



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Plantilla para Trabajo Especial de Grado

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Nombre del Tesista** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutor: Nombre del Tutor.

Caracas, Venezuela

Mes y Año

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado “**Nombre del Trabajo Especial de Grado**”, presentado por el **Br. Nombre del Estudiante**, titular de la Cédula de Identidad **XXXXXXXXXX**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Nombre del Tutor
Tutor

Nombre del Jurado
Jurado

Nombre del Jurado
Jurado

Dedicatoria

Colocar aquí la dedicatoria (optativo).

Agradecimiento

Colocar aquí el agradecimiento (optativo).

Índice general

Introducción	1
Capítulo 1. Fórmulas y ecuaciones	2
1. Alineación	2
2. Ejemplos de fórmulas y ecuaciones	3
3. Citas	3
Capítulo 2. Teoremas, Lemas, Proposiciones ...	4
1. Algunos comandos para un texto matemático	4
2. Manejo de referencias cruzadas.	5
Capítulo 3. Gráficos.	6
1. Las ecuaciones de Lotka y Volterra.	6
2. Superficies.	8
3. Elaboración de los gráficos.	8
Bibliografía	10

Introducción

El objetivo de esta plantilla es facilitar el tipeo de las tesis a los estudiantes de la Licenciatura en Matemática de la UCV y permitir una presentación uniforme de estos trabajos.

CAPÍTULO 1

Fórmulas y ecuaciones

1. Alineación

Es muy importante alinear correctamente las fórmulas, no es lo mismo

$$\begin{aligned}
 \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \|f(\vec{x}_o + \vec{h}) - f(\vec{x}_o)\| &= \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \|f(\vec{x}_o + \vec{h}) - f(\vec{x}_o) - df_{\vec{x}_o}(\vec{h}) + df_{\vec{x}_o}(\vec{h})\| \\
 &\leq \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \left[\|f(\vec{x}_o + \vec{h}) - f(\vec{x}_o) - df_{\vec{x}_o}(\vec{h})\| + \|df_{\vec{x}_o}(\vec{h})\| \right] \\
 &= \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \|f(\vec{x}_o + \vec{h}) - f(\vec{x}_o) - df_{\vec{x}_o}(\vec{h})\| \\
 &= \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \left[\|\vec{h}\| \left(\frac{\|f(\vec{x}_o + \vec{h}) - f(\vec{x}_o) - df_{\vec{x}_o}(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|} \right) \right] \\
 &= \left(\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \|\vec{h}\| \right) \left(\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{\|f(\vec{x}_o + \vec{h}) - f(\vec{x}_o) - df_{\vec{x}_o}(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|} \right) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

que

$$\begin{aligned}
 \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \|f(\vec{x}_o + \vec{h}) - f(\vec{x}_o)\| &= \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \|f(\vec{x}_o + \vec{h}) - f(\vec{x}_o) - df_{\vec{x}_o}(\vec{h}) + df_{\vec{x}_o}(\vec{h})\| \\
 &\leq \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \left[\|f(\vec{x}_o + \vec{h}) - f(\vec{x}_o) - df_{\vec{x}_o}(\vec{h})\| + \|df_{\vec{x}_o}(\vec{h})\| \right] \\
 &= \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \|f(\vec{x}_o + \vec{h}) - f(\vec{x}_o) - df_{\vec{x}_o}(\vec{h})\| \\
 &= \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \left[\|\vec{h}\| \left(\frac{\|f(\vec{x}_o + \vec{h}) - f(\vec{x}_o) - df_{\vec{x}_o}(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|} \right) \right] \\
 &= \left(\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \|\vec{h}\| \right) \left(\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{\|f(\vec{x}_o + \vec{h}) - f(\vec{x}_o) - df_{\vec{x}_o}(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|} \right) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

2. Ejemplos de fórmulas y ecuaciones

En esta sección ofrecemos algunos ejemplos que pueden servir de guía.

