UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA
LABORATORIO DE FORMAS EN GRUPOS

Introducción al Cálculo Diferencial en Varias Variables

Ramón Bruzual
Marisela Domínguez

Caracas, Venezuela
Septiembre 2005

Ramón Bruzual
Correo-E: rbruzual@euler.ciens.ucv.ve

Marisela Domínguez
Correo-E: mdomin@euler.ciens.ucv.ve

Laboratorio de Formas en Grupos
Centro de Análisis
Escuela de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad Central de Venezuela

`http://euler.ciens.ucv.ve/~labfg`

Nota: Este material está disponible en la página web
`http://euler.ciens.ucv.ve/~labfg/guias.htm`
En general mantenemos una réplica en un servidor externo a la Universidad Central de Venezuela, el vínculo se encuentra indicado en esa misma página web.

Prólogo

Estas notas han sido concebidas para ser utilizadas en la parte de Cálculo Diferencial en Varias Variables del curso de Matemática III de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela. En este curso participan estudiantes de las Licenciaturas en Biología, Geoquímica, Química, Computación, Física y Matemática.

El trabajo de mecanografía y la elaboración de los gráficos está a cargo de los autores. Agradecemos cualquier observación o comentario que deseen hacernos llegar.

Ramón Bruzual.
Marisela Domínguez.
Septiembre 2005.

CONTENIDO

CAPÍTULO 1

Campos escalares.

Funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ y de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$. Dominio y rango de estas funciones. Gráfico y representación gráfica de funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$. Curvas y superficies de nivel.

1. Funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ y de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$

Queremos darle sentido a expresiones tales como

$$f(x+y), \quad f(xy), \quad f(x^2+y^2), \quad f(x/y),$$

donde f es identidad, seno, coseno, ln. También queremos darle sentido a expresiones como

$$f(x-y+z), \quad f(xy-z), \quad f(x^2+y^2+z^2), \quad f(xz/y),$$

donde f es como antes.

Sea $n=2$ ó $n=3$. Consideraremos funciones f definidas en un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ y que toman valores en $\mathbb{R}$. D podría ser todo $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.1. Sea $D \subset \mathbb{R}^n$. Un *campo escalar* o función $f : D \to \mathbb{R}$ es una asociación que a cada vector $\vec{u}$ de D le asigna un número real $f(\vec{u})$ y ese número es único (a ese número se le llama la imagen del vector).

El conjunto D se llama el *dominio* de la función f y a veces lo denotaremos mediante $\mathrm{Dom}(f)$.

Ejemplo 1.2.

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. En este caso f es el cuadrado de la norma (o distancia al origen) del punto (x,y,z).

(b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y, z) = \cos(x + y) + z$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(c) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(\vec{x}) = c$$

para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ (función constante).

(d) El área de un rectángulo de lados x e y es la función de (x, y) dada por

$$f(x, y) = xy.$$

(e) El volumen de una caja de medidas x, y, z es la función de (x, y, z) dada por

$$f(x, y, z) = xyz.$$

(f) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \sqrt{xy},$$

es decir, la media geométrica.

(g) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y, z) = (3x + 4y - ln(y))/5z$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $z \neq 0$.

(h) La expresión $\int_x^y f(t)dt$ depende de x y de y, por lo tanto define una función de (x, y), dada por

$$g(x, y) = \int_x^y f(t)dt.$$

2. Dominio y rango de funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ y de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$.

A continuación daremos algunos ejemplos de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ (con $n = 2$ ó $n = 3$). A partir de la fórmula que las definen indicaremos cuál es el dominio más grande en el que pueden ser consideradas.

EJEMPLO 1.3.

(a) La fórmula

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 - 1}$$

define una función en el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 1\}$.

(b) La fórmula

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$$

define una función en el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 1\}$.

(c) La fórmula

$$f(x,y) = \frac{xy-5}{2\sqrt{y-x^2}}$$

define una función en el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y\}$.

(d) La fórmula

$$f(x,y,z) = z\sqrt{x^2+y^2-25}$$

define una función en el conjunto $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \geq 25\}$.

EJERCICIO 1.4. Dibuje el dominio de $z = \sqrt{y\cos x}$.

El *rango o imagen* de f es el conjunto de todos los números reales $w \in \mathbb{R}$ tales que $w = f(\vec{u})$ para algún $\vec{u} \in D \subset \mathbb{R}^n$.

EJEMPLO 1.5. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Entonces

$$\text{Rango}(f) = \{w \in \mathbb{R} : w \geq 0\}.$$

3. Gráfico y representación gráfica de funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.

Consideraremos funciones que toman valores en $\mathbb{R}$. Igual que con funciones de una variable, se puede definir la gráfica de una función de dos variables. La gráfica de una función de una variable es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$, y la gráfica de una función de dos variables es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$.

DEFINICIÓN 1.6. Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. El *gráfico* de f es el conjunto

$$\text{Graf}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \text{Dom}f,\ z = f(x,y)\},$$

Observemos que

$$\text{Graf}(f) \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3.$$

El gráfico de f es una superficie que puede ser visualizada en casos particulares.

EJEMPLO 1.7.

(a) Sea $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$.

Veamos que su gráfico es la parte de arriba de una esfera de radio 1.

El domino de f es el conjunto

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}.$$

Si consideramos $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ para $x^2+y^2 \leq 1$ entonces

$$z \geq 0 \qquad\qquad x^2+y^2+z^2 = 1.$$

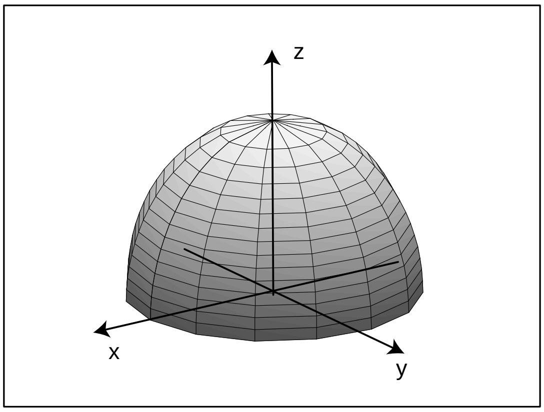

FIGURA 1.1. gráfico de $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

(b) Sea $f(x,y) = x^2+y^2$. El gráfico de f es un paraboloide de revolución, obtenido al rotar $z = y^2$ alrededor del eje z (justifique).

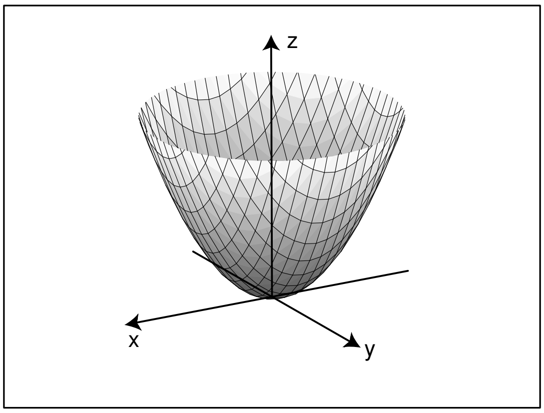

FIGURA 1.2. gráfico de $f(x,y) = x^2+y^2$

Si una función tiene dominio contenido en $\mathbb{R}^3$, no podemos representarla gráficamente.

4. Curvas de nivel y superficies de nivel.

Existe otro método útil para representar geométricamente una función de dos variables. Esto es un método semejante al de representar un paisaje tridimensional por un mapa topográfico bidimensional.

Definición 1.8. Sean $c \in \mathbb{R}$ y $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. La *curva de nivel* de f, correspondiente al valor c es:

$$\gamma_c = \{(x, y) \in D : f(x, y) = c\}.$$

La curva de nivel γ_c de f no es más que el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^2$ para los cuales f toma el mismo valor c.

Al considerar diferentes valores de c : $c_1, c_2, \ldots$ obtenemos un conjunto de curvas de nivel, que llamaremos *mapa de contorno*.

Si tratamos con funciones de tres variables la noción análoga a la de curva de nivel es la de superficie de nivel.

Por ejemplo, si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ nos da la distribución de temperaturas en un espacio tridimensional, entonces las superficies de nivel satisfacen $f(x, y, z) = c$ y se llamarían superficies isotérmicas.

Definición 1.9. Sean $c \in \mathbb{R}$ y $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. La *superficie de nivel* de f, correspondiente al valor c es:

$$S_c = \{(x, y, z) \in D : f(x, y, z) = c\}.$$

Ejemplo 1.10.

(a) Sea $f(x, y) = x^2 + y^2$, las curvas de nivel de f son circunferencias con centro en el origen.

Tenemos que

$$f(x, y) = c \quad \text{si y sólo si} \quad c \geq 0 \text{ y } x^2 + y^2 = c.$$

Por lo tanto, debe ser $c \geq 0$.

La curva de nivel que corresponde a c es una circunferencia con centro en el origen y radio $\sqrt{c}$.

La siguiente figura ilustra las curvas de nivel de f.

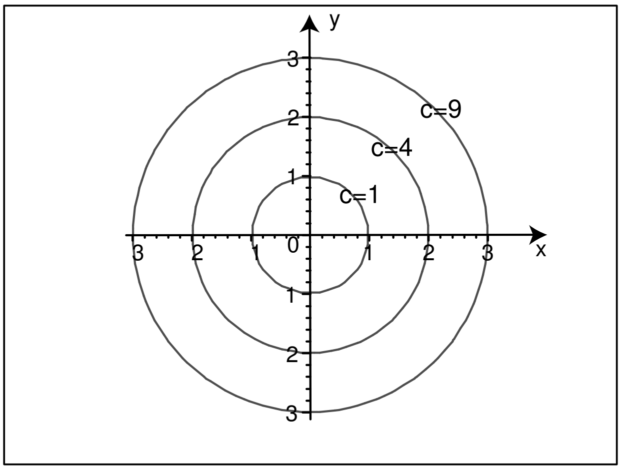

FIGURA 1.3. curvas de nivel de $f(x, y) = x^2 + y^2$

(b) Si $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ entonces las superficies de nivel son esferas (justifique).

(c) Sea $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Como no se define el dominio explícitamente, se entiende que es el mayor subconjunto de $\mathbb{R}^2$ para el cual la fórmula tiene sentido.

Sea $c \geq 0$. Tenemos que

$$f(x, y) = c \quad \text{si y sólo si} \quad x^2 + y^2 = 1 - c^2.$$

Por lo tanto, debe ser $0 \leq c \leq 1$. La curva de nivel que corresponde a c es una circunferencia con centro en el origen y radio $1 - c^2$.

La siguiente figura ilustra las curvas de nivel de f.

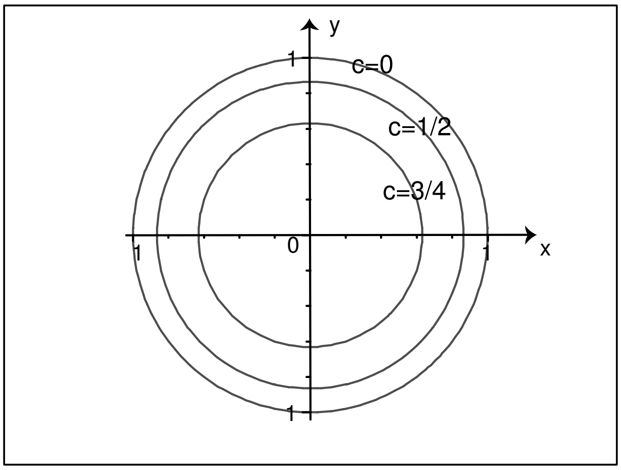

FIGURA 1.4. curvas de nivel de $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

(d) Sea $f(x,y) = x^2 - y^2$ entonces las curvas de nivel de f son los conjuntos en los que $x^2 - y^2 = c$. Estos conjuntos nos dan una idea de como es el gráfico de f.

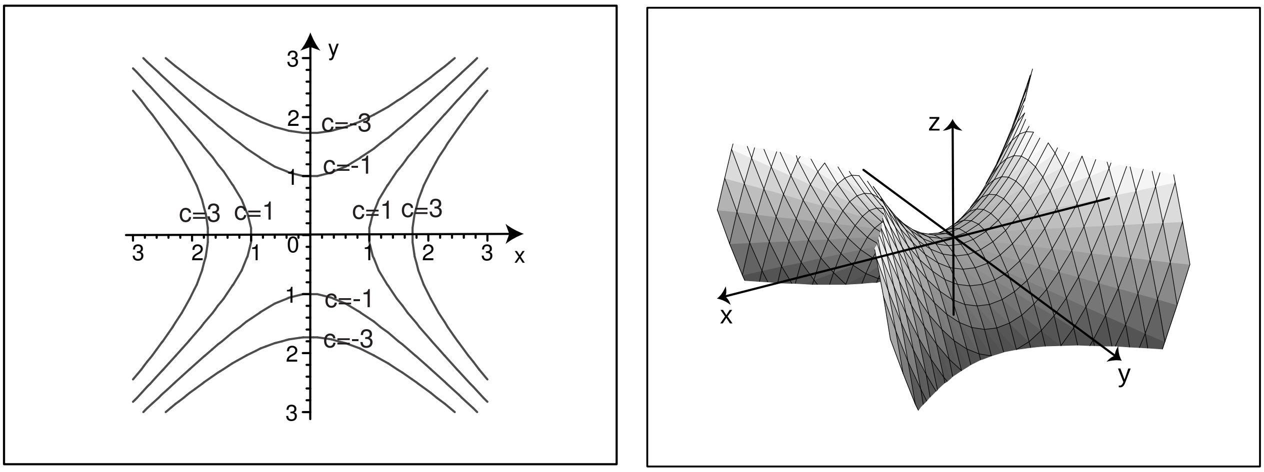

FIGURA 1.5. curvas de nivel y gráfico de $f(x,y) = x^2 - y^2$

Esta superficie es el paraboloide hiperbólico o "silla de montar"

El conocimiento de las curvas de nivel ayuda a resolver muchos problemas interesantes en el plano y en el espacio.

Ejercicios.
Campos escalares.

(1) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x + y + 2$.
  (a) Describa el gráfico de f.
  (b) Dado $c \in \mathbb{R}$ describa la curva de nivel correspondiente a c.

(2) Determinar las curvas de nivel y las gráficas de las siguientes funciones
  (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x - y + 2$.
  (b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 + 4y^2$.
  (c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = xy$.

(3) Dibujar las curvas de nivel (en el plano xy) para la función dada f y los valores de f dados.
  (a) $f(x, y) = \sqrt{100 - x^2 - y^2}$ para $c = 0, 2, 4, 6, 8, 10$.
  (b) $f(x, y) = x^2 + y^2$ para $c = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.
  (c) $f(x, y) = 3x - 7y$ para $c = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$.
  (d) $f(x, y) = x/y$ para $c = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$.

(4) Determinar las superficies de nivel de f
  (a) $f(x, y, z) = -x^2 - y^2 - z^2$.
  (b) $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + 9z^2$.
  (c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2$.

CAPÍTULO 2

Límites de campos escalares.

Límite a lo largo de una curva de una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$. Introducción al concepto de límite en un punto a través del concepto de límite a lo largo de una curva. Noción de continuidad. Límites iterados.

1. Límite a lo largo de curvas para una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.

1.1. Punto de acumulación en $\mathbb{R}^2$.

Sean $\vec{x_o} \in \mathbb{R}^2$ y $D \subset \mathbb{R}^2$. Se dice que $\vec{x_o}$ es un *punto de acumulación* de D cuando en cada disco de centro $\vec{x_o}$ hay al menos un punto de D, distinto de $\vec{x_o}$.

En forma más precisa se tiene:

Definición 2.1. Sean $\vec{x_o} \in \mathbb{R}^2$, $D \subset \mathbb{R}^2$. Se dice que $\vec{x_o}$ es un *punto de acumulación* de D cuando para cada $r > 0$ se tiene que existe $\vec{v} \in D$ tal que $\vec{v} \neq \vec{x_o}$ y $\|\vec{v} - \vec{x_o}\| < r$.

Ejemplo 2.2.

(a) Los vectores $(4,5)$, $(4,4)$ y $(2,4)$ son puntos de acumulación de

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x \leq 6, 4 \leq y < 7\}.$$

(b) El vector $(1,\pi)$ es un punto de acumulación de

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 1, 2 < y < \pi\}.$$

(c) El vector $(0,0)$ es un punto de acumulación de

$$\{(1/n, 1/n^2) \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}.$$

(d) EL vector $(0,-1)$ es un punto de acumulación de

$$\{(0, (-1)^n + 1/n) \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}.$$

1.2. Límite a lo largo de una curva para una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.

Recordemos que si se tiene una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, en un punto se puede calcular el límite por la derecha y por la izquierda. Y al hacer esto estamos considerando todas las maneras posibles de acercarse a ese punto. Para que el límite exista debe ocurrir que el límite por la derecha sea igual al límite por la izquierda.

El procedimiento que vamos a desarrollar a continuación, en el plano, es análogo. Pero debemos tomar en cuenta que en un punto del plano no existen sólo dos maneras de acercarse, existen infinitas maneras de acercarse, además puede hacerse a través de diferentes curvas.

Sean $D \subset \mathbb{R}^2$ y (x_o, y_o) un punto de acumulación de D. Sea I un intervalo abierto, sea $g : I \to D$ una curva tal que

(a) existe $t_o \in I$ tal que $g(t_o) = (x_o, y_o)$,
(b) $g(t) \neq (x_o, y_o)$ si $t \neq t_o$,
(c) g es continua.

Consideremos una función $f : D \to \mathbb{R}$, el *límite de f cuando (x, y) tiende a (x_o, y_o) a lo largo de la curva g* es

$$\lim_{t\to t_o} f(g(t)).$$

Ejemplo 2.3. Sea

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Supongamos que queremos averiguar si existe el límite de f cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$ a lo largo de la recta $y = mx$. Notemos que $(0, 0)$ está en esta recta.

Lo primero que debemos hacer es dar una parametrización de esta recta. Tomamos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$g(t) = (t, mt).$$

Luego averiguamos si existe $\lim_{t\to 0} f(g(t))$.

