UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA
LABORATORIO DE FORMAS EN GRUPOS

TEORÍA ESPECTRAL
PRÁCTICAS

Ramón Bruzual

Caracas, Venezuela
Marzo 2006

Ramón Bruzual
Correo-E: rbruzual@euler.ciens.ucv.ve

Laboratorio de Formas en Grupos
Centro de Análisis
Escuela de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad Central de Venezuela

http://euler.ciens.ucv.ve/~labfg

Índice general

Práctica 0.	1
Práctica 1.	2
Práctica 2.	5
Práctica 3.	7
Práctica 4.	10
Práctica 5.	12
Temas para exponer.	13
Caracterización de las álgebras de división sobre $\mathbb{R}$.	14
Transformadas de Fourier y de Gelfand.	15
Demostración de Gelfand de un teorema de Wiener.	17
Generador infinitesimal del grupo de traslaciones en $L^2(\mathbb{R})$.	18

Práctica 0.

El objetivo de esta práctica es recordar y reforzar algunos conocimientos ya adquiridos en cursos previos de análisis funcional.

(1) Sea Ω un espacio de Hausdorff compacto. Demostrar que $(\mathcal{C}(\Omega), \| \|_\infty)$ es de dimensión finita si y sólo si Ω es un conjunto finito.

(2) Sea $\mathfrak{X}$ un espacio de Banach. Demostrar que todo funcional lineal en $\mathfrak{X}$ es continuo si y sólo si $\mathfrak{X}$ tiene dimensión finita.

(3) (Banach) Demostrar que todo espacio de Banach $\mathfrak{X}$ es isométricamente isomorfo a un subespacio cerrado de $(\mathcal{C}(\Omega), \| \|_\infty)$ para algún espacio de Hausdorff compacto. Indicación: Tomar Ω como la bola unitaria en $\mathfrak{X}^*$ con la topología débil* y definir

$$\beta : \mathfrak{X} \to \mathcal{C}(\Omega)$$

por

$$(\beta(x))(f) = f(x).$$

Nota: En el caso $\mathfrak{X}$ separable se puede probar que se puede tomar $\Omega = [0, 1]$.

(4) Demostrar que un espacio de Banach de dimensión infinita no puede tener una base de Hamel numerable.

(5) Dar un ejemplo de un par de operadores lineales acotados S y T en un espacio de Banach $\mathfrak{X}$ tales que

$$ST = I, \quad TS \neq I.$$

Práctica 1.

Nota: Salvo que se indique lo contrario, se supondrá que toda álgebra tiene identidad.

(1) Sea $\mathcal{A}$ un álgebra.
   (a) Demostrar que la unidad de $\mathcal{A}$ es única.
   (b) Demostrar que si $a \in \mathcal{A}$ es invertible entonces el inverso de a es único.
   (c) Demostrar que si $a \in \mathcal{A}$ es invertible a derecha e invertible a izquierda entonces a es invertible.
   (d) Demostrar que si $x \in \mathcal{A}$ tiene un único inverso a izquierda entonces x es invertible.

(2) Sea $\mathcal{B}$ un álgebra de Banach.
   (a) Demostrar que el conjunto de los elementos de $\mathcal{B}$ que son invertibles a izquierda es abierto.
   (b) Demostrar que el conjunto de los elementos de $\mathcal{B}$ que son invertibles a derecha es abierto.
   (c) Utilizar (a) y (b) para demostrar que el conjunto de los elementos de $\mathcal{B}$ que son invertibles es abierto.

(3) Sea $\mathcal{B}$ un álgebra de Banach. La aplicación exponencial, que se denota por exp, se define por

$$\exp f = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^n,$$

para $f \in \mathcal{B}$.
   (a) Demostrar que la serie definida anteriormente converge absolutamente (y por lo tanto converge) para todo $f \in \mathcal{B}$.
   (b) Demostrar que si $f, g \in \mathcal{B}$ conmutan, entonces

$$\exp(f+g) = \exp(f)\ \exp(g).$$

(c) Demostrar que si $f \in \mathcal{B}$ entonces $\exp f$ es invertible.
(d) Demostrar que si $f \in \mathcal{B}$ y $\|1 - f\| < 1$, entonces $f \in \exp \mathcal{B}$.

