

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICA  
LABORATORIO DE FORMAS EN GRUPOS

# Introducción a la geometría del plano y del espacio. Curvas.

Ramón Bruzual  
Marisela Domínguez

Caracas, Venezuela  
Septiembre 2005

Ramón Bruzual

Correo-E: [rbruzual@euler.ciens.ucv.ve](mailto:rbruzual@euler.ciens.ucv.ve)

Marisela Domínguez

Correo-E: [mdomin@euler.ciens.ucv.ve](mailto:mdomin@euler.ciens.ucv.ve)

Laboratorio de Formas en Grupos

Centro de Análisis

Escuela de Matemática

Facultad de Ciencias

Universidad Central de Venezuela

<http://euler.ciens.ucv.ve/~labfg>

Nota: Este material está disponible en la página web

<http://euler.ciens.ucv.ve/~labfg/guias.htm>

En general mantenemos una réplica en un servidor externo a la Universidad Central de Venezuela, el vínculo se encuentra indicado en esa misma página web.

## Prólogo

Estas notas han sido concebidas para ser utilizadas en la parte de Geometría del Plano, Geometría del Espacio y Curvas, del curso de Matemática III de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela. En este curso participan estudiantes de las Licenciaturas en Biología, Geoquímica, Química, Computación, Física y Matemática.

El trabajo de mecanografía y la elaboración de los gráficos está a cargo de los autores. Agradecemos cualquier observación o comentario que deseen hacernos llegar.

Ramón Bruzual.  
Marisela Domínguez.  
Septiembre 2005.



## CONTENIDO

|   |    |
|---|----|
| Capítulo 1. Nociones de geometría plana y del espacio.                            | 1  |
| 1. El plano $\mathbb{R}^2$ .  | 1  |
| 2. El espacio $\mathbb{R}^3$ .  | 5  |
| 3. Producto escalar, norma y distancia.   | 7  |
| 4. Producto cruz o producto vectorial.  | 10 |
| 5. Rectas y planos en el espacio.   | 11 |
| 6. Relaciones entre subconjuntos y desigualdades sencillas                        | 14 |
| 7. Superficies en $\mathbb{R}^3$ .  | 15 |
| 8. Lectura adicional: Abiertos y cerrados.  | 19 |
| 9. Distintos sistemas de coordenadas en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$ .      | 22 |
| Ejercicios.   |    |
| Geometría plana y del espacio.  | 27 |
| Capítulo 2. Curvas en el plano y en el espacio.                                   | 33 |
| 1. Motivación.  |    |
| Descripción del movimiento de un proyectil, despreciando la resistencia del aire. | 33 |
| 2. Curvas y trayectorias.   | 35 |
| 3. Límites y continuidad de las trayectorias.                                     | 37 |
| 4. Vector tangente a una curva.   | 37 |
| 5. Reparametrización.   | 41 |
| 6. Longitud de arco.  | 41 |
| Ejercicios.   |    |
| Curvas en el plano y en el espacio.   | 45 |
| Capítulo 3. Integrales de línea.  | 49 |
| 1. Definición y ejemplos de integrales de línea.                                  | 49 |
| 2. Interpretación como trabajo mecánico.  | 52 |
| 3. Lectura adicional: Integrales de línea sobre curvas lisas a trozos.            | 53 |
| Ejercicios.   |    |
| Integrales de línea.  | 55 |

|              |    |
|--------------|----|
| Bibliografía | 57 |
| Índice       | 59 |

## CAPÍTULO 1

### Nociones de geometría plana y del espacio.

Subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ . Vectores. Producto escalar y vectorial. Ecuación paramétrica de la recta. Representación de subconjuntos definidos mediante ecuaciones y desigualdades sencillas. Superficies en  $\mathbb{R}^3$ : plano, esfera, elipsoide, cilindro, cono, paraboloides, hiperboloides. Bolas abiertas y bolas cerradas en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ . Idea de abierto, cerrado y frontera.

Distintos sistemas de coordenadas en  $\mathbb{R}^2$  y en  $\mathbb{R}^3$ : polares, cilíndricas y esféricas. Transformación de coordenadas. Parametrización de subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$  y de  $\mathbb{R}^3$  en estas coordenadas.

#### 1. El plano $\mathbb{R}^2$ .

Comenzaremos recordando algunos conceptos de cursos previos de matemática y de física.

El espacio unidimensional  $\mathbb{R}$  se identifica con una recta.

Es importante notar que para un número real  $x$ , la distancia de  $x$  al origen de la recta es

$$|x| = \sqrt{x^2}.$$

Esta distancia se conoce como el módulo o la norma de  $x$ .

Consideremos el espacio bidimensional

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

El espacio  $\mathbb{R}^2$  puede ser representado, de manera natural, mediante un plano: Trazamos una recta horizontal y una vertical, que llamaremos eje  $x$  y eje  $y$  respectivamente. Determinamos una escala en cada una de estas rectas (no es imprescindible que sean iguales). Para cada punto  $P$  del plano trazamos rectas paralelas a los ejes que pasen por  $P$ . De acuerdo a la identificación de la recta con el conjunto de los números reales, sea  $a$  el punto de corte de la paralela al eje  $y$  con el eje  $x$  y sea  $b$  el punto de corte de la paralela al eje  $x$  con el eje  $y$ . Al punto  $P$  le hacemos corresponder el par ordenado de números reales  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

Cuando  $x > 0$ ,  $y > 0$  decimos que el punto  $(x, y)$  se encuentra en el *primer cuadrante*.  
 Cuando  $x < 0$ ,  $y > 0$  decimos que el punto  $(x, y)$  se encuentra en el *segundo cuadrante*.  
 Cuando  $x < 0$ ,  $y < 0$  decimos que el punto  $(x, y)$  se encuentra en el *tercer cuadrante*.  
 Cuando  $x > 0$ ,  $y < 0$  decimos que el punto  $(x, y)$  se encuentra en el *cuarto cuadrante*.

Al punto  $(0, 0)$  se le suele llamar el *origen de coordenadas*, o simplemente, el *origen*.

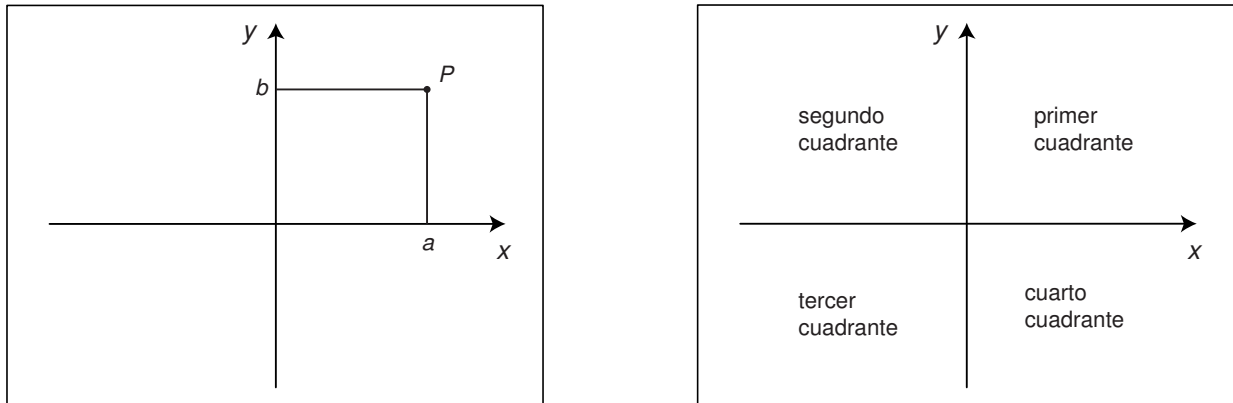


FIGURA 1.1. Identificación de  $\mathbb{R}^2$  y el plano

Tomando en cuenta esta identificación es usual hablar de puntos del plano  $\mathbb{R}^2$ , o simplemente, puntos de  $\mathbb{R}^2$ .

