UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA
LABORATORIO DE FORMAS EN GRUPOS

ESPACIOS DE HILBERT

Ramón Bruzual
Marisela Domínguez

Caracas, Venezuela
Julio 2005

Ramón Bruzual
Correo-E: rbruzual@euler.ciens.ucv.ve

Marisela Domínguez
Correo-E: mdomin@euler.ciens.ucv.ve

Laboratorio Formas en Grupos
Centro de Análisis
Escuela de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad Central de Venezuela

Prólogo

Estas notas son el resultado de la experiencia de los autores en el dictado de diversos cursos en la Licenciatura en Matemática de la Universidad Central de Venezuela.

En unas notas de los mismos autores, tituladas Espacios de Banach, se desarrollan los temas de la primera parte del curso de Análisis Funcional de esta Licenciatura.

Los tres primeros capítulos de estas notas en Espacios de Hilbert corresponden a la segunda parte del curso de Análisis Funcional de esta Licenciatura.

El cuarto capítulo de estas notas en Espacios de Hilbert no está en el programa de ésa asignatura, pero podría ser una continuación natural, obviamente no es la única. Para este capítulo (y sólo para este) se necesitarán algunos conceptos y resultados de un curso básico de Funciones Analíticas.

Todos los capítulos de estas notas en Espacios de Hilbert podrían ser usados como parte de una asignatura electiva de la Licenciatura en Matemática.

El trabajo de mecanografía estuvo a cargo de los autores. Agradecemos cualquier observación o comentario que deseen hacernos llegar.

Ramón Bruzual.
Marisela Domínguez.
Julio 2005.

Contenido

CAPÍTULO 1

Espacios con producto interno.

"Dios siempre hace geometría." Platón.

1. Producto interno.

Definición 1.1. Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ (donde $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). Un *producto interno* en X es una función $\langle .,. \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ tal que

(a) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ para todo $x, y \in X$.
(b) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ para todo $x, y, z \in X$.
(c) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ para todo $x, y \in X$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$.
(d) $\langle x, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in X$.
(e) $\langle x, x \rangle = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Además decimos que $(X, \langle .,. \rangle)$ es un *espacio con producto interno* .

Ejemplo 1.2. $\mathbb{C}^n$ el espacio de los vectores $1 \times n$. $\mathbb{C}^n$ es un espacio con producto interno con el producto escalar euclídeo

$$\langle v, w \rangle_n = vw^* = \sum_{k=1}^{n} v_k \overline{w_k}.$$

donde $v, w \in \mathbb{C}^n$, $v = (v_1, \ldots, v_n)$, $w = (w_1, \ldots, w_n)$, y w^* es el adjunto de w.

Ejemplo 1.3. $\mathbb{C}_{n \times n}$ el espacio de las matrices $n \times n$ cuyas entradas son números complejos está dotado de una estructura Grammaniana: esto es, para $A, B \in \mathbb{C}_{n \times n}$ se considera la matriz $n \times n$ dada por AB^* la cual se conoce como la Grammaniana de A y B.

El espacio $\mathbb{C}_{n \times n}$ es un espacio con producto interno con el producto dado por

$$\langle A, B \rangle_{n \times n} = tr(AB^*) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \overline{b_{ik}}$$

donde $A, B \in \mathbb{C}_{n \times n}$, son de la forma $A = (a_{ik})$, $B = (b_{ik})$.

Ejemplo 1.4. Consideremos a

$$l_2 = l_2(\mathbb{N}) = \left\{ (x_n)_{n \geq 1} / x_n \in \mathbb{C} \text{ tales que } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

con el producto interno dado por

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}.$$

EJEMPLO 1.5. Uno de los ejemplos de espacio con producto interno más conocido es el espacio $l_2(\mathbb{Z})$

$$l_2(\mathbb{Z}) = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}/x_n \in \mathbb{C} \text{ y } \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^2 < \infty \right\}.$$

En este espacio el producto interno en este espacio está dado por

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \overline{y_n}.$$

EJEMPLO 1.6. Sabiendo probabilidades se puede considerar el siguiente ejemplo.

Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad. Sea $L^2(\Omega, F, P)$ el conjunto de las variables aleatorias $Y : \Omega \to \mathbb{R}$, centradas (es decir, $E(Y) = 0$) con varianza finita (es decir, tales que $E(Y^2) < \infty$) con el producto interno dado por la covarianza

$$\langle Y_1, Y_2\rangle = \mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = E(Y_1 Y_2)$$

donde E denota la esperanza.

EJEMPLO 1.7. Sabiendo teoría de la medida se puede considerar el siguiente ejemplo.

Si (Ω, F, μ) es un espacio de medida

$$L^2(\Omega, F, \mu) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C}, f \text{ es } F\text{-medible y } \int_{\Omega} |f(t)|^2 d\mu(t) < \infty \right\}$$

con el producto interno dado por

$$\langle f, g\rangle = \int_{\Omega} f(t)\overline{g(t)} d\mu(t).$$

OBSERVACIÓN 1.8. En particular si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$, podemos considerar el espacio $L^2([a, b], B([a, b]), m)$ donde $B([a, b])$ son los borelianos de $[a, b]$ y m es la medida de Lebesgue en $[a, b]$. Estos espacios los denotaremos por $L^2[a, b]$. En ellos el producto interno está dado por

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)} dt.$$

TEOREMA 1.9 (Desigualdad de Cauchy Schwartz).

Sea $(X, \langle ., .\rangle)$ un espacio con producto interno, entonces para todo $x, y \in X$

$$|\langle x, y\rangle| \leq \langle x, x\rangle^{1/2} \langle y, y\rangle^{1/2}$$

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| = 1$ y

$$\lambda\langle y, x\rangle = |\langle y, x\rangle|.$$

Sea $t \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\langle y, y\rangle t^2 - 2|\langle x, y\rangle| t + \langle x, x\rangle = \langle t\lambda y - x, t\lambda y - x\rangle \geq 0.$$

Esta es una inecuación de segundo grado en t. Observando el discriminante obtenemos que

$$4|\langle x, y\rangle|^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leq 0.$$

De donde

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$

□

Definición 1.10. Sean x, y vectores de un espacio con producto interno. Se dice que x, y son *vectores ortogonales* cuando

$$\langle x, y\rangle = 0.$$

Esto suele abreviarse con la expresión $x \perp y$.

Proposición 1.11. *Sea $(X, \langle ., .\rangle)$ un espacio con producto interno. Si definimos*

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$$

entonces $\| \quad \|$ es una norma en X.

Además, esta norma satisface la ley del paralelogramo, es decir para todo $x, y \in X$:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

La demostración de esta proposición queda como ejercicio.

2. Conjuntos ortogonales.

Definición 1.12. Sea $(X, \langle ., .\rangle)$ un espacio con producto interno. Un subconjunto $\{u_\alpha\}_\alpha$ de X se llama *ortogonal* si

$$\langle u_\alpha, u_\beta\rangle = 0 \qquad \text{para} \qquad \alpha \neq \beta.$$

Definición 1.13. Sea $(X, \langle ., .\rangle)$ un espacio con producto interno. Un subconjunto $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de X se llama *ortonormal* si

$$\langle u_\alpha, u_\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}.$$

El siguiente resultado generaliza el teorema de Pitágoras para el caso finito, en espacios con producto interno. Su demostración queda como ejercicio.

TEOREMA 1.14 (Igualdad de Parseval, caso finito).
Sean $(X, \langle ., . \rangle)$ *un espacio con producto interno y* $x \in X$ *tal que*

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k u_k$$

donde $c_k \in \mathbb{K}$ *y* $u_k \in X$

(a) *Si* $\{u_1, \ldots, u_n\}$ *es ortogonal entonces*

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \|u_k\|^2$$

y $c_k = \langle x, u_k \rangle / \|u_k\|^2$ *para cada* $k \in \{1, \ldots, n\}$.

(b) *Si* $\{u_1, \ldots, u_n\}$ *es ortonormal entonces*

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$$

y $c_k = \langle x, u_k \rangle$ *para cada* $k \in \{1, \ldots, n\}$.

COROLARIO 1.15. *Todo conjunto ortogonal finito es linealmente independiente.*

La demostración de este corolario queda como ejercicio.

3. Funciones periódicas y series de Fourier

3.1. Algunos resultados sobre funciones trigonométricas.

Las funciones trigonométricas son de especial importancia pues tienen un papel fundamental en el análisis de Fourier.

Las siguientes identidades son bien conocidas (x e y denotan números reales).

$$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \operatorname{sen} y \cos x \tag{1.1}$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \tag{1.2}$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \tag{1.3}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \tag{1.4}$$

$$\operatorname{sen} x \cos y = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(x - y) + \operatorname{sen}(x + y)) \tag{1.5}$$

$$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y)) \tag{1.6}$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y)) \tag{1.7}$$

Con algunas de estas igualdades se puede probar la siguiente proposición, la cual da ejemplos de funciones ortogonales con respecto al producto interno dado por

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx.$$

Proposición 1.16. *Sean m y n enteros positivos. Entonces*

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \, dx = \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0, & si\ m \neq n; \\ \pi, & si\ m = n. \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx \, dx = 0.$$

Demostración. Demostraremos que

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \, dx = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n; \\ \pi, & \text{si } m = n. \end{cases}$$

Las demostraciones de las igualdades restantes son análogas y quedarán como ejercicio.

Supongamos $m \neq n$, por la identidad (1.6) tenemos que

$$\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx = \frac{1}{2}(\ \cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)\ ),$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \, dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((m-n)x)\, dx - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((m+n)x)\, dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}((m-n)x)}{m-n}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}((m+n)x)}{m+n}\right]_0^{2\pi} \\ &= 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

Supongamos $m = n$, por la identidad (1.3) tenemos que

$$\operatorname{sen}^2(mx) = \frac{1-\cos(2mx)}{2},$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(mx)\, dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\ 1 - \cos(2mx)\ )\, dx \\ &= \frac{1}{2}\left[x - \frac{\operatorname{sen}(2mx)}{2m}\right]_0^{2\pi} \\ &= \pi. \end{aligned}$$

$\square$

3.2. Funciones periódicas.

OBSERVACIÓN 1.17. Supongamos que f es una función a valores reales definida en un intervalo I, de la forma $(a,b]$ ó $[a,b)$, entonces f puede ser extendida, en forma natural, a una función de período $T = b - a$, definida en todo $\mathbb{R}$ mediante la siguiente igualdad:

$$f(x + nT) = f(x),$$

para $x \in I$ y $n \in \mathbb{Z}$.

En particular, cuando se consideran funciones de período 2π, es usual definirlas en el intervalo $[0, 2\pi)$, o en el intervalo $[-\pi, \pi)$.

