \leq \|f\| \|x\|_p = \|f\| \left(\sum_{n=1}^{n_o} |x_n|^p \right)^{1/p}.$$

En particular para la siguiente sucesión

$$x_n = \begin{cases} \text{sig}(y_n) |y_n|^{q-1} & \text{si } n \leq n_o \\ 0 & \text{si } n > n_o \end{cases}$$

Luego $x_n y_n = |y_n|^q$. Por la desigualdad (6.2) tenemos que

$$\sum_{n=1}^{n_o} |y_n|^q = \left| \sum_{n=1}^{n_o} \text{sig}(y_n) |y_n|^{q-1} y_n \right| \leq \|f\| \left(\sum_{n=1}^{n_o} |y_n|^{(q-1)p} \right)^{1/p}$$

Como $(q-1)p = pq - p = q$.

$$\sum_{n=1}^{n_o} |y_n|^q \leq \|f\| \left(\sum_{n=1}^{n_o} |y_n|^q \right)^{1/p}.$$

De donde

$$\left(\sum_{n=1}^{n_o} |y_n|^q \right)^{1/q} = \left(\sum_{n=1}^{n_o} |y_n|^q \right)^{1-1/p} \leq \|f\|.$$

Tenemos pues una sucesión monótona creciente y acotada superiormente, así que tiene límite. Es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \text{ converge.}$$

Por lo tanto $y = \{y_n\}_{n \geq 1} \in l_q$ además $\|y\|_q \leq \|f\|$.

Como las combinaciones lineales finitas de los e^n son densas en l_p se tiene que $f = f_y$. Esto demuestra la sobreyectividad.

(d) Tenemos que

$$\|y\|_q \leq \|f\| = \|f_y\| \leq \|y\|_q.$$

Y así

$$\|F(y)\| = \|y\|_q.$$

Por lo tanto F es isométrica.

□

COROLARIO 6.9. Dado $1 < p < \infty$ se tiene que l_p^{**} es isomorfo a l_p .

3. El dual de l_1 .

Vamos a ver una caracterización de l_1^* .

OBSERVACIÓN 6.10. Si $x = (x_n)_{n \geq 1} \in l_1$, $y = (y_n)_{n \geq 1} \in l_\infty$ se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \sup_{n \geq 1} |y_n| \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|y\|_\infty \|x\|_1.$$

PROPOSICIÓN 6.11. Para $y = (y_n)_{n \geq 1} \in l_\infty$ sea $f_y : l_1 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

para cada $x = (x_n)_{n \geq 1} \in l_1$. Entonces

(a) f_y es un funcional lineal en l_1 .

(b) f_y es un funcional continuo tal que

$$\|f_y\| \leq \|y\|_\infty.$$

La demostración de esta proposición queda como ejercicio.

Con esta proposición hemos pasado de la sucesión de l_∞ a un funcional lineal en l_1 .

TEOREMA 6.12. l_1^* es isomorfo a l_∞ .

DEMOSTRACIÓN. Sea $F : l_\infty \rightarrow l_1^*$ definida por

$$F(y) = f_y.$$

Es claro que si $y \in l_\infty$ entonces $f_y \in l_1^*$ por lo tanto F está bien definida.

Se debe probar que F es un isomorfismo isométrico, es decir:

- (a) F es lineal,
- (b) F es inyectiva,
- (c) F es sobreyectiva,
- (d) F es isométrica.

Es fácil probar que se cumple (a) (hágalo). Además se tiene que (d) implica (b). Por lo tanto, basta probar (c) y (d).

(c) Veamos que F es sobreyectiva.

Sean $f \in l_1^*$ y e^n como en (6.1).

Definimos $y = (y_n)_{n \geq 1}$ donde $y_n = f(e^n)$. Claramente

$$f_y(e^n) = f(e^n).$$

Se debe probar que $y \in l_\infty$.

Cómo $y_n = f(e^n)$ tenemos que

$$|y_n| = |f(e^n)| \leq \|f\| \|e^n\|_1 = \|f\|.$$

Cómo las combinaciones lineales finitas de los e^n son densas en l_1 se tiene que $f = f_y$. Así queda demostrada la sobreyectividad.

(d) Finalmente

$$\|y\|_\infty \leq \|f\| = \|f_y\| \leq \|y\|_\infty.$$

Y así

$$\|F(y)\| = \|y\|_\infty.$$

Por lo tanto F es isométrica.

□

Ejercicios 6.

(1) Dar un ejemplo de una base de Schauder para los siguientes espacios:

- (i) c ,
- (ii) c_o ,
- (iii) l_p para $1 \leq p < \infty$.

(2) Demostrar que todo espacio de Banach con base de Schauder es separable.

(3) Construcción de una base de Schauder para el espacio $C[0, 1]$:

Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ 2(1-t) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sean

f_2 la restricción de g a $[0, 1]$,

f_3 la restricción de $g(2t)$ a $[0, 1]$,

f_4 la restricción de $g(2t-1)$ a $[0, 1]$.

Para $k = 1, \dots, 2^n$, f_{2^n+k} denotará la restricción de $g(2^n t - k + 1)$ al intervalo $[0, 1]$.

(a) Sea

$$C_o[0, 1] = \{f \in C[0, 1] : f(0) = f(1) = 0\}.$$

Demostrar que $\{f_2, f_3, \dots\}$ es una base de Schauder de $C_o[0, 1]$.

(b) Sean

$$f_o(t) = t,$$

$$f_1(t) = 1 - t.$$

Demostrar que $\{f_o, f_1, \dots\}$ es una base de Schauder de $C[0, 1]$.

(4) Demostrar que:

(a) l_1^* es isomorfo a l_∞ .

(b) c_o^* es isomorfo a l_1 .

Ayuda: ver libro de Kolmogorov, Fomin en la página 197.

(5) (a) Demostrar que l_∞ NO es separable.

(b) Demostrar que si $1 \leq p < \infty$ entonces l_p es separable.

(c) ¿El espacio c será separable?

(d) ¿El espacio c_o será separable?

(6) Sabemos que si X^* es separable entonces X es separable.

¿Es válida la afirmación inversa?

(7) Demostrar que el l_∞^* no es isomorfo a l_1 .

Ayuda: ver libro de Dunford, Schwarz, volumen 1, en la página 296.

CAPÍTULO 7

Los teoremas fundamentales.

En este capítulo presentaremos el teorema de categoría de Baire, el teorema de la aplicación abierta, el teorema del gráfico cerrado, el principio de acotación uniforme y el teorema de Banach-Steinhaus. Estos teoremas son considerados los pilares fundamentales del análisis funcional.

1. El teorema de categoría de Baire.

En esta sección daremos el teorema de Baire el cual se usa en la demostración del teorema de la aplicación abierta. Sin embargo para probarlo necesitaremos hacer uso del teorema de intersección de Cantor.

DEFINICIÓN 7.1. Sea (X, d) un espacio métrico. Sea $F \subset X$, el *diámetro* del conjunto F es el número

$$\text{diam}(F) = \sup_{x, y \in F} d(x, y).$$

PROPOSICIÓN 7.2.

- (i) Si $A \subset B$ entonces $\text{diam}(A) \leq \text{diam}(B)$.
- (ii) Si $\text{diam}(A) = 0$ entonces $A = \emptyset$ o A contiene un único punto.

TEOREMA 7.3 (Teorema de intersección de Cantor).

Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $\{F_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión decreciente de subconjuntos no vacíos y cerrados de X tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(F_n) = 0$$

entonces

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

contiene exactamente un punto.

DEMOSTRACIÓN. Para cada $k \geq 1$ sea x_k un punto de F_k .

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(F_n) = 0$ se tiene que existe N tal que $\text{diam}(F_n) < \varepsilon$ si $n \geq N$.

Sean $m \geq n > N$. Tenemos que $x_n \in F_n$ y $x_m \in F_m \subset F_n$. Luego

$$d(x_m, x_n) \leq \text{diam}(F_n) < \varepsilon.$$

Por lo tanto $\{x_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión de Cauchy.

Como X es completo existe $x \in X$ tal que

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Como para todo n , F_n es cerrado y x es un punto de acumulación de F_n se sigue que $x \in F_n$. Luego

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Luego $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ contiene al menos un punto.