Tenemos que

$$f(g(t)) = f(t, mt) = \frac{mt^2}{t^2 + m^2t^2} = \frac{m}{1 + m^2}$$

Luego

$$\lim_{t\to 0} f(g(t)) = \lim_{t\to 0} f(t, mt) = \frac{m}{1 + m^2}.$$

Note que en este ejemplo esta expresión depende de m.

EJEMPLO 2.4. Sea

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Vamos a averiguar si existe el límite de f cuando (x,y) tiende a $(0,0)$ a lo largo de la parábola $y=x^2$. Notemos que $(0,0)$ está en esta parábola.

Lo primero que debemos hacer es dar una parametrización de esta parábola. Tomamos $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ dada por

$$g(t)=(t,t^2).$$

Averiguaremos si existe $\lim_{t\to 0} f(g(t))$.

Tenemos que

$$f(g(t))=f(t,t^2)=\frac{t^3}{t^2+t^4}=\frac{t}{1+t^2}.$$

$$\lim_{t\to 0} f(g(t))=\lim_{t\to 0} f(t,t^2)=\lim_{t\to 0}\frac{t}{1+t^2}=0.$$

EJEMPLO 2.5. Sea

$$f(x,y)=\frac{2xy^2}{x^2+y^4}.$$

Vamos a averiguar si existe el límite de f cuando (x,y) tiende a $(0,0)$ a lo largo de las parábolas (a) $y=x^2$, (b) $x=y^2$. Notemos que $(0,0)$ está en ambas parábolas.

(a) Damos una parametrización de la parábola $y=x^2$. Tomamos $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ dada por

$$g_1(t)=(t,t^2).$$

Tenemos que

$$f(g_1(t))=f(t,t^2)=\frac{2t^5}{t^2+t^8}=\frac{2t^3}{1+t^6}.$$

$$\lim_{t\to 0} f(g_1(t))=\lim_{t\to 0} f(t,t^2)=\lim_{t\to 0}\frac{2t^3}{1+t^6}=0.$$

(b) Damos una parametrización de la parábola $x=y^2$. Tomamos $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ dada por

$$g_2(t)=(t^2,t).$$

Tenemos que

$$f(g_2(t))=f(t^2,t)=\frac{2t^2t^2}{t^4+t^4}=\frac{2t^4}{2t^4}=1.$$

$$\lim_{t\to 0} f(g_2(t))=\lim_{t\to 0} f(t^2,t)=1.$$

1.3. Comparación de límites a lo largo de varias curvas para una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.

En diversas situaciones uno puede querer acercase a un punto por varias rectas, por parábolas o por cualquier otra curva.

Ejemplo 2.6. Sea

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Calcularemos el límite a lo largo de cualquier recta que pase por el origen.

Tomemos la recta $y = mx$. Tenemos que

$$f(x,mx) = \frac{x^2 - m^2x^2}{x^2 + m^2x^2}.$$

Luego

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - m^2x^2}{x^2 + m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-m^2)}{x^2(1+m^2)} = \frac{1-m^2}{1+m^2}.$$

En este ejemplo el límite que hemos encontrado depende claramente de la pendiente de la recta: m. Es decir el resultado es diferente si colocamos diferentes valores de m. En otras palabras si nos acercamos por diferentes rectas obtenemos diferentes resultados.

Ejemplo 2.7. Sea

$$f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}.$$

Calcularemos

(1) el límite a lo largo de la recta $y = mx$.
(2) el límite a lo largo de la parábola $y = x^2$.

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2mx}{x^4 + (mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2mx}{x^2 + m^2} = 0.$$

En este ejemplo el límite buscado no depende de la pendiente de la recta: m.

Pero si nos acercamos por la parábola $y = x^2$ obtenemos:

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2x^2}{x^4 + (x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^4}{2x^4} = 1.$$

2. Límite en $\mathbb{R}^2$.

DEFINICIÓN 2.8. Sean $D \subset \mathbb{R}^2$, $\vec{x_o} \in \mathbb{R}^2$ un punto de acumulación de D, $f : D \to \mathbb{R}$ una función y $L \in \mathbb{R}$. Decimos que *el límite de $f(\vec{x})$ cuando $\vec{x}$ tiende al punto $\vec{x_o}$ es L* si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\vec{x} \in D$ y si $0 < \|\vec{x} - \vec{x_o}\| < \delta$ entonces $|f(\vec{x}) - L| < \varepsilon$.

Abreviado:

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} f(\vec{x}) = L.$$

Las propiedades del límite, ya conocidas para funciones reales de variable real se extienden de manera natural a las funciones reales de variable en el plano, más precisamente:

TEOREMA 2.9 (Propiedades del límite para campos escalares).

Sean $\lambda \in \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, $\vec{x_o}$ un punto de acumulación de D, sean $f, g : D \to \mathbb{R}$ funciones tales que

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} f(\vec{x}) \qquad y \qquad \lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} g(\vec{x})$$

existen y son finitos. Entonces

(a) $\displaystyle\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} \lambda f(\vec{x}) = \lambda \lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} f(\vec{x})$.

(b) $\displaystyle\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} (f(\vec{x}) + g(\vec{x})) = \lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} f(\vec{x}) + \lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} g(\vec{x})$.

(c) $\displaystyle\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} (f(\vec{x})\, g(\vec{x})) = (\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} f(\vec{x}))\, (\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} g(\vec{x}))$.

(d) *Si* $\displaystyle\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} g(\vec{x}) \neq 0$ *entonces*

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} \left(\frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} \right) = \frac{\displaystyle\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} f(\vec{x})}{\displaystyle\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} g(\vec{x})} .$$

DEMOSTRACIÓN. Probaremos (a) y (b). Las pruebas de las propiedades (c) y (d) están en la lectura adicional.

Como $\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} f(\vec{x})$ y $\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} g(\vec{x})$ existen y son finitos, existen $L_1 \in \mathbb{R}$ y $L_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$L_1 = \lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} f(\vec{x}) \qquad \text{y} \qquad L_2 = \lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} g(\vec{x}).$$

(a) Si $\lambda = 0$ se cumple la igualdad. Supongamos $\lambda \neq 0$, dado $\varepsilon > 0$ sea $\gamma = \varepsilon/|\lambda|$ entonces $\gamma > 0$. Usando la definición de límite se sigue que existe $\delta > 0$ tal que si $\vec{x} \in D$ y si $0 < \|\vec{x} - \vec{x_o}\| < \delta$ entonces $|f(\vec{x}) - L_1| < \gamma$.

Entonces

$$|\lambda f(\vec{x}) - \lambda L_1| = |\lambda|\, |f(\vec{x}) - L_1| < |\lambda| \gamma = \varepsilon.$$

De donde
$$|\lambda f(\vec{x}) - \lambda L_1| < \varepsilon.$$

Hemos probado que: dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\vec{x} \in D$ y si $0 < \|\vec{x} - \vec{x_o}\| < \delta$ entonces
$$|\lambda f(\vec{x}) - \lambda L_1| < \varepsilon.$$

Es decir,
$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} \lambda f(\vec{x}) = \lambda L_1$$

(b) Dado $\varepsilon > 0$ sea $\gamma = \varepsilon/2$ entonces $\gamma > 0$. Usando la definición de límite se sigue que:
Existe $\delta_1 > 0$ tal que si $\vec{x} \in D$ y si $0 < \|\vec{x} - \vec{x_o}\| < \delta_1$ entonces $|f(\vec{x}) - L_1| < \gamma$
Y existe $\delta_2 > 0$ tal que si $\vec{x} \in D$ y si $0 < \|\vec{x} - \vec{x_o}\| < \delta_2$ entonces $|g(\vec{x}) - L_2| < \gamma$.

Sea $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$. Sea $\vec{x} \in D$ tal que $0 < \|\vec{x} - \vec{x_o}\| < \delta$. Entonces
$$|(f(\vec{x})+g(\vec{x}))-(L_1+L_2)| = |f(\vec{x})-L_1+g(\vec{x}))-L_2| \leq |f(\vec{x})-L_1|+|g(\vec{x}))-L_2| = 2\gamma = 2\varepsilon/2 = \varepsilon.$$

De donde
$$|(f(\vec{x}) + g(\vec{x})) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon.$$

Hemos probado que: dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\vec{x} \in D$ y si $0 < \|\vec{x} - \vec{x_o}\| < \delta$ entonces
$$|(f(\vec{x}) + g(\vec{x})) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon.$$

Es decir,
$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} f(\vec{x}) + g(\vec{x}) = L_1 + L_2.$$

□

3. Relación entre límite en $\mathbb{R}^2$ y límite a lo largo de curvas.

En esta sección veremos la relación entre límite en $\mathbb{R}^2$ y límite a lo largo de una curva para una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.

PROPOSICIÓN 2.10. *Sean $D \subset \mathbb{R}^2$, $\vec{x_o}$ un punto de acumulación de D, I un intervalo abierto y $g : I \to D$ tales que:*

(a) *existe $t_o \in I$ tal que $g(t_o) = \vec{x_o}$,*
(b) *$g(t) \neq \vec{x_o}$ si $t \neq t_o$,*
(c) *g es continua.*

Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función. Si existe $\lim_{\vec{x}\to\vec{x_o}} f(\vec{x})$ entonces

$$\lim_{t\to t_o} f(g(t)) = \lim_{\vec{x}\to\vec{x_o}} f(\vec{x}).$$

Es decir: Si $\vec{x}$ se acerca al punto $\vec{x_o}$ a lo largo de g entonces $f(\vec{x})$ se tiene que acercar a $\lim_{\vec{x}\to\vec{x_o}} f(\vec{x})$.

Tal como muestran los siguientes ejemplos, esta Proposición es muy útil para demostrar que un límite no existe.

EJEMPLO 2.11.

(a) Supongamos que queremos averiguar si existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Ponemos $y = mx$ para

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Entonces tenemos que

$$f(x,mx) = \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

Luego

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \frac{m}{1+m^2}.$$

Pero esta expresión varía con m, así que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

no existe.

(b) Estudiemos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

A lo largo de la recta $y = mx$, tenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-m^2x^2}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-m^2)}{x^2(1+m^2)} = \frac{1-m^2}{1+m^2}.$$

Claramente el límite depende de la recta, por lo tanto no existe el límite.

4. Límites iterados

Los límites iterados son:

$$\lim_{x\to a}(\lim_{y\to b} f(x,y)), \qquad \lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x,y))$$

Ejemplo 2.12. Sea

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y} \quad \text{si} \quad x+y \neq 0.$$

Entonces

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x-y}{x+y} = \frac{-y}{y} = -1,$$
$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{x-y}{x+y} = \frac{x}{x} = 1.$$

Así que

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) = 1,$$
$$\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)) = -1.$$

Teorema 2.13. *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ y sea $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tal que existe un entorno de (a,b) contenido en D. Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función. Si existe*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L,$$

si existen los siguientes límites unidimensionales

$$\lim_{x\to a} f(x,y) \qquad y \qquad \lim_{y\to b} f(x,y)$$

entonces

$$\lim_{x\to a}(\lim_{y\to b} f(x,y)) = \lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x,y)) = L.$$

El Teorema 2.13 puede ser útil para demostrar que ciertos límites en $\mathbb{R}^2$ no existen, tal como lo ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.14. Consideremos nuevamente la función

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y} \quad \text{si} \quad x+y \neq 0,$$

ya estudiada en el ejemplo previo.

Se observa que los límites iterados son diferentes, el teorema anterior nos permite asegurar que $f(x,y)$ no tiene límite cuando (x,y) tiende a $(0,0)$.

Las hipótesis del Teorema anterior pueden ser debilitadas.

El recíproco del Teorema 2.13 no es cierto. Puede ocurrir que los límites iterados existan y sean iguales, y que no exista el límite en $\mathbb{R}^2$. El siguiente ejemplo ilustra esta situación.

Ejemplo 2.15. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Usando límite a lo largo de una curva ya probamos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

no existe. Sin embargo

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{0}{y^2} = 0,$$

luego

$$\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} f(x,y)) = 0.$$

También

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{0}{x^2} = 0,$$

luego

$$\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} f(x,y)) = 0.$$

5. Límite a lo largo de curvas para una función de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$.

5.1. Punto de acumulación en $\mathbb{R}^3$.

Sean $\vec{x_o} \in \mathbb{R}^3$ y $D \subset \mathbb{R}^3$. Se dice que $\vec{x_o}$ es un *punto de acumulación* de D cuando en cada esfera de centro $\vec{x_o}$ hay al menos un punto de D, distinto de $\vec{x_o}$.

En forma más precisa se tiene:

Definición 2.16. Sean $\vec{x_o} \in \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$. Se dice que $\vec{x_o}$ es un *punto de acumulación* de D cuando para cada $r > 0$ se tiene que existe $\vec{v} \in D$ tal que $\vec{v} \neq \vec{x_o}$ y $\|\vec{v} - \vec{x_o}\| < r$.

5.2. Límite a lo largo de una curva para una función de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$.

El procedimiento que vamos a desarrollar a continuación, en el espacio, es análogo a lo hecho para la recta y para el plano. Pero debemos tomar en cuenta que en un punto del espacio existen infinitas maneras de acercarse, además puede hacerse a través de diferentes curvas que podrían no estar contenidas en ningún plano.

En diversas situaciones uno puede querer acercase a un punto por varias rectas, por parábolas o por cualquier otra curva. Lo más sencillo es tratar de acercarse por curvas que estén contenidas en los planos generados por los ejes cartesianos.

Sean $D \subset \mathbb{R}^3$ y (x_o, y_o, z_o) un punto de acumulación de D. Sea I un intervalo abierto, sea $g : I \to D$ una curva tal que

(a) existe $t_o \in I$ tal que $g(t_o) = (x_o, y_o, z_o)$,
(b) $g(t) \neq (x_o, y_o, z_o)$ si $t \neq t_o$,
(c) g es continua.

Consideremos una función $f : D \to \mathbb{R}$, el *límite de f cuando (x, y, z) tiende a (x_o, y_o, z_o) a lo largo de la curva g* es

$$\lim_{t \to t_o} f(g(t)).$$

Ejemplo 2.17. Sea

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 - y^2 - z^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Calcularemos el límite en $(0, 0, 0)$ a lo largo de algunas rectas que pasan por el origen.

La intersección del plano $z = mx$ con el plano $y = 0$ da una recta. Sobre esa recta tenemos que

$$f(x, 0, mx) = \frac{x^2 - m^2x^2}{x^2 + m^2x^2}.$$

Luego

$$\lim_{x \to 0} f(x, 0, mx) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - m^2x^2}{x^2 + m^2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2(1 - m^2)}{x^2(1 + m^2)} = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}.$$

En este ejemplo el límite que hemos encontrado depende claramente de la pendiente de la recta: m. Es decir el resultado es diferente si colocamos diferentes valores de m. En otras palabras si nos acercamos por diferentes rectas obtenemos diferentes resultados.

Por supuesto que también podríamos acercarnos por parábolas y por otras curvas.

6. Límite en $\mathbb{R}^3$.

Para $\mathbb{R}^3$ la definición es análoga a la que dimos para $\mathbb{R}^2$.

DEFINICIÓN 2.18. Sean $D \subset \mathbb{R}^3$, $\vec{x_o} \in \mathbb{R}^3$ un punto de acumulación de D, $f : D \to \mathbb{R}$ una función y $L \in \mathbb{R}$. Decimos que *el límite de $f(\vec{x})$ cuando $\vec{x}$ tiende al punto $\vec{x_o}$ es L* si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\vec{x} \in D$ y si $0 < \|\vec{x} - \vec{x_o}\| < \delta$ entonces $|f(\vec{x}) - L| < \varepsilon$.

Abreviado:

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} f(\vec{x}) = L.$$

Las propiedades del límite, ya conocidas para funciones reales de variable real y para funciones reales de variable en el plano se extienden para funciones reales de variable en el espacio, más precisamente:

TEOREMA 2.19 (Propiedades del límite para campos escalares).

Sean $\lambda \in \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^3$, $\vec{x_o}$ un punto de acumulación de D, sean $f, g : D \to \mathbb{R}$ funciones tales que

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} f(\vec{x}) \qquad y \qquad \lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} g(\vec{x})$$

existen y son finitos. Entonces

(a) $\displaystyle\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} \lambda f(\vec{x}) = \lambda \lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} f(\vec{x})$.

(b) $\displaystyle\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} (f(\vec{x}) + g(\vec{x})) = \lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} f(\vec{x}) + \lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} g(\vec{x})$.

(c) $\displaystyle\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} (f(\vec{x})\, g(\vec{x})) = (\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} f(\vec{x}))\, (\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} g(\vec{x}))$.

(d) *Si* $\displaystyle\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} g(\vec{x}) \neq 0$ *entonces*

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} \left(\frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} \right) = \frac{\displaystyle\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} f(\vec{x})}{\displaystyle\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} g(\vec{x})}.$$

La demostración para $\mathbb{R}^3$ es análoga a la de $\mathbb{R}^2$.

7. Relación entre límite en $\mathbb{R}^3$ y límite a lo largo de una curva.

En el espacio también hay una relación entre límite y límite por curvas. Es decir, existe un relación entre límite en $\mathbb{R}^3$ y límite a lo largo de una curva para una función de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$.

PROPOSICIÓN 2.20. *Sean $D \subset \mathbb{R}^3$, $\vec{x_o}$ un punto de acumulación de D, I un intervalo abierto y $g : I \to D$ tales que:*

(a) *existe* $t_o \in I$ *tal que* $g(t_o) = \vec{x_o}$,
(b) $g(t) \neq \vec{x_o}$ *si* $t \neq t_o$,
(c) g *es continua.*

Sea $f : D \to \mathbb{R}$ *una función. Si existe* $\lim_{\vec{x}\to\vec{x_o}} f(\vec{x})$ *entonces*

$$\lim_{t\to t_o} f(g(t)) = \lim_{\vec{x}\to\vec{x_o}} f(\vec{x}).$$

Es decir: Si $\vec{x}$ *se acerca al punto* $\vec{x_o}$ *a lo largo de* g *entonces* $f(\vec{x})$ *se tiene que acercar a* $\lim_{\vec{x}\to\vec{x_o}} f(\vec{x})$.

Esta Proposición es muy útil para demostrar que un límite no existe.