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

$$(1) \quad \|\nabla f(r \cos \theta, r \sin \theta)\|^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^2.$$

$$(2) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r}.$$

$$\begin{aligned} 0_{m \times n} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\vec{x}, f(\vec{x})) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\vec{x}, f(\vec{x})) & \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\vec{x}, f(\vec{x})) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\vec{x}, f(\vec{x})) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(\vec{x}, f(\vec{x})) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(\vec{x}, f(\vec{x})) & \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\vec{x}, f(\vec{x})) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\vec{x}, f(\vec{x})) \end{bmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{\vec{x}}(\vec{x}, f(\vec{x})) & F_{\vec{y}}(\vec{x}, f(\vec{x})) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I \\ f'(\vec{x}) \end{bmatrix} \\ &= F_{\vec{x}}(\vec{x}, f(\vec{x})) + F_{\vec{y}}(\vec{x}, f(\vec{x})) \cdot f'(\vec{x}). \end{aligned}$$

3. Citas

Para citar un libro o un artículo se hace así : [1] [2]

CAPÍTULO 2

Teoremas, Lemas, Proposiciones ...

1. Algunos comandos para un texto matemático

En los textos matemáticos se encuentran las siguientes estructuras:

Teorema, Proposición, Lema, Corolario, Definición, Ejemplo, Ejercicio, Notación, Observación, Resumen, Demostración, Bibliografía.

Para presentarlas en español se deben dar algunas instrucciones como comandos de encabezado que comienzan con `theoremstyle`, `newtheorem`.

Cuando queramos dar una definición y una proposición en el cuerpo del documento procedemos como se indica a continuación.

DEFINICIÓN 2.1. Un *espacio métrico* es un par (X, d) donde X es un conjunto y $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función tal que:

- (i) $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$,
- (ii) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$,
- (iii) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$,
- (iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todo $x, y, z \in X$.

La instrucción `index` tiene que ver con la creación del índice analítico.

En la definición escribimos `textit` con la intención de obtener en itálicas el nombre del objeto que se define.

PROPOSICIÓN 2.2. Sea V un espacio vectorial y sea $\| \cdot \|$ una norma en V . Entonces la función d definida por

$$d(x, y) = \| x - y \|$$

es una métrica en V .

Ejemplo de referencias cruzadas:

Note que hemos colocado `labelnorma-met` después del inicio de la Proposición. Esto es para etiquetar esta proposición y poder hacer referencia a ella posteriormente. Si queremos hacer referencia al resultado anterior, usamos `hablamos de la Proposición (2.2)`.

2. Manejo de referencias cruzadas.

A veces se quiere hacer referencia a una fórmula. En ese caso se debe etiquetar la fórmula:

$$(2.1) \qquad y = ax + b$$

La ecuación (2.1) es la ecuación de una recta de pendiente a .

Las rectas paralelas a los ejes se pueden expresar con

$$(2.2) \qquad y = b$$

$$(2.3) \qquad x = c$$

La ecuación (2.2) es la ecuación de una recta horizontal y la ecuación (2.3) es la ecuación de una recta vertical.

CAPÍTULO 3

Gráficos.

1. Las ecuaciones de Lotka y Volterra.

En esta sección vamos a estudiar un modelo clásico para una situación depredador presa. Este modelo fue ideado alrededor del año 1920 por el matemático italiano Vito Volterra, (1860-1940) y, desarrollado independientemente en la misma época, por el biofísico austriaco Alfred James Lotka, (1880-1940).

Volterra estudiaba las variaciones periódicas observadas en las poblaciones de tiburones y sus peces-alimento en el Mar Adriático.

Sea $x(t)$ el número de presas y sea $y(t)$ el número de depredadores en el instante t . En este modelo se supone lo siguiente:

$$(3.1) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax - Bxy, \\ \dot{y} = -Cy + Dxy, \end{cases}$$

donde A , B , C y D son constantes positivas.

Este sistema de ecuaciones, que a simple vista se parece a los que hemos estudiado, no es nada sencillo. No es posible hallar su solución de manera explícita, mediante métodos numéricos es posible aproximar sus soluciones.