Existe una identificación natural entre los puntos de  $\mathbb{R}^2$  y los vectores en el plano: Al punto  $(x, y)$  le hacemos corresponder el vector de extremo inicial el origen y de extremo final el punto  $(x, y)$ .

Sean  $\vec{u} = (x_1, y_1)$ ,  $\vec{v} = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ , definimos la *suma de vectores* de la siguiente manera:

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Definimos el *producto* de un vector por un escalar de la siguiente manera: si  $\vec{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\lambda \vec{u} = (\lambda x, \lambda y).$$

Si  $\lambda > 0$  entonces  $\lambda \vec{u}$  y  $\vec{u}$  tienen el mismo sentido. Si  $\lambda < 0$  entonces  $\lambda \vec{u}$  y  $\vec{u}$  tienen sentido contrario.



Como es natural la diferencia de vectores  $\vec{u} - \vec{v}$  se define como  $\vec{u} + (-1)\vec{v}$ .

La suma y la diferencia de vectores se puede hacer geoméricamente, de acuerdo con la ley del paralelogramo, que se ilustra en la siguiente figura.

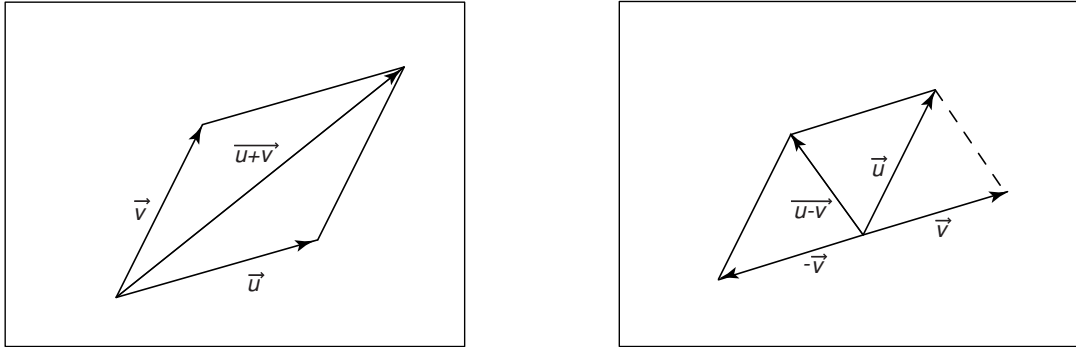


FIGURA 1.2. Ley del paralelogramo

Se dice que  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son *paralelos* cuando existe  $\lambda \neq 0$  tal que

$$\vec{v} = \lambda \vec{u}.$$

### Distancia entre dos puntos del plano y norma.

Supongamos que queremos hallar la distancia  $d$  entre dos puntos  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  del plano.

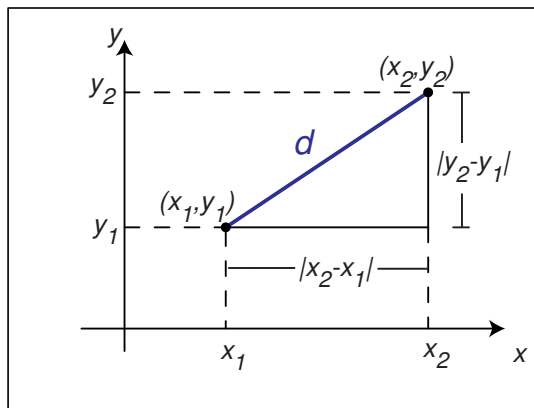


FIGURA 1.3. Distancia entre dos puntos del plano

Analizando la figura anterior y usando el teorema de Pitágoras obtenemos que

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

es decir

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} .$$

Dado un vector  $\vec{u} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , definimos la *norma* de  $\vec{u}$  como

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Notemos que  $\|\vec{u}\|$  es la distancia del punto  $(x_1, x_2)$  al origen, es decir, la longitud del vector  $\vec{u}$ .

### Circunferencias y círculos en el plano.

Sea  $r > 0$ , recordemos que la *circunferencia* con centro  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  y radio  $r$  es el conjunto de los puntos  $(x, y)$  del plano tales que la distancia de  $(x, y)$  al punto  $(a, b)$  es  $r$ , es decir, el conjunto

$$\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \}.$$

Otra manera equivalente de expresar este conjunto es

$$\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y) - (a, b)\| = r \}.$$

Recordemos también que, el *círculo* con centro  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  y radio  $r$  es el conjunto de los puntos  $(x, y)$  del plano tales que la distancia de  $(x, y)$  al punto  $(a, b)$  es menor o igual que  $r$ , es decir, el conjunto

$$\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2 \}.$$

o, equivalentemente

$$\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y) - (a, b)\| \leq r \}.$$

Si en vez de tomar considerar el conjunto con “menor o igual”, tomamos la desigualdad estricta, o sea, consideramos el conjunto

$$\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y) - (a, b)\| < r \}.,$$

obtenemos el conjunto de los puntos que están dentro de la circunferencia, sin incluir la circunferencia.

## 2. El espacio $\mathbb{R}^3$ .

Consideremos el espacio tridimensional

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Al igual que  $\mathbb{R}^2$  se identifica con el plano,  $\mathbb{R}^3$  se identifica con el espacio ambiente. Para establecer la correspondencia debemos considerar un eje adicional, usualmente llamado eje  $z$ , perpendicular al plano formado por el eje  $x$  y el eje  $y$ . Cada punto  $P$  del espacio está en correspondencia con un elemento  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$ .

El siguiente dibujo nos ilustra esta correspondencia, en el mismo vemos, de manera gráfica, como el punto  $P$  corresponde con la terna  $(a, b, c)$ .

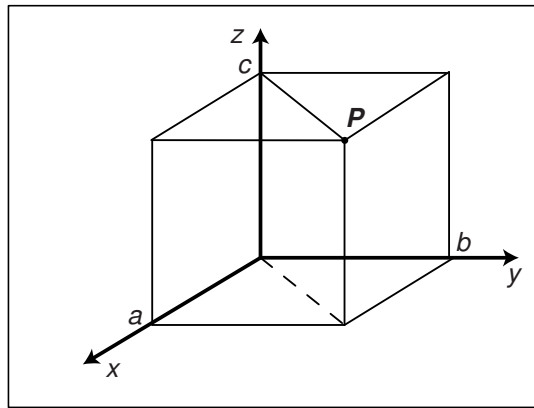


FIGURA 1.4. Correspondencia entre puntos del espacio y elementos de  $\mathbb{R}^3$

Al igual que en el plano, al punto  $(0, 0, 0)$  se le suele llamar el *origen de coordenadas*, o simplemente, el *origen*.