8. Continuidad.

Definición 2.21. Sean $D \subset \mathbb{R}^n$, $\vec{x_o} \in D$, $f : D \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que f *es continua en* $\vec{x_o}$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\vec{x} \in D$ y si $\|\vec{x} - \vec{x_o}\| < \delta$ entonces $|f(\vec{x}) - f(\vec{x_o})| < \varepsilon$.

Observación 2.22. Notar que si $\vec{x_o}$ es un punto de acumulación de D entonces f es continua en $\vec{x_o}$ si y sólo si $\lim_{\vec{x}\to\vec{x_o}} f(\vec{x}) = f(\vec{x_o})$.

Definición 2.23. Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ y $f : D \to \mathbb{R}$ una función . Decimos que f es *continua en* D cuando f es continua en $\vec{x_o}$ para todo $\vec{x_o} \in D$.

Observación 2.24. Una función de dos variables puede ser continua en cada variable separadamente y, sin embargo, no ser continua como función de dos variables, tal como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.25. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Tenemos que para un y fijo

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{0}{0+y^2} = 0 = f(0,y)$$

así que f es continua en la primera variable.

Tenemos que para un x fijo

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{0}{x^2+0} = 0 = f(x,0)$$

así que f es continua en la segunda variable.

Sin embargo, tal como ya lo probamos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

no existe. Así que f no es continua en $(0,0)$ (como función de dos variables).

Las propiedades ya conocidas de las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ se extienden de manera natural a las funciones de varias variables. Como ejercicio demostrar los siguientes resultados.

Proposición 2.26.

(a) *La suma de funciones continuas es una función continua.*
(b) *El producto de funciones continuas es una función continua.*
(c) *El cociente de una función continua entre otra función continua que no se anula también es una función continua.*

Proposición 2.27. *Sea $n=2$ ó $n=3$. Sean $A\subset\mathbb{R}^n$ y $B\subset\mathbb{R}$. Si $f:A\to\mathbb{R}$ y $g:B\to\mathbb{R}$ son continuas y $f(A)\subset B$ entonces la función $g\circ f:A\to\mathbb{R}$ es una función continua.*

Ejemplo 2.28. Las siguientes funciones son continuas:

(a) $f(x,y)=(x+y)^2$.
(b) $f(x,y)=\operatorname{sen}^2(x+y)+xy\cos y$.
(c) $f(x,y)=e^{x+y^2+z^3}$.

Proposición 2.29. *Sea $D\subset\mathbb{R}^n$. Si $f:D\to\mathbb{R}^m$ es continua entonces la función $g:D\to\mathbb{R}$ definida por $g(\vec{x})=\|f(\vec{x})\|$ es continua.*

9. Lectura adicional: Demostraciones de algunos teoremas de límites.

Sea $n=2$ ó $n=3$.

Lema 2.30. *Sean $D\subset\mathbb{R}^n$, $f:D\to\mathbb{R}$ una función y $\vec{x_o}$ un punto de acumulación de D. Si $\lim_{\vec{x}\to\vec{x_o}} f(\vec{x})$ existe entonces existe $\delta_o>0$ tal que f es acotada en $D\cap(B(\vec{x_o},\delta_o)\setminus\{\vec{x_o}\})$. Donde $B(\vec{x_o},\delta_o)=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n:\|\vec{x}-\vec{x_o}\|<\delta_o\}$.*

Demostración. Sea $\vec{L}=\lim_{\vec{x}\to\vec{x_o}} f(\vec{x})$. Considerando $\varepsilon=1$ en la definición de límite obtenemos que existe $\delta_o>0$ tal que si $\vec{x}\in D$ y $0<\|\vec{x}-\vec{x_o}\|<\delta_o$ entonces

$$\|f(\vec{x})-\vec{L}\|<1.$$

Como

$$\|f(\vec{x})\| - \|\vec{L}\| \leq |\, \|f(\vec{x})\| - \|\vec{L}\|\, | \leq \|f(\vec{x}) - \vec{L}\|,$$

tenemos que

$$\|f(\vec{x})\| < \|\vec{L}\| + 1$$

para $\vec{x} \in D \cap B(\vec{x_o}, \delta_o)$ y $\vec{x} \neq \vec{x_o}$. □

Teorema 2.31 (Producto de límites).
Sean $D \subset \mathbb{R}^n$, $\vec{x_o}$ un punto de acumulación de D, sean $f, g : D \to \mathbb{R}$ funciones tales que

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x_o}} f(\vec{x}) \qquad y \qquad \lim_{\vec{x}\to\vec{x_o}} g(\vec{x})$$

existen y son finitos. Entonces

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x_o}} (f(\vec{x})\, g(\vec{x})) = (\lim_{\vec{x}\to\vec{x_o}} f(\vec{x}))\, (\lim_{\vec{x}\to\vec{x_o}} g(\vec{x})).$$

Demostración.
Como $\lim_{\vec{x}\to\vec{x_o}} f(\vec{x})$ y $\lim_{\vec{x}\to\vec{x_o}} g(\vec{x})$ existen y son finitos, existen $L_1 \in \mathbb{R}$ y $L_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$L_1 = \lim_{\vec{x}\to\vec{x_o}} f(\vec{x}) \qquad \text{y} \qquad L_2 = \lim_{\vec{x}\to\vec{x_o}} g(\vec{x}).$$

Por el lema 2.30 existe $\delta_o > 0$ tal que f es acotada en $D \cap B(\vec{x_o}, \delta_o)$. Sea M la cota, es decir, $|f(\vec{x})| \leq M$ si $\vec{x} \in D \cap B(\vec{x_o}, \delta_o)$.

Dado $\varepsilon > 0$ sea $\gamma = \varepsilon/(M + |L_2|)$ entonces $\gamma > 0$. Usando la definición de límite se sigue que:
Existe $\delta_1 > 0$ tal que si $\vec{x} \in D$ y si $0 < \|\vec{x} - \vec{x_o}\| < \delta_1$ entonces $|f(\vec{x}) - L_1| < \gamma$
Y existe $\delta_2 > 0$ tal que si $\vec{x} \in D$ y si $0 < \|\vec{x} - \vec{x_o}\| < \delta_2$ entonces $|g(\vec{x}) - L_2| < \gamma$.

Sea $\delta = min\{\delta_o, \delta_1, \delta_2\}$. Sea $\vec{x} \in D$ tal que $0 < \|\vec{x} - \vec{x_o}\| < \delta$. Entonces

$$\begin{aligned} |f(\vec{x})g(\vec{x}) - L_1L_2| &= |f(\vec{x})g(\vec{x}) - f(\vec{x})L_2 + f(\vec{x})L_2 - L_1L_2| \\ &\leq |f(\vec{x})||g(\vec{x})) - L_2| + |L_2||f(\vec{x}) - L_1| \\ &\leq M\gamma + |L_2|\gamma = (M + |L_2|)\gamma = \varepsilon. \end{aligned}$$

De donde

$$|f(\vec{x})g(\vec{x}) - L_1L_2| < \varepsilon.$$

Hemos probado que: dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\vec{x} \in D$ y si $0 < \|\vec{x} - \vec{x_o}\| < \delta$ entonces

$$|f(\vec{x})g(\vec{x}) - L_1L_2| < \varepsilon.$$

Es decir,

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} f(\vec{x})g(\vec{x}) = L_1L_2.$$

□

Lema 2.32. *Sean D un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $g : D \to \mathbb{R}$ una función y $\vec{x_o}$ un punto de acumulación de D.*

Si $\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} g(\vec{x}) = \vec{L} \neq \vec{0}$ entonces existen $m > 0$ y $\delta_o > 0$ tales que $|g(\vec{x})| \geq m$ para todo $\vec{x} \in D \cap (B(\vec{x_o}, \delta_o) \setminus \{\vec{x_o}\})$. Donde $B(\vec{x_o}, \delta_o) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{x_o}\| < \delta_o\}$.

Demostración. Considerando $\varepsilon = \|\vec{L}\|/2$ en la definición de límite obtenemos que existe $\delta_o > 0$ tal que si $\vec{x} \in D$ y $0 < \|\vec{x} - \vec{x_o}\| < \delta_o$ entonces

$$\|g(\vec{x}) - \vec{L}\| < \frac{\|\vec{L}\|}{2}.$$

Supongamos que $\vec{x} \in D \cap (B(\vec{x_o}, \delta_o) \setminus \{\vec{x_o}\})$ entonces

$$|\|g(\vec{x})\| - \|\vec{L}\|| \leq \|g(\vec{x}) - \vec{L}\| < \frac{\|\vec{L}\|}{2},$$

por lo tanto

$$-\frac{\|\vec{L}\|}{2} < \|g(\vec{x})\| - \|\vec{L}\| < \frac{\|\vec{L}\|}{2},$$

de donde

$$\|g(\vec{x})\| > \frac{\|\vec{L}\|}{2}.$$

□

Teorema 2.33 (Cociente de límites).

Sean $D \subset \mathbb{R}^n$, $\vec{x_o}$ un punto de acumulación de D, sean $f, g : D \to \mathbb{R}$ funciones tales que

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} f(\vec{x}) \qquad y \qquad \lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} g(\vec{x})$$

existen y son finitos. Entonces

Si $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x_o}} g(\vec{x}) \neq 0$ entonces

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} \left(\frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} \right) = \frac{\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x_o}} f(\vec{x})}{\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x_o}} g(\vec{x})} .$$

Demostración.

Como $\lim_{\vec{x}\to\vec{x_o}} f(\vec{x})$ y $\lim_{\vec{x}\to\vec{x_o}} g(\vec{x})$ existen y son finitos, existen $L_1 \in \mathbb{R}$ y $L_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$L_1 = \lim_{\vec{x}\to\vec{x_o}} f(\vec{x}) \qquad \text{y} \qquad L_2 = \lim_{\vec{x}\to\vec{x_o}} g(\vec{x}).$$

Por el lema 2.32 existen $m > 0$ y $\delta_o > 0$ tales que si $\vec{x} \in D \cap (B(\vec{x_o}, \delta_o) \setminus \{\vec{x_o}\})$ entonces $|g(\vec{x})| \geq m$ y por lo tanto

$$\frac{1}{|g(\vec{x})|} \leq \frac{1}{m}.$$

Dado $\varepsilon > 0$ sea

$$\gamma = \frac{m|L_2|}{|L_2| + |L_1|}\,\varepsilon$$

entonces $\gamma > 0$.

Usando la definición de límite se sigue que:

Existe $\delta_1 > 0$ tal que si $\vec{x} \in D$ y si $0 < \|\vec{x} - \vec{x_o}\| < \delta_1$ entonces $|f(\vec{x}) - L_1| < \gamma$

Y existe $\delta_2 > 0$ tal que si $\vec{x} \in D$ y si $0 < \|\vec{x} - \vec{x_o}\| < \delta_2$ entonces $|g(\vec{x}) - L_2| < \gamma$.

Sea $\delta = min\{\delta_o, \delta_1, \delta_2\}$. Sea $\vec{x} \in D$ tal que $0 < \|\vec{x} - \vec{x_o}\| < \delta$. Entonces

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} - \frac{L_1}{L_2}\right| &= \left|\frac{f(\vec{x})L_2 - g(\vec{x})L_1}{g(\vec{x})L_2}\right| \\
&= \frac{|f(\vec{x})L_2 - L_1L_2 + L_1L_2 - g(\vec{x})L_1|}{|g(\vec{x})L_2|} \\
&\leq \frac{|L_2||f(\vec{x}) - L_1| + |L_1||L_2 - g(\vec{x}))|}{m|L_2|} \\
&\leq \frac{|L_2|\gamma + |L_1|\gamma}{m|L_2|} \\
&= \frac{|L_2| + |L_1|}{m|L_2|}\,\gamma = \varepsilon.
\end{aligned}$$

De donde

$$\left|\frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} - \frac{L_1}{L_2}\right| < \varepsilon.$$

Hemos probado que: dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\vec{x} \in D$ y si $0 < \|\vec{x} - \vec{x_o}\| < \delta$ entonces

$$\left|\frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} - \frac{L_1}{L_2}\right| < \varepsilon.$$

$\square$

10. Lectura adicional: Continuidad de la norma y del producto interno.

Si $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ la norma de $\vec{a}$ es:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}.$$

TEOREMA 2.34 (Continuidad de la norma). *Sea $\vec{x_o} \in \mathbb{R}^n$ entonces*

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} \|\vec{x}\| = \|\vec{x_o}\|.$$

DEMOSTRACIÓN. Dado $\varepsilon > 0$ sea $\delta = \varepsilon$. Si $\vec{x} \in D$ y $0 < \|\vec{x} - \vec{x_o}\| < \delta$ entonces

$$|\|\vec{x}\| - \|\vec{x_o}\|| \leq \|\vec{x} - \vec{x_o}\| < \delta = \varepsilon.$$

Luego

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} \|\vec{x}\| = \|\vec{x_o}\|.$$

□

Si $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ el producto interno usual es:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz sigue siendo cierto para cualquier número natural n y la demostración es la misma que en el caso de $n = 2$ ó $n = 3$.

(1) Si $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|.$$

Es decir, si $a_1, \dots, a_n$ y $b_1, \dots, b_n$ son números reales arbitrarios entonces

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right).$$

(2) Si algún $a_i \neq 0$ entonces:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right)$$

si y sólo si existe $x_o \in \mathbb{R}$ tal que $a_k x_o + b_k = 0$ para $k = 1, \dots, n$.

TEOREMA 2.35 (Continuidad del producto interno). *Sean* $\vec{x_o}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ *entonces*

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} \langle \vec{x}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{x_o}, \vec{v} \rangle.$$

DEMOSTRACIÓN. Si $\|\vec{v}\| = \vec{0}$ entonces $\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle = 0$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Supongamos $\|\vec{v}\| \neq \vec{0}$. Dado $\varepsilon > 0$ sea $\delta = \varepsilon / \|\vec{v}\|$. Sea $\vec{x} \in D$ tal que $0 < \|\vec{x} - \vec{x_o}\| < \delta$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\|\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle - \langle \vec{x_o}, \vec{v} \rangle\| = \|\langle \vec{x} - \vec{x_o}, \vec{v} \rangle\| \leq \|\vec{x} - \vec{x_o}\| \|\vec{v}\| < \delta \|\vec{v}\| = \varepsilon.$$

Luego

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_o}} \langle \vec{x}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{x_o}, \vec{v} \rangle.$$

□

Ejercicios.
Límites de campos escalares.

En lo que sigue usaremos $[x]$ para denotar a la parte entera de x.

(1) Para las siguientes funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dibuje su gráfica e indique los puntos en los que no es continua.

(a) $f(x) = [x]$

(b) $f(x) = [-x]$

(c) $f(x) = [x] + [-x]$

(d) $f(x) = [\operatorname{sen} x]$

(2) Hallar los siguientes límites (en caso de que existan)

(a) $\displaystyle\lim_{x\to x_o} \frac{x^2 - x_o^2}{x - x_o}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to x_o} \frac{x^3 - x_o^3}{x - x_o}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}$

(3) Hallar los siguientes límites (en caso de que existan)

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(x^3, \cos x)$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(e^x, [-x])$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(x^3 - 7, \tan x)$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} x, [\operatorname{sen} x])$

(4) Hallar los siguientes límites (en caso de que existan)

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} x^3 y$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} e^x y$

(5) Calcular

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2 + 3y^2}{x + 1}$$

(6) Determinar si el siguiente límite existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

(7) Demuestre que no existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}.$$

(8) Demuestre que:

(a) $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$

(b) $\dfrac{x^2}{x^2+y^2} < 1$

(c) $\left|\dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| < |y|$

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$

(9) Para $(x,y) \neq (0,0)$ sea

$$f(x,y) = \frac{7\,x\,y^2}{x^2+y^2}.$$

(a) Hallar el límite de $f(x,y)$ cuando (x,y) tiende a $(0,0)$ a lo largo de la recta $y = mx$.

(b) Hallar el límite de $f(x,y)$ cuando (x,y) tiende a $(0,0)$ a lo largo de la curva $y = x^2$.

(c) ¿Existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

(d) Diga si es posible definir $f(0,0)$ de modo que f sea continua en $(0,0)$.

(10) Para $(x,y) \neq (0,0)$ sea

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

Hallar el límite de $f(x,y)$ cuando (x,y) tiende a $(0,0)$ a lo largo de la recta $y = mx$. Diga si es posible definir $f(0,0)$ de modo que f sea continua en $(0,0)$.

CAPÍTULO 3

Diferenciación de campos escalares.

Diferenciabilidad de un campo escalar en un punto. Derivadas parciales y direccionales. Concepto de gradiente. Interpretación geométrica del gradiente: Dirección de máximo crecimiento para una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$. Condición suficiente de diferenciabilidad. Regla de la cadena para la composición de un campo escalar con una aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$ y de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$. Diferenciación de funciones definidas en forma implícita.

1. Diferenciabilidad de un campo escalar en un punto.

Motivación.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y sea $x_o \in \mathbb{R}$. Recordemos que f es diferenciable en x_o si existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}.$$

Este límite se llama *la derivada de f en el punto x_o* y se denota por $f'(x_o)$.

La generalización de este concepto a funciones de dos o tres variables no es nada inmediato. La primera dificultad que encontramos al tratar de extenderlo es que no podemos dividir entre un vector, sin embargo, vamos a tratar de reescribir la definición de derivada de manera tal que podamos generalizarla a funciones de varias variables.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $x_o \in \mathbb{R}$ y sea $a = f'(x_o)$, es decir

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} = a.$$

Entonces tenemos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o) - a\,h}{h} = 0,$$

o, lo que es equivalente

$$\lim_{h \to 0} \frac{|\, f(x_o + h) - f(x_o) - a\,h\,|}{|h|} = 0.$$

La función $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $T(h)=a\,h$ es una transformación lineal. Por lo tanto tenemos el siguiente resultado:

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función y sea $x_o\in\mathbb{R}$. f es diferenciable en x_o si y sólo si existe una transformación lineal $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{h\to 0}\frac{|\,f(x_o+h)-f(x_o)\;-T(h)\,|}{|h|}=0.$$

Concepto de diferenciabilidad.

La discusión previa motiva la siguiente definición.

Definición 3.1. Sean $D\subset\mathbb{R}^n$ un abierto, $f:D\to\mathbb{R}$ una función y $\vec{x}_o\in D$.