PROPOSICIÓN 1.18. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de período T. Si f es integrable sobre un intervalo de longitud T entonces f es integrable sobre cualquier intervalo de longitud T y para cualquier $a \in \mathbb{R}$ se tiene que*

$$\int_{-a}^{T-a} f(x)\, dx = \int_0^T f(x)\, dx.$$

La demostración de esta proposición queda como ejercicio.

3.3. Polinomios trigonométricos.

Como es usual $\mathbb{R}$ denotará el cuerpo de los números reales.

DEFINICIÓN 1.19. Un *polinomio trigonométrico* es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ de la forma

$$P(x) = \frac{\alpha_o}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos kx + \beta_k \operatorname{sen} kx, \tag{1.8}$$

donde $\alpha_o, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y $\beta_1, \ldots, \beta_n$ son constantes reales.

DEFINICIÓN 1.20. Si P es un polinomio trigonométrico de la forma (1.8), el *grado* de P es el mayor entero k tal que $\alpha_k \neq 0$ ó $\beta_k \neq 0$.

El siguiente resultado indica que los coeficientes de un polinomio trigonométrico se obtienen considerando el producto interno del polinomio con las funciones seno y coseno.

PROPOSICIÓN 1.21. *Sea P un polinomio trigonométrico de la forma* (1.8)*. Entonces*

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P(x) \cos kx\, dx \quad \textit{para } k = 0, \ldots, n$$
$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P(x) \operatorname{sen} kx\, dx \quad \textit{para } k = 1, \ldots, n.$$

La demostración de esta proposición queda como ejercicio.

PROPOSICIÓN 1.22. *Sea P un polinomio trigonométrico de la forma* (1.8). *Entonces*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(P(x))^2\,dx = \frac{\alpha_o^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2 + \beta_k^2.$$

DEMOSTRACIÓN. Notemos que

$$(P(x))^2 = \frac{\alpha_o}{2}P(x) + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k P(x)\cos kx + \beta_k P(x)\operatorname{sen} kx,$$

integrando y utilizando la Proposición 1.21 obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}(P(x))^2\,dx &= \frac{\alpha_o}{2}\int_0^{2\pi}P(x)\,dx + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\int_0^{2\pi}P(x)\cos kx\,dx + \beta_k\int_0^{2\pi}P(x)\operatorname{sen} kx\,dx\\ &= \frac{\alpha_o}{2}\pi\alpha_o + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\pi\alpha_k + \beta_k\pi\beta_k\\ &= \pi\left(\frac{\alpha_o^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2 + \beta_k^2\right).\end{aligned}$$

□

Conociendo el espacio $L^2[0,2\pi]$, este resultado se puede interpretar así: salvo constante, la norma en $L^2[0,2\pi]$ de un polinomio trigonométrico se obtiene sumando los cuadrados de sus coeficientes.

3.4. Coeficientes de Fourier.

DEFINICIÓN 1.23. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función de período 2π, integrable en el intervalo $[0,2\pi]$.

Los *coeficientes de Fourier* de f son

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos kx\,dx \qquad (k=0,1,\dots), \tag{1.9}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\operatorname{sen} kx\,dx \qquad (k=1,2,\dots). \tag{1.10}$$

La serie de Fourier de f es la siguiente suma formal

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx + b_k\operatorname{sen} kx \tag{1.11}$$

OBSERVACIÓN 1.24. Si P es un polinomio trigonométrico entonces los coeficientes de Fourier de P son los coeficientes que aparecen en la expresión original de P, la serie de Fourier de P converge y P es igual a su serie de Fourier.

3.5. Lema de Riemann-Lebesgue.

LEMA 1.25 (Riemann-Lebesgue). *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable. Entonces*

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(\lambda x)\, dx = \lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(x) \cos(\lambda x)\, dx = 0.$$

Haga la demostración de este lema, considerando primero funciones simples, luego funciones positivas e integrables y finalmente funciones integrables.

COROLARIO 1.26. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de período 2π, integrable en el intervalo $[0, 2\pi]$. Si $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ son sus coeficientes de Fourier, entonces*

$$\lim_{k \to +\infty} a_k = \lim_{k \to +\infty} b_k = 0.$$

3.6. Notación compleja.

Muchas de las operaciones con funciones trigonométricas se simplifican al pasar a los números complejos, usando la fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta. \tag{1.12}$$

De la fórmula de Euler se obtiene

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\ \operatorname{sen}\theta &= \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \end{aligned} \tag{1.13}$$

A continuación enunciamos algunos resultados que pueden ser verificados sin mayores dificultades por el estudiante familiarizado con el manejo de números complejos.

Si en un polinomio trigonométrico de la forma

$$P(x) = \frac{\alpha_o}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos kx + \beta_k \operatorname{sen} kx,$$

hacemos la substitución

$$\cos kx = \frac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx}) \qquad \operatorname{sen} kx = \frac{1}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx}),$$

obtenemos

$$P(x) = \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ikx},$$

donde, para $k = 1, \dots, n$, los números complejos γ_k están relacionados con los números α_o, α_k y β_k por la ecuaciones

$$\gamma_o = \frac{1}{2}\alpha_o,$$
$$\gamma_k = \frac{1}{2}(\alpha_k - i\beta_k),$$
$$\gamma_{-k} = \frac{1}{2}(\alpha_k + i\beta_k).$$

También se tiene que

$$\alpha_k = \gamma_k + \gamma_{-k},$$
$$\beta_k = i(\gamma_k - \gamma_{-k}).$$

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de período 2π, integrable en el intervalo $[0, 2\pi]$, entonces su serie de Fourier es igual a

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx},$$

donde

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx.$$

3.7. Funciones de período arbitrario.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de período $2T$ $(T > 0)$, si definimos $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(x) = f\left(\frac{Tx}{\pi}\right),$$

entonces φ tiene período 2π.

Este cambio de variable permite trasladar, en forma muy natural y sencilla, los resultados que hemos obtenido para funciones de período 2π a funciones de período $2T$.

Una función de período $2T$, integrable en el intervalo $[0, 2T]$, tiene una serie de Fourier (generalizada) de la forma

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{T}\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{T}\right),$$

donde

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{T}\right)\,dx \qquad (k = 0, 1, \dots),$$
$$b_k = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{T}\right)\,dx \qquad (k = 1, 2, \dots).$$

3.8. Desarrollo en serie de cosenos y en serie de senos.

"Incluso funciones totalmente arbitrarias pueden ser desarrolladas en series de senos de multiples arcos". Fourier

Definición 1.27. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo simétrico con respecto al origen y sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función.

Se dice que f es *par* si

$$f(x) = f(-x) \quad \text{para todo} \quad x \in I.$$

Se dice que f es *impar* si

$$f(x) = -f(-x) \quad \text{para todo} \quad x \in I.$$

Supongamos que tenemos una función f, definida en un intervalo de la forma $[0, T]$, donde $T > 0$.

Si definimos

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0, T], \\ f(-x) & \text{si } x \in [-T, 0], \end{cases}$$

entonces g es una extensión par de f al intervalo $[-T, T]$. La función g tiene una extensión de período $2T$ a toda la recta. La expansión de Fourier de g es lo que se conoce como el desarrollo en serie de cosenos de f.

Si definimos

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0, T], \\ -f(-x) & \text{si } x \in [-T, 0], \end{cases}$$

entonces h es una extensión impar de f al intervalo $[-T, T]$. La función h tiene una extensión de período $2T$ a toda la recta (más precisamente la restricción de h al intervalo $[-T, T)$). La expansión de Fourier de h es lo que se conoce como el desarrollo en serie de senos de f.

Se puede probar que si $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ es una función integrable, entonces su desarrollo en serie de cosenos es

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{T}\right),$$

donde

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{T}\right) dx \qquad (k = 0, 1, \dots).$$

Su desarrollo en serie de senos es

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{T}\right),$$

donde

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{T}\right)\,dx \qquad (k = 1, 2, \dots).$$

3.9. Aproximación en media cuadrática.

Tomando en cuenta la Proposición 1.11 consideramos

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx\right)^{1/2}.$$

Teorema 1.28. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de período 2π, de cuadrado integrable, sea N un entero positivo y sea P un polinomio trigonométrico de grado N. Sea $\{S_n\}$ la sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de f. Entonces*

$$\|f - S_N\|_2 \leq \|f - P\|_2$$

y hay igualdad si y sólo si $P = S_N$.

Demostración. Sea

$$P(x) = \frac{\alpha_o}{2} + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \cos kx + \beta_k \operatorname{sen} kx.$$

Por la Proposición 1.22 tenemos que

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (P(x))^2\,dx = \frac{\alpha_o^2}{2} + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k^2 + \beta_k^2.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)P(x)\,dx = \\
&= \frac{\alpha_o}{2}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx + \beta_k \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\operatorname{sen} kx\,dx \\
&= \frac{\alpha_o a_o}{2} + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k a_k + \beta_k b_k.
\end{aligned}$$

Sea

$$S_n(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx$$

la sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de f.

Entonces

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(f(x)-P(x))^2\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(f(x))^2\,dx-\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)P(x)\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(P(x))^2\,dx.$$

Luego

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(f(x)-P(x))^2\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(f(x))^2\,dx-2\left(\frac{\alpha_o a_o}{2}+\sum_{k=1}^{N}\alpha_k a_k+\beta_k b_k\right)+\frac{\alpha_o^2}{2}+\sum_{k=1}^{N}\alpha_k^2+\beta_k^2 \tag{1.14}$$

$$=\frac{1}{\pi}\|f\|_2^2+\frac{(a_o-\alpha_o)^2}{2}+\sum_{k=1}^{N}(a_k-\alpha_k)^2+(b_k-\beta_k)^2-\left(\frac{a_o^2}{2}+\sum_{k=1}^{N}a_k^2+b_k^2\right)$$

En particular

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(f(x)-S_N(x))^2\,dx=\frac{1}{\pi}\|f\|_2^2-\left(\frac{a_o^2}{2}+\sum_{k=1}^{N}a_k^2+b_k^2\right) \tag{1.15}$$

De las fórmulas (1.14) y (1.15) sigue inmediatamente el resultado.

□

3.10. Desigualdad de Bessel para funciones de cuadrado integrable.

Proposición 1.29 (Desigualdad de Bessel). *Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función de período 2π, de cuadrado integrable y sean a_k y b_k sus coeficientes de Fourier. Entonces*

$$\frac{a_o^2}{2}+\sum_{k=1}^{N}a_k^2+b_k^2\leq\frac{1}{\pi}\|f\|_2^2$$

para todo entero positivo N.

Demostración. De la fórmula (1.15) sigue inmediatamente el resultado.

□

Corolario 1.30. *Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función de período 2π, de cuadrado integrable y sean a_k y b_k sus coeficientes de Fourier. Entonces la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2+b_k^2$$

es convergente

Ejercicios 1.