(4) Considerar la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ como operador de $(\mathbb{C}^2, \| \|_2)$ en $(\mathbb{C}^2, \| \|_2)$.

Hallar $\|A\|$, $\sigma(A)$, $r(A)$ y $\rho(A)$.

(5) Hacer lo mismo que en el ejercicio anterior, pero con las matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(consideradas como operadores de $(\mathbb{C}^3, \| \|_2)$ en $(\mathbb{C}^3, \| \|_2)$)

(6) Sea $\mathcal{B} = L(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert separable y de dimensión infinita. Sea $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$ y sea $U \in L(\mathcal{H})$ tal que $Ue_n = e_{n+1}$ (U es llamado shift bilateral). Sea $\mathcal{A}$ la subálgebra cerrada de $\mathcal{B}$ generada por I y U.
(a) Demostrar que $\mathcal{A}$ es el subespacio cerrado generado por $\{I, U, U^2, U^3, \dots\}$.
(b) Demostrar que U es invertible en $\mathcal{B}$, pero $U^{-1} \notin \mathcal{A}$.

(7) Sea $\mathcal{B}$ un álgebra de Banach con unidad e y sea $\mathcal{A}$ una subálgebra cerrada de $\mathcal{B}$ tal que $e \in \mathcal{A}$. Demostrar que
(a) Si $x \in \mathcal{A}$ entonces $\sigma_{\mathcal{B}}(x) \subset \sigma_{\mathcal{A}}(x)$ y la inclusión puede ser propia.
(b) Si $x \in \mathcal{A}$ entonces $r_{\mathcal{B}}(x) = r_{\mathcal{A}}(x)$

(8) Sea $\mathcal{B} = L(\mathbb{C}^2) = \{T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 : T \text{ es lineal } \}$. En $\mathbb{C}^2$ consideramos la norma euclidiana y, como es natural, para $T \in \mathcal{B}$ definimos

$$\|T\| = \sup_{\|(x,y)\|=1} \|T(x,y)\|.$$

Demostrar que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}} = \emptyset.$$

(9) Sea
$$l^1(\mathbb{Z}) = \{(\lambda_n)_{n=-\infty}^{+\infty} \subset \mathbb{C} \,:\, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\lambda_n| < +\infty\}.$$
Para $\lambda = (\lambda_n)_{n=-\infty}^{+\infty} \in l^1(\mathbb{Z})$ se define
$$\|\lambda\|_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\lambda_n|.$$

(a) Demostrar que si $\alpha, \lambda \in l^1(\mathbb{Z})$ entonces la serie
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_{n-k}\lambda_k$$
converge.

Para $\alpha, \lambda \in l^1(\mathbb{Z})$ se define $\alpha * \lambda$ por
$$(\alpha * \lambda)_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_{n-k}\lambda_k$$

(b) Demostrar que si $\alpha, \lambda \in l^1(\mathbb{Z})$ entonces $\alpha * \lambda \in l^1(\mathbb{Z})$.
(c) Demostrar que, con el producto $*$, se tiene que $l^1(\mathbb{Z})$ es un álgebra de Banach conmutativa con identidad.
(d) Dar ejemplos de caracteres de $l^1(\mathbb{Z})$.

Práctica 2.

(1) Sea Ω un espacio de Hausdorff compacto y sea $\mathcal{C}(\Omega) = \{\psi : \Omega \to \mathbb{C} : \psi \text{ es continua }\}$, con la norma del supremo.