Por otro lado para todo k :

$$0 \leq \text{diam} \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \right) \leq \text{diam}(F_k) \rightarrow 0.$$

Luego

$$\text{diam} \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \right) = 0.$$

Por lo tanto

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}.$$

□

Sea (X, d) un espacio métrico.

DEFINICIÓN 7.4. Sea A un subconjunto de un espacio métrico X , se dice A es *nunca denso* en X cuando

$$\text{int}(\overline{A}) = \emptyset.$$

EJEMPLO 7.5.

- (a) Un conjunto formado por un solo punto es nunca denso.
- (b) \mathbb{Z} es nunca denso en \mathbb{R} .
- (c) El conjunto de Cantor es un conjunto nunca denso en el intervalo $[0,1]$. Es importante notar que la cardinalidad del conjunto de Cantor es la del continuo, este ejemplo muestra que nunca denso NO implica numerable.

OBSERVACIÓN 7.6. \mathbb{Q} NO es nunca denso en \mathbb{R} porque

$$\text{int}(\overline{\mathbb{Q}}) = \text{int}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}.$$

OBSERVACIÓN 7.7. Los conjuntos nunca densos no contienen bolas abiertas.

OBSERVACIÓN 7.8. El recíproco de la observación 7.7 es falso porque \mathbb{Q} NO contiene bolas abiertas y sin embargo \mathbb{Q} NO es nunca denso en \mathbb{R} .

OBSERVACIÓN 7.9. Hemos dicho que \mathbb{Q} NO es nunca denso en \mathbb{R} . Por otro lado \mathbb{Q} es denso en \mathbb{R} porque $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Es natural preguntarse cuál es la relación entre denso y nunca denso. Podríamos preguntarnos si nunca denso es la negación de denso, la respuesta va a ser NO tal como lo muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 7.10. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ entonces

$$\text{int}(\overline{(a, b)}) = \text{int}[a, b] = (a, b) \neq \emptyset.$$

Luego (a, b) NO es nunca denso en \mathbb{R} .

Pero (a, b) tampoco es denso en \mathbb{R} , porque

$$\overline{(a, b)} = [a, b] \neq \mathbb{R}.$$

OBSERVACIÓN 7.11. Una relación entre denso y nunca denso está dada por la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 7.12. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$, entonces A es nunca denso si y sólo si $X - \overline{A}$ es denso en X .

DEMOSTRACIÓN. Para todo $B \subset X$ tenemos que

$$X - \text{int}(B) = \overline{X - B},$$

luego

$$\text{int}(B) = X - \overline{X - B}.$$

Tomando $B = \overline{A}$ resulta que

$$\text{int}(\overline{A}) = X - \overline{X - \overline{A}}.$$

Por lo tanto:

$$\text{int}(\overline{A}) = \emptyset \quad \text{si y sólo si} \quad \overline{X - \overline{A}} = X \quad \text{si y sólo si} \quad X - \overline{A} \text{ es denso en } X.$$

□

OBSERVACIÓN 7.13. Ya sabemos que \mathbb{Q} NO es nunca denso, sin embargo notemos que \mathbb{Q} se puede expresar como la unión numerable de conjuntos nunca densos.

DEFINICIÓN 7.14. Un conjunto es de *primera categoría* o *magro* cuando puede expresarse como la unión numerable de conjuntos nunca densos.

EJEMPLO 7.15. \mathbb{Q} es de primera categoría.

DEFINICIÓN 7.16. Un conjunto es de *segunda categoría* o *no magro* cuando no es de primera categoría.

Antes de dar ejemplos de conjuntos de segunda categoría vamos a dar algunos resultados.

PROPOSICIÓN 7.17. *Sea X un espacio métrico. Sea A un conjunto nunca denso y B una bola abierta entonces existe una bola cerrada B_o tal que*

$$B_o \subset B, \quad B_o \cap A = \emptyset.$$

Además dado $\delta > 0$ podemos tomar $\text{diam}(B_o) < \delta$.

DEMOSTRACIÓN. Como $\text{int}(\overline{A}) = \emptyset$ y B es una bola abierta entonces B no está contenida en \overline{A} , luego existe $x \in B$ tal que $x \notin \overline{A}$.

Como $x \notin \overline{A}$ y \overline{A} es cerrado tenemos que existe $r > 0$ tal que

$$B(z, r) \cap A = \emptyset.$$

Tomando r suficientemente pequeño podemos llegar a que

$$\overline{B(z, r)} \subset B, \quad \overline{B(z, r)} \cap A = \emptyset.$$

Dado $\delta > 0$ sea $r < \delta/2$. Entonces

$$\text{diam}(\overline{B(z, r)}) < \delta.$$

□

El siguiente teorema dice que los conjuntos nunca densos son tan “delgados” que ni siquiera una cantidad numerable de ellos es suficiente para cubrir una bola de un espacio métrico.

TEOREMA 7.18 (Teorema de categoría de Baire).

Sea X un espacio métrico completo y sea $\{A_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de subconjuntos de X tal que cada A_n es nunca denso. Entonces existe $x \in X$ tal que

$$x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

DEMOSTRACIÓN. Usaremos la Proposición anterior.

Como A_1 es nunca denso entonces existe una bola cerrada B_1 tal que

$$B_1 \cap A_1 = \emptyset \quad \text{y} \quad \text{diam}(B_1) < 1.$$

Como A_2 es nunca denso entonces $\text{int}(B_1)$ contiene una bola cerrada B_2 tal que

$$B_2 \cap A_2 = \emptyset \quad \text{y} \quad \text{diam}(B_2) < 1/2.$$

Consideramos $\text{int}(B_2)$ y repetimos la construcción.

Así obtenemos una sucesión decreciente de conjuntos cerrados $\{B_n\}_{n \geq 1}$ tales que

(i) $B_n \neq \emptyset$ para todo $n \geq 1$.

(ii) $\text{diam}(B_n) < 1/n$ para todo $n \geq 1$.

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(B_n) = 0$.

(iv) $B_n \cap A_n = \emptyset$ para todo $n \geq 1$.

Por el teorema de intersección de Cantor existe

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Para cualquier n tenemos que $x \in B_n$ y de (iv) sigue que $x \notin A_n$. De donde

$$x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

□

COROLARIO 7.19. *Sea X un espacio métrico completo y sea $\{A_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de subconjuntos de X tal que*

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Entonces existe n_o tal que A_{n_o} no es nunca denso, es decir,

$$\text{int}(\overline{A_{n_o}}) \neq \emptyset.$$

COROLARIO 7.20. *Los espacios métricos completos son de segunda categoría.*

EJEMPLO 7.21. \mathbb{R} es de segunda categoría.

Los Corolarios anteriores son simplemente otras formas de enunciar el Teorema de categoría de Baire, el último de ellos justifica el nombre.

2. El teorema de la aplicación abierta.

DEFINICIÓN 7.22. Sean X e Y espacios normados y $T : X \rightarrow Y$ un operador. Decimos que T es una *aplicación abierta* cuando A abierto en X implica que $T(A)$ es abierto en Y .

El teorema de la aplicación abierta da:

- (a) condiciones para que un operador lineal sea abierto
- (b) condiciones para que un operador lineal tenga inverso continuo.

Para demostrarlo necesitaremos hacer uso del siguiente lema.

LEMA 7.23. Sean X, Y espacios de Banach, sea $T \in L(X, Y)$. Si T es sobreyectivo entonces existe $r > 0$ tal que

$$B(0, r) \subset T(B(0, 1)).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $B_n = B(0, 1/2^n)$ entonces

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} k B_1.$$

Como T es sobreyectivo

$$Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} k T(B_1).$$

Por uno de los corolarios del teorema de Categoría de Baire (Corolario 7.19), tenemos que $T(B_1)$ no es nunca denso. Es decir,

$$\text{int}(\overline{T(B_1)}) \neq \emptyset.$$

Luego existen $z \in Y$, $\eta > 0$ tales que

$$B(z, \eta) \subset \overline{T(B_1)}.$$

De donde

$$B(0, \eta) \subset \overline{T(B_1)} - z.$$

Luego

$$B(0, \eta) \subset \overline{T(B_1)} - z \subset \overline{T(B_1)} - T(B_1) = 2\overline{T(B_1)} = \overline{T(B_0)}.$$

De donde

$$B(0, \eta/2^n) \subset \overline{T(B_n)}.$$

A continuación probaremos que

$$B(0, \eta/2) \subset T(B_0),$$

con esto se habrá probado el lema.