Existen tres planos que resaltan en este espacio, que son: el plano “ $xy$ ”, el plano “ $yz$ ” y el plano “ $xz$ ”.

Al igual que en el caso bidimensional, existe una identificación natural entre los puntos de  $\mathbb{R}^3$  y los vectores en el espacio: Al punto  $(x, y, z)$  le hacemos corresponder el vector de extremo inicial el origen y de extremo final el punto  $(x, y, z)$ . El origen de coordenadas se identifica con el vector  $(0, 0, 0)$ .

Cuando  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $z > 0$  decimos que el punto (o el vector)  $(x, y, z)$  se encuentra en el primer octante.

La suma de vectores y el producto por un escalar se definen de manera natural:

Si  $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2),$$

$$\lambda \vec{u} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1).$$

Si  $\lambda > 0$  entonces  $\lambda \vec{u}$  y  $\vec{u}$  tienen el mismo sentido. Si  $\lambda < 0$  entonces  $\lambda \vec{u}$  y  $\vec{u}$  tienen sentido contrario.

Se dice que  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son *paralelos* cuando existe  $\lambda \neq 0$  tal que

$$\vec{v} = \lambda \vec{u}.$$

También en el caso tridimensional, la suma y diferencia de vectores se puede hacer, de manera geométrica, siguiendo la ley del paralelogramo.

### Distancia entre dos puntos del espacio y norma.

Supongamos que queremos hallar la distancia  $d$  entre dos puntos  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$  del espacio.

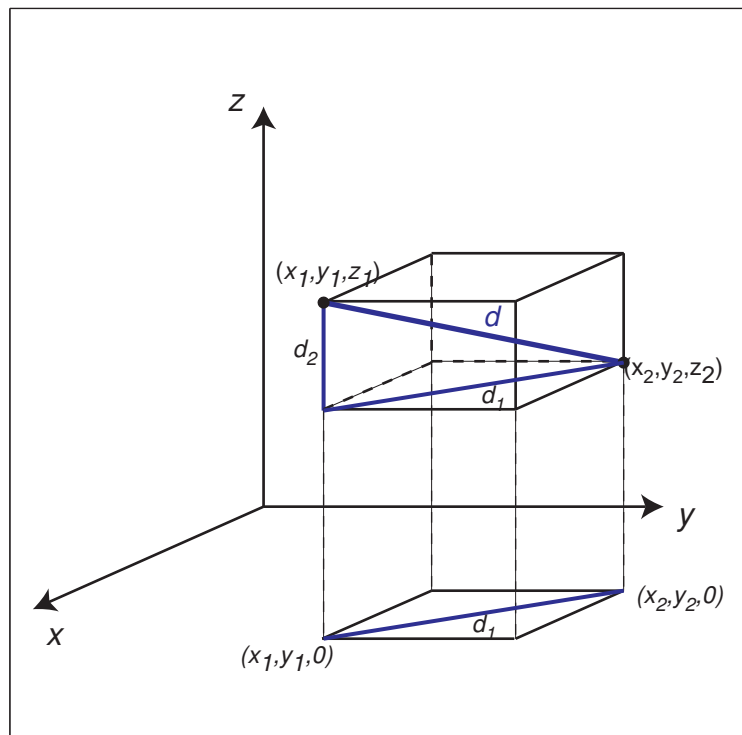


FIGURA 1.5. Distancia entre dos puntos del plano

Sea  $d_1$  la distancia entre los puntos  $(x_1, y_1, 0)$  y  $(x_2, y_2, 0)$ . Por la fórmula de la distancia en el plano tenemos que

$$d_1^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Si  $d_2$  es la diferencia de alturas entre los puntos  $(x_1, y_1, z_1)$  y  $(x_2, y_2, z_2)$  entonces

$$d_2 = |z_2 - z_1|,$$

Analizando la figura anterior y usando el teorema de Pitágoras obtenemos que

$$d^2 = d_1^2 + d_2^2,$$

es decir

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Al igual que en el caso bidimensional, dado un vector  $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , definimos la *norma* de  $\vec{u}$  como

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Se tiene que  $\|\vec{u}\|$  es la distancia del punto  $(x, y, z)$  al origen, es decir, la longitud del vector  $\vec{u}$ .

### Esferas en el espacio.

Sea  $r > 0$ , recordemos que la *esfera* con centro  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  y radio  $r$  es el conjunto de los puntos  $(x, y, z)$  del espacio tales que la distancia de  $(x, y, z)$  al punto  $(a, b, c)$  es  $r$ , es decir, el conjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2\}.$$

Otra manera equivalente de expresar este conjunto es

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x, y, z) - (a, b, c)\| = r\}.$$

Note que la parte de adentro de esta esfera es:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x, y, z) - (a, b, c)\| < r\}.$$

## 3. Producto escalar, norma y distancia.

A lo largo de esta sección por  $\mathbb{R}^n$  denotaremos el espacio  $\mathbb{R}^2$  o al espacio  $\mathbb{R}^3$ .

### 3.1. Producto escalar en $\mathbb{R}^2$ .

Sean  $\vec{u} = (x_1, y_1), \vec{v} = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ . El *producto escalar* de estos vectores es

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1x_2 + y_1y_2.$$

De manera abreviada,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1x_2 + y_1y_2.$$

### 3.2. Producto escalar en $\mathbb{R}^3$ .

Sean  $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1), \vec{v} = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ . El *producto escalar* de estos vectores es

$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

De manera abreviada,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Es muy importante notar que, tanto en el caso bidimensional como en el caso tridimensional, el producto escalar siempre es igual a la suma del producto de las coordenadas.

### 3.3. Propiedades del producto escalar en $\mathbb{R}^n$ .

PROPOSICIÓN 1.1. *Para todos los vectores  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$  y para todo número  $\lambda \in \mathbb{R}$ , tenemos que:*

- (i)  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$  (*Ley conmutativa*).
- (ii)  $\langle \lambda \vec{u}, \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ .
- (iii)  $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$  (*Ley distributiva*).
- (iv)  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$  donde  $\theta$  es el ángulo entre  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .

La demostración de las partes (i), (ii) y (iii) queda como ejercicio. Debe tratar de justificar geoméricamente la propiedad (iv).

Si  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$  se dice que  $\vec{u}, \vec{v}$  son *perpendiculares* u *ortogonales*.

### 3.4. Propiedades de la norma y la distancia en $\mathbb{R}^n$ .

OBSERVACIÓN 1.2. Si  $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$  entonces

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}.$$

PROPOSICIÓN 1.3. *Sean  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ , entonces*

- (i)  $\|\vec{u}\| \geq 0$ ,
- (ii)  $\vec{u} = \vec{0}$  implica  $\|\vec{u}\| = 0$ ,
- (iii)  $\|\vec{u}\| = 0$  implica  $\vec{u} = \vec{0}$ ,
- (iv)  $\|\lambda \vec{u}\| = |\lambda| \|\vec{u}\|$ ,
- (v)  $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ .

Decimos que  $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$  es unitario si  $\|\vec{u}\| = 1$ .

Dado  $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$  si consideramos

$$\vec{v} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|},$$

obtenemos que  $\vec{v}$  es unitario.

OBSERVACIÓN 1.4. Si  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$  entonces

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\|.$$

PROPOSICIÓN 1.5. Sean  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$

- (i)  $d(\vec{u}, \vec{v}) \geq 0$ ,
- (ii)  $\vec{u} = \vec{v}$  implica  $d(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ ,
- (iii)  $d(\vec{u}, \vec{v}) = 0$  implica  $\vec{u} = \vec{v}$ ,
- (iv)  $d(\vec{u}, \vec{v}) = d(\vec{v}, \vec{u})$ ,
- (v)  $d(\vec{u}, \vec{w}) \leq d(\vec{u}, \vec{v}) + d(\vec{v}, \vec{w})$ .

La demostración de estas proposiciones queda como ejercicio.

### 3.5. Lectura adicional: La desigualdad de Cauchy-Schwarz.

PROPOSICIÓN 1.6 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). Sea  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  el producto escalar en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$$

para todo  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ .

Además se cumple la igualdad si y sólo si  $\vec{u} = \lambda \vec{v}$  para algún  $\lambda \in \mathbb{R}$ , es decir,  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  están en la misma línea.

DEMOSTRACIÓN. Sean  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ . Entonces

$$\langle x\vec{v} - \vec{u}, x\vec{v} - \vec{u} \rangle \geq 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

por lo tanto

$$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle x^2 - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle x + \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

es decir,

$$\|\vec{v}\|^2 x^2 - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle x + \|\vec{u}\|^2 \geq 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Si  $\|\vec{v}\| = 0$  entonces  $\vec{v} = 0$  y la desigualdad de Cauchy-Schwarz es trivialmente cierta.

Si  $\|\vec{v}\| > 0$ , tenemos una parábola que se abre hacia arriba. Usando el discriminante se concluye que

$$4\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 - 4\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \leq 0$$

y de esto último se deduce inmediatamente la desigualdad.

El resto de la demostración se deja como ejercicio. □

#### 4. Producto cruz o producto vectorial.

Sean  $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1), \vec{v} = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ . El *producto cruz o producto vectorial* de estos vectores es

$$\vec{u} \times \vec{v} = ((y_1 z_2 - z_1 y_2), (z_1 x_2 - x_1 z_2), (x_1 y_2 - y_1 x_2)).$$

Sean  $\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0)$  y  $\vec{k} = (0, 0, 1)$ , entonces tenemos que  $\vec{u} \times \vec{v}$  es igual al determinante formal

$$\det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}.$$

Este determinante de tercer orden está desarrollado por la primera fila.

El producto vectorial  $\vec{u} \times \vec{v}$  se puede hallar geoméricamente de la siguiente manera:

Si  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son colineales entonces  $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ .

Si  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  no son colineales entonces  $\vec{u} \times \vec{v}$  es un vector ortogonal al plano generado por  $\vec{u}$  y por  $\vec{v}$ , de longitud igual  $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\sin \theta|$ , donde  $\theta$  es el ángulo entre  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  y cuya dirección se obtiene de acuerdo a la ley de la mano derecha. En los siguientes dibujos, si  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  se ubican en el plano correspondiente a esta hoja, en el primer caso  $\vec{u} \times \vec{v}$  sale de la hoja apuntando hacia el lector mientras que en el segundo caso apunta en sentido contrario.

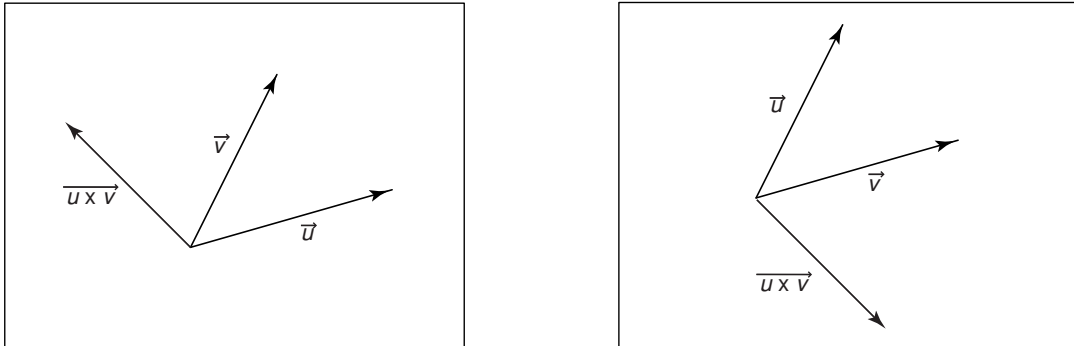


FIGURA 1.6. Dirección del producto vectorial

También se tienen los siguientes resultados.

PROPOSICIÓN 1.7.

- (i)  $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{u} = \vec{0}$ ,
- (ii)  $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$ ,
- (iii)  $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$ ,
- (iv)  $(\lambda \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \times \vec{v})$ ,



- (v)  $\vec{u} \times \vec{v}$  es ortogonal a  $\vec{u}$ ,  $\vec{u} \times \vec{v}$  es ortogonal a  $\vec{v}$ . Es decir,  $\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0$  y  $\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$ ,  
 (vi)  $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$  (propiedad distributiva).

Además,

$$\begin{aligned}\vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k} = -\vec{j} \times \vec{i}, \\ \vec{j} \times \vec{k} &= \vec{i} = -\vec{k} \times \vec{j}, \\ \vec{k} \times \vec{i} &= \vec{j} = -\vec{i} \times \vec{k}.\end{aligned}$$

PROPOSICIÓN 1.8. Si  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$  entonces  $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$  es el área del paralelogramo determinado por  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .

PROPOSICIÓN 1.9. Si  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$  entonces  $|\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle|$  es el volumen del paralelepípedo formado por ellos. El volumen es cero si los vectores están en el mismo plano.

## 5. Rectas y planos en el espacio.

### 5.1. Rectas en el espacio.

La definición de una *recta* en  $\mathbb{R}^3$  nace de la idea intuitiva de que una recta está determinada por un punto  $\vec{p}_o$  y una dirección  $\vec{u}$  (donde  $\vec{u}$  es un vector no nulo). El vector  $\vec{u}$  es llamado el *vector director* de la recta.

Los puntos  $\vec{p}$  sobre la  $L$  que pasa por  $\vec{p}_o$  en la dirección de  $\vec{u}$  son todos los puntos de la forma

$$\vec{p} = \vec{p}_o + t\vec{u},$$

donde  $t \in \mathbb{R}$ . Esta ecuación se llama *ecuación vectorial de la recta*.