(a) Demostrar que $\mathfrak{M}$ es un ideal maximal de $\mathcal{C}(\Omega)$ si y sólo si existe $\omega_o \in \Omega$ tal que $\mathfrak{M} = \{\psi \in \mathcal{C}(\Omega) : \ \psi(\omega_o) = 0\}$.

(b) Para $\omega_o \in \Omega$ se define $\varphi_{\omega_o} : \mathcal{C}(\Omega) \to \mathbb{C}$ por $\varphi_{\omega_o}(\psi) = \psi(\omega_o)$.

(i) Demostrar que $\mathcal{M}_{\mathcal{C}(\Omega)} = \{\varphi_{\omega_o} : \ \omega_o \in \Omega\}$.

(ii) Demostrar que la aplicación

$$\begin{aligned} \Omega &\to \mathcal{M}_{\mathcal{C}(\Omega)} \\ \omega &\mapsto \varphi_\omega \end{aligned}$$

es un homeomorfismo (es biyectiva, continua y tiene inversa continua).

(2) Sea $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$ y sea

$$\mathcal{A}(\mathbb{D}) = \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} : \ \text{f es continua } \overline{\mathbb{D}} \text{ y analítica en } \mathbb{D}\ \}.$$

($\mathcal{A}(\mathbb{D})$ es la llamada álgebra del disco)

(a) Demostrar que, con la norma uniforme, $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ es un álgebra de Banach.

(b) Demostrar que el conjunto de los polinomios es denso en $\mathcal{A}(\mathbb{D})$.

(c) Para $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$ se define

$$\varphi_\alpha : \mathcal{A}(\mathbb{D}) \to \mathbb{C}$$

por $\varphi_\alpha(f) = f(\alpha)$. Demostrar que $\varphi_\alpha \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}(\mathbb{D})}$.

(d) Demostrar que la aplicación

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{D}} &\to \mathcal{M}_{\mathcal{A}(\mathbb{D})} \\ \alpha &\mapsto \varphi_\alpha \end{aligned}$$

es un homeomorfismo (es biyectiva, continua y tiene inversa continua).

(3) Sea $\mathcal{B}[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{C} :\ \text{f es acotada }\}$, con la norma $\|f\| = \sup\{|f(x)| :\ x \in [0,1]\}$.

(a) Demostrar que $\mathcal{B}[0,1]$ es un álgebra de Banach.

(b) Sea $\mathcal{B}$ la menor subálgebra cerrada de $\mathcal{B}[0,1]$ que contiene a $\mathcal{C}[0,1]$ y a la función g definida por

$$g(x) = \begin{cases} -x & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{si } x = \frac{1}{2}, \\ 1 - x & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Determinar $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$.

(4) Sea $\mathcal{D} = \{f \in \mathcal{C}[0,1] :\ \ \text{f es derivable en } [0,1] \text{ y } f' \in \mathcal{C}[0,1]\}$, con la norma $\|f\|_{\mathcal{D}} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

(a) Demostrar que $\mathcal{D}$ es un álgebra de Banach.

(b) Demostrar que la transformada de Gelfand no es una isometría.

(c) Demostrar que la transformada de Gelfand no es sobreyectiva.

Práctica 3.

Nota: En lo que sigue, salvo que se indique expresamente lo contrario, se supone que los espacios de Hilbert que se consideran son complejos.

(1) Sea X un espacio vectorial real con producto interno $\langle .,. \rangle$.
Demostrar que para todo $x, y \in X$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\,(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2).$$

(2) Sea X un espacio vectorial complejo con producto interno $\langle .,. \rangle$.
Demostrar que para todo $x, y \in X$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\,(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2).$$

(3) Sea $(X, \|.\|)$ un espacio normado (real o complejo). Demostrar que $\|.\|$ proviene de un producto interno si y sólo si $\|.\|$ satisface la ley del paralelogramo.

