UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA
LABORATORIO DE FORMAS EN GRUPOS

PROBLEMAS DE ESPACIOS DE HILBERT

Ramón Bruzual
Marisela Domínguez

Caracas, Venezuela
Julio 2005

Ramón Bruzual
Correo-E: rbruzual@euler.ciens.ucv.ve

Marisela Domínguez
Correo-E: mdomin@euler.ciens.ucv.ve

Laboratorio Formas en Grupos
Centro de Análisis
Escuela de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad Central de Venezuela

Contenido

Espacios con producto interno.

(1) Demuestre que los siguientes espacios vectoriales son espacios con producto interno

(a) El espacio $\mathbb{C}^n$ de los vectores $1 \times n$. Con el producto escalar eucldeo

$$\langle v, w\rangle_n = vw^* = \sum_{k=1}^{n} v_k \overline{w_k}.$$

donde $v, w \in \mathbb{C}^n$, $v = (v_1, \ldots, v_n)$, $w = (w_1, \ldots, w_n)$, y w^* es el adjunto de w.

(b) El espacio $\mathbb{C}_{n\times n}$ de las matrices $n \times n$. Con el producto dado por

$$\langle A, B\rangle_{n\times n} = tr(AB^*) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\overline{b_{ik}}$$

donde $A, B \in \mathbb{C}_{n\times n}$, son de la forma $A = (a_{ik})$, $B = (b_{ik})$.

(c) El espacio

$$l_2 = \left\{ (x_n)_{n\geq 1} / x_n \in \mathbb{C} \text{ tales que } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

con el producto dado por

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}.$$

(d) Sabiendo probabilidades se puede considerar el siguiente caso.
Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad. Sea $L^2(\Omega, F, P)$ el conjunto de las variables aleatorias $Y : \Omega \to \mathbb{R}$, centradas (es decir, $E(Y) = 0$) con varianza finita (es decir, tales que $E(Y^2) < \infty$).
El espacio $L^2(\Omega, F, P)$ es un espacio con producto interno, el cual est dado por la covarianza

$$\langle Y_1, Y_2\rangle = Cov(Y_1, Y_2) = E(Y_1 Y_2)$$

donde E denota la esperanza.

(e) Sabiendo teora de la medida se puede considerar el siguiente caso.
Si (Ω, F, μ) es un espacio de medida sea

$$L^2(\Omega, F, \mu) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C}, f \text{ es } F\text{- medible y } \int_\Omega |f(t)|^2 d\mu(t) < \infty \right\}$$

El espacio $L^2(\Omega, F, \mu)$ es un espacio con producto interno, el cual est dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f(t)\overline{g(t)} d\mu(t).$$

(2) Demostrar: Sea $(X, \langle ., . \rangle)$ un espacio con producto interno. Si definimos

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$$

entonces $\| \quad \|$ es una norma en X.

Adems, esta norma satisface la ley del paralelogramo, es decir, para todo $x, y \in X$:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

(3) Demostrar que todo espacio con producto interno se puede completar.

(4) Sea X un espacio vectorial real con producto interno $\langle ., . \rangle$.
Demostrar que para todo $x, y \in X$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

(5) Sea X un espacio vectorial complejo con producto interno $\langle ., . \rangle$.
Demostrar que para todo $x, y \in X$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2).$$

(6) Sea $(X, \|.\|)$ un espacio normado (real o complejo). Demostrar que $\|.\|$ proviene de un producto interno si y slo si satisface la ley del paralelogramo.

(7) Demostrar: Todo conjunto ortogonal es linealmente independiente.

(8) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funcin de perodo T. Probar que si f es integrable sobre un intervalo de longitud T entonces f es integrable sobre cualquier intervalo de longitud T y para cualquier $a \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\int_{-a}^{T-a} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx.$$

(9) Sea P un polinomio trigonomtrico de la forma

$$P(x) = \frac{\alpha_o}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos kx + \beta_k \operatorname{sen} kx.$$

Probar que

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} P(x)\cos kx\,dx \quad \text{para } k = 0,\dots,n$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} P(x)\operatorname{sen} kx\,dx \quad \text{para } k = 1,\dots,n.$$

(10) Considerar la funcin f definida por

$$f(x) = x \quad \text{para } -\pi \le x < \pi,$$

extendida por periodicidad a toda la recta.

(a) Hallar los coeficientes de Fourier.