Decimos que f es *diferenciable* en $\vec{x}_o$ si existe una transformación lineal $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}}\frac{|f(\vec{x}_o+\vec{h})-f(\vec{x}_o)-T(\vec{h})|}{\|\vec{h}\|}=0. \tag{3.1}$$

Observación 3.2. Se puede demostrar (ver [**6**]) que si f es diferenciable en x_o entonces existe una única transformación lineal T que satisface (3.1).

Definición 3.3. Si f es diferenciable en $\vec{x}_o$, el *diferencial* de f en $\vec{x}_o$ es la única transformación lineal que satisface (3.1), y se denota por $df_{\vec{x}_o}$.

Resumiendo:

Si f es diferenciable en $\vec{x}_o$, entonces existe una única transformación lineal, que denotaremos por $df_{\vec{x}_o}$, tal que $$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}}\frac{\lvert f(\vec{x}_o+\vec{h})-f(\vec{x}_o)-df_{\vec{x}_o}(\vec{h})\rvert}{\|\vec{h}\|}=0.$$

Al igual que en el caso de una variable, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.4. *Si f es diferenciable en $\vec{x}_o$, entonces f es continua en $\vec{x}_o$.*

DEMOSTRACIÓN. Por ser f diferenciable en $\vec{x}_o$, existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{|f(\vec{x}_o + \vec{h}) - f(\vec{x}_o) - T(\vec{h})|}{\|\vec{h}\|} = 0,$$

como toda transformación lineal es continua, tenemos que

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} T(\vec{h}) = 0,$$

luego

$$\begin{aligned}
\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} |f(\vec{x}_o + \vec{h}) - f(\vec{x}_o)| &= \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \|\vec{h}\| \left(\frac{|f(\vec{x}_o + \vec{h}) - f(\vec{x}_o) - T(\vec{h}) + T(\vec{h})|}{\|\vec{h}\|} \right) \\
&\leq \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \|\vec{h}\| \left(\frac{|f(\vec{x}_o + \vec{h}) - f(\vec{x}_o) - T(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} \right) + \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} |T(\vec{h})| \\
&= 0,
\end{aligned}$$

de donde

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} f(\vec{x}_o + \vec{h}) = f(\vec{x}_o).$$

□

OBSERVACIÓN 3.5. Tal y cómo era de esperarse en el caso $n = 1$, la definición que hemos dado de diferenciabilidad, coincide con la definición usual de derivada. En efecto, en este caso la transformación lineal T es de la forma

$$T(h) = a\,h$$

para algún $a \in \mathbb{R}$.

Luego

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x_o + h) - f(x_o) - a\,h|}{|h|} = 0,$$

de donde

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} = a.$$

Es muy importante notar que, en este caso, el diferencial de f en x_o es la función lineal definida por

$$T(h) = f'(x_o)h.$$

OBSERVACIÓN 3.6. Tal como ocurre en el caso de una variable, se cumple lo siguiente:

(1) Si f y g son funciones diferenciables en $\vec{x}_o$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda f + g$ es diferenciable en $\vec{x}_o$ y
$$d_{\vec{x}_o}(\lambda f + g) = \lambda\, d_{\vec{x}_o} f + d_{\vec{x}_o} g.$$

(2) Si f es diferenciable en un abierto "conexo" D (de manera informal conexo quiere decir que está formado por una sola pieza) y $d_{\vec{x}} f = 0$ para todo $\vec{x} \in D$, entonces f es constante en D.

2. Derivadas parciales y direccionales.

Caso n = 2.

DEFINICIÓN 3.7. Sean $D \subset \mathbb{R}^2$ un abierto, $f : D \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $(x_o, y_o) \in D$. La *derivada parcial del campo escalar* f con respecto a x en (x_o, y_o) se define por
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o) &= \lim_{t \to 0} \frac{f((x_o, y_o) + (t, 0)) - f(x_o, y_o)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_o + t, y_o) - f(x_o, y_o)}{t},\end{aligned}$$
en caso de que el límite exista.

Esta derivada se calcula de la siguiente manera: se considera la variable y como constante y se deriva con respecto a x usando las reglas usuales de derivación.

EJEMPLO 3.8. Sea $f(x, y) = e^{x+y} \operatorname{sen} x$. Entonces
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{x+y} \operatorname{sen} x + e^{x+y} \cos x.$$
Si $(x_o, y_o) = (\pi/3, 2)$ tenemos que
$$\frac{\partial f}{\partial x}(\pi/3, 2) = e^{\pi/3+2} \operatorname{sen}(\pi/3) + e^{\pi/3+2} \cos(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}+1}{2}\, e^{2+\pi/3}.$$

La derivada parcial de f con respecto a x en el punto (x_o, y_o) la podemos interpretar geométricamente de la siguiente manera: Intersectamos la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $y = y_o$ y obtenemos la curva señalada en el dibujo, la pendiente de la recta tangente a esta curva en el punto $(x_o, y_o, f(x_o, y_o))$ es igual a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)$.

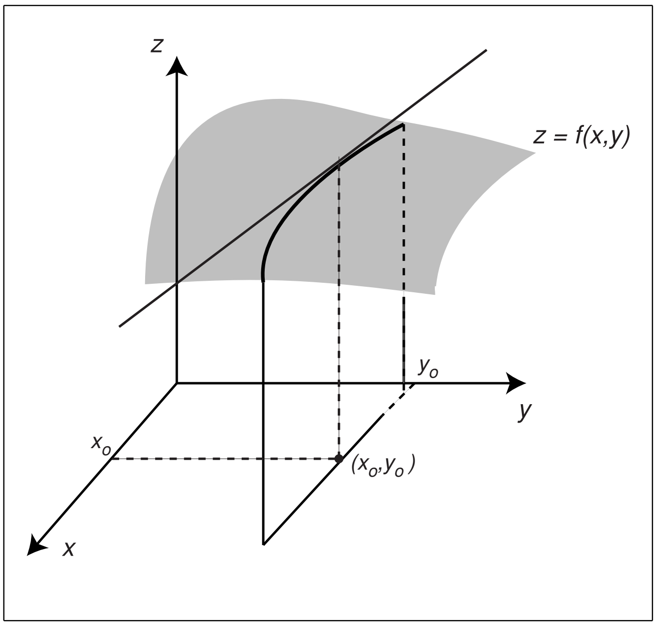

FIGURA 3.1. Interpretación geométrica de la derivada parcial

DEFINICIÓN 3.9. Sean $D \subset \mathbb{R}^2$ un abierto, $f : D \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $(x_o, y_o) \in D$. La *derivada parcial del campo escalar* f con respecto a y en (x_o, y_o) se define por

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) &= \lim_{t\to 0} \frac{f((x_o, y_o) + (0, t)) - f(x_o, y_o)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_o, y_o + t) - f(x_o, y_o)}{t},\end{aligned}$$

en caso de que el límite exista.

Esta derivada se calcula de la siguiente manera: se considera la variable x como constante y se deriva con respecto a y usando las reglas usuales de derivación.

EJEMPLO 3.10. Sea $f(x, y) = e^{x+y} \operatorname{sen} x$. Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^{x+y} \operatorname{sen} x.$$

Como ejercicio halle $\dfrac{\partial f}{\partial y}(4, \pi)$.

Definición 3.11. Sean $D \subset \mathbb{R}^2$ un abierto, $f : D \to \mathbb{R}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ un vector de norma uno y $(x_o, y_o) \in D$. La *derivada direccional del campo escalar* f en la dirección del vector $\vec{v}$ en el punto (x_o, y_o) es

$$D_{\vec{v}} f(x_o, y_o) = \lim_{t\to 0} \frac{f((x_o, y_o) + t\vec{v}) - f(x_o, y_o)}{t}$$

siempre que el límite exista.

De la definición sigue que $D_{\vec{v}} f(x_o, y_o)$ mide la variación de f en la dirección del vector $\vec{v}$ en el punto (x_o, y_o).

Observación 3.12. Notar que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o) = D_{(1,0)} f(x_o, y_o),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) = D_{(0,1)} f(x_o, y_o).$$

Ejercicio 3.13. Hacer dibujos, similares a la Figura 3.1, representado geométricamente la derivada parcial con respecto a y y con respecto a un vector $\vec{v}$.

Caso n = 3.

Definición 3.14. Sean $D \subset \mathbb{R}^3$ un abierto, $f : D \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $(x_o, y_o, z_o) \in D$.

La *derivada parcial del campo escalar* f con respecto a x en (x_o, y_o, z_o) se define por

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o, z_o) &= \lim_{t\to 0} \frac{f((x_o, y_o, z_o) + (t, 0, 0)) - f(x_o, y_o, z_o)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_o + t, y_o, z_o) - f(x_o, y_o, z_o)}{t},\end{aligned}$$

en caso de que el límite exista.

La *derivada parcial del campo escalar* f con respecto a y en (x_o, y_o, z_o) se define por

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o, z_o) = \lim_{t\to 0} \frac{f((x_o, y_o, z_o) + (0, t, 0)) - f(x_o, y_o, z_o)}{t},$$

en caso de que el límite exista.

La *derivada parcial del campo escalar* f con respecto a z en (x_o, y_o, z_o) se define por

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_o, y_o, z_o) = \lim_{t\to 0} \frac{f((x_o, y_o, z_o) + (0,0,t)) - f(x_o, y_o, z_o)}{t},$$

en caso de que el límite exista.

Ejemplo 3.15. Sea $f(x, y, z) = y(x^2 + y^3 x + \cos z)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= y(2x + y^3),\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= (x^2 + y^3 x + \cos z) + y(3y^2 x),\\
\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= -y \operatorname{sen} z.
\end{aligned}$$

La derivada direccional se define de manera análoga y tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o, z_o) = D_{(1,0,0)} f(x_o, y_o, z_o),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o, z_o) = D_{(0,1,0)} f(x_o, y_o, z_o),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_o, y_o, z_o) = D_{(0,0,1)} f(x_o, y_o, z_o).$$

Derivadas de orden superior.

Si tenemos una función $f : D \to \mathbb{R}$, donde $D \subset \mathbb{R}^3$ es un abierto y f tiene derivadas parciales, entonces $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ también es una función de D en $\mathbb{R}$, por lo tanto tiene sentido considerar sus derivas parciales.

Los siguientes ejemplos ilustran la notación usual

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\\
\frac{\partial^5 f}{\partial x^2 \partial z^2 \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

Bajo ciertas hipótesis se cumple que una derivada parcial de orden superior es independiente del orden de derivación. Más precisamente, si todas las derivadas parciales hasta el orden n son continuas, entonces las derivadas parciales de orden menor o igual que n son independientes del orden.

Por ejemplo si las derivadas parciales de primer y segundo orden de f son continuas, entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

En capítulos posteriores estudiaremos más en detalle las derivadas de orden superior.

3. Concepto de gradiente.

Caso n = 2.

Sean $D \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y supongamos que $f : D \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $(x_o, y_o) \in D$. Entonces existe una transformación lineal (que es única), que denotamos por $df_{(x_o,y_o)}$, tal que

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{|f((x_o, y_o) + \vec{h}) - f((x_o, y_o)) - df_{(x_o,y_o)}(\vec{h})|}{\|\vec{h}\|} = 0.$$

En particular, si tomamos $\vec{h} = t(1, 0)$ y hacemos t tender a 0, obtenemos

$$\lim_{t\to 0} \frac{|f((x_o, y_o) + t(1, 0)) - f((x_o, y_o)) - df_{(x_o,y_o)}(t(1, 0))|}{\|t(1, 0)\|} = 0,$$

como $\|t(1, 0)\| = |t|$ y $df_{(x_o,y_o)}(t(1, 0)) = t\, df_{(x_o,y_o)}(1, 0)$, tenemos que

$$\lim_{t\to 0} \frac{|f((x_o, y_o) + (t, 0)) - f((x_o, y_o)) - t\, df_{(x_o,y_o)}(1, 0)|}{|t|} = 0,$$

es decir,

$$\lim_{t\to 0} \left| \frac{f((x_o, y_o) + (t, 0)) - f((x_o, y_o))}{t} - df_{(x_o,y_o)}(1, 0) = 0 \right|.$$

Este cálculo nos muestra que si f es diferenciable en (x_o, y_o) entonces existe

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((x_o, y_o) + (t, 0)) - f((x_o, y_o))}{t}$$

y es igual a $df_{(x_o,y_o)}(1, 0)$, o, dicho de otra manera, si f es diferenciable en (x_o, y_o) entonces existe la derivada parcial de f con respecto a x en (x_o, y_o) y además

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o) = df_{(x_o,y_o)}(1, 0).$$

De igual manera se prueba que si f es diferenciable en (x_o, y_o) entonces existe la derivada parcial de f con respecto a y en (x_o, y_o) y además

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) = df_{(x_o,y_o)}(0, 1),$$

y más generalmente, considerando $\vec{h} = t\vec{v}$, se prueba que si f es diferenciable en (x_o, y_o) y $\vec{v}$ es un vector de norma 1, entonces existe la derivada de f en la dirección de $\vec{v}$ y además

$$D_{\vec{v}} f(x_o, y_o) = df_{(x_o,y_o)}(\vec{v}).$$

Por otra parte, si $\vec{v} = (v_1, v_2)$, tenemos que

$$\vec{v} = v_1\,(1, 0) + v_2\,(0, 1)$$

y, por la linealidad de $df_{(x_o,y_o)}$,

$$\begin{aligned} df_{(x_o,y_o)}(\vec{v}) &= v_1\, df_{(x_o,y_o)}((1, 0)) + v_2\, df_{(x_o,y_o)}((0, 1)) \\ &= v_1\, \frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o) + v_2\, \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) \\ &= \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o), \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) \right), (v_1, v_2) \right\rangle. \end{aligned}$$

Definición 3.16. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un abierto, $f : D \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $(x_o, y_o) \in D$. El *gradiente* de f en (x_o, y_o) es

$$\nabla f(x_o, y_o) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o), \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) \right),$$

en caso de que las derivadas parciales existan.

El símbolo ∇ que aparece en el gradiente se llama nabla.

Los cálculos que hemos hecho los resume el siguiente resultado.

Teorema 3.17. *Sean $D \subset \mathbb{R}^2$ un abierto, $(x_o, y_o) \in D$ y $f : D \to \mathbb{R}$ una función. Si f es diferenciable en (x_o, y_o) entonces*

(a) *Existen las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)$.*

(b) *La derivada direccional, $D_{\vec{v}} f(x_o, y_o)$, existe para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ de norma uno y*

$$D_{\vec{v}} f(x_o, y_o) = \langle \nabla f(x_o, y_o), \vec{v} \rangle.$$

Caso n = 3.

Definición 3.18. Sea $D \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto, $f : D \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $(x_o, y_o, z_o) \in D$.

El *gradiente* de f en (x_o, y_o, z_o) es

$$\nabla f(x_o, y_o, z_o) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o, z_o), \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o, z_o), \frac{\partial f}{\partial z}(x_o, y_o, z_o) \right),$$

en caso de que las derivadas parciales existan.

Ejemplo 3.19. Sea $f(x, y, z) = y(x^2 + y^3 x + \cos z)$. Entonces

$$\nabla f(x, y, z) = (y(2x + y^3), (x^2 + y^3 x + \cos z) + y(3y^2 x), -y \operatorname{sen} z).$$

Al igual que en el caso bidimensional, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.20. *Sean $D \subset \mathbb{R}^3$ un abierto y $f : D \to \mathbb{R}$ una función. Si f es diferenciable en (x_o, y_o, z_o) entonces*

(a) *Existen las derivadas parciales* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o, z_o)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o, z_o)$ *y* $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x_o, y_o, z_o)$.

(b) *La derivada direccional, $D_{\vec{v}} f(x_o, y_o, z_o)$, existe para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ de norma uno y*

$$D_{\vec{v}} f(x_o, y_o, z_o) = \langle \nabla f(x_o, y_o, z_o), \vec{v} \rangle.$$

4. Dirección de máximo crecimiento.

De la definición de derivada direccional sigue que $D_{\vec{v}} f(\vec{x}_o)$ es una medida del crecimiento de f en $\vec{x}_o$, en la dirección del vector $\vec{v}$. Además tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.21. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en $\vec{x}_o$. Si $\nabla f(\vec{x}_o) \neq 0$ entonces $\nabla f(\vec{x}_o)$ es un vector que apunta en la dirección de máximo crecimiento de f.*

Demostración. Sea $\vec{v}$ un vector de norma 1. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|D_{\vec{v}} f(\vec{x}_o)| = |\langle \nabla f(\vec{x}_o), \vec{v} \rangle| \leq \|\nabla f(\vec{x}_o)\| \|\vec{v}\| = \|\nabla f(\vec{x}_o)\|.$$

Además la igualdad ocurre si y sólo si $\vec{v}$ es paralelo a $\nabla f(\vec{x}_o)$.

Queremos hallar un vector $\vec{v}$ tal que $D_{\vec{v}} f(\vec{x}_o)$ sea lo más grande posible. Estos valores están acotados por $\|\nabla f(\vec{x}_o)\|$.

Como $\nabla f(\vec{x}_o) \neq 0$, el vector

$$\vec{v_o} = \frac{1}{\|\nabla f(\vec{x}_o)\|}\, \nabla f(\vec{x}_o)$$

nos da la dirección de máximo crecimiento de f.

$\square$

5. Condición suficiente de diferenciabilidad.

Hemos visto que si f es diferenciable en un punto, entonces existen las derivadas parciales de f en dicho punto. El recíproco no es cierto, puede ocurrir que existan las derivadas parciales en un punto dado y que la función no sea diferenciable en dicho punto. Sin embargo si las derivadas parciales satisfacen ciertas condiciones adicionales, podemos garantizar la diferenciabilidad, mas precisamente, se cumple el siguiente resultado.

Teorema 3.22. *Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $f : D \to \mathbb{R}$ una función y $\vec{x}_o \in D$. Si todas las derivadas parciales de f existen y son continuas en un entorno de $\vec{x}_o$ entonces f es diferenciable en $\vec{x}_o$.*

Este resultado permite probar que algunas funciones son diferenciables.

Ejemplo 3.23. Demostrar que la función definida por $f(x, y) = 3x^2y - xy^2$ es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$

Tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6xy - y^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2 - 2xy.$$

Las dos derivadas parciales son continuas en todo $\mathbb{R}^2$, por el teorema f es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$.