Sea

$$y \in B(0, \eta/2) \subset \overline{T(B_1)},$$

entonces existe $x_1 \in B_1$ tal que

$$\|y - T(x_1)\| < \eta/2^2.$$

Luego

$$y - T(x_1) \in B(0, \eta/2^2) \subset \overline{T(B_2)}$$

entonces existe $x_2 \in B_2$ tal que

$$\|y - T(x_1) - T(x_2)\| < \eta/2^3.$$

Luego

$$y - T(x_1) - T(x_2) \in B(0, \eta/2^3) \subset \overline{T(B_3)}.$$

Así sucesivamente ...

De esta manera se construye una sucesión $\{x_n\}_{n \geq 1}$ tal que $x_n \in B_n$ y

$$\left\| y - \sum_{k=1}^n T(x_k) \right\| < \eta/2^{n+1}.$$

Por lo tanto

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} T(x_k).$$

Como

$$x_k \in B_k = B(0, 1/2^k)$$

entonces

$$\|x_k\| < 1/2^k.$$

De donde $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge. Sea

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

Entonces

$$\|x\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1.$$

Luego $x \in B_o$. Además

$$T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} T(x_k) = y.$$

Por lo tanto $y \in T(B_o)$.

□

TEOREMA 7.24 (Teorema de la aplicación abierta, Open mapping theorem).

Sean X, Y espacios de Banach. Sea $T \in L(X, Y)$.

- (a) Si T es sobreyectivo entonces T es abierto.
- (b) Si T es biyectivo entonces T^{-1} es continuo.

DEMOSTRACIÓN.

Para probar (a) consideremos $A \subset X$, A abierto.

Sea $y \in T(A)$ entonces existe $x \in A$ tal que

$$y = T(x).$$

Como A es abierto existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset A$.

Por el Lema 7.23 y por la linealidad de T existe $\rho > 0$ tal que

$$B(0, \rho) \subset T(B(x, \delta)).$$

Luego

$$\begin{aligned} B(y, \rho) &= y + B(0, \rho) \\ &\subset T(x) + T(B(x, \delta)) \\ &= T(x + B(x, \delta)) \\ &= T(B(x, \delta)) \\ &\subset T(A). \end{aligned}$$

Por lo tanto $T(A)$ es abierto.

La parte (b) es inmediata. □

COROLARIO 7.25. Sean X e Y espacios de Banach, $T \in L(X, Y)$.

Si T es biyectivo entonces T es acotado inferiormente.

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema de la aplicación abierta T^{-1} es continuo y, por lo tanto, existe una constante m tal que

$$m\|x\| \leq \|T(x)\|$$

para todo $x \in X$. □

COROLARIO 7.26. *Sea X un espacio vectorial que es Banach con respecto a las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$. Si existe una constante $c_1 > 0$ tal que*

$$\|x\|_2 \leq c_1 \|x\|_1$$

para todo $x \in X$ entonces existe una constante $c_2 > 0$ tal que

$$\|x\|_1 \leq c_2 \|x\|_2$$

para todo $x \in X$. Y por lo tanto las normas son equivalentes.

DEMOSTRACIÓN. Sea $I : (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|_2)$ el operador identidad, por hipótesis el operador I es continuo.

Además I es biyectivo, así que por el Corolario 7.25 el operador I es acotado inferiormente, luego existe $m > 0$ tal que para todo $x \in X$

$$m\|x\|_1 \leq \|I(x)\|_2 = \|x\|_2.$$

□

2.1. Una consecuencia del teorema de la aplicación abierta para bases de Schauder.

TEOREMA 7.27. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $\{v_n\}_{n \geq 1}$ una base de Schauder de X . Sea*

$$\|\alpha\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n v_n \right\|$$

para $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n v_n$. Entonces

- (a) *Existe $c > 0$ tal que $\|\alpha\| \leq c\|\alpha\|$.*
- (b) *$\|\cdot\|$ es equivalente a $\|\cdot\|$.*

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis, $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach. Además ya se sabía que $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach y que

$$\|\alpha\| \leq \|\alpha\| \quad \text{para todo } \alpha \in X.$$

Por uno de los corolarios del teorema de la aplicación abierta existe $c > 0$ tal que

$$\|\alpha\| \leq c\|\alpha\|,$$

y por lo tanto, $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|$ son normas equivalentes.

□

TEOREMA 7.28. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $\{v_n\}_{n \geq 1}$ una base de Schauder de X . Para

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n v_n$$

sea $f_k(\alpha) = \alpha_k$ entonces f_k es continuo en $(X, \|\cdot\|)$. Es decir, $f_k \in X^*$.

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 6.5 se sabe que f_k es continuo en $(X, \|\cdot\|)$. Entonces existe $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f_k(\alpha)| \leq \lambda_k \|\alpha\| \leq \lambda_k c \|\alpha\|.$$

Para la última desigualdad hemos usado el teorema anterior.

Por lo tanto f_k es continuo en $(X, \|\cdot\|)$.

□

3. El teorema del gráfico cerrado.

Sabemos que dada $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si f es continua entonces el gráfico de f es un conjunto cerrado en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Probaremos que bajo ciertas hipótesis adicionales el recíproco es cierto.

DEFINICIÓN 7.29. Sean X e Y espacios normados y sea $M \subset X$ una variedad lineal. Sea $T : M \rightarrow Y$ un operador lineal. El gráfico de T es

$$G(T) = \{(x, T(x)) \text{ tales que } x \in M\}.$$

Tenemos que $G(T) \subset X \times Y$.

Por otro lado, sabemos que $X \times Y$ es un espacio normado con la norma

$$\|(x, y)\|_{X \times Y} = \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}.$$

DEFINICIÓN 7.30. Sean X e Y espacios normados, sea $M \subset X$ una variedad lineal y sea $T : M \rightarrow Y$ un operador lineal. Decimos que T es *operador cerrado* cuando $G(T)$ es un conjunto cerrado en $X \times Y$ con la topología producto.

PROPOSICIÓN 7.31. Sean X e Y espacios normados y $M \subset X$ una variedad lineal, sea $T : M \rightarrow Y$ un operador lineal. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) T es cerrado.
- (b) para toda sucesión $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset M$ las relaciones

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{en } \|\cdot\|_X \quad y \quad \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = y \quad \text{en } \|\cdot\|_Y,$$

implican que $x \in M$ y $T(x) = y$.

DEMOSTRACIÓN.

(a) \Rightarrow (b) Sea $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset M$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = y.$$

Es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_X = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|T(x_n) - y\|_Y = 0.$$

De donde

$$\|(x_n, T(x_n)) - (x, y)\|_{X \times Y} = \max\{\|x_n - x\|_X, \|T(x_n) - y\|_Y\} \rightarrow 0$$

si $n \rightarrow \infty$. Luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, T(x_n)) = (x, y).$$

Como $G(T)$ es cerrado y $\{(x_n, T(x_n))\}_{n \geq 1} \subset G(T)$ se sigue que $(x, y) \in G(T)$.

Por lo tanto

$$x \in M \quad \text{y} \quad T(x) = y.$$

(b) \Rightarrow (a) Sea $\{(x_n, T(x_n))\}_{n \geq 1} \subset G(T)$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, T(x_n)) = (x, y)$$

entonces $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset M$ y

$$\max\{\|x_n - x\|_X, \|T(x_n) - y\|_Y\} = \|(x_n, T(x_n)) - (x, y)\|_{X \times Y} \rightarrow 0.$$

De donde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_X = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|T(x_n) - y\|_Y = 0.$$

Es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = y.$$

Por hipótesis

$$x \in M, \quad T(x) = y.$$

Luego

$$(x, y) = (x, T(x)) \in G(T).$$

Hemos probado que $G(T)$ es cerrado. Por lo tanto T es cerrado. □

Usaremos un corolario del teorema de la aplicación abierta para probar el teorema del gráfico cerrado.

TEOREMA 7.32 (Teorema del gráfico cerrado, Closed graph theorem).