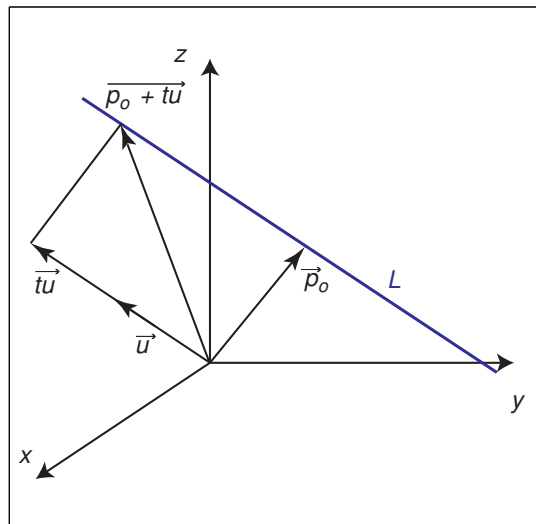


FIGURA 1.7. Recta que pasa por  $\vec{p}_o$  en la dirección de  $\vec{u}$

Si  $\vec{p}_o = (x_o, y_o, z_o)$ ,  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  y  $\vec{p} = (x, y, z)$  tenemos

$$(x, y, z) = (x_o, y_o, z_o) + t(u_1, u_2, u_3).$$

Luego

$$x = x_o + tu_1, \quad y = y_o + tu_2, \quad z = z_o + tu_3.$$

Estas son las ecuaciones correspondientes entre las componentes y se llaman *ecuaciones paramétricas de la recta*.

Si  $u_1 \neq 0$ ,  $u_2 \neq 0$ ,  $u_3 \neq 0$  se puede eliminar  $t$  y la ecuación se expresa en su forma cartesiana

$$\frac{x - x_o}{u_1} = \frac{y - y_o}{u_2} = \frac{z - z_o}{u_3}$$

Una recta está determinada si damos dos puntos por los que pasa.

Supongamos que  $L$  es una recta que pasa por los puntos (diferentes)  $\vec{p}_o = (x_o, y_o, z_o)$  y  $\vec{p}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ .

Sea  $\vec{u} = \vec{p}_1 - \vec{p}_o$ . Entonces  $L$  es la recta de dirección  $\vec{u}$  que pasa por cualquiera de los puntos  $\vec{p}_o = (x_o, y_o, z_o)$  ó  $\vec{p}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ . Por lo tanto la ecuación de  $L$  es:

$$\frac{x - x_o}{x_1 - x_o} = \frac{y - y_o}{y_1 - y_o} = \frac{z - z_o}{z_1 - z_o}$$

Dos rectas son *perpendiculares* si sus vectores directores lo son.

Dos rectas son *paralelas* si sus vectores directores son paralelos.

En  $\mathbb{R}^3$ , si dos rectas son paralelas, entonces son iguales o no se intersectan.

En  $\mathbb{R}^3$ , si dos rectas no son paralelas, entonces no se cortan o su intersección es un punto.

## 5.2. Planos en el espacio.

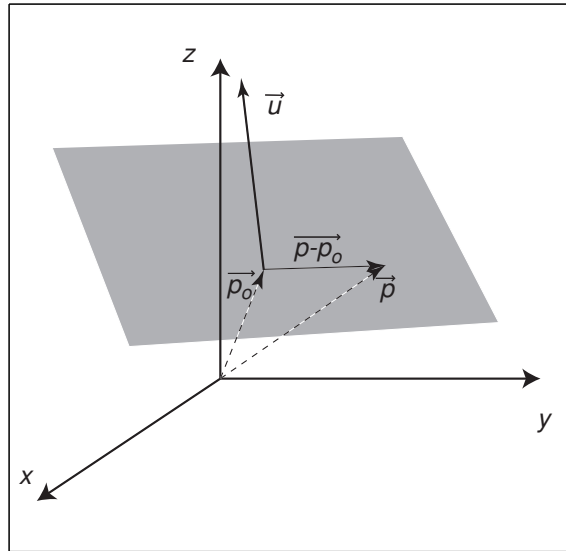
Existen varias maneras de determinar un *plano*. Algunas de ellas son las siguientes:

(1) Un plano está determinado si damos un punto por el que pasa el plano y un vector perpendicular a él.

Sea  $\vec{p}_o = (x_o, y_o, z_o)$  un punto del plano y  $\vec{u} = (a, b, c)$  un vector perpendicular al plano.

Si  $\vec{p} = (x, y, z)$  es otro punto del plano entonces  $\vec{p} - \vec{p}_o = (x, y, z) - (x_o, y_o, z_o)$  es perpendicular a  $\vec{u} = (a, b, c)$ , es decir,

$$\langle (a, b, c), (x, y, z) - (x_o, y_o, z_o) \rangle = 0.$$

FIGURA 1.8. Plano que pasa por  $\vec{p}_o$  y es perpendicular a  $\vec{u}$ 

Por lo tanto

$$a(x - x_o) + b(y - y_o) + c(z - z_o) = 0.$$

Y así

$$ax + by + cz + d = 0$$

donde  $d = -ax_o - by_o - cz_o$ . Esta ecuación se llama *ecuación cartesiana del plano*.

(2) Un plano está determinado por dos rectas no paralelas que se cortan.

Sean  $L_1$  y  $L_2$  dos rectas no paralelas de direcciones respectivas  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  que se cortan en un punto  $\vec{p}_o$ . Los puntos  $\vec{p}$  sobre el plano determinado por  $L_1$  y  $L_2$  son todos los puntos de la forma

$$\vec{p} = \vec{p}_o + t\vec{u} + s\vec{v},$$

donde  $t, s \in \mathbb{R}$ .

Esta ecuación se llama también *ecuación vectorial del plano* y las ecuaciones correspondientes entre las componentes se llaman las *ecuaciones paramétricas del plano*, éstas son:

$$x = x_o + tu_1 + sv_1, \quad y = y_o + tu_2 + sv_2, \quad z = z_o + tu_3 + sv_3.$$

(3) Un plano está determinado si damos tres puntos por los que pasa el plano.

Sean  $\vec{p}_o, \vec{p}_1, \vec{p}_2$  tres puntos diferentes y no alineados por los que pasa el plano. Sean  $\vec{u} = \vec{p}_1 - \vec{p}_o$  y  $\vec{v} = \vec{p}_2 - \vec{p}_o$ . Sean  $L_1$  y  $L_2$  dos rectas de direcciones respectivas  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  que

pasan por  $\vec{p}_o$ . Entonces  $L_1$  y  $L_2$  se cortan en el punto  $\vec{p}_o$ . Estas dos rectas no paralelas que se cortan, determinan un plano.

### 6. Relaciones entre subconjuntos y desigualdades sencillas

Recordemos que en  $\mathbb{R}$  desigualdades tales como  $x \geq 4$  delimitan intervalos:

$$[4, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : 4 \leq x\}.$$

En el plano  $\mathbb{R}^2$  ocurre algo semejante, que se precisa al despejar la variable  $y$ .

EJEMPLO 1.10. Si se nos pide dibujar la región  $A$  de  $\mathbb{R}^2$  determinada por la desigualdad

$$-3x + 5y \geq 2$$

debemos dibujar el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -3x + 5y \geq 2\}.$$

Este conjunto está dado por los puntos del plano que se encuentran por encima de la recta

$$y = \frac{3}{5}x + \frac{2}{5}$$

incluyendo a ésta. Haga el dibujo correspondiente.

EJERCICIO 1.11. Representar gráficamente

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 1 > 0 \quad \text{y} \quad 5x + 2y \leq 0\}.$$

En el espacio  $\mathbb{R}^3$  también ocurre algo semejante, que se precisa al despejar la variable  $z$  (o alguna de las otras).