Observación 3.24. Es importante notar que del Teorema anterior sigue que si $D \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto y $f : D \to \mathbb{R}$ es una función, tal que todas las derivadas parciales de f existen y son continuas en D, entonces f es diferenciable en todo punto de D.

Lectura adicional: funciones continuamente diferenciables.

Definición 3.25. Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $f : D \to \mathbb{R}^m$ una función y $\vec{x}_o \in D$, se dice que f es *continuamente diferenciable* en $\vec{x}_o$ si todas las derivadas parciales de f existen y son continuas en un entorno de $\vec{x}_o$.

Por eso en muchos libros el teorema anterior aparece enunciado de la siguiente manera:

Teorema 3.26. *Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $f : D \to \mathbb{R}^m$ una función y $\vec{x}_o \in D$. Si f es continuamente diferenciable en $\vec{x}_o$ entonces f es diferenciable en $\vec{x}_o$.*

La demostración de este resultado está por encima del alcance de estas notas. Una demostración detallada se puede encontrar en [**6**].

6. Regla de la cadena.

La regla de la cadena se extiende para la composición de una campo escalar con una trayectoria de la siguiente manera.

Teorema 3.27 (Regla de la cadena). *Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : D \to \mathbb{R}$ una función. Sea $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ una función y sea $t \in (a, b)$ tal que $\alpha(t) \in D$. Supongamos que:*

(a) *α es diferenciable en t,*
(b) *f es diferenciable en $\alpha(t)$.*

Entonces $f \circ \alpha$ es diferenciable en t y se tiene

$$(f \circ \alpha)'(t) = \langle \nabla f(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle.$$

No daremos la demostración de este teorema, una versión más general se puede encontrar en [**6**]. Es importante adquirir destreza operativa en lo que se refiere al manejo de la regla de la cadena.

En los siguientes ejemplos supondremos que las funciones involucradas son diferenciables y que las composiciones están todas bien definidas, de manera que aplicaremos la regla de la cadena sin tener que preocuparnos por las hipótesis.

Ejemplo 3.28.
Supongamos que tenemos $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.
La función α está dada por tres funciones coordenadas, es decir, $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ donde $\alpha_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$.

Por la regla de la cadena

$$\begin{aligned}(f\circ\alpha)'(t) &= \langle \nabla f(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle \\ &= \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha(t)), \frac{\partial f}{\partial z}(\alpha(t))\right), (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \alpha_3'(t))\right\rangle \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha(t))\,\alpha_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha(t))\,\alpha_2'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}(\alpha(t))\,\alpha_3'(t).\end{aligned}$$

Es usual utilizar la siguiente notación, que aunque es menos explícita y puede resultar confusa, nos ayuda a entender mejor cómo hacer los cálculos.

Sea $w = f(x, y, z)$ y $x = \alpha_1(t)$, $y = \alpha_2(t)$, $z = \alpha_3(t)$, entonces

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\,\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{dz}{dt}.$$

Ejemplo 3.29. Si tenemos $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ entonces $f\circ\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Veamos cómo calcular las derivadas parciales de $f\circ\psi$ en términos de las derivadas parciales de f y de ψ.

Las variables que están en el dominio de f las vamos a denotar por (x, y, x) y las variables que están en el dominio de ψ las vamos a denotar por (s, t), es decir f depende de (x, y, z) y ψ depende de (s, t), además $\psi(s, t) = (\psi_1(s, t), \psi_2(s, t), \psi_3(s, t))$.

Tenemos que

$$\frac{\partial (f\circ\psi)}{\partial s}(s,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\psi(s,t))\,\frac{\partial \psi_1}{\partial s}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\psi(s,t))\,\frac{\partial \psi_2}{\partial s}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial z}\psi(s,t)\,\frac{\partial \psi_3}{\partial s}(s,t),$$

$$\frac{\partial (f\circ\psi)}{\partial t}(s,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\psi(s,t))\,\frac{\partial \psi_1}{\partial t}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\psi(s,t))\,\frac{\partial \psi_2}{\partial t}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial z}\psi(s,t)\,\frac{\partial \psi_3}{\partial t}(s,t).$$

En la práctica se suele usar la siguiente notación, que aunque es menos explícita porque no nos indica donde debemos evaluar cada función, nos ayuda a aplicar la regla de la cadena.

Sea $w = f$, es decir w es una función de (x, y, z), lo que se suela abreviar de la siguiente manera

$$w = w(x, y, z).$$

Al hacer la composición $f \circ \psi$ estamos poniendo (x, y, z) en función de (s, t), lo que se suele abreviar así

$$x = x(s, t) \qquad y = y(s, t) \qquad z = z(s, t).$$

Las fórmulas para las derivadas parciales quedan así

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s},$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}.$$

Ejemplo 3.30. Si $f(x, y) = x^3 - y^3$ y $F(u, v) = f(u\,v, u - v)$, hallar $\dfrac{\partial F}{\partial u}$.

Estamos haciendo el cambio

$$x = u\,v \qquad y = u - v,$$

por la regla de la cadena

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\\ &= 3\,x^2\,v - 3\,y^2\,1\\ &= 3(u\,v)^2\,v - 3(u - v)^2\\ &= 3\,u^2\,v^3 - 3(u - v)^2.\end{aligned}$$

A manera de ejercicio, hallar explícitamente la expresión para $F(u, v)$, derivar directamente y verificar que se obtiene el mismo resultado. Hacer lo mismo con la variable v.

Ejemplo 3.31. En cierto instante la altura de un cono recto circular es de 30 cm y está creciendo a razón de 2 cm/seg. En el mismo instante el radio de la base es de 20 cm y está creciendo a razón de 1 cm/seg. ¿A qué velocidad está creciendo el volumen del cono en ese instante?

Si $r = r(t)$ y $h = h(t =$ son el radio y la altura del cono en el instante t, respectivamente, tenemos que

$$V = \frac{1}{3}\,\pi\,r^2\,h.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial r}\,\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial h}\,\frac{\partial h}{\partial t}\\ &= \frac{2}{3}\,\pi\, r\, h\,\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{1}{3}\,\pi\, r^2\,\frac{\partial h}{\partial t}\,.\end{aligned}$$

En el instante dado

$$\frac{dV}{dt} = \frac{2}{3}\,\pi\,(20)\,(30)\,(1) + \frac{1}{3}\,\pi\,(20)^2\,(2) = \frac{2000}{3}\,\pi.$$

Ejemplo 3.32. Si $f = f(x,y)$ es una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, con derivadas parciales de primero y segundo orden continuas y

$$F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta),$$

expresar $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r\partial\theta}$ en términos de las derivadas parciales de f.

Estamos haciendo el cambio

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

por la regla de la cadena

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial\theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial\theta}\\ &= -r\,\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{sen}\,\theta + r\,\frac{\partial f}{\partial y}\,\cos\theta.\end{aligned}$$

Nuevamente, por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial\theta} =& -\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{sen}\,\theta - r\left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}\,\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\,\frac{\partial y}{\partial r}\right)\mathrm{sen}\,\theta\\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}\,\cos\theta + r\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\,\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}\,\frac{\partial y}{\partial r}\right)\cos\theta,\end{aligned}$$

substituyendo $\dfrac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta$, $\dfrac{\partial y}{\partial r} = \mathrm{sen}\,\theta$ y usando que las derivadas mixtas de orden 2 son iguales, obtenemos

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial\theta} = -\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\,\cos\theta + r\left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} - \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}\right)\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + r\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\,(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\,\theta).$$

7. Teorema fundamental del cálculo para integrales de línea.

TEOREMA 3.33. *Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales continuas. Sean $\vec{x}_o$ y $\vec{x}_1$ dos puntos de D y sea $G \subset D$ una curva lisa a trozos con extremo inicial $\vec{x}_o$ y extremo final $\vec{x}_1$. Entonces*

$$\int_G \nabla f \cdot d\vec{x} = f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_o).$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que la curva G es lisa. Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una parametrización de clase $\mathcal{C}^1$ de G. Entonces

$$\begin{aligned} \int_G \nabla f \cdot d\vec{x} &= \int_a^b \langle \nabla f(g(t)), g'(t) \rangle \, dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} \left(f(g(t)) \right) \, dt \\ &= f(g(b)) - f(g(a)). \end{aligned}$$

Supongamos ahora que G es lisa a trozos, entonces $G = G_1 \cup \cdots \cup G_N$ donde cada una de las curvas G_i es lisa y el extremo inicial de G_i es el extremo final de G_{i-1}. Si por $\vec{y}_i$ denotamos el extremo final de G_i tenemos que

$$\begin{aligned} \int_G \nabla f \cdot d\vec{x} &= \int_{G_1} \nabla f \cdot d\vec{x} + \cdots + \int_{G_N} \nabla f \cdot d\vec{x} \\ &= f(\vec{y}_1) - f(\vec{x}_o) + f(\vec{y}_2) - f(\vec{y}_1) + \cdots + f(\vec{y}_N) - f(\vec{x}_{N-1}) \\ &= f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_o). \end{aligned}$$

□

Recordemos que se dice que una curva G es *cerrada* cuando su extremo final coincide con su extremo inicial.

COROLARIO 3.34. *Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales continuas. La integral de línea de ∇f sobre cualquier curva cerrada es igual a* 0.

EJEMPLO 3.35. Calcular

$$\int_G x \, dx + y \, dy,$$

donde G es el segmento de recta que va del punto $(1, 2)$ al punto $(3, 3)$.

Debemos calcular

$$\int_G F \cdot d\vec{x},$$

donde $F(x, y) = (x, y)$, como $F = \nabla f$, donde $f(x, y) = x^2/2 + y^2/2$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_G x\,dx + y\,dy &= \int_G \nabla f \cdot d\vec{x} \\
&= f(3,3) - f(1,2) \\
&= \frac{9}{2} + \frac{9}{2} - \frac{1}{2} - \frac{4}{2} \\
&= \frac{13}{2}.
\end{aligned}$$

8. Diferenciación de funciones definidas en forma implícita.

Lo que sigue a continuación debe entenderse intuitivamente, pues para que sea correcto hace falta agregar ciertas hipótesis de continuidad y de diferenciabilidad pedir que ciertos valores no sean nulos para poder dividir entre ellos.

Consideremos la ecuación definida por $f(x, y) = 0$ donde y es una función definida implícitamente por la variable x.

Si $f(x, y(x)) = 0$, entonces

$$\frac{d}{dx} f(x, y(x)) = 0,$$

luego, por la regla de la cadena

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

De donde

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}.$$

Ejemplo 3.36. Si tenemos $x^2 + y^2 = 1$ y queremos hallar la derivada de y con respecto a x podemos usar el resultado anterior.

En efecto sin necesidad de despejar y tenemos la fórmula para la derivada de y.

Consideramos la función f dada por

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1.$$

Note que para esta f particular se cumple que $f(x, y) = 0$. Tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y.$$

Luego

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Es decir

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y(x)}.$$

Podemos considerar también una ecuación definida por $f(x, y, z) = 0$ donde z es una función definida implícitamente por las variables x, y. En este caso

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}} \qquad\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}\,.$$

Ejemplo 3.37. Calcularemos $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ para z definida implícitamente como una función de x y de y, mediante la ecuación

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1.$$

Para hallar la derivada con respecto a x, vemos a y como constante y consideramos a z como función de x. Procedemos así:

$$3x^2 + 3z^2\frac{\partial z}{\partial x} + 6yz + 6xy\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Luego

$$(3z^2 + 6xy)\frac{\partial z}{\partial x} = -3x^2 - 6yz.$$

De donde

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-3x^2 - 6yz}{3z^2 + 6xy} = \frac{-x^2 - 2yz}{z^2 + 2xy}.$$

Por otro lado, para hallar la derivada con respecto a y, vemos a x como constante y consideramos a z como función de y. Obtenemos:

$$3y^2 + 3z^2\frac{\partial z}{\partial y} + 6xz + 6xy\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Luego

$$(3z^2 + 6xy)\frac{\partial z}{\partial y} = -3y^2 - 6xz.$$

De donde

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-3y^2 - 6xz}{3z^2 + 6xy} = \frac{-y^2 - 2xz}{z^2 + 2xy}.$$

Los teoremas que dan un marco teórico apropiado a lo que hemos estado haciendo son los siguientes:

TEOREMA 3.38. *Si $f(x,y)$ es continua en una región que incluye un punto (x_o, y_o) para el cual $f(x_o, y_o) = 0$, si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en esa región y si*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) \neq 0$$

entonces existe un entorno de (x_o, y_o) sobre el que se puede despejar en $f(x,y) = 0$ la y como una función continua diferenciable de variable x, esto es $y = \phi(x)$, con $y_o = \phi(x_o)$ y

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}.$$

Extendiendo este teorema se tiene:

TEOREMA 3.39. *Si $f(x,y,z)$ es continua en una región que incluye un punto (x_o, y_o, z_o) para el cual $f(x_o, y_o, z_o) = 0$, si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ son continuas en esa región y si*

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_o, y_o, z_o) \neq 0$$

entonces existe un entorno de (x_o, y_o, z_o) sobre el que se puede despejar en $f(x,y,z) = 0$ la z como una función continua diferenciable de variables x e y, esto es $z = \phi(x,y)$, con $z_o = \phi(x_o, y_o)$ y

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}} \qquad\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}.$$

Ejercicios.
Diferenciación de campos escalares.

(1) Calcular todas las derivadas parciales de primer orden

(a) $f(x,y) = \tan(x^2/y)$ para $y \neq 0$.

(b) $f(x,y) = \arctan(y/x)$ para $x \neq 0$.

(c) $f(x,y) = \arctan\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$ para $xy \neq 1$.

(d) $f(x,y) = x^{(y^2)}$ para $x > 0$.

(e) $f(x,y) = \arccos\sqrt{x/y}$ para $y \neq 0$.

(f) $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x+y+z}$ para $x+y+z \neq 0$.

(2) Demostrar que cada una de las siguientes funciones es diferenciable en su dominio.

(a) $f(x,y) = xy\cos(xy)$.

(b) $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x+y+z}$.

(c) $f(x,y,z) = x^y + z^5$.

(3) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Hallar el conjunto de los puntos (x,y) de $\mathbb{R}^2$ en los que f es diferenciable.

(4) Hallar la dirección de máximo crecimiento de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ en el punto $(1,1)$.

(5) Hallar la derivada en la dirección del vector $(1,4)$ de la función $f(x,y) = x^4 + ye^y$ en el punto $(2,1)$.

(6) Hallar la dirección de máximo crecimiento de la función $f(x,y) = x^4 + x\,y^3$ en el punto $(2,3)$.

(7) Hallar la derivada en la dirección del vector $(1,1)$ de la función $f(x,y) = \operatorname{sen} x + \cos y$ en el punto (π,π).

(8) Si $w = f(x,y,z)$ y

$$x = s + t, \qquad y = s - t, \qquad z = s\,t,$$

expresar $\dfrac{\partial w}{\partial s}$ y $\dfrac{\partial w}{\partial t}$, en términos de las derivadas parciales de f.

Después aplicar la fórmula obtenida para el caso particular

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

(9) El cambio a coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ transforma $f(x,y)$ en $g(r,\theta)$, es decir $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$. Hallar las derivadas parciales de primero y segundo orden de g en términos de las derivadas parciales de f (suponer que f tiene derivadas de primer y segundo orden continuas).

El operador Laplaciano: El *Laplaciano* de una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se define por

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

análogamente, el *Laplaciano* de una función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ se define por

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Al describir el movimiento del electrón del átomo de hidrógeno alrededor de su núcleo, aparece una ecuación en derivadas parciales que, salvo ciertas constantes, es la siguiente:

$$-\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right) + \frac{\psi}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \psi,$$

es decir

$$-\nabla^2\psi + \frac{\psi}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \psi.$$

En esta ecuación ψ es una función de las variables (x,y,z) y ψ es la incógnita a determinar.

El primer paso para resolver esta ecuación es cambiar de coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas, por eso la importancia práctica de los siguientes ejercicios.

(10) $\star$ *Laplaciano bi-dimensional en coordenadas polares.* La introducción de coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, transforma $f(x,y)$ en $g(r,\theta)$. Demostrar las siguientes fórmulas (suponer que f tiene derivadas de primer y segundo orden continuas):

(a) $\|\nabla f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\|^2 = \left(\dfrac{\partial g}{\partial r}\right)^2 + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial g}{\partial \theta}\right)^2.$

(b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial r}.$

Indicación: Utilizar el ejercicio anterior.

(11) $\star$ *Laplaciano tri-dimensional en coordenadas esféricas.* La introducción de coordenadas esféricas

$$x = \rho\cos\theta\operatorname{sen}\varphi, \qquad y = \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \qquad z = \rho\cos\varphi,$$

transforma $f(x,y,z)$ en $F(\rho,\theta,\varphi)$. Este ejercicio indica como hay que proceder para expresar el laplaciano $\nabla^2 f$ en función de las derivadas parciales de F (suponer que f tiene derivadas de primer y segundo orden continuas).:

(a) Introducir primero las coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ para transformar $f(x,y,z)$ en $g(r,\theta,z)$. Utilizar el ejercicio anterior para demostrar que

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}.$$

(b) Luego transformar $g(r,\theta,z)$ en $F(\rho,\theta,\varphi)$ tomando $z = \rho\cos\varphi$, $r = \rho\operatorname{sen}\varphi$. Observar que, salvo un cambio de notación, esta es la misma transformación que se utilizó en la parte (a). Deducir que

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{\cos\varphi}{\rho^2 \operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial F}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}.$$

(12) Suponga que $u = f(x + at, y + bt)$, donde a y b son constantes. Demostrar que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\,\frac{\partial u}{\partial x} + b\,\frac{\partial u}{\partial y}.$$

(13) Una caja rectangular cambia de forma de manera tal que su largo crece a razón de 3 cm/seg, su ancho decrece a razón de 2 cm/seg y su altura crece a razón de 1 cm/seg. ¿A qué velocidad crece el volumen de la caja cuando el largo es de 15 cm, el ancho de 10 cm y la altura de 8 cm? ¿A qué velocidad crece el área de la caja en ese mismo instante?