Sean X e Y espacios de Banach, sea $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) T es continuo.
- (b) T es cerrado.

DEMOSTRACIÓN.

(a \Rightarrow b) Esta implicación es muy sencilla, tomando en cuenta la proposición anterior (pruébela).

(b \Rightarrow a) Si $G(T)$ es cerrado entonces $G(T)$ es un espacio de Banach.

Sea $P : G(T) \rightarrow X$, definido por

$$P(x, T(x)) = x.$$

Entonces P es lineal y biyectivo (pruébelo). Además

$$\|P(x, T(x))\|_X = \|x\|_X \leq \max\{\|x\|_X, \|T(x)\|_Y\} = \|(x, T(x))\|_{X \times Y}.$$

Luego P es continuo.

Como P es biyectivo, por el Corolario 7.25 (este es uno de los corolarios del teorema de la aplicación abierta), tenemos que P es acotado inferiormente. Es decir, existe $m > 0$ tal que

$$m\|(x, T(x))\|_{X \times Y} \leq \|P(x, T(x))\|_X.$$

Luego

$$\max\{\|x\|_X, \|T(x)\|_Y\} \leq \frac{1}{m} \|P(x, T(x))\|_X = \frac{1}{m} \|x\|_X.$$

De donde

$$\|T(x)\|_Y \leq \frac{1}{m} \|x\|_X.$$

Por lo tanto T es continuo. □

EJEMPLO 7.33. Daremos un operador lineal que es cerrado y que NO es continuo. Consideremos los espacios $C[0, 2\pi]$ y $C^1[0, 2\pi]$ con la norma del supremo.

Sea $T : C^1[0, 2\pi] \rightarrow C[0, 2\pi]$ definida por

$$T(f)(t) = f'(t) + f(t).$$

- (a) T es lineal (pruébelo).
- (b) T NO es continua.

En efecto, observemos que para

$$f_n(x) = \operatorname{sen} nx$$

se tiene que

$$\|f_n\| = \sup_{x \in [0, 2\pi]} |\operatorname{sen} nx| = 1,$$

pero por otro lado tenemos que

$$\|T(f_n)\| = \sup_{x \in [0, 2\pi]} |n \cos nx + \operatorname{sen} nx| \geq n.$$

Luego T no es continua.

(c) T es cerrada.

En efecto, sea $\{f_n\}_{n \geq 1} \subset C^1[0, 2\pi]$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} T(f_n) = g$$

uniformemente en $[0, 2\pi]$.

Por la Proposición anterior basta ver que $T(f) = g$.

Por la convergencia uniforme en $[0, 2\pi]$ tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^t g(s) ds &= \int_0^t \lim_{n \rightarrow \infty} T(f_n)(s) ds \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t T(f_n)(s) ds \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t (f'_n(s) + f_n(s)) ds \end{aligned}$$

Por el segundo teorema fundamental del cálculo

$$\begin{aligned} \int_0^t g(s) ds &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(f_n(t) - f_n(0) + \int_0^t f_n(s) ds \right) \\ &= f(t) - f(0) + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t f_n(s) ds. \end{aligned}$$

Nuevamente por la convergencia uniforme

$$\int_0^t g(s) ds = f(t) - f(0) + \int_0^t f(s) ds.$$

Usando el primer teorema fundamental del cálculo obtenemos

$$g(t) = f'(t) + f(t).$$

De donde

$$T(f) = g.$$

Luego T es cerrada.

4. El principio de acotación uniforme y el teorema de Banach-Steinhaus.

DEFINICIÓN 7.34. Sean X, Y espacios normados. Sea $F \subset L(X, Y)$ decimos que F es *equicontinuo* cuando

$$\sup_{T \in F} \|T\| < \infty.$$

TEOREMA 7.35 (Principio de acotación uniforme, Uniform boundedness principle).
Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $F \subset L(X, Y)$. Si

$$\sup_{T \in F} \|T(x)\|_Y < \infty \quad \text{para cada } x \in X$$

entonces

$$\sup_{T \in F} \|T\| < \infty,$$

es decir, F es equicontinuo.

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$A_n = \{x \in X : \|T(x)\|_Y \leq n \text{ para todo } T \in F\}.$$

Entonces A_n es cerrado y

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Como X es de Banach por el Corolario 7.19 (este es uno de los corolarios del Teorema de Categoría de Baire), existe n_o tal que A_{n_o} no es nunca denso, es decir,

$$\text{int}(\overline{A_{n_o}}) \neq \emptyset.$$

Luego existe D abierto tal que

$$D \subset \overline{A_{n_o}} = A_{n_o}.$$

Luego existen $x_o \in X$ y $r > 0$ tales que

$$B(x_o, r) \subset A_{n_o}.$$

Es decir,

$$\|T(x)\|_Y \leq n_o$$

para todo $T \in F$, si $x \in B(x_o, r)$.

Sean $T \in F$ y $x \in X$ tal que $\|x\| = 1$, luego

$$\frac{r}{2}x + x_o \in B(x_o, r).$$

De donde

$$\left\| \frac{r}{2}T(x) + T(x_o) \right\|_Y = \left\| T\left(\frac{r}{2}x + x_o\right) \right\|_Y \leq n_o.$$

Además como $x_o \in B(x_o, r)$ se tiene que

$$\|T(x_o)\|_Y \leq n_o.$$

Luego

$$\begin{aligned} \|T(x)\|_Y &= \frac{2}{r} \left\| \frac{r}{2} T(x) \right\|_Y \\ &= \frac{2}{r} \left\| \frac{r}{2} T(x) + T(x_o) - T(x_o) \right\|_Y \\ &\leq \frac{2}{r} \left\| \frac{r}{2} T(x) + T(x_o) \right\|_Y + \frac{2}{r} \|T(x_o)\|_Y \leq 4n_o/r. \end{aligned}$$

De donde

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|_Y \leq 4n_o/r.$$

Por lo tanto

$$\sup_{T \in F} \|T\| \leq 4n_o/r < \infty.$$

□

COROLARIO 7.36 (Teorema de Banach - Steinhaus).

Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado.

Sea $\{T_n\}_{n \geq 1} \subset L(X, Y)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$ existe para todo $x \in X$ entonces $\{T_n\}_{n \geq 1}$ es equicontinuo, es decir $\sup_{n \geq 1} \|T_n\| < +\infty$.

Además si llamamos

$$T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$$

para todo $x \in X$ entonces T es lineal, acotado y

$$\|T\| \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|.$$

DEMOSTRACIÓN. Claramente T es lineal.

Como toda sucesión convergente es acotada resulta que

$$\sup_{n \geq 1} \|T_n(x)\|_Y < \infty$$

para cada $x \in X$.

Por el principio de acotación uniforme $\{T_n\}_{n \geq 1}$ es equicontinuo, es decir, existe $M > 0$ tal que

$$\|T_n\| \leq M \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

De donde

$$\|T(x)\|_Y = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) \right\|_Y = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(x)\|_Y \leq \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|_Y \right) \|x\|_X \leq M \|x\|_X$$

para todo $x \in X$, por lo tanto T es acotado y

$$\|T\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|.$$

(Notar que aunque no se sabe si esta sucesión tiene límite, por ser acotada su límite inferior es finito). □

Ejercicios 7.

- (1) Dar un ejemplo de una familia decreciente $\{F_n\}_{n \geq 1}$ de subconjuntos cerrados no vacíos en un espacio métrico completo tal que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset.$$

- (2) Sea X un espacio normado. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes

(a) X es completo

(b) toda sucesión decreciente de bolas cerradas tiene intersección no vacía.

- (3) (*) Demostrar o dar un contraejemplo:

Si X es un espacio métrico completo y $\{F_n\}_{n \geq 1}$ es una familia decreciente de subconjuntos cerrados no vacíos de X tales que $\text{diam}(F_1) < \infty$ entonces

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n \neq \emptyset.$$

- (4) Demostrar que un espacio de Banach de dimensión infinita no puede tener una base de Hamel numerable.

- (5) Sea $\alpha = \{\alpha_n\}$ una sucesión acotada de números reales y sea $M_\alpha : l_2 \rightarrow l_2$ definido por

$$M_\alpha(x_1, x_2, \dots) = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots).$$

¿Bajo qué condiciones sobre la sucesión $\{\alpha_n\}$ existe el operador M_α^{-1} ?