Consideremos el siguiente caso particular

$$(3.2) \quad \begin{cases} \dot{x} = x - xy, \\ \dot{y} = (0,3)xy - (0,3)y, \end{cases}$$

con condición inicial

$$x(0) = 2 \quad y(0) = 2.$$

Suponemos que x e y representan al número de presas y depredadores, contadas en miles de individuos y t es el tiempo medido en semanas.

En la siguiente figura tenemos los gráficos de las soluciones.

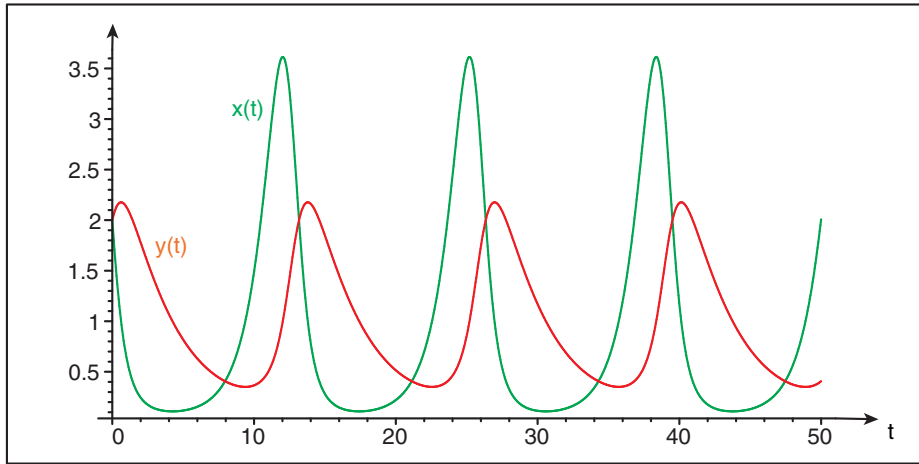


FIGURA 3.1. Comportamiento del sistema para $0 \leq t \leq 50$

Se observa que el número de presas y de depredadores comienza a disminuir muy rápidamente hasta casi extinguirse, con cierto desfase entre presas y depredadores. En el momento en que hay muy pocos depredadores comienza a aumentar el número de presas y después el número de depredadores alcanzándose valores máximos con desfase y entrando en un ciclo que se repite.

La siguiente figura muestra la trayectoria correspondiente.

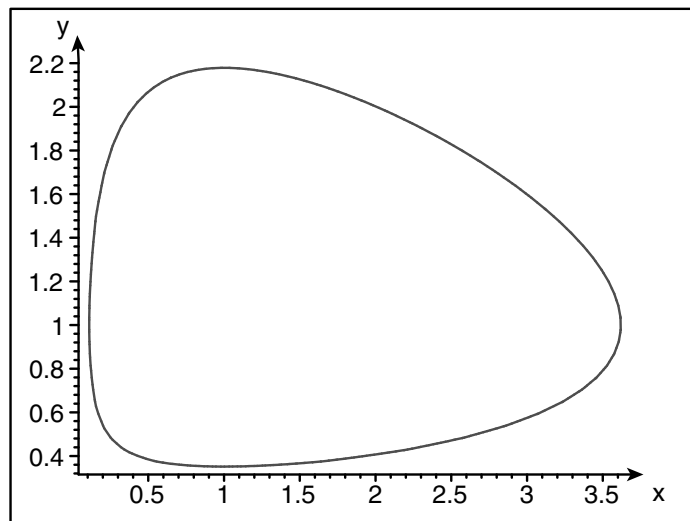


FIGURA 3.2. Trayectoria del sistema

2. Superficies.

Sea $f(x, y) = x^2 - y^2$ entonces las curvas de nivel de f son los conjuntos en los que $x^2 - y^2 = c$. Estos conjuntos nos dan una idea de como es el gráfico de f .