(4) Considerar la siguiente norma en el espacio $\mathcal{C}[0,1]$

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \int_0^1 |f(t)|\,dt.$$

(a) Demostrar que, con esta norma, $\mathcal{C}[0,1]$ es un espacio de Banach.
(b) Sea $C = \{f \in \mathcal{C}[0,1] : f(0) = 1\}$. Demostrar que C es convexo, cerrado y no vacío.
(c) Demostrar que $\inf\{\|f\| : f \in C\} = 1$.
(d) Demostrar que $\|f\| > 1$ para todo $f \in C$.
(e) Concluir que $\|\cdot\|$ no proviene de un producto interno.

(5) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea $T \in L(\mathcal{H})$. Demostrar que si $\langle Tx, x \rangle = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$, entonces $T = 0$.

(6) Dar un ejemplo de un espacio de Hilbert real y un operador $T \in L(\mathcal{H})$ no nulo tal que $\langle Tx, x\rangle = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

(7) Utilizar el teorema de representación de Riesz para funcionales lineales en un espacio de Hilbert dar una demostración sencilla de que

$$\big(L^1([0,1], dx)\big)^* = L^\infty([0,1], dx).$$

(8) Sea $\alpha = \{\alpha_n\}$ una sucesión acotada de números complejos y sea $M_\alpha : l_2(\mathbb{N}) \to l_2(\mathbb{N})$ definido por

$$M_\alpha(x_1, x_2, ...) = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots).$$

(a) ¿Es siempre continuo este operador? Si su respuesta es afirmativa, hallar $\|M_\alpha\|$.
(b) ¿Bajo qué condiciones sobre la sucesión $\{\alpha_n\}$ existe el operador M_α^{-1} ?
(c) Hallar $\sigma(M_\alpha)$.
(d) Hallar M_α^*.
(e) ¿Es M_α normal ?
(f) ¿Qué condición(es) debe cumplir la sucesión $\{\alpha_n\}$ para que M_α sea autoadjunto?
(g) ¿Qué condición(es) debe cumplir la sucesión $\{\alpha_n\}$ para que M_α sea positivo?
(h) Determinar el conjunto de los autovalores de M_α.

(9) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de dimensión infinita y sea K un subconjunto compacto y no vacío del plano complejo. Demostrar que existe $T \in L(\mathcal{H})$ tal que $\sigma(T) = K$.

(10) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ una proyección ortogonal no trivial. Hallar $\sigma(P)$.

(11) Sea $\varphi : [0,1] \to \mathbb{C}$ una función medible y acotada y sea $M_\varphi : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ el operador lineal definido por $M_\varphi(f) = \varphi\, f$.

(a) Demostrar que M_φ es continuo y hallar $\|M_\varphi\|$.
(b) ¿Bajo qué condiciones sobre la función φ existe el operador M_φ^{-1} ? ¿Es siempre continuo este operador ?
(c) Hallar $\sigma(M_\varphi)$.
(d) Hallar M_φ^*.

(e) ¿Es M_φ normal ?
(f) ¿Qué condición(es) debe cumplir la función φ para que M_φ sea autoadjunto?
(g) ¿Qué condición(es) debe cumplir la función φ para que M_φ sea positivo?
(h) Determinar el conjunto de los autovalores de M_φ.

(12) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de dimensión infinita y sean f_o y g_o elementos de $\mathcal{H}$. Se define el operador $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ por

$$T(f) = \langle f, f_o \rangle \, g_o.$$

(a) Demostrar que $T \in L(\mathcal{H})$.
(b) Hallar T^*.
(c) Hallar $\sigma(T)$.
(d) Hallar condiciones para que T sea normal.