(1) Demuestre que los siguientes espacios vectoriales son espacios con producto interno

(a) El espacio $\mathbb{C}^n$ de los vectores $1 \times n$. Con el producto escalar euclídeo

$$\langle v, w \rangle_n = vw^* = \sum_{k=1}^{n} v_k \overline{w_k}.$$

donde $v, w \in \mathbb{C}^n$, $v = (v_1, \ldots, v_n)$, $w = (w_1, \ldots, w_n)$, y w^* es el adjunto de w.

(b) El espacio $\mathbb{C}_{n\times n}$ de las matrices $n \times n$. Con el producto dado por

$$\langle A, B \rangle_{n\times n} = tr(AB^*) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \overline{b_{ik}}$$

donde $A, B \in \mathbb{C}_{n\times n}$, son de la forma $A = (a_{ik})$, $B = (b_{ik})$.

(c) El espacio

$$l_2 = \left\{ (x_n)_{n\geq 1} / x_n \in \mathbb{C} \text{ tales que } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

con el producto dado por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}.$$

(d) Sabiendo probabilidades se puede considerar el siguiente caso.
Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad. Sea $L^2(\Omega, F, P)$ el conjunto de las variables aleatorias $Y : \Omega \to \mathbb{R}$, centradas (es decir, $E(Y) = 0$) con varianza finita (es decir, tales que $E(Y^2) < \infty$).
El espacio $L^2(\Omega, F, P)$ es un espacio con producto interno, el cual está dado por la covarianza

$$\langle Y_1, Y_2 \rangle = Cov(Y_1, Y_2) = E(Y_1 Y_2)$$

donde E denota la esperanza.

(e) Sabiendo teoría de la medida se puede considerar el siguiente caso.
Si (Ω, F, μ) es un espacio de medida sea

$$L^2(\Omega, F, \mu) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C}, f \text{ es } F\text{- medible y } \int_\Omega |f(t)|^2 d\mu(t) < \infty \right\}$$

El espacio $L^2(\Omega, F, \mu)$ es un espacio con producto interno, el cual está dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f(t)\overline{g(t)} d\mu(t).$$

(2) Demostrar: Sea $(X, \langle ., . \rangle)$ un espacio con producto interno. Si definimos

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$$

entonces $\| \quad \|$ es una norma en X.

Además, esta norma satisface la ley del paralelogramo, es decir, para todo $x, y \in X$:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

(3) Demostrar que todo espacio con producto interno se puede completar.

(4) Sea X un espacio vectorial real con producto interno $\langle ., . \rangle$.
Demostrar que para todo $x, y \in X$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

(5) Sea X un espacio vectorial complejo con producto interno $\langle ., . \rangle$.
Demostrar que para todo $x, y \in X$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2).$$

(6) Sea $(X, \|.\|)$ un espacio normado (real o complejo). Demostrar que $\|.\|$ proviene de un producto interno si y sólo si satisface la ley del paralelogramo.

(7) Demostrar: Todo conjunto ortogonal es linealmente independiente.

(8) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de período T. Probar que si f es integrable sobre un intervalo de longitud T entonces f es integrable sobre cualquier intervalo de longitud T y para cualquier $a \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\int_{-a}^{T-a} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx.$$

(9) Sea P un polinomio trigonométrico de la forma

$$P(x) = \frac{\alpha_o}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos kx + \beta_k \operatorname{sen} kx.$$

Probar que

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P(x) \cos kx\,dx \quad \text{para } k = 0, \ldots, n$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P(x) \operatorname{sen} kx\,dx \quad \text{para } k = 1, \ldots, n.$$

(10) Considerar la función f definida por

$$f(x) = x \quad \text{para } -\pi \leq x < \pi,$$

extendida por periodicidad a toda la recta.

(a) Hallar los coeficientes de Fourier.

(b) Probar que la serie de Fourier de f es

$$2\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \cdots + (-1)^{k+1}\frac{\operatorname{sen} kx}{k} + \cdots\right)$$

(11) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de período 2π, integrable en el intervalo $[0, 2\pi]$. Pruebe que si $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ son sus coeficientes de Fourier, entonces

$$\lim_{k \to +\infty} a_k = \lim_{k \to +\infty} b_k = 0.$$

(12) Considerar la función f definida por

$$f(x) = x^2 \quad \text{para } 0 \leq x < 2\pi,$$

extendida por periodicidad a toda la recta.

(a) Probar que los coeficientes de Fourier de f son

$$a_k = 4/k^2 \text{ si } k \neq 0, \qquad a_o = 8\pi^2/3 \qquad \text{y} \qquad b = -4\pi/k.$$

(b) Hallar la serie de Fourier de f.

(13) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua, de período 2π. Demostrar que si

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = 0 \qquad \text{para } k = 0, 1, \ldots,$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,\text{sen}(kx)\,dx = 0 \qquad \text{para } k = 1, 2, \ldots$$

entonces

$$f(x) = 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

(14) Sea f una función de período $2T$, integrable en el intervalo $[0, 2T]$, con serie de Fourier

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{T}\right) + b_k\,\text{sen}\left(\frac{k\pi x}{T}\right).$$

Demostrar que:

(a) Si f es par entonces

$$b_k = 0 \quad \text{para} \quad k = 1, \ldots, n,$$

y además

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{T}\right)\,dx \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

(b) Si f es impar entonces

$$a_k = 0 \quad \text{para} \quad k = 0, \ldots, n,$$

y además

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\,\text{sen}\left(\frac{k\pi x}{T}\right)\,dx \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

(15) Hallar el desarrollo de $f(x) = \operatorname{sen} x$, $0 \leq x \leq \pi$ en serie de cosenos.

(16) Desarrollar la función $f(x) = x$, $0 < x < 2$, en serie de cosenos y en serie de senos.

CAPÍTULO 2

Espacios de Hilbert.

DEFINICIÓN 2.1. Un *espacio de Hilbert* es un espacio vectorial con producto interno que es completo con respecto a la norma dada por el producto interno.

EJEMPLO 2.2. El espacio $\mathbb{C}^n$ con el producto interno dado en el Ejemplo 1.2 es un espacio de Hilbert.

EJEMPLO 2.3. El espacio $\mathbb{C}_{n\times n}$ con el producto interno dado en el Ejemplo 1.3 es un espacio de Hilbert.

PROPOSICIÓN 2.4. *El espacio*

$$l_2 = \left\{ (x_n)_{n\geq 1}/x_n \in \mathbb{C} \text{ tales que } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

es un espacio de Hilbert con el producto interno dado por

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}.$$

La demostración de esta proposición que da como ejercicio.

1. Geometría de espacios de Hilbert.

TEOREMA 2.5. *Sea H un espacio de Hilbert. Todo subconjunto cerrado, convexo y no vacío de H contiene un único elemento de norma mínima.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $C \subset H$, C cerrado, convexo y no vacío. Sea

$$\delta = \inf_{x\in C} \|x\|.$$

Debemos probar que existe un vector de C cuya norma es δ. Sea $\{x_n\}_n \subset C$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \delta.$$

Por la ley del paralelogramo se sigue que

$$\|x_n + x_m\|^2 + \|x_n - x_m\|^2 = 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2.$$

Como C es convexo tenemos que $(x_n + x_m)/2 \in C$. Luego

$$\left\| \frac{x_n + x_m}{2} \right\| \geq \delta.$$

Por lo tanto

$$\|x_n - x_m\|^2 \leq 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 - 4\delta^2.$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\|^2 = \lim_{m\to\infty} \|x_m\|^2 = \delta^2$$

la desigualdad anterior permite probar que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

Como H es Hilbert entonces H es completo, luego $\{x_n\}$ es una sucesión convergente. Sea

$$x_o = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Como C es cerrado $x_o \in C$. Además

$$\|x_o\| = \left\| \lim_{n\to\infty} x_n \right\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \delta.$$

De donde x_o tiene norma mínima.

Para ver la unicidad basta notar que, por lo anterior, si $y \in C$ es otro elemento de norma mínima entonces la sucesión $\{x_o, y, x_o, y, \ldots\}$ es de Cauchy y por lo tanto $x_o = y$ (complete los detalles de la prueba de esta parte). $\square$

Definición 2.6. Dado un espacio de Hilbert H y una variedad lineal M de H el ortogonal de M es

$$M^\perp = \{z \in H : \langle z, x\rangle = 0 \text{ para todo } x \in M\}.$$

Proposición 2.7. *Sean H un espacio de Hilbert y M una variedad lineal de H entonces $M^\perp$ es un subespacio (cerrado) de H.*

La demostración de esta proposición queda como ejercicio.

Teorema 2.8 (Teorema de la perpendicular).

Sean H un espacio de Hilbert y M un subespacio (cerrado) de H entonces para cada $x \in H$ existe un único $y \in M$ y un único $z \in M^\perp$ tal que $x = y + z$. Además

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2,$$

$$\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, M).$$

El vector y es llamado la proyección ortogonal de x sobre M y lo denotaremos por $P_M(x)$.

Demostración.

Sea $x \in H$, el conjunto $x + M$ es un subconjunto de H cerrado, convexo y no vacío. Por el teorema anterior $x + M$ tiene un elemento de norma mínima.

Sea $z \in x + M$ el elemento de norma mínima, entonces existe $m_o \in M$ tal que

$$z = x + m_o.$$

Sea $y = -m_o$ entonces $y \in M$ y $x = y + z$.

Probaremos que $z \in M^{\perp}$.

Sea $m \in M$. Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $|\lambda| = 1$ y

$$\lambda\langle m, z\rangle = |\langle m, z\rangle|.$$

Sea $t \in \mathbb{R}$, como z es de norma mínima

$$\begin{aligned}\|z\|^2 \leq \|z - t\,\lambda\, m\|^2 &= \langle z - t\,\lambda\, m, z - t\,\lambda\, m\rangle \\ &= \|z\|^2 - t\,\lambda\langle m, z\rangle - t\,\overline{\lambda}\langle z, m\rangle + t^2|\lambda|^2\|m\|^2.\end{aligned}$$

Entonces

$$0 \leq -2\,t\,|\langle m, z\rangle| + t^2\,\|m\|^{\,2}.$$

Si $\|m\| = 1$ y $t > 0$ entonces

$$0 \leq 2\,|\langle m, z\rangle| \leq t.$$

Tomando límite cuando t tiende a 0, obtenemos que

$$\langle m, z\rangle = 0$$

para todo $m \in M$ tal que $\|m\| = 1$. De esto se puede deducir que $z \in M^{\perp}$.

A continuación probaremos las otras igualdades. Como $\langle y, z\rangle = 0$ se sigue que

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \langle y + z, y + z\rangle = \langle y, y\rangle + \langle z, z\rangle = \|y\|^2 + \|z\|^2.$$

Además

$$\|x - y\| = \|z\| = \inf_{w \in x+M} \|w\| = \inf_{m \in M} \|x + m\| = \operatorname{dist}(x, M).$$

La unicidad queda como ejercicio.