(14) Si $z = f(y/x)$, demostrar que

$$x\,\frac{\partial z}{\partial x} + y\,\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

(15) Calcular

$$\int_G F_1(x, y)\,dx + F_2(x, y)\,dy,$$

en los siguientes casos:

(a) $F_1(x, y) = y\,\cos(xy)$, $F_2(x, y) = x\,\cos(xy)$ y G es el segmento de recta que va del punto $(0, 0)$ al punto $(1, \pi/2)$.

(b) $F_1(x, y) = y\,\cos(xy)$, $F_2(x, y) = x\,\cos(xy)$ y G es una curva cerrada.

(c) $F_1(x, y) = y$, $F_2(x, y) = x$ y G es una curva con extremo inicia $(0, 1)$ y extremo final $(3, 3)$.

(16) Hallar $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, si

(a) $z^3 + x^3 + y^3 + z^2y^2 = 0$.

(b) $z + \cos(xyz) = 1$

CAPÍTULO 4

Plano tangente a algunas superficies.

Plano tangente a una superficie dada en la forma: (a) $F(x, y, z) = 0$ y (b) $z = f(x, y)$. Ecuación del plano tangente en cada uno de estos casos en términos de las derivadas parciales de F y f.

Una superficie en $\mathbb{R}^3$ puede estar dada como un conjunto de nivel, como el gráfico de un campo escalar en dos variables y también en forma paramétrica. Estudiaremos cómo son los planos tangentes a los dos primeros tipos de superficies, las superficies dadas en forma paramétrica también pueden ser estudiadas (ver [**6**]).

Dados $(a, b, c), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sabemos que el producto escalar de estos vectores es

$$\langle (a, b, c), (x, y, z) \rangle = ax + by + cz.$$

Estos dos vectores son ortogonales cuando este producto escalar es igual a 0, es decir, cuando

$$ax + by + cz = 0.$$

En lo que acabamos de indicar (a, b, c) y (x, y, z) eran dos vectores fijos de $\mathbb{R}^3$. A continuación (a, b, c) seguirá fijo pero (x, y, z) variará en $\mathbb{R}^3$.

Sabemos que la ecuación del plano es:

$$ax + by + cz = d \tag{4.1}$$

donde (x, y, z) es un vector cualquiera de $\mathbb{R}^3$. Por lo tanto

$$ax + by + cz = 0$$

es la ecuación de un plano que pasa por el origen y tal que todos sus vectores son ortogonales al vector (a, b, c), esto lo abreviamos diciendo que el plano es ortogonal al vector (a, b, c).

Trasladándonos podemos considerar planos que no pasan por el origen.

En efecto

$$a(x - x_o) + b(y - y_o) + c(z - z_o) = 0$$

es la ecuación de un plano que pasa por el punto (x_o, y_o, z_o) y tal que todos sus vectores son ortogonales al vector (a, b, c), es decir, el plano es ortogonal al vector (a, b, c).

Si tomamos

$$d = ax_o + by_o + cz_o$$

obtenemos la ecuación 4.1.

1. Plano tangente a una superficie dada como un conjunto de nivel.

Consideraremos el plano tangente a una superficie dada en la forma: $F(x, y, z) = 0$ y daremos la ecuación de este plano tangente en términos de las derivadas parciales de F.

Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función tal que existen sus derivadas parciales y son continuas y sea S_0 la superficie de nivel de F dada por $F(x, y, z) = 0$. El *plano tangente a la superficie dada como un conjunto de nivel,* en el punto (x_o, y_o, z_o) es el plano de ecuación:

$$(x - x_o)\frac{\partial F}{\partial x}(x_o, y_o, z_o) + (y - y_o)\frac{\partial F}{\partial y}(x_o, y_o, z_o) + (z - z_o)\frac{\partial F}{\partial z}(x_o, y_o, z_o) = 0.$$

Es decir

$$\langle \nabla F(x_o, y_o, z_o), (x - x_o, y - y_o, z - z_o) \rangle = 0,$$

siempre que $\nabla F(x_o, y_o, z_o) \neq \vec{0}$.

Y la ecuación de la recta normal en (x_o, y_o, z_o) es:

$$\frac{x - x_o}{\frac{\partial F}{\partial x}(x_o, y_o, z_o)} = \frac{y - y_o}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_o, y_o, z_o)} = \frac{z - z_o}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_o, y_o, z_o)}.$$

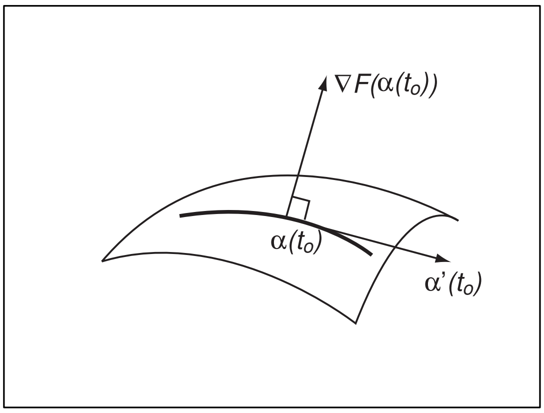

Figura 4.1.

1.1. Lectura adicional: Justificación.

Definición 4.1. Sea S una superficie en $\mathbb{R}^3$ y $(x_o, y_o, z_o) \in S$. Decimos que el vector $\vec{v}$ es ortogonal a S en (x_o, y_o, z_o) si para cada curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ tal que $\alpha(I) \subset S$ y $\alpha(t_o) = (x_o, y_o, z_o)$ para algún $t_o \in I$ se tiene que $\vec{v}$ es ortogonal a $\alpha'(t_o)$.

Proposición 4.2. *Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función tal que existen sus derivadas parciales y son continuas. Sea S_c la superficie de nivel de F dada por*

$$S_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = c\}.$$

Si $(x_o, y_o, z_o) \in S_c$ y $\nabla F(x_o, y_o, z_o) \neq 0$ entonces $\nabla F(x_o, y_o, z_o)$ es ortogonal a S_c en (x_o, y_o, z_o).

Demostración. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva tal que $\alpha(I) \subset S_c$ y $\alpha(t_o) = (x_o, y_o, z_o)$ para algún $t_o \in I$. Entonces tenemos que $F \circ \alpha \equiv c$ y por lo tanto $(F \circ \alpha)'(t) = 0$.

De la regla de la cadena sigue que

$$(F \circ \alpha)'(t) = \langle \nabla F(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle,$$

para todo $t \in I$. En particular

$$1 = \langle \nabla F(\alpha(t_o)), \alpha'(t_o) \rangle = \langle \nabla F(x_o, y_o, z_o), \alpha'(t_o) \rangle.$$

$\square$

2. Plano tangente a una superficie dada como un gráfico.

Consideraremos el plano tangente a una superficie dada en la forma: $z = f(x, y)$ y daremos la ecuación del plano tangente en términos de las derivadas parciales de f.

Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función tal que existen sus derivadas parciales y son continuas, entonces el gráfico de f define una superficie en $\mathbb{R}^3$.

A partir de esta función f construimos una nueva función F de la siguiente manera, $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ está definida por

$$F(x, y, z) = -z + f(x, y).$$

Notemos que decir $z = f(x, y)$ es lo mismo que decir $F(x, y, z) = 0$.

Tal como ya lo hemos indicado la ecuación del plano tangente a la superficie dada por $F(x, y, z) = 0$ es:

$$0 = (x - x_o)\frac{\partial F}{\partial x}(x_o, y_o, z_o) + (y - y_o)\frac{\partial F}{\partial y}(x_o, y_o, z_o) + (z - z_o)\frac{\partial F}{\partial z}(x_o, y_o, z_o).$$

Si buscamos la relación entre las derivadas parciales de F y las derivadas parciales de f encontramos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x,y),\\ \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) &= -1.\end{aligned}$$

Usando que

$$z_o = f(x_o, y_o)$$

y reemplazando en la ecuación del plano tangente obtenemos

$$z = f(x_o,y_o) + (x - x_o)\frac{\partial f}{\partial x}(x_o,y_o) + (y - y_o)\frac{\partial f}{\partial y}(x_o,y_o).$$

Esta última es la *ecuación del plano tangente a la superficie dada por el gráfico* $z = f(x,y)$ en el punto $(x_o, y_o, f(x_o, y_o))$.

Este plano es ortogonal al vector

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_o,y_o), \frac{\partial f}{\partial y}(x_o,y_o), -1\right).$$

Hemos dado la ecuación del plano tangente en términos de las derivadas parciales de f.

Ejercicios.
Plano tangente a algunas superficies.

(1) Hallar la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la superficie dada en el punto que se indica.

(a) $z = 3x^2 + 2y^2 - 11$ en $(2, 1, 3)$.

(b) $F(x, y, z) = x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 3xy - 10yz + 4x - 5z - 22 = 0$ en $(1, -2, 1)$.

(2) Probar que la ecuación del plano tangente a la superficie

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

en el punto $P_o = (x_o, y_o, z_o)$ es

$$\frac{xx_o}{a^2} - \frac{yy_o}{b^2} - \frac{zz_o}{c^2} = 1.$$

(3) Demostrar que las superficies dadas por

$$F(x, y, z) = x^2 + 4y^2 - 4z^2 - 4 = 0$$

y

$$G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y + 2z + 10 = 0$$

son tangentes en el punto $(2, 1, 1)$.

Sugerencia: (a) Halle los vectores direccionales de las rectas normales de cada una de las superficies y vea que éstos son proporcionales. (b) Pruebe que ambas superficies tienen el mismo plano tangente en el punto dado.

(4) Probar que las superficies dadas por

$$F(x, y, z) = xy + yz - 4zx = 0$$

y

$$G(x, y, z) = 3z^2 - 5x + y = 0$$

se cortan en ángulo recto en el punto $(1, 2, 1)$.

Sugerencia: pruebe que los vectores direccionales de las rectas normales de cada una de las superficies son perpendiculares.

CAPÍTULO 5

Derivadas de orden superior y desarrollo de Taylor.

Derivadas de orden superior. Polinomio de Taylor para funciones de una variable. Desarrollo de Taylor para funciones de dos variables.

1. Derivadas de orden superior para funciones de una variable.

Si bien es cierto que la derivada de una función f en un punto a es un número real al que llamamos $f'(a)$, también es cierto que si variamos el punto obtenemos una función. A esa función la llamamos f'.

A veces se puede derivar f'.

Si evaluamos en a obtenemos el número real $(f')'(a)$. A este valor se le llama la *segunda derivada* de f en a y se denota por $f^{(2)}(a)$, es decir,

$$f^{(2)}(a) = (f')'(a).$$

Note que derivamos primero y evaluamos después, si lo hubiésemos hecho al revés estaríamos derivando a la constante $f'(a)$, cuya derivada es evidentemente igual a 0.

Repitamos el razonamiento: Si bien es cierto que la segunda derivada de una función f en un punto a es un número real al que llamamos $f^{(2)}(a)$, también es cierto que si variamos el punto obtenemos una función. A esa función la llamamos $f^{(2)}$. Esto es

$$f^{(2)}(x) = (f')'(x)$$

A veces se puede derivar $f^{(2)}$.

Así aparecen las derivadas de orden superior.

En general se usa la siguiente notación:

$$f^{(0)}(x) = f(x)$$

$$f^{(1)}(x) = f'(x)$$

$$f^{(k)}(x) = (f^{(k-1)})'(x)$$

Cuando evaluamos en un punto a obtenemos las constantes $f(a), f'(a), \dots, f^{(k)}(a)$.

Ejemplo 5.1. Sea

$$f(x) = e^x.$$

Entonces $f'(x) = e^x$. Además $f^{(2)}(x) = e^x$. En general se tiene que:

$$f^{(k)}(x) = e^x \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Ejemplo 5.2. Sea

$$f(x) = \operatorname{sen} x.$$

Entonces $f'(x) = \cos x$. Además $f^{(2)}(x) = -\operatorname{sen} x$ y $f^{(3)}(x) = -\cos x$. En general se tiene que:

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } k = 4j \text{ para algún } j \in \mathbb{N} \\ \cos x & \text{si } k = 4j+1 \text{ para algún } j \in \mathbb{N} \\ -\operatorname{sen} x & \text{si } k = 4j+2 \text{ para algún } j \in \mathbb{N} \\ -\cos x & \text{si } k = 4j+3 \text{ para algún } j \in \mathbb{N} \end{cases}$$

2. Derivadas de orden superior para funciones de dos variables.

Sea f una función de dos variables.

Las *derivadas parciales de primer orden* son

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x},$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Las *derivadas parciales de segundo orden* son

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Así sucesivamente las *derivadas parciales de orden N* son de la forma

$$f_{a_1 a_2 a_3 \dots a_N}$$

donde a_i puede ser x o y. Vamos a ver que, bajo ciertas condiciones de regularidad, una derivada parcial de orden N es independiente del orden de derivación. Bajo estas condiciones de regularidad una derivada de orden N tiene la forma

$$f_{x\ y}^{k\ N-k} = \frac{\partial^N f}{\partial y^{N-k}\partial x^k} = \frac{\partial^{N-k}}{\partial y^{N-k}}\left(\frac{\partial^k f}{\partial x^k}\right).$$

TEOREMA 5.3. *Sean $D \subset \mathbb{R}^2$ un abierto, $f : D \to \mathbb{R}$ una función. Si las derivadas parciales de primero y segundo orden de f existen y son continuas en D entonces*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

2.1. Lectura adicional: demostración del teorema que da una condición suficiente para poder cambiar el orden de derivación.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\vec{x} = (x, y) \in D$. Como D es abierto existe $r > 0$ tal que $B(\vec{x}, r) \subset D$. Sea $\vec{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|\vec{h}\| < r$. Entonces $\vec{x} + \vec{h} \in B(\vec{x}, r) \subset D$.

Para $\|\vec{h}\| < r$ sea

$$F(\vec{h}) = (f(x + h_1, y + h_2) - f(x + h_1, y)) - f(x, y + h_2) + f(x, y).$$

(a) Sea $G(t) = f(t, y + h_2) - f(t, y)$. Entonces $F(\vec{h}) = G(x + h_1) - G(x)$.

Por el teorema del valor medio existe $c_1 = c_1(\vec{h}) \in (x, x + h_1)$ tal que

$$F(\vec{h}) = G(x + h_1) - G(x) = h_1 G'(c_1) = h_1(f_x(c_1, y + h_2) - f_x(c_1, y)).$$

De la misma manera, existe $c_2 = c_2(\vec{h}) \in (y, y + h_2)$ tal que

$$f_x(c_1, y + h_2) - f_x(c_1, y) = h_2 f_{xy}(c_1, c_2).$$

Luego

$$F(\vec{h}) = h_1 h_2 f_{xy}(c_1, c_2) = h_1 h_2 f_{xy}(c_1(\vec{h}), c_2(\vec{h}))$$

donde $\lim_{\vec{h}\to\vec{0}}(c_1(\vec{h}), c_2(\vec{h})) = \vec{x}$.

(b) Análogamente, invirtiendo el orden y usando que

$$F(\vec{h}) = (f(x + h_1, y + h_2) - f(x, y + h_2)) - f(x + h_1, y) + f(x, y)$$

se puede demostrar que

$$F(\vec{h}) = h_1 h_2 f_{yx}(d_1(\vec{h}), d_2(\vec{h}))$$

donde $\lim_{\vec{h}\to\vec{0}}(d_1(\vec{h}), d_2(\vec{h})) = \vec{x}$.

De lo hecho en (a) y (b) obtenemos:

$$f_{xy}(c_1(\vec{h}), c_2(\vec{h})) = f_{yx}(d_1(\vec{h}), d_2(\vec{h})).$$

Haciendo $\vec{h} \to \vec{0}$ y usando la continuidad de f_{xy} y f_{yx} se obtiene

$$f_{xy}(\vec{x}) = f_{yx}(\vec{x}).$$

□

Observación 5.4. El teorema anterior se extiende de manera natural a funciones de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$ y a derivadas de orden superior.

3. Desarrollo de Taylor para funciones de una variable.

Recordemos que para funciones de una variable se cumple el siguiente resultado.

Teorema 5.5 (Taylor). *Sea $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ una función tal que f', f'', $\dots$, $f^{(N+1)}$ están definidas en $[\alpha, \beta]$, (N un entero positivo).*

Sean a y x distintos puntos del intervalo $[a, b]$.

Entonces existe un punto c entre a y x tal que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1}.$$

El polinomio

$$P_N(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

se llama el polinomio de Taylor de grado N de f en a.

Si a las hipótesis del Teorema anterior agregamos que existe $M > 0$ tal que

$$|f^{(N+1)}(x)| \leq M$$

para todo $x \in [\alpha, \beta]$, entonces tendremos que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_N(x)}{(x-a)^N} = 0. \tag{5.1}$$

En particular, (5.1) se cumple si suponemos que $f^{(N+1)}$ es continua.