¿Es siempre continuo este operador ?

- (6) Dar un ejemplo de un operador lineal continuo de un espacio normado a otro espacio normado que es biyectivo y su inverso no es continuo.
- (7) (a) Dar un ejemplo de un operador lineal discontinuo de un espacio de Banach a un espacio normado cuyo gráfico es cerrado.
 (b) Dar un ejemplo de un operador lineal discontinuo de un espacio normado a un espacio de Banach cuyo gráfico es cerrado.
- (8) Sea $\{a_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}$ una sucesión de números positivos tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Demuestre que existe una sucesión $\{y_n\}_{n \geq 1} \subset (0, \infty)$ tal que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \text{ converge.}$$

- (9) Sea $1 \leq p \leq \infty$, sea q el índice conjugado de p .
 Sea (X, F, μ) un espacio de medida σ -finita. Sea f una función medible.

Demuestre que si $f \cdot g \in L^1(X, \mu)$ para cada $g \in L^p(X, \mu)$ entonces $f \in L^q(X, \mu)$.

- (10) Sean X, Y, Z espacios de Banach. Sean $T : X \rightarrow Z, U : Y \rightarrow Z$ lineales y continuas. Supongamos que para cada $x \in X$ la ecuación

$$T(x) = U(y)$$

tiene solución única $y \in Y$.

Demuestre que la ecuación $V(x) = y$ define un operador lineal y continuo.

- (11) Dar un ejemplo de una familia $\{T_\alpha\}$ de operadores lineales continuos de un espacio normado X en un espacio normado Y tal que

$$\sup_{\alpha} \|T_\alpha(x)\| < \infty \text{ para cada } x \in X$$

y sin embargo

$$\sup_{\alpha} \|T_\alpha\| = \infty.$$

(12) Sea $\{y_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \text{ converge}$$

para cada $\{x_n\}_{n \geq 1} \in c_0$.

Demuestre que $\{y_n\}_{n \geq 1} \in l_1$.

(13) Sea $a = \{a_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}$ tal que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \text{ converge condicionalmente}$$

para cada sucesión $x = \{x_n\}_{n \geq 1} \in l^3$.

Demuestre que $a \in l^{3/2}$.

(14) Sea X un espacio de Banach. Sea F un subespacio cerrado de X . Sea $\varphi : X \rightarrow X/F$ definida mediante

$$\varphi(x) = x + F = \bar{x}.$$

Demuestre que φ es continua y abierta.

(15) Consideremos el operador $A : \mathcal{C}[0, 1] \rightarrow \mathcal{C}[0, 1]$ definido por

$$(Af)(t) = \int_0^t f(u) du + f(t).$$

- (a) Demostrar que $\text{Núcleo}(A) = \{0\}$, y por lo tanto A es inyectivo.
- (b) ¿Es A acotado?
- (c) ¿Es A sobreyectivo?
- (d) En caso de que la respuesta anterior sea afirmativa, hallar A^{-1} y decir si A^{-1} es acotado o no.

PROYECCIONES

Sea X un espacio vectorial. Una proyección es un operador lineal $P : X \rightarrow X$ tal que $P^2 = P$.

- (16) Sea $P : X \rightarrow X$ una proyección. Demostrar:
- (a) $x \in \text{Rango}(P)$ si y sólo si $Px = x$.
 - (b) $\text{Núcleo}(P) = \text{Rango}(I - P)$.
 - (c) $I - P$ es una proyección.
 - (d) $X = \text{Rango}(P) \oplus \text{Núcleo}(P)$.
- (17) Demostrar que si $X = X_1 \oplus X_2$ (X_1 y X_2 variedades lineales) entonces existe una proyección $P : X \rightarrow X$ tal que $\text{Rango}(P) = X_1$ y $\text{Núcleo}(P) = X_2$.
- (18) Supóngase que X es un espacio normado. Demostrar que si $P : X \rightarrow X$ es una proyección continua, entonces $\text{Rango}(P)$ y $\text{Rango}(I - P)$ son subespacios de X .
- (19) Sea X un espacio de Banach y sea $P : X \rightarrow X$ una proyección tal que $\text{Rango}(P)$ y $\text{Rango}(I - P)$ son cerrados. Demostrar que P es continua.
- (20) Sea X un espacio de Banach y sea $\{P_n\}_{n \geq 1} \subset L(X)$ una sucesión de proyecciones tales que para cada $x \in X$ existe $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x)$. Demostrar que existe una proyección continua $P : X \rightarrow X$ tal que para cada $x \in X$ se tiene que

$$Px = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x).$$

CAPÍTULO 8

Dualidad. Topologías débiles.

1. Dualidad.

Sea X un espacio normado sobre el cuerpo de escalares \mathbb{K} (donde \mathbb{K} es \mathbb{R} ó \mathbb{C}).

Para cada $x \in X$ sea \hat{x} la función $\hat{x} : X^* \rightarrow \mathbb{K}$ dada por

$$\hat{x}(f) = f(x)$$

para cada $f \in X^*$.

PROPOSICIÓN 8.1. *Para cada $x \in X$*

- (a) \hat{x} es lineal.
- (b) $|\hat{x}(f)| \leq \|x\| \|f\|$ para cada $f \in X^*$.
- (c) $\hat{x} \in X^{**}$ y $\|\hat{x}\| \leq \|x\|$.

La demostración de esta proposición queda como ejercicio.

PROPOSICIÓN 8.2. *Para cada $x \in X$*

$$\|\hat{x}\| = \|x\|.$$

DEMOSTRACIÓN. Por un corolario del teorema de Hahn-Banach, para cada $x \in X$ existe $f_o \in X^*$ tal que $\|f_o\| = 1$ y $f_o(x) = \|x\|$. Para esta f_o tenemos

$$|\hat{x}(f_o)| = |f_o(x)| = \|x\|.$$

Luego

$$\|\hat{x}\| = \sup_{\|f\|=1} |\hat{x}(f)| \geq |\hat{x}(f_o)| = \|x\|.$$

□

DEFINICIÓN 8.3. Sea $\Phi : X \rightarrow X^{**}$ la aplicación definida mediante

$$\Phi(x) = \hat{x}.$$

Esta aplicación es llamada la *inmersión natural* de X en X^{**} .

PROPOSICIÓN 8.4. *La inmersión natural de X en X^{**} es una isometría lineal.*

La demostración de esta proposición queda como ejercicio.

DEFINICIÓN 8.5. Sea X un espacio normado. Decimos que X es *reflexivo* cuando Φ es sobreyectiva, es decir, cuando $\Phi(X) = X^{**}$.

EJEMPLO 8.6. Si $1 < p < \infty$, l_p es reflexivo. Sabemos que $l_p^* \approx l_q$ si $1/p + 1/q = 1$. Así que

$$l_p^{**} \approx l_q^* \approx l_p.$$

Para probar que l_p es reflexivo basta verificar que al componer el isomorfismo natural de l_p en l_q^* con el isomorfismo natural entre l_q^* y l_p^{**} obtenemos la inmersión de l_p en l_p^{**} , lo cual queda como ejercicio.

OBSERVACIÓN 8.7. Puede ocurrir que X sea isomorfo a X^{**} y que X NO sea reflexivo. ¿Por qué?

2. Topología débiles.

DEFINICIÓN 8.8. Un *espacio vectorial topológico* es un espacio vectorial X sobre un cuerpo \mathbb{K} con una topología τ tal que las funciones suma ($s: X \times X \rightarrow X$) y producto por un escalar ($p: \mathbb{K} \times X \rightarrow X$) son continuas en los espacios correspondientes.

Se puede probar que todo espacio vectorial topológico de dimensión finita n es isomorfo a \mathbb{K}^n donde \mathbb{K} es el cuerpo de escalares.

Sabemos que todo espacio normado es un espacio vectorial topológico.

DEFINICIÓN 8.9. Sea X un espacio normado, diremos que la sucesión $\{x_n\}_{n \geq 1}$ *converge en norma* a $x \in X$ cuando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0.$$

La definición anterior es la única definición de convergencia que hemos usado hasta ahora.