(13) El shift bilateral (operador de traslación bilateral) es el operador $U : l^2(\mathbb{Z}) \to l^2(\mathbb{Z})$ definido por

$$U(x_n) = (x_{n-1})$$

y el shift unilateral (operador de traslación unilateral) es el operador $S : l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$ definido por

$$S(x_0, x_1, x_2, \dots) = (0, x_0, x_1, x_2, \dots).$$

(a) ¿Es U normal? ¿Es S normal?
(b) Hallar $\sigma(U)$. Sugerencia: Identificar U con el operador de multiplicación por $e^{2\pi i t}$ en $L^2[0,1]$ y usar el problema 11.
(c) Hallar $\sigma(S)$. Sugerencia: Demostrar que todo elemento del disco abierto unitario es un autovalor de S^*.

Práctica 4.

(1) Demostrar que si U es un operador unitario en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, entonces

$$\sigma(U) \subset \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}.$$

Dar ejemplos que muestren que puede darse la igualdad y que también la contención puede ser propia.

(2) Sea T un operador normal en un espacio de Hilbert H tal que $\sigma(T) = \{0, 1\}$. ¿Qué puede decir de T?

(3) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea $A \in L(\mathcal{H})$ un operador acotado. Por el Ejercicio 3 de la Práctica 1, para cada $t \in \mathbb{R}$, tiene sentido considerar el operador acotado

$$U(t) = \exp(t\,A).$$

(a) Demostrar que
   (i) $U(0) = I$,
   (ii) $U(t+s) = U(t)\,U(s)$ para todo $s, t \in \mathbb{R}$,
   (iii) $U(t)^* = \exp(t\,A^*)$.

(b) Demostrar que

$$\lim_{t \to 0} \left\| \frac{U(t) - I}{t} - A \right\| = 0.$$

(c) Dar una demostración "muy sencilla" de (a) y (b), para el caso en que A es un operador normal y demostrar que, en este caso, $U(t)$ es normal para todo $t \in \mathbb{R}$.

(d) Demostrar que si A es anti-adjunto ($A^* = -A$), entonces $U(t)$ es unitario para todo $t \in \mathbb{R}$.

(e) Demostrar que si A es autoadjunto y $U(t) = \exp(i\,t\,A)$, entonces $U(t)$ es unitario para todo $t \in \mathbb{R}$.

(f) Demostrar que si $A \leq 0$, entonces $\|U(t)\| \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

(4) Consider el siguiente espacio

$$\mathcal{C}_o(\mathbb{R},\mathbb{C}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ es continua y } \lim_{|t|\to\infty} f(t) = 0 \right\},$$

con la norma uniforme

$$\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|.$$

(a) Demostrar que $\mathcal{C}_o(\mathbb{R},\mathbb{C})$ es un espacio de Banach, que no es de Hilbert.

Para $t \in \mathbb{R}$ se define el operador $T(t) : \mathcal{C}_o(\mathbb{R},\mathbb{C}) \to \mathcal{C}_o(\mathbb{R},\mathbb{C})$ por

$$(T(t)\, f)(x) = f(x+t).$$

(b) Demostrar que
   (i) $T(0) = I$,
   (ii) $T(t+s) = T(t)\,T(s)$ para todo $s, t \in \mathbb{R}$,
   (iii) Para cada $t \in \mathbb{R}$, se tiene que $T(t)$ es una isometría sobreyectiva (por lo tanto $T(t)$ es un operador invertible, con inverso acotado),
   (iv) Para cada $t \in \mathbb{R}$, se tiene que $T(t)^{-1} = T(-t)$.

(c) Demostrar que, para cada $f \in \mathcal{C}_o(\mathbb{R},\mathbb{C})$, se tiene que

$$\lim_{t\to 0} \|T(t)\, f - f\| = 0.$$

(d) Demostrar que **NO** se cumple que

$$\lim_{t\to 0} \|T(t) - I\| = 0.$$

(e) Caracterizar el siguiente conjunto

$$\mathcal{D} = \left\{ f \in \mathcal{C}_o(\mathbb{R},\mathbb{C}) \mid \text{ existe } \lim_{t\to 0} \frac{T(t)f - f}{t} \right\}.$$

Observación: Recuerde que el límite debe existir en la métrica de $\mathcal{C}_o(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

(f) Demostrar que $\mathcal{D}$ es una variedad lineal densa en $\mathcal{C}_o(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

(g) Caracterizar el operador lineal

$$A : \mathcal{D} \to \mathcal{C}_o(\mathbb{R},\mathbb{C})$$

definido por

$$Af = \lim_{t\to 0} \frac{T(t)f - f}{t}.$$

(h) ¿Es A un operador acotado?