EJEMPLO 1.12. Si se nos pide dibujar la región  $A$  de  $\mathbb{R}^3$  determinada por la desigualdad

$$-3x + 5y + 2z \geq 2$$

debemos dibujar el conjunto

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -3x + 5y + 2z \geq 2\}.$$

Este conjunto está dado por los puntos del plano que se encuentran por encima del plano

$$z = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}y + 1$$

incluyendo a éste. Haga el dibujo de este plano.

## 7. Superficies en $\mathbb{R}^3$ .

Daremos varios ejemplos de superficies en  $\mathbb{R}^3$ .

Los gráficos que presentamos fueron hechos con la ayuda del programa Maple. Este programa es muy útil para visualizar superficies, ya que permite visualizarlas, rotarlas, verlas desde diferentes ángulos, etc.

La instrucción que hace falta para construir el primer gráfico que mostramos es

```
with(plots): cylinderplot([(1-z^2)^(1/2),theta,z],theta=0..2*Pi,z=-1..1,
shading = ZGREYSCALE, style = PATCH, axes=normal, tickmarks=[0,0,0],
numpoints=220, orientation=[55,70], scaling=constrained );
```

Notar que en la instrucción no usamos coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ . Las coordenadas usadas fueron las cilíndricas  $(r, \theta, z)$ , que se estudiarán más adelante.

EJEMPLO 1.13. La ecuación de la esfera de centro  $(x_o, y_o, z_o)$  y radio  $r$  es

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2 = r^2.$$

Es decir,

$$\|(x, y, z) - (x_o, y_o, z_o)\| = r.$$

En los siguientes gráficos vemos una esfera con centro  $(0, 0, 0)$ . En el primero está completa y en el segundo la parte que se ubica en el primer octante.

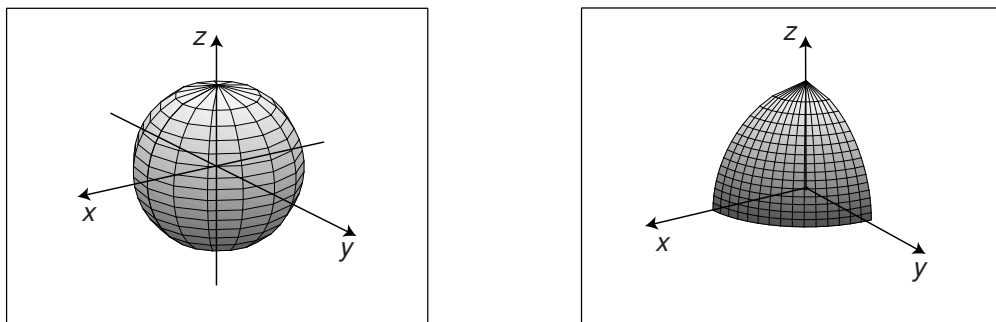


FIGURA 1.9. Esfera

EJEMPLO 1.14. Sea  $z = x^2 + y^2$ . Esta igualdad representa un paraboloide de revolución, obtenido al rotar  $z = y^2$  alrededor del eje  $z$  (justifique).

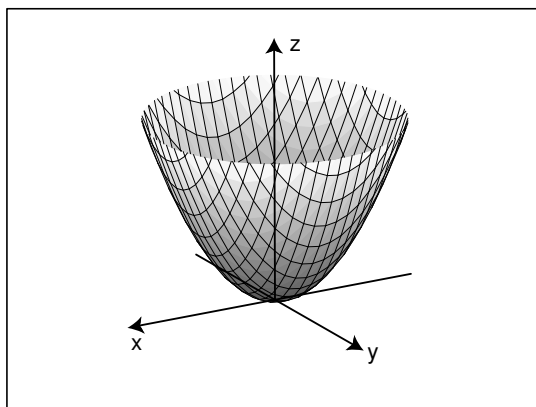


FIGURA 1.10. Paraboloide

EJEMPLO 1.15. El elipsoide es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

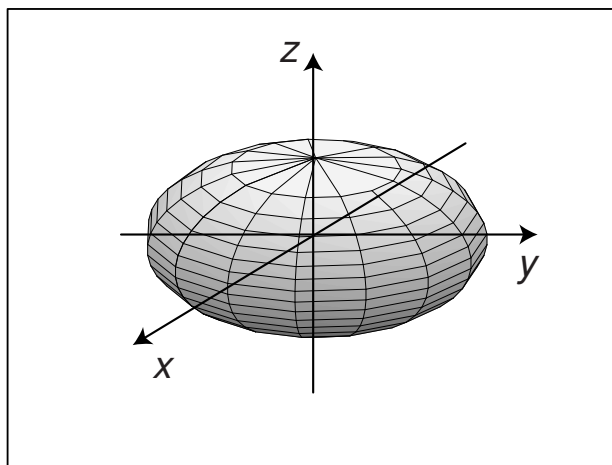


FIGURA 1.11. Elipsoide

EJEMPLO 1.16. El cilindro  $x^2 + y^2 = c^2$  (en  $\mathbb{R}^3$ )