$\square$

Corolario 2.9. *Sean H un espacio de Hilbert y M un subespacio (cerrado) de H entonces*

$$H = M + M^{\perp}$$

donde $M^{\perp}$ es un subespacio (cerrado) de H, que es ortogonal a M.

PROPOSICIÓN 2.10. *En un espacio de Hilbert el único vector que es ortogonal a todos los vectores es el vector cero.*

La demostración de esta proposición queda como ejercicio.

2. Funcionales lineales en espacios de Hilbert.

PROPOSICIÓN 2.11. *Dados un $\mathbb{K}$-espacio de Hilbert H y un vector $y \in H$, sea $f : H \to \mathbb{K}$ dada por*

$$f(x) = \langle x, y \rangle \qquad \text{para todo } x \in H$$

entonces f es un funcional lineal continuo en H. Es decir, $f \in H^*$.

La demostración de esta proposición queda como ejercicio. El siguiente teorema dice que el recíproco es cierto.

TEOREMA 2.12 (Teorema de representación de Riesz).
Sea H un espacio de Hilbert y f un funcional lineal continuo en H (es decir, $f \in H^*$) entonces existe un único $y \in H$ tal que

$$f(x) = \langle x, y \rangle \qquad \text{para todo } x \in H.$$

DEMOSTRACIÓN.
Si $f = 0$, basta tomar $y = 0$.
Si $f \neq 0$, consideramos

$$M = ker(f) = \{x \in H : f(x) = 0\}.$$

Se tiene que M es un subespacio propio de H, por lo tanto $M^\perp$ no es trivial.
Sea $z \in M^\perp$ tal que $\|z\| = 1$, claramente $f(z) \neq 0$.
Sea $x \in$ H entonces

$$f\left(x - \frac{f(x)}{f(z)}\, z\right) = f(x) - \frac{f(x)}{f(z)} f(z) = 0.$$

Luego

$$x - \frac{f(x)}{f(z)} z \in M.$$

Y así

$$0 = \left\langle x - \frac{f(x)}{f(z)} z, z \right\rangle = \langle x, z\rangle - \frac{f(x)}{f(z)} \langle z, z\rangle = \langle x, z\rangle - \frac{f(x)}{f(z)}.$$

De donde

$$f(x) = f(z)\,\langle x, z\rangle = \langle x, \overline{f(z)}\; z\rangle.$$

La representación se obtiene tomando

$$y = \overline{f(z)}\, z.$$

Veamos la unicidad. Supongamos que existen $y_1, y_2 \in H$ tales que

$$f(x) = \langle x, y_1 \rangle \qquad f(x) = \langle x, y_2 \rangle$$

para todo $x \in H$. Entonces

$$\langle x, y_1 - y_2 \rangle = 0$$

para todo $x \in H$. Por la proposición anterior $y_1 - y_2 = 0$. Luego $y_1 = y_2$.

□

3. Sistemas ortogonales.

TEOREMA 2.13. *Sean H un espacio de Hilbert, $\{u_1, \ldots, u_n\}$ un conjunto ortonormal y M el subespacio generado por $\{u_1, \ldots, u_n\}$. Si $x \in H$ y $\delta = \operatorname{dist}(x, M)$ entonces*

(a) *La proyección ortogonal de x sobre M está dada por*

$$P_M(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k \rangle u_k.$$

(b) *La norma de x puede expresarse en términos de la distancia de x a M y de los coeficientes de la proyección ortogonal de x mediante*

$$\|x\|^2 = \delta^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle x, u_k \rangle|^2.$$

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que $x = y + z$ donde $y \in M$, $z \in M^{\perp}$ y además

$$\|z\| = \|x - y\| = \operatorname{dist}(x, M)$$

y

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2.$$

Tenemos que $z \perp u_k$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$ y existen constantes $c_1, \ldots, c_n$ tales que

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i.$$

Luego

$$\begin{aligned}\langle x, u_k\rangle &= \langle y+z, u_k\rangle = \langle y, u_k\rangle + \langle z, u_k\rangle = \\ &= \langle y, u_k\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} c_i u_i, u_k \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i \langle u_i, u_k\rangle = c_k.\end{aligned}$$

De donde $c_k = \langle x, u_k\rangle$ y por lo tanto

$$P_M(x) = y = \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k\rangle u_k.$$

Además por la igualdad de Parseval en el caso finito (ver Teorema 1.14) tenemos que

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle x, u_k\rangle|^2 = \|y\|^2 = \|x\|^2 - \|z\|^2 = \|x\|^2 - \delta^2.$$

□

Corolario 2.14. *Sean H un espacio de Hilbert, $\{u_1, \ldots, u_n\}$ un conjunto ortonormal y $x \in H$. Entonces*

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle x, u_k\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Corolario 2.15 (Desigualdad de Bessel).
Sean H un espacio de Hilbert, $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un sistema ortonormal en H y $x \in H$. Entonces

(a) *el conjunto $\{\alpha \in A : \langle x, u_\alpha\rangle \neq 0\}$ es numerable o finito*
(b) $\sum_{\alpha\in A} |\langle x, u_\alpha\rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

Definición 2.16. Dado un conjunto A llamaremos $l^2(A)$ al conjunto de las funciones $\varphi : A \to \mathbb{K}$ tales que $\varphi(\alpha) = 0$ salvo para una cantidad numerable o finita de índices α y

$$\sum_{\alpha\in A} |\varphi(\alpha)|^2 < \infty.$$

Y sea

$$\|\varphi\|_{l^2(A)} = \left(\sum_{\alpha\in A} |\varphi(\alpha)|^2\right)^{1/2}.$$

Ejemplo 2.17. En el caso $A = \mathbb{N}$ tenemos que $l^2(\mathbb{N}) = l^2$ (donde l^2 es el espacio que aparece en la Proposición 2.4).

Observación 2.18. Sabiendo teoría de la medida, el espacio $l^2(A)$ se puede interpretar como el espacio L^2 de la medida que a cada punto le asocia masa 1).

Teorema 2.19 (Riesz - Fischer).
Sean H un espacio de Hilbert y $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un sistema ortonormal en H. Si $\varphi \in l^2(A)$ entonces existe $x \in H$ tal que

$$\varphi(\alpha) = \langle x, u_\alpha\rangle \qquad y \qquad \|x\| = \|\varphi\|_{l^2(A)}.$$

Demostración. Sea

$$B_n = \{\alpha \in A : |\varphi(\alpha)| > 1/n\}$$

entonces B_n es finito. Sea

$$x_n = \sum_{\alpha\in B_n} \varphi(\alpha)\, u_\alpha.$$

Por la igualdad de Parseval en el caso finito (ver Teorema 1.14) tenemos que

$$\|x_n\|^2 = \sum_{\alpha\in B_n} |\varphi(\alpha)|^2.$$

Es fácil ver que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy (pruébelo). Como H es completo existe $x \in H$ tal que

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Entonces para cada $\alpha \in A$

$$\langle x, u_\alpha\rangle = \langle \lim_{n\to\infty} x_n, u_\alpha\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, u_\alpha\rangle = \varphi(\alpha)$$

Además

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \left\|\lim_{n\to\infty} x_n\right\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{\alpha\in B_n} |\varphi(\alpha)|^2 = \sum_{\alpha\in A} |\varphi(\alpha)|^2 = \|\varphi\|^2_{l^2(A)}.\end{aligned}$$

□

Observación 2.20. Si $A = \mathbb{N}$ entonces el teorema anterior queda así:

Corolario 2.21. *Sean H un espacio de Hilbert y $\{u_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión ortonormal en H. Si $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de escalares en l^2 entonces existe $x \in H$ tal que*

$$a_n = \langle x, u_n\rangle \qquad y \qquad \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2.$$

Definición 2.22. Un conjunto ortogonal es *maximal* cuando no existe ningún otro conjunto ortogonal que lo contenga.

Definición 2.23. Los conjuntos ortonormales maximales suelen llamarse *bases ortonormales.*

Teorema 2.24. *Sean H un espacio de Hilbert y $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un sistema ortonormal en H. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *$\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es maximal.*
(b) *El conjunto de las combinaciones lineales finitas de $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es denso en H.*
(c) *Para todo $x \in H$ se tiene que*

$$\|x\|^2 = \sum_{\alpha\in A} |\langle x, u_\alpha\rangle|^2.$$

(d) *Para todo $x, y \in H$ se tiene que*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{\alpha\in A} \langle x, u_\alpha\rangle \overline{\langle y, u_\alpha\rangle}.$$

La demostración queda como ejercicio. (Ayuda: probar $(a) \to (b) \to (c) \to (d) \to (a)$).

Observación 2.25. Notar que si $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es una base ortonormal entonces

$$x = \sum_{\alpha\in A} \langle x, u_\alpha\rangle u_\alpha \qquad \text{y} \qquad \|x\|^2 = \sum_{\alpha\in A} |\langle x, u_\alpha\rangle|^2.$$

Del Lema de Zorn sigue fácilmente la existencia de conjuntos ortonormales maximales. Es más, se puede probar que todo subconjunto ortonormal está contenido en una base ortonormal.

Además, si $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es una base ortonormal en H es claro que la aplicación $F : H \to l^2(A)$ definida mediante

$$F(x) = \{\langle x, u_\alpha\rangle\}_{\alpha\in A}$$

es un isomorfismo isométrico.

Luego todo espacio de Hilbert es isomorfo a $l^2(A)$ para algún A.

Observación 2.26. Los espacios de Hilbert que tienen mayor interés son los separables. En este caso las bases ortonormales son numerables o finitas.

4. Aplicación a series trigonométricas en $L^2[0, 2\pi]$

Sabiendo teoría de la medida podemos considerar la siguiente aplicación.

Se tiene que $L^2[0, 2\pi]$ es un espacio de Hilbert con el producto

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Para $n \in \mathbb{Z}$ sea $e_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ definida por

$$e_n(t) = e^{int}.$$

PROPOSICIÓN 2.27. *El conjunto* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *es un subconjunto ortonormal en* $L^2[0, 2\pi]$.

La demostración de esta proposición queda como ejercicio

TEOREMA 2.28. *El conjunto* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *es una base de* $L^2[0, 2\pi]$.

DEMOSTRACIÓN. Basta ver que el conjunto de las combinaciones lineales finitas de $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es denso en $L^2[0, 2\pi]$.

Sean $f \in L^2[0, 2\pi]$ y $\varepsilon > 0$, por resultados de aproximación de teoría de la medida sabemos que existe una función continua g tal que $\|f - g\|_{L^2} < \varepsilon/2$. Por el teorema de Stone Weierstrass existe un polinomio P tal que $\|g - P\|_{L^\infty} < \varepsilon/2$.