(b) Probar que la serie de Fourier de f es

$$2\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \cdots + (-1)^{k+1}\frac{\operatorname{sen} kx}{k} + \cdots\right)$$

(11) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funcin de perodo 2π, integrable en el intervalo $[0, 2\pi]$. Pruebe que si $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ son sus coeficientes de Fourier, entonces

$$\lim_{k\to+\infty} a_k = \lim_{k\to+\infty} b_k = 0.$$

(12) Considerar la funcin f definida por

$$f(x) = x^2 \quad \text{para } 0 \leq x < 2\pi,$$

extendida por periodicidad a toda la recta.

(a) Probar que los coeficientes de Fourier de f son

$$a_k = 4/k^2 \text{ si } k \neq 0, \qquad a_o = 8\pi^2/3 \qquad \text{y} \qquad b = -4\pi/k.$$

(b) Hallar la serie de Fourier de f.

(13) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funcin continua, de perodo 2π. Demostrar que si

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = 0 \qquad \text{para } k = 0, 1, \ldots,$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,\text{sen}(kx)\,dx = 0 \qquad \text{para } k = 1, 2, \ldots$$

entonces

$$f(x) = 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

(14) Sea f una funcin de perodo $2T$, integrable en el intervalo $[0, 2T]$, con serie de Fourier

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{T}\right) + b_k\,\text{sen}\left(\frac{k\pi x}{T}\right).$$

Demostrar que:

(a) Si f es par entonces

$$b_k = 0 \quad \text{para} \quad k = 1, \ldots, n,$$

y adems

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{T}\right)\,dx \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

(b) Si f es impar entonces

$$a_k = 0 \quad \text{para} \quad k = 0, \ldots, n,$$

y adems

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\,\text{sen}\left(\frac{k\pi x}{T}\right)\,dx \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

(15) Hallar el desarrollo de $f(x) = \operatorname{sen} x$, $0 \leq x \leq \pi$ en serie de cosenos.

(16) Desarrollar la funcin $f(x) = x$, $0 < x < 2$, en serie de cosenos y en serie de senos.

Espacios de Hilbert.

(1) Demostrar: Si H es un espacio de Hilbert y M es una variedad lineal de H entonces $M^{\perp}$ es un subespacio (cerrado) de H.

(2) Sea H un espacio de Hilbert. Demostrar que H es separable si y slo si H tiene un conjunto ortonormal maximal numerable.

(3) Sean H_1, H_2 dos espacios de Hilbert separables y de igual dimensin.

Demostrar que existe un isomorfismo isomtrico entre H_1 y H_2.

(4) Sea H un espacio de Hilbert y M una variedad lineal en H.

Demostrar que:

$$\overline{M} = M^{\perp\perp}.$$

Por lo tanto:

$$M \text{ es un subespacio} \qquad \text{si y slo si} \qquad M = M^{\perp\perp}.$$

(5) Demostrar que todo espacio de Hilbert es reflexivo.

(6) Sean H un espacio de Hilbert y $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset H$.

Demostrar que si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es ortogonal y

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k u_k$$

entonces

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \|u_k\|^2.$$

Adems, para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$

$$c_k = \frac{\langle x, u_k \rangle}{\|u_k\|^2}.$$

(7) Demostrar que todo espacio de Hilbert posee una base ortonormal.

(8) Utilizar el mtodo de ortogonalizacin de Gram-Schmidt para demostrar (sin utilizar el Lema de Zorn) que todo espacio de Hilbert separable posee una base ortonormal.

(9) Demostrar que todas las bases ortonormales de un mismo espacio de Hilbert tienen igual cardinalidad (Por lo tanto podemos definir la dimensin de un espacio de Hilbert como el cardinal de cualquier base ortonormal).

(10) Demostrar que dos espacios de Hilbert son isomorfos si y slo si tienen la misma dimensin.

(11) Sean H un espacio de Hilbert y $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un sistema ortonormal en H. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es maximal.

(b) El conjunto de las combinaciones lineales finitas de $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es denso en H.

(c) Para todo x ∈ H se tiene que

$$\|x\|^2 = \sum_{\alpha\in A} |\langle x, u_\alpha\rangle|^2.$$

(d) Para todo $x, y \in H$ se tiene que

$$\langle x, y\rangle = \sum_{\alpha\in A} \langle x, u_\alpha\rangle\overline{\langle y, u_\alpha\rangle}.$$

Operadores en espacios de Hilbert.