DEFINICIÓN 8.10. Sea X un espacio normado. Se define la *topología fuerte* en X como la topología inducida por la norma.

Como ya sabemos en cualquier espacio normado existe la topología inducida por la norma. Vamos a topologizar los espacios normados con una topología diferente. Para eso será necesario definir la base de esa nueva topología.

Recordemos algunos conceptos topológicos.

DEFINICIÓN 8.11. \mathbf{B} es una *base de la topología* τ de X si para cada $D \in \tau$, $x \in D$ existe $B \in \mathbf{B}$ tal que $x \in B \subset D$.

DEFINICIÓN 8.12. Sea X un espacio vectorial y sea F una familia de funcionales lineales definidos en X .

En X , se define la *topología débil generada por F* como: la menor topología en X que hace que cada funcional de F sea continuo.

OBSERVACIÓN 8.13. La mayor topología en X que hace que cada funcional de F sea continuo es aquella en la que todos los subconjuntos de X son abiertos. Con esta topología cada funcional de F es continuo, pero también lo es cualquier función y por lo tanto no es interesante.

Claramente la topología débil generada por F es la topología generada por los subconjuntos de X que tienen la forma:

$$f^{-1}(U)$$

donde $f \in F$ y U es un abierto en el cuerpo de escalares \mathbb{K} .

Una base de la topología débil generada por F son los conjuntos de la forma

$$N(x_o, f_1, \dots, f_m, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) = \{x \in X : |f_k(x) - f_k(x_o)| < \varepsilon_k \text{ para } k = 1, \dots, m\}$$

donde $x_o \in X$, $m \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_m \in F$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m > 0$.

Una subbase de la topología débil generada por F son los conjuntos de la forma

$$L(x_o, f, \varepsilon) = \{x \in X : |f(x) - f(x_o)| < \varepsilon\}$$

donde $x_o \in X$, $f \in F$, $\varepsilon > 0$.

Obsérvese que

$$L(x_o, f, \varepsilon) = f^{-1}(B(f(x_o), \varepsilon)),$$

$$N(x_o, f_1, \dots, f_m, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) = \bigcap_{k=1}^m L(x_o, f_k, \varepsilon_k).$$

Sea X un espacio normado.

DEFINICIÓN 8.14. La *topología débil* en X es la topología débil generada por X^* .

PROPOSICIÓN 8.15. *La topología débil tiene menos abiertos que la topología de la norma. (por eso es llamada débil).*

DEMOSTRACIÓN. Para $k = 1, \dots, m$ sea f_k continua en X^* . Como

$$L(x_o, f_k, \varepsilon_k) = f_k^{-1}(B(f_k(x_o), \varepsilon_k))$$

entonces $L(x_o, f_k, \varepsilon_k)$ es abierto en X con la topología de la norma.

Por lo tanto cada conjunto $N(x_o, f_1, \dots, f_m, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ es abierto en X con la topología de la norma.

Es decir, los elementos de la base de la topología débil en X son abiertos en la topología de la norma.

□

TEOREMA 8.16. Sean $x_o \in X$ y $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) $\{x_n\}_{n \geq 1}$ converge a x_o en la topología débil.
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_o)$ para todo $f \in X^*$.

DEMOSTRACIÓN.

(a) \Rightarrow (b) Dados $f \in X^*$ y $\varepsilon > 0$ consideremos

$$L(x_o, f, \varepsilon) = \{x \in X : |f(x) - f(x_o)| < \varepsilon\}.$$

$L(x_o, f, \varepsilon)$ es un abierto en la topología débil porque es un elemento de la subbase, además contiene a x_o , así que es un entorno (en la topología débil) de x_o .

Como $\{x_n\}_{n \geq 1}$ converge a x_o en la topología débil entonces existe n_o tal que si $n > n_o$ entonces $x_n \in L(x_o, f, \varepsilon)$, es decir

$$|f(x_n) - f(x_o)| < \varepsilon.$$

Luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_o).$$

(b) \Rightarrow (a) Sea V un entorno de x_o en la topología débil entonces existen $m \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_m \in X^*$, $\varepsilon > 0$ tales que

$$N(x_o, f_1, \dots, f_m, \varepsilon, \dots, \varepsilon) = \{x \in X : |f_k(x) - f_k(x_o)| < \varepsilon \text{ para } k = 1, \dots, m\} \subset V$$

(porque esos conjuntos forman una base de la topología).

Como $f_k \in X^*$ para $k = 1, \dots, m$ usando la hipótesis tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_k(x_n) = f_k(x_o).$$

Es decir, existe n_k tal que

$$|f_k(x_n) - f_k(x_o)| < \varepsilon$$

para todo $n \geq n_k$.

Sea

$$n_o = \max\{n_1, \dots, n_m\}.$$

Sea $n \geq n_o$ entonces

$$|f_k(x_n) - f_k(x_o)| < \varepsilon.$$

Luego

$$x_n \in N(x_o, f_1, \dots, f_m, \varepsilon, \dots, \varepsilon).$$

De donde $x_n \in V$.

Hemos probado que $\{x_n\}_{n \geq 1}$ converge a x_o en la topología débil.

□

DEFINICIÓN 8.17. Sean $x \in X$, $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$. Diremos que $\{x_n\}_{n \geq 1}$ converge débilmente a x cuando para todo $f \in X^*$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x).$$

Esto lo denotaremos mediante:

$$w - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

En este caso diremos que: $\{x_n\}_{n \geq 1}$ es débilmente convergente y que x es el límite débil de $\{x_n\}_{n \geq 1}$.

PROPOSICIÓN 8.18. *El límite débil de una sucesión es único.*

La demostración de esta proposición queda como ejercicio.

PROPOSICIÓN 8.19. *Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ entonces $w - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.*

Es decir, la convergencia fuerte implica la convergencia débil.

La demostración de esta proposición queda como ejercicio.

Esto es consecuencia de que dado $A \subset X$, A abierto en la topología débil entonces A es abierto en la topología de la norma. Por lo tanto toda sucesión (o reticulado) convergente en norma es débilmente convergente.

OBSERVACIÓN 8.20. El recíproco de la proposición anterior no es cierto. Consideremos la sucesión

$$e^n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$$

donde el 1 se encuentra en el n -ésimo lugar.

Evidentemente $e^n \in l_p$ y $\|e^n\|_p = 1$ para $1 < p < \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto e^n no puede converger en norma a 0. Sin embargo se puede ver que

$$w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} e^n = 0.$$

TEOREMA 8.21. *Si $\{x_n\}_{n \geq 1}$ es débilmente convergente entonces $\{\|x_n\|\}_{n \geq 1}$ es acotado.*

DEMOSTRACIÓN. Por la convergencia débil tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ existe para todo $f \in X^*$.

Sea \mathbb{K} el cuerpo de escalares. Consideremos los funcionales $\hat{x}_n : X^* \rightarrow \mathbb{K}$ definidos mediante

$$\hat{x}_n(f) = f(x_n)$$

para $f \in X^*$.

Entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{x}_n(f)$ existe para todo $f \in X^*$. Por el teorema de Banach-Steinhaus $\{\hat{x}_n\}_{n \geq 1}$ es equicontinuo, es decir,

$$\sup_{n \geq 1} \|\hat{x}_n\| < \infty.$$

Se sabe que

$$\|\hat{x}_n\| = \|x_n\|,$$

luego

$$\sup_{n \geq 1} \|x_n\| < \infty.$$

De donde $\{\|x_n\|\}_{n \geq 1}$ es acotado. □

TEOREMA 8.22. *Si $x = w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ entonces x pertenece al subespacio generado por $\{x_n\}_{n \geq 1}$ en la topología de la norma.*

DEMOSTRACIÓN. Sea M el subespacio generado por $\{x_n\}_{n \geq 1}$.

Supongamos que $x \notin M$ entonces

$$\text{dist}(x, M) > 0.$$

Por uno de los corolarios del teorema de Hahn Banach tenemos que existe $f \in X^*$ tal que

$$f(M) = \{0\}, \quad f(x) = 1.$$

Como $x_n \in M$ se tiene que $f(x_n) = 0$.

Por otro lado $x = w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, de donde

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0,$$

y esto es una contradicción. □

PROPOSICIÓN 8.23. *Sea A un subconjunto de X . Si A es débilmente cerrado entonces A es cerrado.*

La demostración de esta proposición queda como ejercicio.