Finalmente

$$\|f - P\|_{L^2} \le \|f - g\|_{L^2} + \|g - P\|_{L^2} \le \varepsilon/2 + \|g - P\|_{L^\infty} < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

De donde $\{e_n\}_{n\in Z}$ es una base ortonormal de $L^2[0, 2\pi]$.

$\square$

Notar que

$$\langle f, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt = \hat{f}(n).$$

Así que como corolarios de los resultados anteriores obtenemos:

COROLARIO 2.29. *Si* $f \in L^2[0, 2\pi]$ *entonces*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 < \infty$$

y

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2.$$

COROLARIO 2.30. *Si* $c = \{c_n\}_{n\in Z}$ *es una sucesión tal que*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 < \infty$$

entonces existe $f \in L^2[0, 2\pi]$ *tal que*

$$c_n = \hat{f}(n) \qquad y \qquad \|f\|_{L^2} = \|c\|_{l^2(\mathbb{Z})}.$$

Esta f *está dada por*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n \right\|_{L^2} = 0.$$

4.1. Identidad de Parseval para funciones de cuadrado integrable.

TEOREMA 2.31 (Identidad de Parseval). *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de período 2π, de cuadrado integrable y sean a_k y b_k sus coeficientes de Fourier. Entonces*

$$\frac{a_o^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 = \frac{1}{\pi}\|f\|_2^2.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{S_n(x)\}$ la sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de f, considerando la fórmula (1.15) con $P = S_n$, obtenemos

$$\frac{1}{\pi}\|f\|_2^2 - \left(\frac{a_o^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right) = \frac{1}{\pi}\|f - S_n\|_2^2.$$

Tomando límite cuando n tiende a infinito y usando que $\|f - S_n\|_2$ tiende a cero, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\pi}\|f\|_2^2 - \left(\frac{a_o^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right)\right) = 0.$$

□

4.2. Aplicación a sumación de series numéricas.

EJEMPLO 2.32. Vamos a ver como la identidad de Parseval nos permite establecer que

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Consideremos la función

$$f(x) = x \quad \text{para} \quad -\pi \leq x < \pi,$$

extendida por periodicidad a toda la recta.

La serie de Fourier de f es

$$2\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \cdots + (-1)^{k+1}\frac{\operatorname{sen}(k)x}{k} + \cdots\right).$$

Al aplicar la identidad de Parseval obtenemos

$$4\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^2,$$

de donde se obtiene el resultado.

Ejercicios 2.

(1) Demostrar: Si H es un espacio de Hilbert y M es una variedad lineal de H entonces $M^{\perp}$ es un subespacio (cerrado) de H.

(2) Sea H un espacio de Hilbert. Demostrar que H es separable si y sólo si H tiene un conjunto ortonormal maximal numerable.

(3) Sean H_1, H_2 dos espacios de Hilbert separables y de igual dimensión.
Demostrar que existe un isomorfismo isométrico entre H_1 y H_2.

(4) Sea H un espacio de Hilbert y M una variedad lineal en H.
Demostrar que:

$$\overline{M} = M^{\perp\perp}.$$

Por lo tanto:

$$M \text{ es un subespacio} \qquad \text{si y sólo si} \qquad M = M^{\perp\perp}.$$

(5) Demostrar que todo espacio de Hilbert es reflexivo.

(6) Sean H un espacio de Hilbert y $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset H$.
Demostrar que si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es ortogonal y

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k u_k$$

entonces

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \|u_k\|^2.$$

Además, para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$

$$c_k = \frac{\langle x, u_k \rangle}{\|u_k\|^2}.$$

(7) Demostrar que todo espacio de Hilbert posee una base ortonormal.

(8) Utilizar el método de ortogonalización de Gram-Schmidt para demostrar (sin utilizar el Lema de Zorn) que todo espacio de Hilbert separable posee una base ortonormal.

(9) Demostrar que todas las bases ortonormales de un mismo espacio de Hilbert tienen igual cardinalidad (Por lo tanto podemos definir la dimensión de un espacio de Hilbert como el cardinal de cualquier base ortonormal).

(10) Demostrar que dos espacios de Hilbert son isomorfos si y sólo si tienen la misma dimensión.

(11) Sean H un espacio de Hilbert y $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un sistema ortonormal en H. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es maximal.

(b) El conjunto de las combinaciones lineales finitas de $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es denso en H.

(c) Para todo x ∈ H se tiene que

$$\|x\|^2 = \sum_{\alpha\in A} |\langle x, u_\alpha\rangle|^2.$$

(d) Para todo $x, y \in H$ se tiene que

$$\langle x, y\rangle = \sum_{\alpha\in A} \langle x, u_\alpha\rangle \overline{\langle y, u_\alpha\rangle}.$$

CAPÍTULO 3

Operadores en espacios de Hilbert.

1. Operadores acotados en espacios de Hilbert

Sea H un espacio de Hilbert (salvo que se indique lo contrario supondremos que H es complejo).

Usualmente $L(H,H)$ se denota por $L(H)$. Se tiene que $L(H)$ es un álgebra y

$$\|ST\| \leq \|S\| \, \|T\|$$

para todo $S, T \in L(H)$.

PROPOSICIÓN 3.1. *Sea $T \in L(H)$, si*

$$\langle T(x), x\rangle = 0 \qquad \textit{para todo } x \in H$$

entonces $T = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $x, y \in H$, por hipótesis

$$\begin{aligned} 0 &= \langle T(x+y), x+y\rangle = \langle T(x)+T(y), x+y\rangle \\ &= \langle T(x), x\rangle + \langle T(x), y\rangle + \langle T(y), x\rangle + \langle T(y), y\rangle \\ &= \langle T(x), y\rangle + \langle T(y), x\rangle. \end{aligned}$$

Es decir

$$\langle T(x), y\rangle = -\langle T(y), x\rangle.$$

Como el espacio vectorial es complejo, podemos cambiar y por iy, obteniendo que

$$-i\langle T(x), y\rangle = -i\langle T(y), x\rangle.$$

Dividiendo entre $-i$ se sigue que

$$\langle T(x), y\rangle = \langle T(y), x\rangle.$$

Entonces

$$-\langle T(y), x\rangle = \langle T(x), y\rangle = \langle T(y), x\rangle.$$

De donde

$$\langle T(x), y\rangle = 0.$$

Si ponemos $y = T(x)$ entonces

$$\langle T(x), T(x) \rangle = 0.$$

Por lo tanto $T(x) = 0$ para todo $x \in H$.

$\square$

OBSERVACIÓN 3.2. En el caso de un espacio vectorial real la Proposición anterior NO es cierta. Por ejemplo, considere una rotación de noventa grados en $\mathbb{R}^2$.

COROLARIO 3.3. *Si* $S, T \in L(H)$ *y*

$$\langle S(x), x \rangle = \langle T(x), x \rangle \qquad \textit{para todo } x \in H$$

entonces $S = T$.

DEFINICIÓN 3.4. Cuando existe $x_o \in H$ tal que

$$T(x_o) = \lambda x_o$$

para algún $\lambda \in \mathbb{C}$ se dice que:

(a) λ es un *autovalor* de T.
(b) x_o es un *autovector* del autovalor λ.
(c) $\{x \in H : T(x) = \lambda x\}$ es el *autoespacio* del autovalor λ.

2. Adjunto de un operador.

TEOREMA 3.5. *Si* $T \in L(H)$ *entonces existe un único operador* $T^* \in L(H)$ *tal que*

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$$

para todo $x, y \in H$.

Además se tiene que $\|T\| = \|T^*\|$.

El operador T^* *se llama el adjunto de* T.

DEMOSTRACIÓN. Veamos la existencia. Sea $y \in H$ definimos el funcional lineal f_y mediante

$$f_y(x) = \langle T(x), y \rangle$$

entonces

$$|f_y(x)| = |\langle T(x), y \rangle| \leq \|T(x)\| \, \|y\| \leq \|T\| \, \|x\| \, \|y\|.$$

Así que f_y es continuo. Por el teorema de representación de Riesz existe un único $z_y \in H$ tal que

$$f_y(x) = \langle x, z_y \rangle.$$

De donde

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, z_y\rangle.$$

Definimos $T^* : H \to H$ mediante

$$T^*(y) = z_y.$$

Veamos que T^* es lineal. Sean $x, y_1, y_2 \in H$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ entonces

$$\begin{aligned}
\langle x, T^*(\lambda y_1 + y_2)\rangle &= \langle T(x), \lambda y_1 + y_2\rangle \\
&= \overline{\lambda}\ \langle T(x), y_1\rangle + \langle T(x), y_2\rangle \\
&= \overline{\lambda}\ \langle x, T^*(y_1)\rangle + \langle x, T^*(y_2)\rangle \\
&= \langle x, \lambda T^*(y_1)\rangle + \langle x, T^*(y_2)\rangle.
\end{aligned}$$

Sea

$$w = T^*(\lambda y_1 + y_2) - (\lambda T^*(y_1) + T^*(y_2)).$$

Entonces para todo $x \in H$:

$$\langle x, w\rangle = 0.$$

En particular para $x = w$. De donde $\|w\| = 0$. Por lo tanto $w = 0$.

Es decir

$$T^*(\lambda y_1 + y_2) = \lambda T^*(y_1) + T^*(y_2).$$

Veamos que T^* es continuo. Sean $x, y \in H$ entonces

$$|\langle x, T^*(y)\rangle| = |\langle T(x), y\rangle| \leq \|T\|\ \|x\|\ \|y\|.$$

En particular para $x = T^*(y)$ tenemos que

$$\|T^*(y)\|^2 \leq \|T\|\ \|T^*(y)\|\ \|y\|.$$

De donde

$$\|T^*(y)\| \leq \|T\|\ \|y\|.$$

Por lo tanto $T^* \in L(H)$ y

$$\|T^*\| \leq \|T\|.$$

La unicidad es sencilla (verifíquela).

Veamos la igualdad para las normas. Aplicando lo hecho antes a T^* obtenemos que

$$T^{**} = T$$

y por lo tanto

$$\|T\| = \|T^{**}\| \leq \|T^*\|.$$

De donde

$$\|T\| = \|T^*\|.$$

□

Ejemplo 3.6. El operador de traslación (Shift). En $l_2(\mathbb{Z})$ consideremos el operador U definido por:

$$U((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (x_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Sean $x, y \in l_2(\mathbb{Z})$ entonces

$$\langle x, U^*(y)\rangle = \langle U(x), y\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_{n-1}\,\overline{y_n} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k\,\overline{y_{k+1}}.$$

Por lo tanto U^* es el operador en $l_2(\mathbb{Z})$ definido por:

$$U^*((y_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (y_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Proposición 3.7. *Sean $S, T \in L(H)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ entonces:*

(a) $(T + S)^* = T^* + S^*$.
(b) $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$.
(c) $(ST)^* = T^* S^*$.
(d) $T^{**} = T$.
(e) $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

Demostración.
Las partes (a), (b), (c) y (d) quedan como ejercicio.