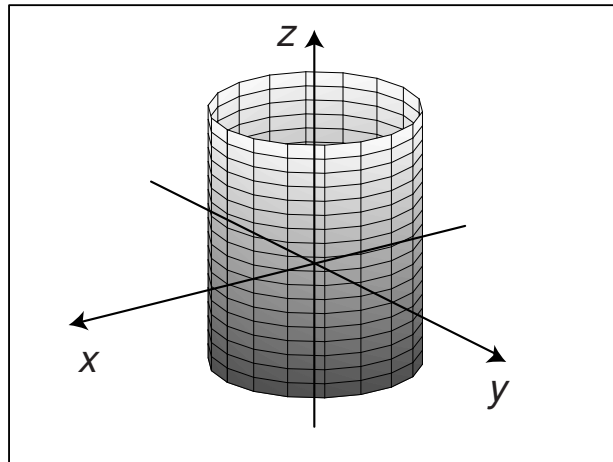


FIGURA 1.12. Cilindro

EJEMPLO 1.17. El cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

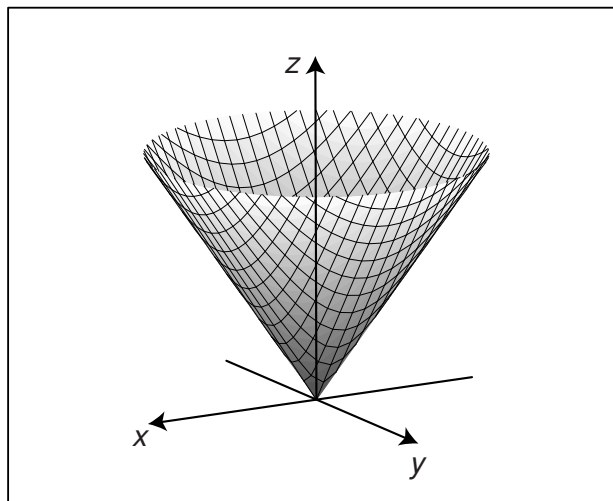


FIGURA 1.13. Cono

EJEMPLO 1.18. El hiperboloide de una hoja es

$$x^2 + y^2 - z^2 = c.$$

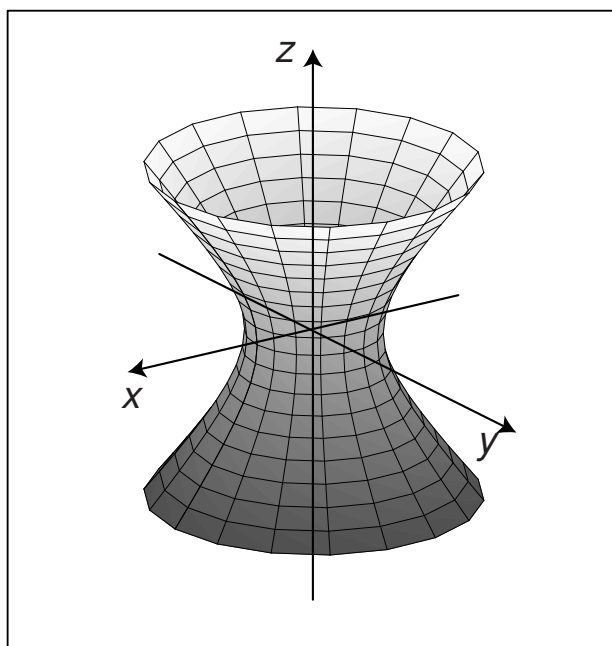


FIGURA 1.14. Hiperboloide de una hoja

EJEMPLO 1.19. El hiperboloide de dos hojas es

$$x^2 - y^2 - z^2 = c.$$

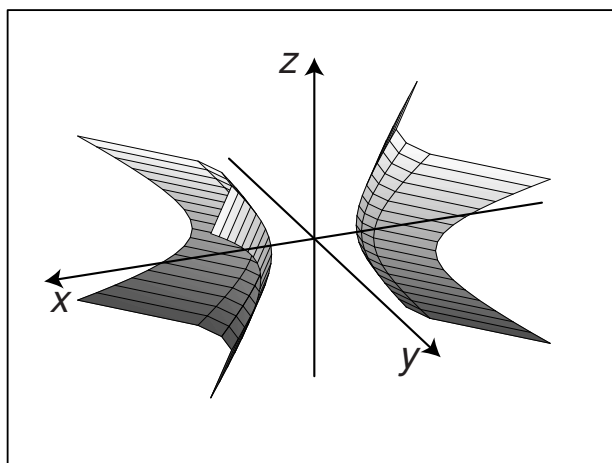


FIGURA 1.15. Hiperboloide de dos hojas



EJEMPLO 1.20. El paraboloido hiperbólico o “silla de montar”. es

$$z = x^2 - y^2.$$

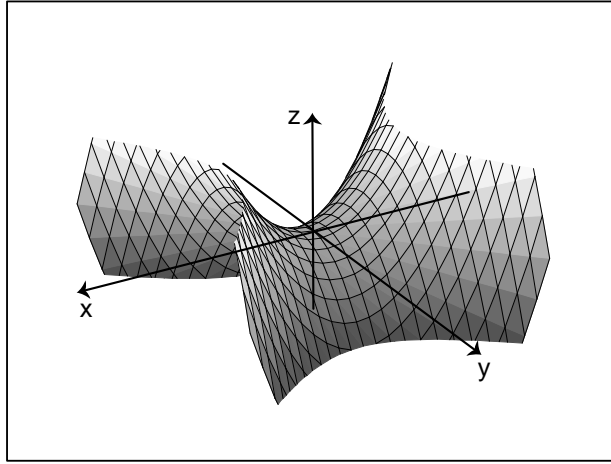


FIGURA 1.16. Paraboloido hiperbólico

## 8. Lectura adicional: Abiertos y cerrados.

### 8.1. Motivación e idea principal.

El intervalo

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

es abierto.

El intervalo

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

es cerrado.

El calificativo abierto que usamos para el intervalo indica que no contiene los puntos extremos  $a$  y  $b$ . El calificativo cerrado que usamos para el intervalo indica que contiene los puntos extremos  $a$  y  $b$ .

Recordemos que en  $\mathbb{R}$  dados un punto  $a \in \mathbb{R}$  y  $r > 0$ , un intervalo abierto de centro  $a$  y radio  $r$  es el conjunto

$$D(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\}.$$

Este intervalo se conoce como entorno o vecindad de  $a$ .

A continuación vamos a tratar de extender estas ideas a  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ . Tenemos la noción de distancia en estos espacios, con esta noción vamos a definir entornos en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ .

### 8.2. Bolas abiertas y bolas cerradas en $\mathbb{R}^2$ .

DEFINICIÓN 1.21. El *disco abierto* en  $\mathbb{R}^2$  con centro  $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$  y radio  $r$  es el conjunto

$$D(a, r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y) - (a_1, a_2)\| < r\}$$

(simplemente el interior de una circunferencia con centro  $a$  y radio  $r$ ).

DEFINICIÓN 1.22. El *disco cerrado* en  $\mathbb{R}^2$  con centro  $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$  y radio  $r$  es el conjunto

$$\overline{D}(a, r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y) - (a_1, a_2)\| \leq r\}.$$

El disco abierto no incluye el borde, el disco cerrado sí lo incluye.

A las curvas que limitan un conjunto las llamaremos la *frontera*. Si esta frontera está contenida en el conjunto diremos que el conjunto es *cerrado*.

Los puntos interiores de un conjunto son los que satisfacen la siguiente propiedad: tienen un entorno con centro en el punto y radio  $r$  (para algún  $r > 0$ ) tal que el entorno está contenido en el conjunto.

Un conjunto es *abierto* si todos sus puntos son interiores..

### 8.3. Bolas abiertas y bolas cerradas en $\mathbb{R}^3$ .

DEFINICIÓN 1.23. La *bola abierta* en  $\mathbb{R}^3$  con centro  $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$  y radio  $r$  es el conjunto

$$B(a, r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x, y, z) - (a_1, a_2, a_3)\| < r\}.$$

(simplemente el interior de una esfera con centro  $a$  y radio  $r$ ).

DEFINICIÓN 1.24. La *bola cerrada* en  $\mathbb{R}^3$  con centro  $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$  y radio  $r$  es el conjunto

$$B_C(a, r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x, y, z) - (a_1, a_2, a_3)\| \leq r\}.$$

La bola abierta no incluye el borde, la bola cerrada sí lo incluye.

#### 8.4. Definición de conjunto abierto, conjunto cerrado y frontera.

DEFINICIÓN 1.25. Sea  $A$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ , se dice que  $A$  es un *conjunto abierto* si para todo  $a \in A$  existe  $r > 0$  tal que  $B(a, r) \subset A$ .

DEFINICIÓN 1.26. Sea  $A$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ , se dice que  $A$  es un *conjunto cerrado* si su complemento  $\mathbb{R}^3 - A$  es abierto.

DEFINICIÓN 1.27. Sea  $A$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ , la *frontera* de  $A$  se define así:  
 $\partial A = \{u \in \mathbb{R}^3 : \text{ toda bola con centro } u \text{ interseca a } A \text{ y al complemento de } A\}$ .