4. Desarrollo de Taylor para funciones de dos variables.

Para poder introducir el desarrollo de Taylor en el caso de una función de dos variables debemos recordar el *coeficiente binomial*:

$$\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

El coeficiente binomial aparece en la fórmula algebraica conocida como el *binomio de Newton*:

$$(x+y)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} x^k y^{N-k}.$$

DEFINICIÓN 5.6. Sean $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$ y $D \subset \mathbb{R}^2$ un entorno de (x_o, y_o). Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^N$ en D, *el desarrollo de Taylor* de f de grado N alrededor de (x_o, y_o) es el polinomio

$$\begin{aligned} P_N(x,y) = {} & f(x_o,y_o) \\ & + \frac{1}{1!}((x-x_o)f_x(x_o,y_o) + (y-y_o)f_y(x_o,y_o)) \\ & + \frac{1}{2!}((x-x_o)^2 f_{xx}(x_o,y_o) + 2(x-x_o)(y-y_o)f_{xy}(x_o,y_o) + (y-y_o)^2 f_{yy}(x_o,y_o)) \\ & + \dots \\ & + \frac{1}{N!}\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} (x-x_o)^k (y-y_o)^{N-k} f_{x\ y}^{k\ N-k}(x_o,y_o) \end{aligned}$$

EJEMPLO 5.7. Sea $f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$. Calcularemos el desarrollo de Taylor de grado 2 alrededor de $(0,0)$. Tenemos que

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \\ f_y(x,y) &= \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \\ f_{xx}(x,y) &= \frac{\sqrt{1+x^2+y^2} - x^2(1+x^2+y^2)^{-1/2}}{1+x^2+y^2}, \\ f_{xy}(x,y) &= -xy(1+x^2+y^2)^{-3/2}, \\ f_{yy}(x,y) &= \frac{\sqrt{1+x^2+y^2} - y^2(1+x^2+y^2)^{-1/2}}{1+x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} & f(0,0) = 1, \\ & f_x(0,0) = 0, \quad f_y(0,0) = 0, \\ & f_{xx}(0,0) = 1, \quad f_{xy}(0,0) = 0 \quad y \quad f_{yy}(0,0) = 1. \end{aligned}$$

De donde

$$P_2(x,y) = 1 + \frac{1}{2}(x^2+y^2).$$

5. Cálculos aproximados y errores.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Sea g la función cuya gráfica es una recta que pasa por $(x_o, f(x_o))$ con pendiente $f'(x_o)$. Esto es

$$g(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o).$$

Resulta que g aproxima bien a f en un entorno de x_o. Es decir, si $\|x - x_o\| \approx 0$ entonces

$$f(x) \approx f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o).$$

Para $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable tendremos que $\|\vec{x} - \vec{x}_o\| \approx \vec{0}$ entonces

$$f(\vec{x}) \approx f(\vec{x}_o) + \langle \nabla f(\vec{x}_o), (\vec{x} - \vec{x}_o) \rangle.$$

Estas expresiones son muy útiles para hacer aproximaciones, tal como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.8. Hallar aproximadamente el valor de $\sqrt{(5.98)^2 + (8.01)^2}$.

Sea

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

queremos hallar $f(5.98, 8.01)$. Es fácil ver que

$$f(6, 8) = \sqrt{(6)^2 + (8)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10.$$

Por lo tanto se aproximará el punto $(5.98, 8.01)$ por el punto $(6, 8)$.

Sean $\vec{x} = (5.98, 8.01)$ y $\vec{x}_o = (6, 8)$ entonces

$$\vec{x} - \vec{x}_o = (5.98, 8.01) - (6, 8) = (-0.02, 0.01)$$

Además

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\
\nabla f(x, y) &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)
\end{aligned}$$

Luego $\nabla f(6, 8) = (6/10, 8/10)$. De donde

$$\begin{aligned}
df_{\vec{x}_o}(\vec{x} - \vec{x}_o) &= \langle \nabla f(\vec{x}_o), \vec{x} - \vec{x}_o \rangle \\
&= \langle (6/10, 8/10), (-0.02, 0.01) \rangle = -0.004.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\sqrt{(5.98)^2 + (8.01)^2} \approx 10 - 0.004 = 9.996.$$

5.1. Lectura adicional. Sea $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$ y $r > 0$. Supongamos que tenemos una función que es dos veces derivable y que sus segundas derivadas son continuas

$$f : B((x_o, y_o), r) \to \mathbb{R}.$$

Sea $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|(h_1, h_2)\| < r$ y, para $t \in [0, 1]$, sea

$$\varphi(t) = f((x_o, y_o) + t(h_1, h_2)).$$

Entonces φ es una función de clase $\mathcal{C}^2$ y, por la regla de la cadena, tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= h_1 \frac{\partial f}{\partial x}((x_o, y_o) + t(h_1, h_2)) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}((x_o, y_o) + t(h_1, h_2)), \\ \varphi''(t) &= h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}((x_o, y_o) + t(h_1, h_2)) + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}((x_o, y_o) + t(h_1, h_2)) \\ &\quad + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}((x_o, y_o) + t(h_1, h_2)), \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, 1]$.

Aplicando el Teorema de Taylor en el caso $N = 1$ a φ obtenemos que existe $\xi \in (0, 1)$ tal que

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(\xi). \tag{5.2}$$

Si $(c, d) = (x_o, y_o) + \xi(h_1, h_2)$ tenemos que $(c, d) \in B((x_o, y_o), r)$ y de (5.2) obtenemos

$$\begin{aligned} f(x_o + h_1, y_o + h_2) &= f(x_o, y_o) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}((x_o, y_o)) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}((x_o, y_o)) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(c, d) + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c, d) + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(c, d) \right). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Si suponemos que f es de clase $\mathcal{C}^{(N+1)}$, obtenemos que φ es también de clase $\mathcal{C}^{(N+1)}$. Por lo tanto podemos considerar los análogos de (5.2) y (5.3), pero derivando hasta el orden $N + 1$. Esto nos lleva a una generalización del teorema de Taylor para funciones de dos variables. Esta generalización la vamos a describir a continuación sin demostraciones.

TEOREMA 5.9. *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^{(N+1)}$. Sean $(x_o, y_o), (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que el segmento que los une está contenido en D. Entonces existe un punto $(c, d) \in D$ tal que*

$$f(x, y) = P_N(x, y) + \frac{1}{(N+1)!} \sum_{k=0}^{N+1} \binom{N+1}{k} (x - x_o)^k (y - y_o)^{N+1-k} f_{x\ y}^{k\ N+1-k}(c, d).$$

COROLARIO 5.10. *Con las mismas hipótesis que el* Teorema *anterior tenemos que*

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} \frac{f(x,y) - P_N(x,y)}{\|(x,y) - (x_o,y_o)\|^N} = 0.$$

El caso de varias variables. Los casos de tres variables o más son bastante complicados. Para una lectura sobre estos temas remitimos al lector a [**6**].

Ejercicios.
Derivadas de orden superior y desarrollo de Taylor.

(1) Calcular todas las derivadas parciales de primer orden y las derivadas parciales de segundo orden mixtas, es decir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Comprobar que las derivadas parciales mixtas son iguales.

(a) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$.

(b) $f(x, y) = \log(x^2 + y^2) \quad$ para $(x, y) \neq (0, 0)$.

(c) $f(x, y) = \dfrac{1}{y} \cos x^2 \quad$ para $y \neq 0$.

(2) Dada $z = u(x, y)e^{ax+by}$ donde u es tal que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$. Hallar valores de a y b de manera que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0.$$

(3) Sea

$$v(r, t) = t^u e^{-\frac{r^2}{4t}}.$$

Hallar un valor de la constante u tal que v satisfaga la siguiente ecuación

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v}{\partial r} \right).$$

(4) Hallar el desarrollo de Taylor de grado 2, alrededor del punto $(0, 0)$, para la función $f(x, y) = e^{x+y}$.

(5) Hallar el desarrollo de Taylor de grado 2, alrededor del punto $(0, 0)$, para la función $f(x, y) = x + y + xy + x^2 + x^4 + y^8$.

(6) Hallar el desarrollo de Taylor de grado 2, alrededor del punto $(\pi/2, 0)$, para la función $f(x, y) = \operatorname{sen}(x + y^2)$.

CAPÍTULO 6

Máximos y mínimos.

Máximos y mínimos. Criterio del Hessiano en dos variables. Método de los multiplicadores de Lagrange.

1. Máximos y mínimos locales.

Sea $n = 2$ ó $n = 3$.

DEFINICIÓN 6.1. Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : D \to \mathbb{R}$ una función y $\vec{x}_o \in D$. Decimos que $\vec{x}_o$ es un *punto crítico* para f cuando $\nabla f(\vec{x}_o) = \vec{0}$.

DEFINICIÓN 6.2. Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : D \to \mathbb{R}$ una función y $\vec{x}_o \in D$. Decimos que f alcanza un *máximo local* en $\vec{x}_o$ si existe un abierto $V \subset D$ tal que $\vec{x}_o \in V$ y $f(\vec{x}_o) \geq f(\vec{x})$ para todo $\vec{x} \in V$.

DEFINICIÓN 6.3. Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : D \to \mathbb{R}$ una función y $\vec{x}_o \in D$. Decimos que f alcanza un *mínimo local* en $\vec{x}_o$ si existe un abierto $V \subset D$ tal que $\vec{x}_o \in V$ y $f(\vec{x}_o) \leq f(\vec{x})$ para todo $\vec{x} \in V$.

PROPOSICIÓN 6.4. *Si f es diferenciable en $\vec{x}_o$ y f alcanza un máximo o un mínimo local en $\vec{x}_o$ entonces $\nabla f(\vec{x}_o) = \vec{0}$.*

DEMOSTRACIÓN. Solamente lo probaremos cuando f alcanza un máximo local en $\vec{x}_o$, para un mínimo local la demostración es análoga.

Sean $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$\alpha(t) = \vec{x}_o + t\vec{v}.$$

Entonces $\alpha(0) = \vec{x}_o$ y $\alpha'(t) = \vec{v}$.

Sea $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\beta = f \circ \alpha$. Como f tiene un máximo local en $\vec{x}_o$, resulta que β tiene un máximo local en $t = 0$. Así que

$$0 = \beta'(0) = (f \circ \alpha)'(0) = \langle \nabla f(\alpha(0)), \alpha'(0) \rangle = \langle \nabla f(\vec{x}_o), \vec{v} \rangle.$$

Como $\vec{v}$ es arbitrario, tenemos que $\nabla f(\vec{x}_o) = \vec{0}$.

$\square$

Observación 6.5. Al igual que en el caso de una variable puede ocurrir que $\nabla f(\vec{x}_o)$ sea igual a $\vec{0}$ y sin embargo en $\vec{x}_o$ no se alcance ni máximo ni mínimo para f.

Definición 6.6. Un punto crítico en el que f no alcanza ni máximo ni mínimo se llama *punto de ensilladura.* para f.

Observación 6.7. La Proposición 6.4 tiene una interpretación geométrica muy clara en el caso $n = 2$:

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Sabemos que el gráfico de f es una superficie en $\mathbb{R}^3$ y el plano tangente a esa superficie en el punto $(x_o, y_o, f(x_o, y_o))$ tiene ecuación

$$z = f(x_o, y_o) + (x - x_o)\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o) + (y - y_o)\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o).$$

Este plano es ortogonal al vector

$$\vec{v} = \left(\frac{df}{dx}(x_o, y_o), \frac{df}{dy}(x_o, y_o), -1\right).$$

Si suponemos que f alcanza un máximo en (x_o, y_o) entonces

$$\nabla f(x_o, y_o) = (0, 0).$$

Luego

$$\vec{v} = (0, 0, -1).$$

Obviamente el plano también es ortogonal al vector $(0, 0, 1)$.

De donde, el plano tangente a la superficie dada por el gráfico de f en el punto $(x_o, y_o, f(x_o, y_o))$ es paralelo al plano $z = 0$.

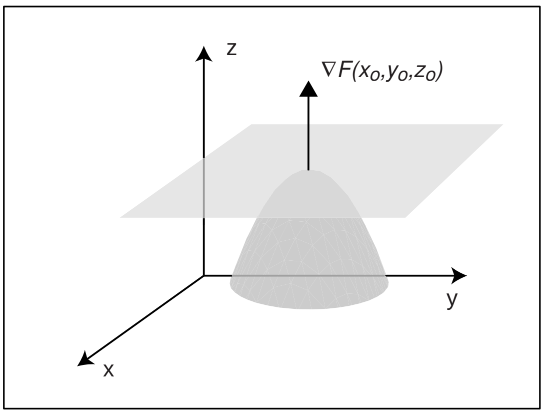

Figura 6.1.

2. Criterio del Hessiano en dos variables.

El criterio del Hessiano en dos variables nos permite clasificar los puntos críticos en el caso $n = 2$.

Consideraremos la matriz

$$A_{(x,y)} = \begin{bmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{bmatrix}$$

y su determinante

$$\Delta(x,y) = det A_{(x,y)} = f_{xx}(x,y) f_{yy}(x,y) - (f_{xy}(x,y))^2.$$

Teorema 6.8 (Criterio del hessiano). *Sean $D \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y $f : D \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$. Sea $(x_o, y_o) \in D$ un punto crítico de f y sea*

$$\Delta(x_o, y_o) = f_{xx}(x_o, y_o) f_{yy}(x_o, y_o)) - (f_{xy}(x_o, y_o))^2$$

(i) *Si $f_{xx}(x_o, y_o) > 0$ y $\Delta(x_o, y_o) > 0$ entonces en (x_o, y_o) se alcanza un mínimo.*
(ii) *Si $f_{xx}(x_o, y_o) < 0$ y $\Delta(x_o, y_o) > 0$ entonces en (x_o, y_o) se alcanza un máximo.*
(iii) *Si $\Delta(x_o, y_o) < 0$ entonces (x_o, y_o) es un punto de ensilladura.*
(iv) *Si $\Delta(x_o, y_o) = 0$, el criterio no decide nada.*

Ejemplo 6.9.

(a) Sea

$$f(x,y) = x^2 + y^2.$$

Ya vimos que el gráfico de f es un paraboloide de revolución.Tenemos que

$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y).$$

Por lo tanto $\nabla f(x,y) = (0,0)$ si y sólo si $x = y = 0$. Luego $(0,0)$ es un punto crítico.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0.$$

Entonces

$$\Delta(0,0) = f_{xx}(0,0) f_{yy}(0,0)) - (f_{xy}(0,0))^2 = 4 > 0.$$

Luego f alcanza un mínimo en $(0,0)$.

(b) Sea
$$f(x,y) = xy.$$
Tenemos que
$$\nabla f(x,y) = (y,x).$$
Por lo tanto $\nabla f(x,y) = (0,0)$ si y sólo si $x = y = 0$. Luego $(0,0)$ es un punto crítico.
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1.$$
Luego f posee un punto de ensilladura en $(0,0)$.

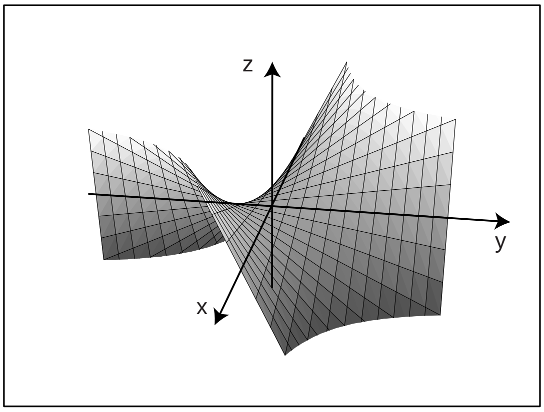

FIGURA 6.2. Gráfico de $f(x,y) = xy$.

(c) Sea
$$f(x,y) = 1 - y^2.$$
Tenemos que
$$\nabla f(x,y) = (0,-2y).$$
Por lo tanto $\nabla f(x,y) = (0,0)$ si y sólo si $y = 0$. Luego todos los puntos de la forma $(x,0)$ son un puntos críticos.
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,0) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,0) = -2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,0) = 0.$$
El criterio del hessiano no es aplicable en este caso. Estudiando directamente el comportamiento de la función, podemos asegurar que f posee un máximo en cada punto de la forma $(x,0)$.

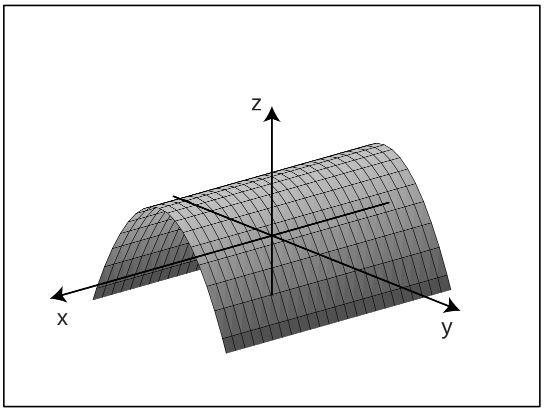

FIGURA 6.3. Gráfico de $f(x, y) = 1 - y^2$.

(d) Sea

$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2.$$

Tenemos que

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 - 3y^2, -6xy).$$

Por lo tanto $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ si y sólo si $x = y = 0$. Luego $(0, 0)$ es un punto crítico.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0.$$

El criterio del hessiano no da información en este caso. Estudiando directamente el comportamiento de la función, podemos asegurar que f posee un punto de ensilladura en $(0, 0)$

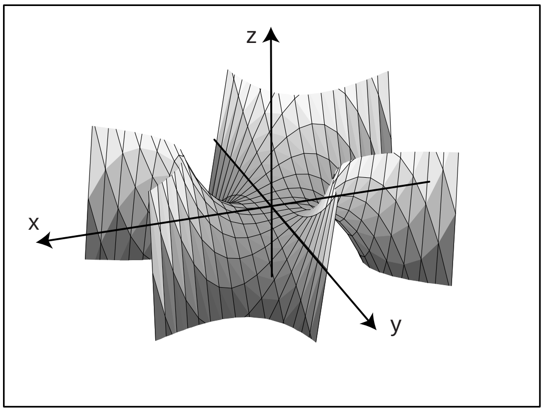

FIGURA 6.4. Gráfico de $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$.

Ejemplo 6.10. Encontrar las dimensiones de una caja rectangular sin tapa de volumen máximo, si se conoce que el área superficial es igual a $144\,m^2$.

La función a maximizar es

$$v(x,y,z) = xyz.$$

Esta es una función de tres variables. Sin embargo el dato adicional nos va a permitir expresarla como una función de dos variables. Como $xy + 2xz + 2yz = 144$ se sigue que

$$z = \frac{144 - xy}{2x + 2y}$$

(si $x + y \neq 0$).

Sea

$$f(x,y) = xy\frac{144 - xy}{2x + 2y}.$$

Debemos hallar los máximos de esta función de dos variables.

Se puede probar que

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{2y^2(144 - 2xy - x^2)}{(2x + 2y)^2}, \frac{2x^2(144 - 2xy - y^2)}{(2x + 2y)^2}\right).$$

Por lo tanto $(0,0)$ es un punto crítico, pero carece de interés para resolver el problema planteado. Para buscar otro punto crítico resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} 144 - 2xy - x^2 = 0, \\ 144 - 2xy - y^2 = 0. \end{cases}$$

De este sistema se deduce que $x^2 = y^2$. Luego $y = x$ ó $y = -x$. Pero como deben ser medidas positivas eliminamos $y = -x$ y sólo queda $y = x$.