Sólo probaremos la parte (e).
Se tiene que

$$\|T^*T\| \leq \|T^*\|\|T\| = \|T\|^2.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\|T(x)\|^2 &= \langle T(x), T(x)\rangle = \langle T^*T(x), x\rangle \\ &\leq \|T^*T(x)\|\ \|x\|\ \leq \|T^*T\|\ \|x\|^2.\end{aligned}$$

Luego

$$\|T\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|^2 \leq \|T^*T\|.$$

□

NOTACIÓN. Llamaremos

$$N(T) = Nucleo(T),$$

$$R(T) = Rango(T).$$

PROPOSICIÓN 3.8. *Si* $T \in L(H)$ *entonces*

(a) $N(T^*) = R(T)^{\perp}$.
(b) $N(T) = R(T^*)^{\perp}$.

DEMOSTRACIÓN.

(a) Sean $x \in N(T^*)$, $y \in H$ entonces

$$\langle x, T(y) \rangle = \langle T^*(x), y \rangle = \langle 0, y \rangle = 0.$$

De donde $x \in R(T)^{\perp}$.

Recíprocamente, si $x \in R(T)^{\perp}$ entonces

$$\langle T^*(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle = 0$$

para todo $y \in H$. Por lo tanto $T^*(x) = 0$, es decir, $x \in N(T^*)$.

(b) Basta aplicar la parte (a) al operador T^* y usar que $T^{**} = T$.

□

3. Operadores normales.

DEFINICIÓN 3.9. Sea $T \in L(H)$ se dice que: T es *normal* cuando

$$T^*T = TT^*.$$

EJEMPLO 3.10. En $l_2(\mathbb{Z})$ consideremos el operador de traslación (Shift) U definido por:

$$U(\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}) = \{x_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Sabemos que U^* es el operador en $l_2(\mathbb{Z})$ definido por:

$$U^*(\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}) = \{y_{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Sea $x \in l_2(\mathbb{Z})$

$$U^*U(\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}) = U^*(\{x_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}) = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Además

$$UU^*(\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}) = U(\{x_{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}) = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Luego

$$U^*U = UU^*.$$

Por lo tanto U es normal.

EJEMPLO 3.11. En $l_2(\mathbb{N})$ consideremos el operador de traslación (Shift) S definido por:

$$S(\{x_o, x_1, x_2, \ldots\}) = \{0, x_o, x_1, \ldots\}$$

(Si U es como en el ejemplo anterior entonces básicamente $S = U|_{l_2(\mathbb{N})}$). Se puede probar (hágalo) que

$$S^*(\{y_o, y_1, y_2, \ldots\}) = \{y_1, y_2, y_3, \ldots\}$$

Sea $x \in l_2(\mathbb{N})$

$$S^*S(\{x_o, x_1, x_2, \ldots\}) = S^*\{0, x_o, x_1, \ldots\} = \{x_o, x_1, x_2, \ldots\}.$$

Además

$$SS^*(\{x_o, x_1, x_2, \ldots\}) = S\{x_1, x_2, x_3, \ldots\} = \{0, x_1, x_2, \ldots\}.$$

Luego

$$S^*S \neq SS^*.$$

Por lo tanto S no es normal.

TEOREMA 3.12. *Sea $T \in L(H)$.*
T es normal si y sólo si $\|T(x)\| = \|T^*(x)\|$ para todo $x \in H$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in H$

$$\|T(x)\|^2 = \langle T(x), T(x)\rangle = \langle T^*T(x), x\rangle.$$

$$\|T^*(x)\|^2 = \langle T^*(x), T^*(x)\rangle = \langle TT^*(x), x\rangle.$$

De esto se sigue que:
$T^*T = TT^*$ si y sólo si $\|T(x)\| = \|T^*(x)\|$ para todo $x \in H$.

□

TEOREMA 3.13. *Sea $T \in L(H)$, si T es normal entonces*

(a) $N(T) = N(T^*) = R(T)^{\perp}$.

(b) *Si para algunos $x \in H$, $\lambda \in \mathbb{C}$ se tiene que $T(x) = \lambda x$ entonces $T^*(x) = \overline{\lambda} x$.*

(c) *Si α y β son autovalores de T y $\alpha \neq \beta$ entonces los correspondientes autoespacios son ortogonales.*

DEMOSTRACIÓN.

(a) Sabemos que $N(T^*) = R(T)^{\perp}$ para cualquier operador $T \in L(H)$.

Si T es normal, por (a), se tiene que

$$\|T(x)\| = \|T^*(x)\|$$

para todo $x \in H$. Por lo tanto $N(T) = N(T^*)$.

(b) Si T es normal entonces $T - \lambda I$ es normal y por la parte (a) tenemos que

$$\begin{aligned} 0 = \|T(x) - \lambda x\| &= \|(T - \lambda I)\,(x)\| = \|(T - \lambda I)^*(x)\| \\ &= \|(T^* - \overline{\lambda} I)\,(x)\| = \|T^*(x) - \overline{\lambda} x\|. \end{aligned}$$

De donde $T^*(x) = \overline{\lambda} x$.

(c) Sean $x, y \in H$ tales que

$$T(x) = \alpha\, x, \qquad T(y) = \beta\, y$$

entonces

$$\alpha\langle x, y\rangle = \langle \alpha\, x, y\rangle = \langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle = \langle x, \overline{\beta}\, y\rangle = \beta\langle x, y\rangle.$$

Luego

$$(\alpha - \beta)\langle x, y\rangle = 0.$$

Como $\alpha \neq \beta$ se sigue que $\langle x, y\rangle = 0$.

□

4. Operadores unitarios

DEFINICIÓN 3.14. Sea $U \in L(H)$ se dice que: U es *unitario* cuando

$$U^*U = UU^* = I.$$

TEOREMA 3.15. *Si $U \in L(H)$ entonces las siguientes condiciones son equivalentes*

(a) *U es unitario.*

(b) $R(U) = H$ *y*

$$\langle U(x), U(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$

para todo $x, y \in H$.

(c) $R(U) = H$ *y*

$$\|U(x)\| = \|x\|$$

para todo $x \in H$.

Demostración.

$(a \to b)$

Esta implicación se obtiene tomando en cuenta que si U es unitario entonces es invertible y por lo tanto es sobreyectivo.

Además si $x, y \in H$ entonces

$$\langle U(x), U(y)\rangle = \langle U^*U(x), y\rangle = \langle x, y\rangle.$$

$(b \to c)$

Esta implicación se obtiene tomando $x = y$.

$(c \to a)$

Sea $x \in H$ entonces

$$\langle U^*U(x), x\rangle = \langle U(x), U(x)\rangle = \|U(x)\| = \|x\| = \langle x, x\rangle.$$

Luego

$$U^*U = I.$$

Sean $x, y \in H$ tales que $U(x) = U(y)$ entonces

$$x = U^*U(x) = U^*U(y) = y.$$

De donde U es inyectivo.

Además $R(U) = H$, luego existe U^{-1}.

Se tiene que

$$U^{-1} = U^*.$$

Y así

$$U^*U = UU^* = I.$$

□

EJEMPLO 3.16. En $l_2(\mathbb{Z})$ consideremos el operador de traslación (Shift) U definido por:

$$U((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (x_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Entonces U es unitario.

Sea

$$S = U/l_2(\mathbb{N})$$

entonces

$$S(\{x_o, x_1, x_2, \ldots\}) = \{0, x_o, x_1, \ldots\}.$$

Se puede probar que S es una isometría y sin embargo S no es unitario (hágalo).

5. Operadores autoadjuntos.

DEFINICIÓN 3.17. Sea $T \in L(H)$ se dice que: T es *autoadjunto* o *hermitiano* cuando

$$T = T^*.$$

EJEMPLO 3.18. Dado $S \in L(H)$ sea $T_1 \in L(H)$ el operador dado por

$$T_1 = \frac{1}{2}(S + S^*).$$

Se puede probar que

$$T_1 = T_1^*.$$

Entonces T es autoadjunto.

EJEMPLO 3.19. Dado $S \in L(H)$ sea $T_2 \in L(H)$ el operador dado por

$$T_2 = \frac{1}{2i}(S - S^*).$$

Se tiene que

$$T_2 = T_2^*.$$

Entonces T es autoadjunto.

OBSERVACIÓN 3.20. Los operadores T_1 y T_2 que aparecen en los ejemplos anteriores son, con respecto al operador S, objetos similares a la parte real y la parte imaginaria de un número complejo.

EJEMPLO 3.21. Dado $S \in L(H)$ un operador autoadjunto, sea $T \in L(H)$ el operador dado por

$$T = iS.$$

Se puede demostrar que

$$T \neq T^*.$$

Y por lo tanto T no es autoadjunto.

PROPOSICIÓN 3.22. *Todo operador autoadjunto es normal.*

La demostración de esta proposición queda como ejercicio.

6. Proyecciones.

DEFINICIÓN 3.23. Sean X un espacio vectorial y $P \in L(X)$ se dice que P es una *proyección* cuando

$$P^2 = P.$$

EJEMPLO 3.24. Sabiendo probabilidades se puede entender que la esperanza condicional es una proyección.

PROPOSICIÓN 3.25. *Sea X un espacio vectorial y P una proyección en X. Entonces:*

(a) $x \in R(P)$ *si y sólo si* $P(x) = x$.
(b) $N(P) = R(I - P)$.
(c) $I - P$ *es una proyección.*
(d) $R(P) = N(I - P)$.
(e) $X = R(P) + N(P)$.
(f) $X = R(P) + R(I - P)$.

La demostración de esta proposición queda como ejercicio.

TEOREMA 3.26. *Sea $P \in L(H)$ una proyección entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) P *es autoadjunto.*
(b) P *es normal.*
(c) $R(P) = N(P)^{\perp}$.
(d) $\langle P(x), x\rangle = \|P(x)\|^2$ *para todo* $x \in H$.

En este caso P se llama una proyección ortogonal y como $N(P) = R(I - P)$ claramente se tiene:

$$H = R(P) + R(I - P) = PH + (I - P)H.$$

DEMOSTRACIÓN.
$(a \rightarrow b)$
Esto se obtiene porque todo operador autoadjunto es normal.
$(b \rightarrow c)$

Como P es normal tenemos que $N(P) = R(P)^{\perp}$. De donde

$$N(P)^{\perp} = R(P)^{\perp\perp}.$$

Por la proposición anterior $R(P) = N(I - P)$, luego $R(P)$ es cerrado y por lo tanto

$$R(P)^{\perp\perp} = R(P).$$

De donde

$$N(P)^{\perp} = R(P).$$

$(c \to d)$

Como $N(P)$ es cerrado y $R(P) = N(P)^{\perp}$ se sigue que

$$R(P)^{\perp} = N(P)^{\perp\perp} = N(P).$$

Sea $x \in H$ entonces

$$x = y + z$$

con $y \in R(P)$, $z \in N(P) = R(P)^{\perp}$.

