



Colocar aquí el título
título linea 2

Tipo de Trabajo

Nombre del estudiante

Tutor: Nombre del tutor

1. GRUPOS ABELIANOS LOCALMENTE COMPACTOS.

Definición. Un *grupo topológico* es un grupo $(\Omega, +)$, en el que está definida una topología de Hausdorff tal que las operaciones del grupo son continuas, en forma más precisa, las funciones

$$\begin{array}{ll} \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega & \Omega \rightarrow \Omega \\ (x, y) \mapsto x + y & x \mapsto -x \end{array}$$

son continuas.

Un *grupo abeliano localmente compacto* (usualmente abreviado grupo LCA) es un grupo abeliano topológico en el que todo punto posee un entorno cuya clausura es compacta.

Son ejemplos de grupos abelianos localmente compactos:

- (1) El conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, con la topología usual.
- (2) El conjunto de los números enteros, $\mathbb{Z}$, con la topología discreta.
- (3) La circunferencia unitaria, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, con la topología usual.
- (4) Cualquier grupo abeliano con la topología discreta.
- (5) El producto cartesiano de dos grupos abelianos localmente compactos, con la topología producto, también es un grupo abeliano localmente compacto.

2. LA MEDIDA DE HAAR.

Sea Ω un grupo abeliano localmente compacto. Una *medida de Haar* en Ω es una medida m de Borel, positiva y regular que tiene las siguientes propiedades:

- (a) $m(E)$ es finita si $E \subset \Omega$ es compacto.
- (b) $m(E + x) = m(E)$ para todo $x \in \Omega$ y $E \subset \Omega$, es decir m es invariante por traslaciones.
- (c) $m(\Omega) > 0$.

En todo grupo abeliano localmente compacto existe una medida de Haar, que es única, salvo multiplicación por una constante positiva. Debido a esto, por abuso de lenguaje, es usual hablar de la medida de Haar.

Además la medida de Haar es finita si y sólo si el grupo es compacto.

Si el grupo es compacto es usual tomar la medida de Haar con masa total igual a 1.

Si el grupo es discreto, la medida de Haar es la medida que cuenta. En este caso es usual asignarle masa 1 a cada elemento del grupo.

Ejemplo.

- (1) Si $\Omega = \mathbb{R}$, la medida de Haar es la medida de Lebesgue.
- (2) Si $\Omega = \mathbb{Z}$, la medida de Haar es la medida que cuenta.
- (3) Si $\Omega = \mathbb{T}$, la medida de Haar es la medida de Lebesgue normalizada, en la circunferencia.