PROPOSICIÓN 8.24. *Sea $M \subset X$ una variedad lineal. M es débilmente cerrado si y sólo si M es cerrado.*

DEMOSTRACIÓN.

(\Rightarrow) Esta parte es consecuencia de la proposición anterior.

(\Leftarrow) Supongamos que M es cerrado. Si $x_o \notin M$ entonces

$$\text{dist}(x_o, M) > 0.$$

Por uno de los corolarios del teorema de Hahn Banach tenemos que existe $f \in X^*$ tal que

$$f(M) = \{0\}, \quad f(x_o) = 1.$$

Sea

$$\begin{aligned} A &= \{x \in X \text{ tales que } f(x) \neq 0\} \\ &= f^{-1}((-\infty, 0) \cup (0, \infty)). \end{aligned}$$

Es decir, A es la imagen inversa de un abierto en \mathbb{R} .

Como en la topología débil los $f \in X^*$ son continuos se sigue que A es débilmente abierto.

Además

$$M \cap A = \emptyset.$$

Tenemos pues

$$x_o \in A \subset M^C.$$

De donde M^C es débilmente abierto. Por lo tanto M es débilmente cerrado. □

3. La topología débil*.

Sea X un espacio normado. Resulta que X^* también es un espacio normado.

DEFINICIÓN 8.25. Sea $\Phi : X \rightarrow X^{**}$ la inmersión natural. La *topología débil** en X^* es la topología débil generada por $\Phi(X)$.

Por lo tanto en X^* tenemos

- (a) la topología de la norma,
- (b) la topología débil (que es la topología débil generada por X^{**}).

(c) la topología débil* (que es la topología débil generada por $\Phi(X)$).

PROPOSICIÓN 8.26. *Una base de la topología débil* es la formada por los conjuntos*

$$D(f_o, x_1, \dots, x_m, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) = \{f \in X^* / |f(x_k) - f_o(x_k)| < \varepsilon_k \text{ para } k = 1, \dots, m\}$$

donde $f_o \in X^*$, $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_m \in X$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m > 0$.

La demostración de esta proposición queda como ejercicio.

PROPOSICIÓN 8.27. *Sean $f \in X^*$, $\{f_n\}_{n \geq 1} \subset X^*$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge a f en la topología débil*.

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.

Por lo tanto la topología débil* es la topología de la convergencia puntual.

La demostración de esta proposición queda como ejercicio.

PROPOSICIÓN 8.28. *Si X es reflexivo entonces la topología débil en X^* y la débil* en X^* coinciden.*

La demostración de esta proposición queda como ejercicio.

A continuación daremos el Teorema de Bourbaki - Alaoglu. Este resultado a veces aparece en la literatura como el Teorema de Banach - Alaoglu. Se refiere a la compacidad de la bola cerrada en un espacio dual con la topología débil*.

Antes de proceder a la demostración de este teorema repasaremos algunos conceptos de topología. Comenzaremos con un caso particular.

Consideremos los conjuntos $[-1, 1]$ y $(0, \infty)$ tenemos que

$$\begin{aligned} [-1, 1] \times (0, \infty) &= \{(x_1, x_2)\} \text{ tales que } x_1 \in [-1, 1], x_2 \in (0, \infty)\} \\ &= \{h : \{1, 2\} \rightarrow [-1, 1] \cup (0, \infty) \text{ tales que } h(1) \in [-1, 1], h(2) \in (0, \infty)\} \end{aligned}$$

Extenderemos esta definición a una familia más grande de conjuntos.

DEFINICIÓN 8.29. Sea $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de conjuntos. El *producto cartesiano* de la familia es:

$$\begin{aligned}\Omega &= \prod_{\alpha \in A} \Omega_\alpha \\ &= \{\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \text{ tales que } x_\alpha \in \Omega_\alpha \text{ para todo } \alpha \in A\} \\ &= \left\{ h : A \rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} \Omega_\alpha \text{ tales que } h(\alpha) \in \Omega_\alpha \text{ para todo } \alpha \in A \right\}.\end{aligned}$$

EJEMPLO 8.30.

$$\Omega_1 \times \Omega_2 = \{(a_1, a_2), a_1 \in \Omega_1 \text{ y } a_2 \in \Omega_2\}.$$

DEFINICIÓN 8.31. Para cada $\beta \in A$ se define la β -ésima *proyección* $P_\beta : \Omega \rightarrow \Omega_\beta$ por

$$P_\beta(x) = x_\beta$$

para $x = \{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Es decir,

$$P_\beta(h) = h(\beta)$$

para $h \in \Omega$.

DEFINICIÓN 8.32. Sea $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de espacios topológicos. Si τ_α es la topología de Ω_α , la *topología producto* en Ω es aquella que tiene por base los conjuntos de la forma $\prod_{\alpha \in A} \omega_\alpha$, donde $\omega_\alpha \in \tau_\alpha$ y $\omega_\alpha = \Omega_\alpha$ salvo para una cantidad finita de índices.

OBSERVACIÓN 8.33. Otra manera de definir la topología producto es diciendo que es la menor topología de Ω con respecto a la cual son continuas las proyecciones.

TEOREMA 8.34 (Teorema de Tychonoff). *El producto de una familia de espacios topológicos compactos es un espacio topológico compacto.*

No demostraremos este teorema sólo indicamos que ella se basa en un lema de teoría de conjuntos cuya demostración requiere del lema de Zorn. Una prueba de este teorema puede encontrarse en el libro de Kelley.

TEOREMA 8.35 (Teorema de Banach - Bourbaki - Alaoglu).

Sea X un espacio normado y sea S^ la bola unitaria cerrada, es decir,*

$$S^* = \{f \in X^* \text{ tales que } \|f\| \leq 1\}.$$

Entonces S^ es compacta en la topología débil* de X^* .*

DEMOSTRACIÓN. Consideraremos el caso real, el caso complejo es análogo.

Sea $f \in S^*$, entonces $|f(x)| \leq \|x\|$ para todo $x \in X$, es decir $f(x) \in [-\|x\|, \|x\|]$.

Para cada $x \in X$, sea $I_x = [-\|x\|, \|x\|]$ y sea

$$P = \prod_{x \in X} I_x.$$

Entonces $S^* \subset P$ y, como consecuencia de la definición de la topología producto y de la definición de la topología débil*, la topología inducida por P en S^* es la topología débil*.

Por lo tanto para probar que S^* es compacto basta probar que S^* es un subconjunto cerrado de P .

Sea f un elemento de la clausura de S^* en P .

Como $f \in P$ se tiene que $|f(x)| \leq \|x\|$ para todo $x \in X$.

Veamos que f es lineal.

Sean $x, y, z \in X$ tales que $z = \alpha x + \beta y$ donde α y β son reales.

Para cada $\varepsilon > 0$ el conjunto

$$N_\varepsilon = \{g \in P : |g(x) - f(x)| < \varepsilon, |g(y) - f(y)| < \varepsilon, |g(z) - f(z)| < \varepsilon\}$$

es abierto en P y $f \in N$.

Como f es un elemento de la clausura de S^* existe $g \in N_\varepsilon \cap S^*$.

Como g es lineal tenemos que $g(z) = g(x) + g(y)$, por lo tanto

$$\begin{aligned} |f(z) - \alpha f(x) - \beta f(y)| &\leq |f(z) - g(z)| + |g(z) - \alpha f(x) - \beta f(y)| \\ &\leq \varepsilon + |\alpha| |g(x) - f(x)| + |\beta| |g(y) - f(y)| \\ &\leq (1 + |\alpha| + |\beta|) \varepsilon. \end{aligned}$$

Como ε es arbitrario, $f(z) = \alpha f(x) + \beta f(y)$.

Luego f es lineal, y por lo tanto $f \in S^*$.

□

Ejercicios 8.

(1) Para cada $x \in X$ sea \hat{x} la función $\hat{x} : X^* \rightarrow \mathbb{K}$ dada por

$$\hat{x}(f) = f(x)$$

para cada $f \in X^*$. Demuestre que

- (a) \hat{x} es lineal.
- (b) $|\hat{x}(f)| \leq \|x\| \|f\|$ para cada $f \in X^*$.
- (c) $\hat{x} \in X^{**}$ y $\|\hat{x}\| \leq \|x\|$.