Por lo tanto

$$P(z) = 0, \qquad \langle y, z\rangle = 0, \qquad P(y) = P(x) = y.$$

Luego

$$\begin{aligned}
\langle P(x), x\rangle &= \langle P(y+z), y+z\rangle \\
&= \langle P(y), y+z\rangle + \langle P(z), y+z\rangle \\
&= \langle P(y), y+z\rangle = \langle y, y+z\rangle \\
&= \|y\|^2 = \|P(x)\|^2.
\end{aligned}$$

$(d \to a)$

Sea $x \in H$ entonces

$$\langle x, P^*(x)\rangle = \langle P(x), x\rangle = \|P(x)\|^2.$$

De donde

$$\langle x, P^*(x)\rangle \in \mathbb{R},$$

por lo tanto

$$\langle P^*(x), x\rangle = \langle x, P^*(x)\rangle = \langle P(x), x\rangle.$$

Por el Corolario 3.3 tenemos que

$$P^* = P.$$

□

7. Distintos tipos de convergencia de operadores en $L(H)$.

En esta sección vamos a definir varias topologías en $L(H)$. También enunciaremos varias proposiciones cuyas demostraciones quedan como ejercicio.

Sea $\{T_n\}_{n\geq 1} \subset L(H)$ una sucesión y $T \in L(H)$.

Definición 3.27. La *topología uniforme* o *topología de la norma* en $L(H)$ es aquella en la que una base de entornos del operador cero viene dada por:

$$U(\varepsilon) = \{T \in L(H) : \|T\| < \varepsilon\}.$$

Proposición 3.28. *$\{T_n\}_{n\geq 1}$ converge uniformemente a T si y sólo si*

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0.$$

Esta es la convergencia de la norma en $L(H)$.

Definición 3.29. La *topología fuerte* de $L(H)$ es aquella en la que una base de entornos del operador cero viene dada por:

$$F(\varepsilon, x) = \{T \in L(H) : \|T(x)\| < \varepsilon\}.$$

Proposición 3.30. *$\{T_n\}_{n\geq 1}$ converge fuertemente a T si y sólo si*

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = T(x)$$

para todo $x \in H$.

Definición 3.31. La *topología débil* de $L(H)$ es aquella en la que una base de entornos del operador cero viene dada por:

$$D(\varepsilon, x, y) = \{T \in L(H) : |\langle T(x), y\rangle| < \varepsilon\}.$$

Proposición 3.32. *$\{T_n\}_{n\geq 1}$ converge débilmente a T si y sólo si*

$$\lim_{n\to\infty} \langle T_n(x), y\rangle = \langle T(x), y\rangle$$

para todo $x, y \in H$.

Proposición 3.33.

(a) *La convergencia uniforme implica la convergencia fuerte.*
(b) *La convergencia fuerte implica la convergencia débil.*

En realidad se puede demostrar que la topología de la norma contiene la topología fuerte, y la topología fuerte contiene la topología débil.

OBSERVACIÓN 3.34. Los recíprocos de la proposición anterior no son ciertos, tal como lo muestran los siguientes ejemplos.

(a) La convergencia fuerte no implica la convergencia uniforme.

En $l^2(\mathbb{N})$ sea P_N el operador definido por

$$P_N(\{x_1, x_2, \ldots\}) = \{x_1, x_2, \ldots, x_N, 0, \ldots\}.$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} P_N(x) = x$$

para todo $x \in l^2(\mathbb{N})$, es decir $\{P_n\}_{n\geq 1}$ converge fuertemente a I.

Sin embargo

$$\|P_N - I\| = 1$$

para todo $N \in \mathbb{N}$, por lo tanto $\{P_n\}_{n\geq 1}$ NO converge uniformemente a I.

(b) La convergencia débil no implica la convergencia fuerte.

En $l^2(\mathbb{N})$ sea S el operador definido por

$$S(\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}) = \{0, x_1, x_2, \ldots\}$$

entonces

$$S^n(\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}) = \{0, \ldots 0, x_1, x_2, \ldots\}$$

en el término de la derecha x_1 se encuentra en el lugar $n+1$.

Sea $y \in H$

$$\langle S^n(x), y\rangle = \langle \{0, \ldots 0, x_1, x_2, \ldots\}, \{y_1, y_2, y_3, \ldots\}\rangle = \sum_{k=n}^{\infty} x_{k-n+1}\, y_{k+1}.$$

De donde

$$\begin{aligned} |\langle S^n(x), y\rangle|^2 &\leq \left(\sum_{k=n}^{\infty} |x_{k-n+1}|^2\right)\left(\sum_{k=n}^{\infty} |y_{k+1}|^2\right) \\ &\leq \|x\|^2 \left(\sum_{k=n}^{\infty} |y_{k+1}|^2\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \langle S^n(x), y\rangle = 0$$

para todo $x, y \in H$.

Sin embargo, como

$$\|S^n(x)\| = \|x\|$$

para todo $x \in H$ es imposible que $\lim_{n\to\infty} S^n(x)$ sea 0 para todo $x \in H$.

PROPOSICIÓN 3.35. *Sea $T \in L(H)$*

(1) *Sea $\varphi : L(H) \to \mathbb{C}$ definida mediante*

$$\varphi(T) = \|T\|.$$

Entonces φ es continua con la topología de la norma.

(2) *Sea $\varphi_x : L(H) \to H$ definida mediante*

$$\varphi_x(T) = T(x).$$

Entonces φ_x es continua con la topología fuerte de $L(H)$.

(3) *Sea $\varphi_{x,y} : L(H) \to H$ definida mediante*

$$\varphi_{x,y}(T) = \langle T(x), y\rangle.$$

Entonces $\varphi_{x,y}$ es continua con la topología débil de L(H).

La demostración de esta proposición queda como ejercicio.

Ejercicios 3.

(1) Demostrar que si $S, T \in L(H)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ entonces:

(a) $(T+S)^* = T^* + S^*$.

(b) $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$.

(c) $(ST)^* = T^* S^*$.

(d) $T^{**} = T$.

(2) Sea X un espacio vectorial y P una proyección en X. Demostrar que se cumplen las siguientes propiedades:

(a) $x \in R(P)$ si y sólo si $P(x) = x$.

(b) $N(P) = R(I-P)$.

(c) $I - P$ es una proyección.

(d) $X = R(P) \oplus N(P)$.

(3) Sean H un espacio de Hilbert y $T \in L(H)$. Demuestre que T es isométrico y sobreyectivo si y sólo si T^* es isométrico y sobreyectivo.

(4) Sea H un espacio de Hilbert y $\{x_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión en H. Demostrar que si

$$w - \lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \text{y} \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

(5) Demostrar que para operadores en $L(H)$:

(a) La convergencia uniforme implica la convergencia fuerte.

(b) La convergencia fuerte implica la convergencia débil.

(6) Precisar las siguientes proposiciones y demostrarlas:

(a) Toda función continua en la topología fuerte es continua en la topología de la norma.

(b) Toda función continua en la topología débil es continua en la topología fuerte.

(7) Demostrar:

(a) Sea $\varphi : L(H) \to C$ definida mediante

$$\varphi(T) = \|T\|.$$

Entonces φ es continua con la topología de la norma.

(b) Sea $\varphi_x : L(H) \to H$ definida mediante

$$\varphi_x(T) = T(x).$$

Entonces φ_x es continua con la topología fuerte de $L(H)$.

(c) Sea $\varphi_{x,y} : L(H) \to H$ definida mediante

$$\varphi_{x,y}(T) = \langle T(x), y\rangle.$$

Entonces $\varphi_{x,y}$ es continua con la topología débil de $L(H)$.

CAPÍTULO 4

Espectro de un operador.

Observación 4.1. Este capítulo no está en el programa de esta asignatura Análisis Funcional de la Licenciatura en Matemática de la Universidad Central de Venezuela. Sin embargo, podría ser una continuación natural.

En este capítulo se necesitarán algunos conceptos y resultados de un curso básico de Funciones Analíticas.

Sea H un espacio de Hilbert (salvo que se indique lo contrario supondremos que H es complejo).

Definición 4.2. Sea $T \in L(H)$, diremos que T es *invertible* si existe $S \in L(H)$ tal que $ST = TS = I$. Usaremos la siguiente notación: $S = T^{-1}$.

Definición 4.3. Sea $T \in L(H)$ el *conjunto resolvente* de T es:

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ es invertible}\}.$$

Definición 4.4. Sea $T \in L(H)$ el *espectro* de T es:

$$\sigma(T) = \rho(T)^C = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ NO es invertible}\}.$$

Proposición 4.5. *Si* $\dim H$ *es finita entonces* $\sigma(T)$ *es el conjunto de los autovalores de* T *y está formado por las raíces de* $det\,(T - \lambda I)$.

Observación 4.6. Si la dimensión de H es infinita puede ocurrir que $\lambda \in \sigma(T)$ y sin embargo λ no sea autovalor de T.

Por ejemplo sea $T : l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$ dado por

$$T(\{x_o, x_1, x_2, \ldots\}) = \{x_o, x_1/2, x_2/3 \ldots\}.$$

Tenemos que T es inyectivo, por lo tanto $N(T) = 0$, así que 0 no es autovalor de T.

Por otro lado $\|T(e_n)\| = 1/n$, luego

$$\lim_{n\to\infty} \|T(e_n)\| = 0.$$

Pero como $\|e_n\| = 1$ resulta que T no es invertible, de donde $0 \in \sigma(T)$.

Proposición 4.7. *Sea $T \in L(H)$ tal que $\|T\| < 1$, entonces*

(a) *$I - T$ es invertible.*

(b) $\|(I-T)^{-1} - (I+T)\| \leq \dfrac{\|T\|^2}{1 - \|T\|}$.

Demostración. De $\|T^n\| \leq \|T\|^n$ obtenemos

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty} T^n\right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n.$$

La serie de la derecha es una serie geométrica de razón $\|T\| < 1$, así que converge en $\mathbb{R}$.