Por lo tanto

$$3x^2 = 144.$$

De donde $x = 4\sqrt{3}$. Luego $y = 4\sqrt{3}$. Finalmente

$$z = \frac{144 - (4\sqrt{3})(4\sqrt{3})}{2(4\sqrt{3}) + 2(4\sqrt{3})} = \frac{144 - 16 \cdot 3}{16\sqrt{3}} = \frac{96}{16\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}.$$

2.1. Lectura adicional: Justificación del criterio del hessiano.

Demostración. Solamente probaremos la parte (i), el resto queda como ejercicio. Es decir, probaremos que: Si $f_{xx}(x_o, y_o) > 0$ y $\Delta(x_o, y_o) > 0$ entonces en (x_o, y_o) se alcanza un mínimo.

Usando argumentos algebraicos se puede probar (ver [**6**]) que si $f_{xx}(x_o, y_o) > 0$ y $\Delta(x_o, y_o) > 0$ entonces

$$h_1^2 f_{xx}(x_o, y_o) + 2h_1h_2 f_{xy}(x_o, y_o) + h_2^2 f_{yy}(x_o, y_o) \geq 0. \tag{6.1}$$

Como (x_o, y_o) es un punto crítico tenemos que $\nabla f(x_o, y_o) = \vec{0}$ y por lo tanto

$$f_x(x_o, y_o) = f_y(x_o, y_o) = 0.$$

Usando la fórmula (5.3) de los resultados de Taylor sigue que si $r > 0$ es tal que

$$B((x_o, y_o), r) \subset D, \qquad \|(h_1, h_2)\| < r$$

entonces existe un vector (c, d) que está en el segmento que une (x_o, y_o) y $(x_o + h_1, y_o + h_2)$ tal que

$$f(x_o + h_1, y_o + h_2) = f(x_o, y_o) + \frac{1}{2}\left(h_1^2 f_{xx}(c, d) + 2h_1h_2 f_{xy}(c, d) + h_2^2 f_{yy}(c, d)\right).$$

Por hipótesis las derivadas parciales de segundo orden son continuas. Luego para $\|(h_1, h_2)\|$ pequeño tenemos que

$$h_1^2 f_{xx}(c, d) + 2h_1h_2 f_{xy}(c, d) + h_2^2 f_{yy}(c, d)$$

y

$$h_1^2 f_{xx}(x_o, y_o) + 2h_1h_2 f_{xy}(x_o, y_o) + h_2^2 f_{yy}(x_o, y_o)$$

tienen el mismo signo.

Por la fórmula 6.1 tenemos que ambos son mayores o iguales que 0. De donde

$$f(x_o + h, y_o + k) - f(x_o, y_o) \geq 0$$

para todo $(h, k) \in V$.

Por lo tanto en (x_o, y_o) se alcanza un mínimo.

□

Observación 6.11. Usando resultados de álgebra lineal y el teorema de Taylor es posible establecer criterios análogos al anterior para funciones de tres o más variables.

3. Método de los multiplicadores de Lagrange.

3.1. Máximos y mínimos con restricciones. En los problemas de búsqueda de máximos y mínimos puede ocurrir que estos valores se alcancen en puntos interiores del dominio. En ese caso se hallan los puntos críticos usando las primeras derivadas (el gradiente), luego usando segundas derivadas (el hessiano) se trata de determinar cuáles son máximos, mínimos o puntos de ensilladura.

Sin embargo, cuando el punto en el que se alcanza un máximo o un mínimo se encuentra en la frontera la situación es muy distinta. La determinación de esos puntos es un típico problema de multiplicadores de Lagrange.

Los griegos antiguos propusieron el problema de hallar la curva cerrada plana de longitud dada que encerrara mayor área. Este problema es llamado el problema isoperimétrico, y ellos fueron capaces de demostrar en una manera más o menos rigurosa que la respuesta correcta es: el círculo (para más información sobre este aspecto histórico ver Simmons, Differential Equations, pág 367).

Consideremos el siguiente problema: Hallar los valores máximos y mínimos de $f(x, y)$, sujeta a la restricción $g(x, y) = 0$.

Supongamos que $g(x, y) = 0$ define una curva C en el plano y que f alcanza un máximo (o un mínimo) en $(x_o, y_o) \in C$.

Sea $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una trayectoria diferenciable de una parte de C que contiene a (x_o, y_o). Sea $t_o \in (a, b)$ tal que $\alpha(t_o) = (x_o, y_o)$ entonces $f \circ \alpha$ tiene un máximo (o un mínimo) en t_o. Por lo tanto

$$0 = (f \circ \alpha)'(t_o) = \langle \nabla f(\alpha(t_o)), \alpha'(t_o) \rangle = \langle \nabla f(x_o, y_o), \alpha'(t_o) \rangle.$$

Es decir, $\nabla f(x_o, y_o)$ y $\alpha'(t_o)$ son ortogonales.

Por otro lado, ya sabemos que $\nabla g(x_o, y_o)$ es ortogonal a C. Así que, $\nabla f(x_o, y_o)$ y $\nabla g(x_o, y_o)$ están en la misma recta. Esto es, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(x_o, y_o) = \lambda \nabla g(x_o, y_o).$$

Ejemplo 6.12. De todos los rectángulos de perímetro cuatro ¿Cuál tiene área máxima? Para resolver este problema tendremos que considerar las funciones

$$f(x, y) = xy,$$

$$g(x, y) = 2x + 2y - 4.$$

Entonces

$$\nabla f(x,y) = (y,x),$$

$$\nabla g(x,y) = (2,2).$$

Debemos hallar los puntos (x,y) tales que

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y).$$

Esto es, los puntos (x,y) tales que

$$(y,x) = \lambda(2,2).$$

Tenemos pues: $y = 2\lambda$, $x = 2\lambda$. Y por lo tanto $y = x$.

Pero

$$0 = g(x,y) = 2x + 2y - 4 = 2x + 2x - 4 = 4x - 4.$$

De donde

$$y = x = 1.$$

Así que de todos los rectángulos de perímetro cuatro el cuadrado (de lado uno) es el de mayor área.

3.2. La función de Lagrange.

Cuando hay una restricción: Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Pensemos ahora en el caso de hallar los máximos o los mínimos de $f(x,y,z)$ sujeta a la restricción $g(x,y,z) = 0$.

Definimos la función de Lagrange como

$$F(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z).$$

Luego buscamos los puntos críticos de F. Entre estos puntos están los máximos y los mínimos de f sujeta a la restricción $g(x,y,z) = 0$.

Cuando hay dos restricciones: Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Pensemos ahora en el caso de hallar los máximos o los mínimos de $f(x,y,z)$ sujeta a las restricciones $g_1(x,y,z) = 0$ y $g_2(x,y,z) = 0$.

Definimos la función de Lagrange como

$$F(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda_1 g_1(x,y,z) + \lambda_2 g_2(x,y,z).$$

Luego buscamos los puntos críticos de F. Entre estos puntos están los máximos y los mínimos de f sujeta a las restricciones $g_1(x,y,z) = 0$ y $g_2(x,y,z) = 0$.

Ejemplo 6.13. Hallar los extremos de $f(x,y,z) = x+y+z$ sujeta a las condiciones $x^2+y^2 = 2$, $x+z = 1$.

Sean

$$g_1(x,y,z) = x^2+y^2-2,$$
$$g_2(x,y,z) = x+z-1.$$

La función de Lagrange es

$$F(x,y,z) = x+y+z+\lambda_1(x^2+y^2-2)+\lambda_2(x+z-1).$$

Tenemos que

$$\nabla F(x,y,z) = (1,1,1)+\lambda_1(2x,2y,0)+\lambda_2(1,0,1).$$

Debemos buscar los puntos en los que $\nabla F(x,y,z) = (0,0,0)$.

Por lo tanto debemos resolver el sistema:

$$\begin{cases} (1,1,1)+\lambda_1(2x,2y,0)+\lambda_2(1,0,1) = (0,0,0), \\ x^2+y^2 = 2, \\ x+z = 1. \end{cases}$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} 2\lambda_1 x+\lambda_2 = -1 \\ 2\lambda_1 y = -1 \\ \lambda_2 = -1 \\ x^2+y^2 = 2 \\ x+z = 1 \end{cases}$$

Así que

$$\lambda_2 = -1, \quad 2\lambda_1 x = 0 \quad \text{y} \quad 2\lambda_1 y = -1.$$

De donde $\lambda_1 \neq 0$. Y por lo tanto $x = 0$, $z = 1$.

Se sigue que $y = \sqrt{2}$ ó $y = -\sqrt{2}$.

Tenemos pues que $(0,\sqrt{2},1)$ y $(0,-\sqrt{2},1)$ son los puntos a considerar.

Sustituyendo en la fórmula para f observamos que el primero es un máximo y el segundo es un mínimo.

3.3. Lectura adicional: Teorema de los multiplicadores de Lagrange.

En general vale el siguiente resultado.

TEOREMA 6.14 (Teorema de los multiplicadores de Lagrange con una restricción).
Sea $D \subset \mathbb{R}^3$ *un abierto y sea* $g : D \to \mathbb{R}$ *una función de clase* $\mathcal{C}^1$.
Sea S *la superficie definida implícitamente por la ecuación* $g(\vec{x}) = 0$, *es decir,*

$$S = \{\vec{x} \in D : g(\vec{x}) = 0\}.$$

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *diferenciable, si* $f|_S$ *alcanza un máximo o un mínimo en* $\vec{x_o}$ *entonces existe constante* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\nabla f(\vec{x_o}) = \lambda \nabla g(\vec{x_o}).$$

TEOREMA 6.15 (Teorema de los multiplicadores de Lagrange con dos restricciones).
Sea $D \subset \mathbb{R}^3$ *un abierto y sea* $g : D \to \mathbb{R}^2$ *una función de clase* $\mathcal{C}^1$ *tal que para* $g = (g_1, g_2)$ *los vectores* $\nabla g_1(\vec{x}), \nabla g_2(\vec{x})$ *son linealmente independientes para todo* $\vec{x} \in D$.
Sea C *la curva definida implícitamente por las ecuaciones* $g_1(\vec{x}) = 0$, $g_2(\vec{x}) = 0$, *es decir,*

$$C = \{\vec{x} \in D : g_1(\vec{x}) = 0, g_2(\vec{x}) = 0\}.$$

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *diferenciable, si* $f|_C$ *alcanza un máximo o un mínimo en* $\vec{x_o}$ *entonces existen constantes* λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ *tales que*

$$\nabla f(\vec{x_o}) = \lambda_1 \nabla g_1(\vec{x_o}) + \lambda_2 \nabla g_2(\vec{x_o}).$$

IDEA DE LA DEMOSTRACIÓN EN EL CASO DE DOS RESTRICCIONES.
Sea $\vec{x_o} \in C$ tal que f alcanza un máximo o un mínimo en $\vec{x_o}$. Usando la independencia lineal de los gradientes, se puede probar que existe una parametrización derivable de la curva C alrededor de $\vec{x_o}$, es decir, existen un intervalo abierto I, una función derivable $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ tal que $\alpha(t_o) = \vec{x_o}$ para algún $t_o \in I$ y la intersección de C con un entorno de $\vec{x_o}$ es $\alpha(I)$.

Entonces el campo escalar ψ, definido en un entorno de 0 por

$$\psi(t) = f(\alpha(t_o + t))$$

alcanza un máximo o un mínimo en 0. Por lo tanto $\psi'(0) = 0$, de donde sigue que

$$\langle \nabla f(\alpha(t_o)), \alpha'(t_o) \rangle = 0,$$

es decir, el vector $\nabla f(\alpha(t_o)) = \nabla f(\vec{x_o})$ es ortogonal al espacio (recta) tangente a S en $\vec{x_o}$. Por lo tanto $\nabla f(\vec{x_o})$ está en el subespacio generado por $\nabla g_1(\vec{x_o})$ y $\nabla g_2(\vec{x_o})$.

□

3.4. Lectura adicional: Caso en el que el método de Lagrange no es aplicable. Si ∇g_1 y ∇g_2 son linealmente dependientes el método de Lagrange puede fallar, tal como lo ilustra el ejemplo que desarrollaremos a continuación.

Supongamos que intentamos la aplicación del método de Lagrange para encontrar los valores extremos de $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ en la curva de intersección de las dos superficies $z = 0$, $z^2 - (y-1)^3 = 0$.

Sean

$$g_1(x, y, z) = z,$$
$$g_2(x, y, z) = z^2 - (y-1)^3.$$

Las dos superficies, un plano y un cilindro, se cortan a lo largo de la recta C dibujada en la figura.

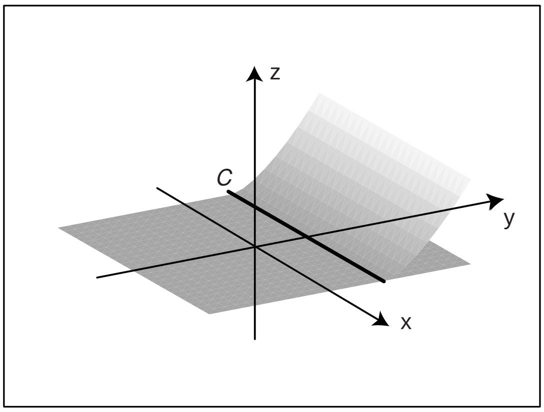

Figura 6.5.

El problema tiene evidentemente una solución, debido a que $f(x, y, z)$ representa la distancia del punto (x, y, z) al eje z y esta distancia es un mínimo sobre C cuando el punto es $\vec{x_0} = (0, 1, 0)$.

Sin embargo, en este punto los vectores gradientes son

$$\nabla g_1(\vec{x_0}) = (0, 0, 1),$$
$$\nabla g_2(\vec{x_0}) = (0, 0, 0),$$
$$\nabla f(\vec{x_0}) = (0, 2, 0).$$

y está claro que no existen escalares λ_1 y λ_2 que satisfagan la ecuación

$$\nabla f(\vec{x_0}) = \lambda_1 \nabla g_1(\vec{x_0}) + \lambda_2 \nabla g_2(\vec{x_0}).$$

Ejercicios.
Máximos y mínimos.

(1) Hallar los puntos críticos de las superficies que tienen las ecuaciones cartesianas que se dan

(a) $z = x^2 + (y-1)^2$.

(b) $z = x^2 - (y-1)^2$.

(c) $z = 1 + x^2 - y^2$.

(d) $z = (x - y + 1)^2$.

(e) $z = 2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y$.

(f) $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$.

(g) $z = x^3 - 3xy^2 + y^3$.

(h) $z = x^2y^3(6 - x - y)$.

(i) $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

(j) $z = \operatorname{sen} x \cosh y$.

(k) $z = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$.

(l) $z = (5x + 7y - 25)e^{-(x^2+xy+y^2)}$.

(m) $z = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen}(x+y)$, para $0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi$.

(n) $z = x - 2y + \ln\sqrt{x^2+y^2} + 3\arctan\dfrac{y}{x}$, para $x > 0$.

(o) $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

(2) Sea

$$f(x,y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2.$$

(a) Demostrar que sobre toda recta de la forma $y = mx$ la función tiene un mínimo en $(0,0)$,

(b) Demostrar que f no tiene mínimo relativo en ningún entorno bidimensional del origen.

(c) Hacer un dibujo indicando el conjunto de puntos (x,y) en los que $f(x,y) > 0$ y el conjunto de puntos en los que $f(x,y) < 0$.

(3) Sea

$$f(x,y) = (3-x)(3-y)(x+y-3).$$

(a) Trazar una figura indicando el conjunto de puntos (x, y) en los que $f(x, y) \geq 0$.

(b) Hallar todos los puntos (x, y) del plano en los que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Indicación: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ contiene $(3 - y)$ como factor.

(c) Diga cuáles puntos críticos son máximos relativos, cuáles son máximos relativos y cuáles no son ni una cosa ni la otra. Razone sus respuestas.

(d) Diga si f tiene un máximo absoluto o un máximo absoluto en todo el plano. Razone su respuestas.

(4) Determinar todos los valores extremos (absolutos y relativos) y los puntos de ensilladura para la función

$$f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$$

en el cuadrado $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

(5) Hallar los valores extremos de $z = xy$ con la condición $x + y = 1$.

(6) Hallar las distancias máxima y mínima desde el origen a la curva $5x^2+6xy+5y^2 = 8$.

(7) Supongamos que a y b son números positivos fijos.

(a) Hallar los valores extremos de $z = x/a + y/b$ con la condición $x^2 + y^2 = 1$.

(b) Hallar los valores extremos de $z = x^2 + y^2$ con la condición $x/a + y/b = 1$.

En cada caso interpretar geométricamente el problema.

(8) Hallar los valores extremos de $z = \cos^2 x + \cos^2 y$ con la condición $x - y = \pi/4$.

(9) Hallar los valores extremos del campo escalar $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(10) Hallar los puntos de la superficie $z^2 - xy = 1$ más próximos al origen.

(11) Hallar la mínima distancia desde el punto $(1, 0)$ a la parábola $y^2 = 4x$.

Bibliografía

[1] Apostol, T. *Calculus Volumen 1.* Editorial Reverté.

[2] Apostol, T. *Calculus Volumen 2.* Editorial Reverté.

[3] Bruzual, R. y Domínguez, M. *Guía de problemas de Cálculo III para Matemáticos.* Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela.

[4] Bruzual, R. y Domínguez, M. *Cálculo diferencial en una variable.* Publicaciones del Laboratorio de Formas en Grupos, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela.

[5] Bruzual, R. y Domínguez, M. *Cálculo integral en una variable.* Publicaciones del Laboratorio de Formas en Grupos, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela.

[6] Bruzual, R. y Domínguez, M. *Cálculo diferencial en varias variables.* Publicaciones del Laboratorio de Formas en Grupos, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela. 30, 40, 53, 66, 75

[7] Deminovich, B. *Problemas y ejercicios de Análisis Matemático.* Editorial Paraninfo.

[8] Marsden, J. y Tromba, A. *Cálculo Vectorial* Fondo Educativo Interamericano. Addison-Wesley.

[9] Miranda, Guillermo *Matemática III - Física* Fac. Ciencias. UCV.

[10] Protter, M. H. and Morrey, C. B. *A First Course in Real Analysis.*

[11] Swokowsky, E. W. *Cálculo con Geometría Analítica.* Grupo Editorial Iberoamericana.

[12] Williamson, Crowell, Trotter. *Cálculo de Funciones Vectoriales.* Editorial Prentice/Hall Internacional.

Índice