Práctica 5.

(1) Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y T un operador en $\mathcal{H}$ (no necesariamente acotado). Demostrar que el espectro de T es un subconjunto cerrado de $\mathbb{C}$.

Indicación: Demostrar primero que si $0 \notin \sigma(T)$ y $S \in L(\mathcal{H})$ es el inverso de T, entonces $S(I - \lambda S)^{-1}$ es un inverso acotado de $T - \lambda I$, para $|\lambda|$ pequeño.

(2) Sea $\mathcal{H} = L^2([0,1], dx)$ y sean

$$D(T_1) = \{f \in \mathcal{H} : f \text{ es absolutamente continua y } f' \in \mathcal{H}\},$$
$$D(T_2) = \{f \in D(T_1) : f(0) = f(1)\},$$
$$D(T_3) = \{f \in D(T_1) : f(0) = f(1) = 0\}.$$

En clase se probó que T_2 es autoadjunto y que el adjunto de T_3 es T_1; por lo tanto T_3 es un operador simétrico no autoadjunto.

Hallar la transformada de Cayley de T_2 y de T_3 (no olvide que debe especificar cuál es el dominio del operador).

(3) Sea K un subconjunto cerrado de $\mathbb{C}$. Demostrar que existe un operador cuyo espectro es K.

(4) * Dar un ejemplo de un operador tal que $D(T^*) = \{0\}$.

Temas para exponer.

Cada estudiante deberá escoger uno de los siguientes temas, desarrollarlo por escrito y hacer una exposición de aproximadamente media hora de duración.

El desarrollo por escrito deberá entregarlo impreso y en formato pdf.

Caracterización de las álgebras de división sobre $\mathbb{R}$.

Introducción.

El teorema de Gelfand-Mazur, que será probado a principios del curso, establece que si $\mathfrak{B}$ es un álgebra de Banach compleja y además $\mathfrak{B}$ es in álgebra de división (todo elemento no nulo tiene inverso multiplicativo) entonces $\mathfrak{B}$ es isométrica e isomorfa al cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$. Es importante notar que la conmutatividad del álgebra no es una hipótesis de este teorema.

Es muy natural preguntarse ¿Qué ocurre en el caso real? En otras palabras: caracterizar las álgebras de Banach reales que son álgebras de división. Este problema ha atraído a los algebristas desde que Hamilton en 1843 descubrió los cuaterniones. En 1878 Frobenius probó que las únicas álgebras de división sobre $\mathbb{R}$ son los números reales $\mathbb{R}$, los numeros complejos $\mathbb{C}$ y los cuaterniones $\mathbb{H}$. Otros nombres asociados al estudio de este problema son los de Cayley (quien descubrió los llamados "octions"), Hopf, Bott, Milnor y Kervaire.

Resultado a exponer.

El estudiante que escoja este tema deberá exponer y entregar por escrito una demostración lo más autocontenida posible del resultado de Frobenius. Deberá incluir una reseña histórica del problema y hablar de las generalizaciones que se han dado del resultado de Frobenius. En estas generalizaciones deberá aparecer una explicación de que son los "octions" o números de Cayley y explicar su relación con este problema.

Una buena referencia para comenzar es el artículo de Angel Oneto (LUZ), titulado "Alternative Real Division Algebras of Finite Dimension" publicado en la revista Divulgaciones Matemáticas Vol. 10, N^{o} 2 (2002) y disponible en la siguiente dirección:

http://www.emis.de/journals/DM/vol10-2.htm

Transformadas de Fourier y de Gelfand.