Y por lo tanto la serie $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ converge en $L(H)$ a un operador $S \in L(H)$.

$$(I-T)S = S(I-T) = \sum_{n=0}^{\infty} T^n - \sum_{n=0}^{\infty} T^{n+1} = I.$$

De donde $I - T$ es invertible.

$$(I-T)^{-1} - I - T = \sum_{n=2}^{\infty} T^n.$$

Además

$$\|(I-T)^{-1} - (I+T)\| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \|T\|^n = \|(I-T)^{-1} - (I+T)\| \leq \frac{\|T\|^2}{1 - \|T\|}\,.$$

□

Teorema 4.8. *El conjunto de los operadores invertibles es abierto en $L(H)$.*

Demostración. Sea $T \in L(H)$ invertible. Sea $S \in L(H)$ tal que

$$\|S\| < 1/\|T^{-1}\|.$$

Entonces

$$\|T^{-1}S\| \leq \|T^{-1}\|\ \|S\| < 1.$$

Por la Proposición 3.1. tenemos que $I + T^{-1}S$ es invertible. Luego

$$T + S = T(I + T^{-1}S).$$

De donde $T + S$ es invertible. □

Teorema 4.9. *Sea $T \in L(H)$ entonces $\rho(T)$ es abierto y*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \|T\|\} \subset \rho(T).$$

Demostración. Que $\rho(T)$ es abierto sigue del teorema anterior.

Si $|\lambda| > \|T\|$ entonces $\|T/\lambda\| < 1$. Por la Proposición 3.1. tenemos que $I - \lambda^{-1}T$ es invertible. De donde

$$\lambda I - T = \lambda(I - \lambda^{-1}T)$$

es invertible.

□

Teorema 4.10. *Sea $T \in L(H)$ entonces $\sigma(T)$ es compacto y NO vacío.*

Demostración. Que $\sigma(T)$ es compacto sigue del teorema anterior.

Veamos que $\sigma(T)$ no es vacío.

Sea $R : \rho(T) \to L(H)$ definida por

$$R(\lambda) = (\lambda I - T)^{-1}.$$

Si $\mu, \lambda \in \rho(T)$ se tiene que

$$\begin{aligned} R(\mu)^{-1}(R(\mu) - R(\lambda))R(\lambda)^{-1} &= (\mu I - T)\left((\mu I - T)^{-1} - (\lambda I - T)^{-1}\right)(\lambda I - T) = \\ &= (\lambda I - T) - (\mu I - T) \\ &= (\lambda - \mu)I. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$R(\mu) - R(\lambda) = -(\mu - \lambda)R(\mu)R(\lambda).$$

Supongamos que $\lambda \in \rho(T)$ entonces existe

$$\lim_{\mu \to \lambda} \frac{R(\mu) - R(\lambda)}{\mu - \lambda},$$

$$\lim_{\mu \to \lambda} \frac{R(\mu) - R(\lambda)}{\mu - \lambda} = -(R(\lambda))^2.$$

Por lo tanto R es una función analítica en $\rho(T)$. (Notar que esto implica que $F(\lambda) = f(R(\lambda))$ es analítica en $\rho(T)$ para todo $f \in L(H)^*$).

Si $|\lambda| > \|T\|$ entonces

$$R(\lambda) = (\lambda I - T)^{-1} = \lambda^{-1}(I - \lambda^{-1}T)^{-1} = \lambda^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(T/\lambda)^n$$

$$\|R(\lambda)\| \leq \frac{1}{|\lambda|}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\|T\|}{|\lambda|}\right)^n = \frac{1}{|\lambda|}\,\frac{1}{1 - \|T\|/|\lambda|} = \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}.$$

De donde

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} R(\lambda) = 0$$

y

$$\|R(\lambda)\| \leq \|T\|^{-1}$$

si $|\lambda| \geq 2\|T\|$.

Si $\sigma(T)$ fuese vacío entonces $R(\lambda)$ sería una función entera.

Claramente

$$\|R(\lambda)\| \leq M < \infty$$

para todo λ tal que $|\lambda| \leq 2\|T\|$.

Por el Teorema de Liouville debe ser $R(\lambda) = 0$. (Este teorema dice que una función que es analítica y acotada en todo el plano es una función constante).

De donde $\sigma(T) \neq \emptyset$.

□

DEFINICIÓN 4.11. Si $T \in L(H)$ se define el *radio espectral* de T por

$$r(T) = \max_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda|.$$

TEOREMA 4.12 (Fórmula de Gelfand). *Si $T \in L(H)$ entonces*

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = \inf_{n\geq 1} \|T^n\|^{1/n}.$$

DEMOSTRACIÓN.

La haremos en varias partes.

(1) Probaremos que

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = \inf_{n\geq 1} \|T^n\|^{1/n}.$$

Sea $m \geq 1$ (entero fijo). Si $n \in \mathbb{N}$ entonces

$$n = mq_n + r_n$$

donde $0 \leq r_n < m$. Luego

$$\|T^n\|^{1/n} = \|T^{mq_n+r_n}\|^{1/n} \leq \|T^m\|^{q_n/n}\|T\|^{r_n/n}$$

$$\lim_{n\to\infty} r_n/n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} q_n/n = 1/n.$$

Luego para todo $m \geq 1$
$$\limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} \leq \|T^m\|^{1/m}$$
de donde
$$\limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} \leq \inf_{m\geq 1} \|T^m\|^{1/m} \leq \liminf_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$$
Por lo tanto $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$ existe y
$$\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = \inf_{n\geq 1} \|T^n\|^{1/n}.$$
(2) Veremos que
$$r(T) \leq \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}.$$
Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que
$$|\lambda| > \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$$
entonces
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|T^n\|}{|\lambda|^n} < \infty$$
porque
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\|T^n\|}{|\lambda|^n}\right)^{1/n} < 1.$$
Y por lo tanto
$$\Sigma = \sum_{n=0}^{\infty} T^n/\lambda^n < \infty.$$
Como
$$(\lambda I - T)\Sigma = \Sigma(\lambda I - T) = I$$
se sigue que $\lambda I - T$ es invertible.

De donde
$$\left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}\right\} \subset \rho(T).$$
Luego
$$r(T) \leq \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}.$$
(3) Finalmente demostraremos que
$$r(T) \geq \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}.$$
Definamos la función
$$R(\lambda) = (\lambda I - T)^{-1}.$$
Esta función es analítica en $\rho(T)$. Luego R es analítica en $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > r(T)\}$.

Sea $f \in L(H)^*$ definamos
$$F(\lambda) = f(R(\lambda))$$

entonces F es analítica en $\{\lambda : |\lambda| > r(T)\}$.

Además si $|\lambda| > r(T)$ entonces

$$F(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} f(T^n)$$

(porque el desarrollo es válido en cualquier conjunto de la forma $\{\lambda : |\lambda| > a\}$ está contenido en el dominio de F).

Sea $\lambda_o \in \rho(T)$ tal que $|\lambda_o| > r(T)$ entonces $\{f(T^n/\lambda_o^n)\}_{n=0}$ es acotado para todo $f \in L(H^*)$. De donde

$$\|T^n/\lambda_o^n\| \leq M$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Luego

$$\|T^n\|^{1/n} \leq M^{1/n}|\lambda_o|.$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} \leq |\lambda_o|.$$

De donde

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} \leq r(T).$$

□

TEOREMA 4.13 (Aplicación espectral para polinomios).
Sea $T \in L(H)$ y P un polinomio entonces

$$\sigma(P(T)) = P(\sigma(T)).$$

DEMOSTRACIÓN.

(1) Veamos que

$$\sigma(P(T)) \subset P(\sigma(T)).$$

Sea $\lambda \in \sigma$(P(T)) entonces λI - P(T) no es invertible. Si

$$\lambda - P(t) = a(t - t_1)\,(t - t_2)\ldots(t - t_n).$$

Luego

$$\lambda I - P(T) = a(T - t_1 I)\,(T - t_2 I)\ldots(T - t_n I).$$

Como $\lambda I - P(T)$ no es invertible entonces existe algún k tal que $T - t_k I$ no es invertible y por lo tanto $t_k \in \sigma(T)$.

Como

$$P(t_k) = \lambda$$

entonces se concluye que $\lambda \in P(\sigma(T))$.

(2) Finalmente probaremos que

$$P(\sigma(T)) \subset \sigma(P(T)).$$

Sea $\lambda \in P(\sigma(T))$ entonces

$$\lambda - P(t) = a(t - t_1)\,(t - t_2)\ldots(t - t_n)$$

donde $t_1 \in \sigma(T)$. Además

$$\lambda I - P(T) = a(T - t_1 I)\,(T - t_2 I)\ldots(T - t_n I)$$

Como $t_1 \in \sigma(T)$ entonces $T - t_1 I$ NO es invertible.

Por lo tanto $\lambda I - P(T)$ NO es invertible. De donde $\lambda \in \sigma(P(T))$. $\square$

Bibliografía

[1] BACHMAN, G. AND NARICI, L. *Functional analysis.* Academic Press.

[2] BROWN AND PAGE *Elements of functional analysis.* Van Nostrand.

[3] BROWN, A. AND PEARCY, C. *Introduction to operator theory I.* Springer Verlag.

[4] COTLAR, M. AND CIGNOLI, R. *An introduction to functional analysis.* North Holland, 1974.

[5] DEVITO, C. *Functional Analysis.* Academic Press, 1978.

[6] DUNFORD, SCHWARTZ *Linear operators.* Part I.

[7] DYM, H. Y MCKEAN, H.P. *Fourier Series and Integrals.* Academic Press 1972.

[8] FOURIER, J. *The Analytical Theory of Heat.* Traducido al inglés por A. Freeman. Cambridge University Press, 1878. Reimpreso por Dover, 1955. Obra Original: Théorie Analytique de la Chaleur, 1822.

[9] HALMOS, P. *Teoría intuitiva de los conjuntos.* CECSA, 1971.

[10] KOLMOGOROV, A. Y FOMIN, S. *Elementos de la teoría de funciones y de análisis funcional.* MIR, 1975.

[11] KREIDER, D., KULLER, R., OTSBERG, D. Y PERKINS, F. *Introducción al Análisis Lineal, Parte 2.* Fondo Educativo Interamericano, 1971.

[12] KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications.* John Wiley & Sons, 1978.

[13] LINDENSTRAUSS, J. AND TZAFRIRI, L. *Classical Banach Spaces I.* Springer Verlag, 1977.

[14] ROYDEN, H. L. *Real analysis.* Collier Macmillan, 1968.

[15] RUDIN, W. *Real and complex analysis.* Mc Graw-Hill, 1966.

[16] SPIEGEL, M. *Análisis de Fourier.* Serie Schaum. McGraw-Hill, 1977.

[17] TAYLOR, A. *Introduction to Functional Analysis.* John Wiley & Sons, 1958.

[18] TOLSTOV, G. *Fourier Series.* Dover, 1976.

[19] TRENOGUIN, PISARIEVSKI, SÓBOLEVA *Problemas y ejercicios de análisis funcional.*

[20] YOSIDA, K. *Functional Analysis.* Springer Verlag, 1965.

Índice