(2) Sea X un espacio normado de dimensión finita. Demostrar que:

- (a) $\dim X^* = \dim X$.
- (b) X es reflexivo.

(3) Sea X un espacio de Banach. Demostrar que X es reflexivo si y sólo si X^* lo es.

(4) Sean X un espacio normado y $C \subset X$. Demostrar que son equivalentes las siguientes condiciones:

- (a) C es acotado
- (b) $f(C)$ es acotado para todo $f \in X^*$.

(5) Demostrar que: Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ entonces $w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

(6) Demostrar que: El límite débil de una sucesión es único.

- (7) Sea X un espacio normado. Demostrar que si $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$ es una sucesión que converge débilmente a $x \in X$ entonces

$$\|x\| \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|.$$

- (8) Sea X un espacio normado, separable. Demostrar que toda sucesión acotada en X^* contiene una subsucesión débilmente convergente.

- (9) (a) Sea A un subconjunto de X . Demostrar que: Si A es débilmente cerrado entonces A es cerrado.

- (b) Demostrar que el recíproco de la condición (a) NO es cierto (dar un contraejemplo).

- (10) Sea X un espacio normado y sea M denso en X^* . Sea $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$, una sucesión acotada tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x) \text{ para toda } f \in M.$$

Demostrar que

$$\text{w-} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

- (11) ¿Qué quiere decir convergencia débil para los siguientes espacios X ?

- (a) $X = \mathbb{R}^n$ para $n \in \mathbb{N}$.

- (b) $X = l_p$ para $1 < p < \infty$.

- (c) $X = l_1$.

- (d) $X = L^p[a, b]$ para $1 < p < \infty$.

- (e) $X = L^1[a, b]$ para $1 < p < \infty$.

- (f) $X = L^p(X, F, \mu)$ para $1 < p < \infty$, donde (X, F, μ) es un espacio de medida.

(g) $X = L^1(X, F, \mu)$, donde (X, F, μ) es un espacio de medida.

(12) Sean $x = \{x_m\}_{m \geq 1}$ y $x^n = \{x_m^n\}_{m \geq 1}$ para cada $n \geq 1$.

Sea $1 < p < \infty$, y supongamos que $x \in l_p$ y $x^n \in l_p$ para cada $n \geq 1$.

Probar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\{x^n\}_{n \geq 1}$ converge débilmente a x

(b) $\{\|x^n\|\}_{n \geq 1}$ es acotada y para cada m se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_m^n = x_m$.

(13) Sea $f \in X^*$, $\{f_n\}_{n \geq 1} \subset X^*$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge a f en la topología débil*.

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.

(14) Pruebe que:

Si X es reflexivo entonces la topología débil y la débil* en X^* coinciden.

(15) Sea X un espacio normado. Demostrar que:

X^* es un espacio de Hausdorff con respecto a la topología débil*.

(16) ¿Qué querrá decir convergencia débil* en X^* para los siguientes espacios X ?

(a) $X = \mathbb{R}^n$ para $n \in \mathbb{N}$.

(b) $X = l_p$ para $1 < p < \infty$.

(c) $X = l_1$.

(d) $X = L^p[a, b]$ para $1 < p < \infty$.

(e) $X = L^1[a, b]$ para $1 < p < \infty$.

(f) $X = L^p(X, F, \mu)$ para $1 < p < \infty$, donde (X, F, μ) es un espacio de medida.

(g) $X = L^1(X, F, \mu)$, donde (X, F, μ) es un espacio de medida.

Bibliografía

- [1] BACHMAN, G. AND NARICI, L. *Functional analysis*. Academic Press.
- [2] BROWN AND PAGE *Elements of functional analysis*. Van Nostrand.
- [3] BROWN, A. AND PEARCY, C. *Introduction to operator theory I*. Springer Verlag.
- [4] COTLAR, M. AND CIGNOLI, R. *An introduction to functional analysis*. North Holland, 1974.
- [5] DEVITO, C. *Functional Analysis*. Academic Press, 1978.
- [6] DUNFORD, SCHWARTZ *Linear operators*. Part I.
- [7] HALMOS, P. *Teoría intuitiva de los conjuntos*. CECSA, 1971.
- [8] KOLMOGOROV, A. Y FOMIN, S. *Elementos de la teoría de funciones y de análisis funcional*. MIR, 1975.
- [9] KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons, 1978.
- [10] LINDENSTRAUSS, J. AND TZAFRIRI, L. *Classical Banach Spaces I*. Springer Verlag, 1977.
- [11] ROYDEN, H. L. *Real analysis*. Collier Macmillan, 1968.
- [12] RUDIN, W. *Real and complex analysis*. Mc Graw-Hill, 1966.
- [13] TAYLOR, A. *Introduction to Functional Analysis*. John Wiley & Sons, 1958.
- [14] TRENQUIN, PISARIEVSKI, SÓBOLEVA *Problemas y ejercicios de análisis funcional*.
- [15] YOSIDA, K. *Functional Analysis*. Springer Verlag, 1965.

Índice

- acotación uniforme, principio de, 116
- acotado inferiormente, 64
- álgebra, 39
- álgebra con unidad, 39
- álgebra conmutativa, 39
- aplicación abierta, 108
- aplicación abierta, teorema de la, 110
- Arzela - Ascoli, teorema de, 51

- Baire, teorema de categoría de Baire, 106
- Banach - Bourbaki - Alaoglu, teorema de, 131
- Banach - Steinhaus, teorema de, 117
- base de Hamel, 17
- base de Schauder, 93
- base de una topología, 124

- cadena, 14
- Cantor, teorema de, 12
- Cantor, teorema de intersección de, 103
- cardinal, 11
- cerrado, 112
- completo, 25
- conjunto de primera categoría, 106
- conjunto de segunda categoría, 106
- conjunto finito, 11
- conjunto infinito, 11
- conjunto totalmente ordenado, 14
- conjuntos equipotentes, 11
- conjuntos equivalentes, 11
- convergencia débil, 127
- convergencia en norma, 124
- cota inferior, 14
- cota superior, 14
- Criterio de Cauchy, 29

- diámetro, 103
- distancia, 24
- dual algebraico, 77
- dual topológico, 77

- elemento maximal, 15
- equicontinuo, 51, 116
- equicontinuo en un punto, 50
- espacio de Banach, 25
- espacio de Hausdorff, 44
- espacio lineal, 16
- espacio métrico, 24
- espacio normado, 21
- espacio vectorial, 16
- espacio vectorial topológico, 124

- funcional lineal, 77
- funcional sublineal, 78

- gráfico, 112
- gráfico cerrado, teorema del, 114

- homeomorfismo, 64

- ínfimo, 14
- inmersión natural, 123

- linealmente independiente, 17

- magro, 106
- métrica, 24

- multiplicación por un escalar, 16
- no magro, 106
- norma, 21
- normas equivalentes, 21
- núcleo, 77
- números naturales, 11
- nunca denso, 104

- operador acotado, 59
- operador lineal, 59
- orden parcial, 14

- potencia de cardinales, 11
- precompacto, 54
- producto, 39
- producto cartesiano, 131
- producto de cardinales, 11
- proyección, 131

- reflexivo, 124
- relación, 14
 - antisimétrica, 14
 - reflexiva, 14
 - transitiva, 14
- relativamente compacto, 54
- reticulado, 41
- Riesz, lema de, 70
- Riesz, teorema de, 70

- Schröder - Bernstein, teorema de, 12
- seminorma, 83
- separa puntos, 46
- serie, 28
- Stone - Weierstrass (complejo), teorema de, 49
- Stone - Weierstrass (real), teorema de, 47
- subálgebra, 39
- subespacio, 23
- sucesión convergente, 25
- sucesión de Cauchy, 25
- suma de cardinales, 11
- suma de vectores, 16

- supremo, 14
- topología débil, 125
- topología débil*, 129
- topología fuerte, 124
- topología producto, 131

- uniformemente equicontinuo, 51

- variedad lineal, 23
- vector cero, 16

- Weierstrass, teorema de, 48

- Zorn, lema de, 15