Introducción.

El análisis de Fourier se puede extender a grupos abelianos localmente compactos. Aparecen los conceptos de caracter de un grupo (que son funciones multiplicativas), medida de Haar, grupo dual y transformada de Fourier. La transformada de Fourier abstracta es un caso particular de la transformada de Gelfand, el comprender bien esta relación es fundamental para entender como se define la topología en el grupo dual de un grupo abeliano localmente compacto.

Resultado a exponer.

El estudiante que escoja este tema deberá exponer y entregar por escrito los ejercicios que se indican a continuación. Estos ejercicios se refieren muy específicamente al grupo abeliano localmente compacto de los números reales $\mathbb{R}$. Adicionalmente a estos ejercicios, deberá hacer una breve reseña de cómo se extienden los conceptos y los resultado obtenidos a un grupo abeliano localmente compacto general.

(1) Demostrar que $L^1(\mathbb{R})$ es un **álgebra de Banach sin identidad** con el producto definido por

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\, g(t)\, dt.$$

(2) Explicar cómo se le puede agregar el elemento “identidad” a un álgebra de Banach sin identidad. En el caso de $L^1(\mathbb{R})$, añadir la identidad equivale a introducir, formalmente, una función generalizada ¿cuál es esta función?

(3) Demostrar que, para $t \in \mathbb{R}$ el funcional lineal definido por

$$\varphi_t(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{ixt}\, dx$$

es multiplicativo.

(4) Demostrar que todo funcional lineal multiplicativo y no nulo en $L^1(\mathbb{R})$ es de la forma expresada en el ejercicio anterior. (indicación: Recordar que todo funcional lineal y continuo en $L^1(\mathbb{R})$ viene dado por una función de $L^\infty(\mathbb{R})$).

(5) Demostrar que el espacio de los ideales maximales de $L^1(\mathbb{R})$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$ y que la transformada de Gelfand coincide con la de Fourier.

(6) Dar una explicación de cómo se pueden extender los resultados anteriores a un grupo abeliano localmente compacto.

Nota adicional: Los ejercicios anteriores están tomados del Capítulo 2 del libro de Douglas, recomendado en la bibliografía del curso. Para los conceptos básicos de análisis armónico en grupos abelianos localmente compactos una buena referencia es el libro de W. Rudin, Fourier Analysis on Groups.

Demostración de Gelfand de un teorema de Wiener.

Introducción.

Wiener demostró el siguiente resultado, que no es nada inmediato.

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de números complejos tales que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n| < \infty,$$

y si la función (continua y de período 2π) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\, e^{int} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

nunca se anula, entonces existe una sucesión de números complejos $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ que también satisface

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |b_n| < \infty,$$

tal que

$$\frac{1}{f(t)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n\, e^{int} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Posteriormente Gelfand dio una prueba bastante sencilla y elegante de este resultado, utilizando la teoría de álgebras de Banach.

Resultado a exponer.

El estudiante que escoja este tema deberá exponer y entregar por escrito la demostración de Gelfand del teorema de Wiener.

Una buena referencia para buscar esta demostración es el libro “Lectures in Functional Analysis and Operator Theory” de Sterling K. Berberian.

Generador infinitesimal del grupo de traslaciones en $L^2(\mathbb{R})$.

Para $t \in \mathbb{R}$ se define $T_t : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ por

$$(T_t\, f)(x) = f(x + t).$$

(1) Demostrar que $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ es un grupo fuertemente continuo de operadores unitarios.

(2) Demostrar que $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ no es uniformemente continuo.

(3) Caracterizar el generador infinitesimal de $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$.

(4) ¿Qué relación existe alguna relación entre el teorema de Taylor y la representación de (T_t) como la exponencial de un operador?