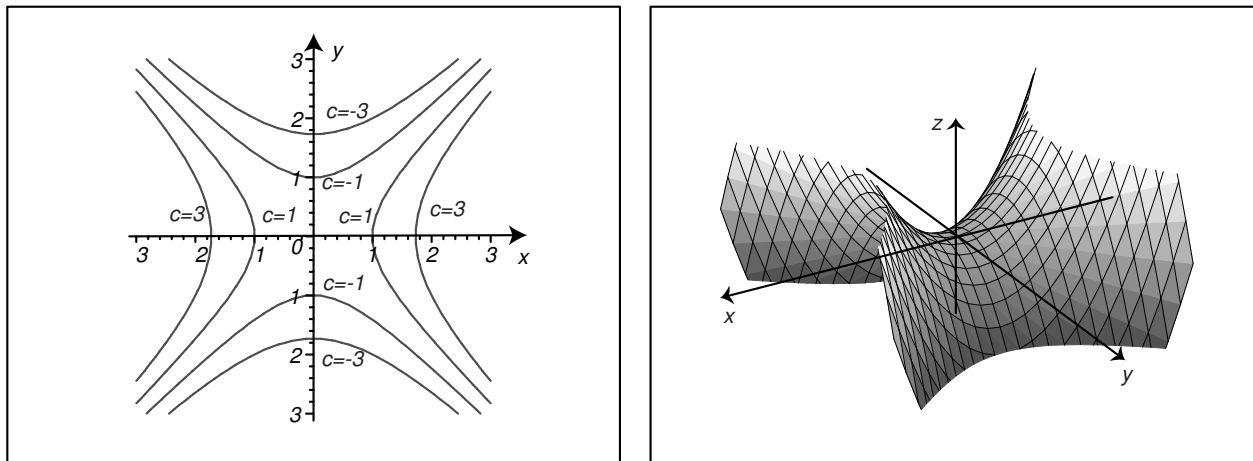


FIGURA 3.3. curvas de nivel y gráfico de $f(x, y) = x^2 - y^2$

Esta superficie se conoce con el nombre de paraboloides hiperbólico o “silla de montar”.

3. Elaboración de los gráficos.

En los ejemplos de este capítulo hemos visto que para incorporar un gráfico al documento es conveniente tener un archivo del tipo “eps” (encapsulated postscript).

Los archivos gráficos que aparecen en este capítulo fueron generados con Maple y después editados con Illustrator de Adobe.

A continuación describimos los comandos usados en Maple para generar los gráficos.

Para generar la Figura 3.1 usar el siguiente comando:

```
>plotsetup(ps,plotoptions='colour=cmk,width=6in,height=3in');
fcns:={x(t),y(t)};
odes:=diff(x(t),t)=x(t)*(1-y(t)),diff(y(t),t)=.3*y(t)*(x(t)-1);
soln:=dsolve({odes[1],odes[2],x(0)=2,y(0)=2},{x(t),y(t)},type=numeric);
with(plots):
odeplot(soln,[[t,y(t)], [t,x(t)]],0..50, style=line, numpoints=1000);
```

Para generar la Figura 3.2 usar el siguiente comando:

```
>with(plots):  
implicitplot((0.3)*ln(x) - (0.3)*x + ln(y) - y = - 1.7 , x=0.1..4,  
y=0.1..4,numpoints=5000);
```

Para generar los dos elementos Figura 3.3 usar el siguiente comando:

```
>plot3d( x^2-y^2, x=-3..3, y=-3..3, axes=normal, labels=[x,y,z],  
shading = ZGREYSCALE, style = PATCH, tickmarks=[0,0,0],  
view=-3..3,orientation=[60,45] );  
  
with(plots):  
> implicitplot({x^2 - y^2 = 1,x^2 - y^2 = 3, x^2 - y^2 = -1,x^2 - y^2 = -3},  
x=-3..3,y=-3..3,scaling=constrained);
```

Bibliografía

- [1] D. ALPAY, A. DIJKSMA, J. ROVNYAK AND H. DE SNOO, Schur Functions, Operator Colligations, and Reproducing Kernel Pontryagin Spaces, Operator Theory: Adv. Appl. Vol. 96, 1997.
- [2] N. ARONSZAN, Theory of reproducing kernels, *Trans. Amer. Math. Soc.* **68** (1950), 337-404.