(1) Demostrar que si $S, T \in L(H)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ entonces:

(a) $(T + S)^* = T^* + S^*$.

(b) $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$.

(c) $(ST)^* = T^* S^*$.

(d) $T^{**} = T$.

(2) Sea X un espacio vectorial y P una proyeccin en X. Demostrar que se cumplen las siguientes propiedades:

(a) $x \in R(P)$ si y slo si $P(x) = x$.

(b) $N(P) = R(I - P)$.

(c) $I - P$ es una proyeccin.

(d) $X = R(P) \oplus N(P)$.

(3) Sean H un espacio de Hilbert y $T \in L(H)$. Demuestre que T es isomtrico y sobreyectivo si y slo si T^* es isomtrico y sobreyectivo.

(4) Sea H un espacio de Hilbert y $\{x_n\}_{n \geq 1}$ una sucesin en H. Demostrar que si

$$w - \lim_{n \to \infty} x_n = x \qquad \text{y} \lim_{n \to \infty} \|x_n\| = \|x\|$$

entonces

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0.$$

(5) Demostrar que para operadores en $L(H)$:

(a) La convergencia uniforme implica la convergencia fuerte.

(b) La convergencia fuerte implica la convergencia dbil.

(6) Precisar las siguientes proposiciones y demostrarlas:

(a) Toda funcin continua en la topologa fuerte es continua en la topologa de la norma.

(b) Toda funcin continua en la topologa dbil es continua en la topologa fuerte.

(7) Demostrar:

(a) Sea $\varphi : L(H) \to C$ definida mediante

$$\varphi(T) = \|T\|.$$

Entonces φ es continua con la topologa de la norma.

(b) Sea $\varphi_x : L(H) \to H$ definida mediante

$$\varphi_x(T) = T(x).$$

Entonces φ_x es continua con la topologa fuerte de $L(H)$.

(c) Sea $\varphi_{x,y} : L(H) \to H$ definida mediante

$$\varphi_{x,y}(T) = \langle T(x), y \rangle.$$

Entonces $\varphi_{x,y}$ es continua con la topologa dbil de $L(H)$.

Bibliografa

[1] Bachman, G. and Narici, L. *Functional analysis.* Academic Press.

[2] Brown and Page *Elements of functional analysis.* Van Nostrand.

[3] Brown, A. and Pearcy, C. *Introduction to operator theory I.* Springer Verlag.

[4] Cotlar, M. and Cignoli, R. *An introduction to functional analysis.* North Holland, 1974.

[5] DeVito, C. *Functional Analysis.* Academic Press, 1978.

[6] Dunford, Schwartz *Linear operators.* Part I.

[7] Dym, H. y McKean, H.P. *Fourier Series and Integrals.* Academic Press 1972.

[8] Fourier, J. *The Analytical Theory of Heat.* Traducido al ingls por A. Freeman. Cambridge University Press, 1878. Reimpreso por Dover, 1955. Obra Original: Thorie Analytique de la Chaleur, 1822.

[9] Halmos, P. *Teora intuitiva de los conjuntos.* CECSA, 1971.

[10] Kolmogorov, A. y Fomin, S. *Elementos de la teora de funciones y de anlisis funcional.* MIR, 1975.

[11] Kreider, D., Kuller, R., Otsberg, D. y Perkins, F. *Introduccin al Anlisis Lineal, Parte 2.* Fondo Educativo Interamericano, 1971.

[12] Kreyszig, E. *Introductory Functional Analysis with Applications.* John Wiley & Sons, 1978.

[13] Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L. *Classical Banach Spaces I.* Springer Verlag, 1977.

[14] Royden, H. L. *Real analysis.* Collier Macmillan, 1968.

[15] Rudin, W. *Real and complex analysis.* Mc Graw-Hill, 1966.

[16] Spiegel, M. *Anlisis de Fourier.* Serie Schaum. McGraw-Hill, 1977.

[17] Taylor, A. *Introduction to Functional Analysis.* John Wiley & Sons, 1958.

[18] Tolstov, G. *Fourier Series.* Dover, 1976.

[19] Trenoguin, Pisarievski, Sboleva *Problemas y ejercicios de anlisis funcional.*

[20] Yosida, K. *Functional Analysis.* Springer Verlag, 1965.