En  $\mathbb{R}^2$  todas las definiciones son análogas, cambiando bolas por discos.

EJEMPLO 1.28. El disco abierto de centro  $a$  y radio  $r$  es abierto, no es cerrado. Su frontera es la circunferencia con centro  $a$  y radio  $r$ .

EJEMPLO 1.29. El disco cerrado de centro  $a$  y radio  $r$  es cerrado, no es abierto. Su frontera es la circunferencia con centro  $a$  y radio  $r$ .

EJEMPLO 1.30. Sea

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x^2 + y^2 = 1\}$$

$A$  no es abierto, no es cerrado y su frontera es

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

EJEMPLO 1.31.  $\mathbb{R}^2$  es abierto, también es cerrado y su frontera es  $\emptyset$ .

EJEMPLO 1.32. Sea

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

El conjunto  $A$  es cerrado, no es abierto, su frontera es el mismo.

EJEMPLO 1.33. La bola abierta de centro  $a$  y radio  $r$  es abierta, no es cerrada. Su frontera es la circunferencia con centro  $a$  y radio  $r$ .

EJEMPLO 1.34. La bola cerrada de centro  $a$  y radio  $r$  es cerrada, no es abierta. Su frontera es la esfera con centro  $a$  y radio  $r$ .

EJEMPLO 1.35.

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\}$$

es abierto, no es cerrado. La frontera es

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

EJEMPLO 1.36. Sea

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, x^2 + y^2 < 1\}.$$

$A$  no es abierto, no es cerrado. La frontera es

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

## 9. Distintos sistemas de coordenadas en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$ .

### Coordenadas Polares.

El punto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tiene coordenadas polares  $(r, \theta)$  si

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta.$$

En este caso,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \tan \theta = y/x.$$

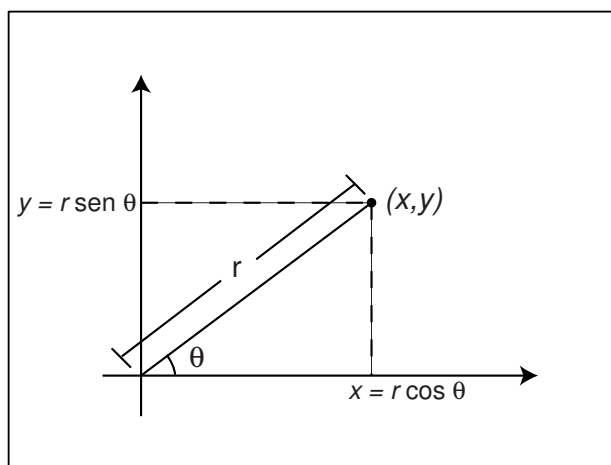


FIGURA 1.17. Coordenadas polares

Es usual suponer  $r \geq 0$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ . Más generalmente, se restringe  $\theta$  a un intervalo semiabierto de longitud  $2\pi$ .

Explícitamente

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0, y \geq 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x < 0 \\ 2\pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0, y < 0 \end{cases}$$

donde  $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$  está entre  $-\pi/2$  y  $\pi/2$ .

## EJEMPLO 1.37.

(a) Hallar las coordenadas polares del punto  $(6, 6)$ .

Tenemos que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2},$$

$$\theta = \arctan(6/6) = \arctan 1 = \pi/4.$$

(b) Si un punto tiene coordenadas polares  $(8, 2\pi/3)$ . ¿Cuáles son sus coordenadas cartesianas?

Tenemos que

$$x = r \cos \theta = 8 \cos(2\pi/3) = -8/2 = -4,$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta = 8 \operatorname{sen}(2\pi/3) = 8\sqrt{3}/2 = 4\sqrt{3},$$

## OBSERVACIÓN 1.38.

Sea  $\theta_o$  fijo. La gráfica de  $\theta = \theta_o$  está formada por los puntos de una semirrecta que forma un ángulo  $\theta_o$  con la recta  $y = 0$ .

Sea  $r_o$  fijo. La gráfica de  $r = r_o$  es una circunferencia con centro en el origen y radio  $r_o$ . En coordenadas cartesianas este conjunto se escribe así:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r_o^2\}.$$

EJERCICIO 1.39. Considere el siguiente conjunto dado en coordenadas cartesianas

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Dibújelo. Indique en qué conjuntos varían las coordenadas polares  $r, \theta$ .EJERCICIO 1.40. Expresar en coordenadas polares  $r$  y  $\theta$ , el triángulo limitado por las rectas  $y = x$ ,  $y = -x$ ,  $y = 1$ .**9.1. Coordenadas Cilíndricas.**El punto  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  tiene coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$  si

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta,$$

es decir, representamos la primera y la segunda coordenada en términos de coordenadas polares y no alteramos la tercera.

En general se toma  $r \geq 0$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ ,  $z \in \mathbb{R}$ .

Además

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}, \quad z = z.$$

Note que

$$\cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \text{sen } \theta = \frac{y}{r}$$

EJEMPLO 1.41. Si un punto tiene coordenadas cilíndricas  $(8, 2\pi/3, -3)$ , ¿Cuáles son sus coordenadas cartesianas?

Tenemos que

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta = 8 \cos 2\pi/3 = -8/2 = -4, \\ y &= r \text{sen } \theta = 8 \text{sen } 2\pi/3 = 8\sqrt{3}/2 = 4\sqrt{3}, \\ z &= -3. \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 1.42.

Sea  $z_o$  fijo. El conjunto  $z = z_o$  está formada por todos los puntos de un plano paralelo al plano  $xy$ .

Sea  $\theta_o$  fijo. El conjunto  $\theta = \theta_o$  está formada por todos los puntos de un semiplano que contiene al eje  $z$  y que forma un ángulo  $\theta_o$  con el plano  $y = 0$ .

En particular  $\theta = 0$  corresponde al plano  $xz$ .

Sea  $r_o$  fijo. El conjunto  $r = r_o$  está formada por todos los puntos de un cilindro circular recto cuyo eje central es el eje  $z$  y que tiene radio  $r_o$ .

EJEMPLO 1.43. El conjunto dado en coordenadas cilíndricas por  $r \in [0, 1]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $z \in [0, h]$  es un cilindro de radio 1 y altura  $h$ . En coordenadas cartesianas este conjunto se escribe así:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq h\}.$$

EJEMPLO 1.44. Sea  $A$  el cono circular recto de radio  $R$  y altura  $h$ . En coordenadas cartesianas tenemos que  $A$  está dado por

$$0 \leq z \leq h, \quad \sqrt{x^2 + y^2} \leq z.$$

En coordenadas cilíndricas tenemos

$$0 \leq z \leq h, \quad 0 \leq r \leq z.$$

EJEMPLO 1.45. Sea  $B$  el sólido dado por

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}.$$

La representación de  $B$  en coordenadas cilíndricas es:  $r \in [0, 1]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $z \in [0, r]$ .

Dibuje el sólido  $B$ .

**Coordenadas Esféricas.**

Recordemos que el punto  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  tiene coordenadas esféricas  $(\rho, \theta, \varphi)$  si

$$x = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, \quad z = \rho \cos \varphi.$$

En general se toma

$$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Además,

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}, \quad \cos \varphi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

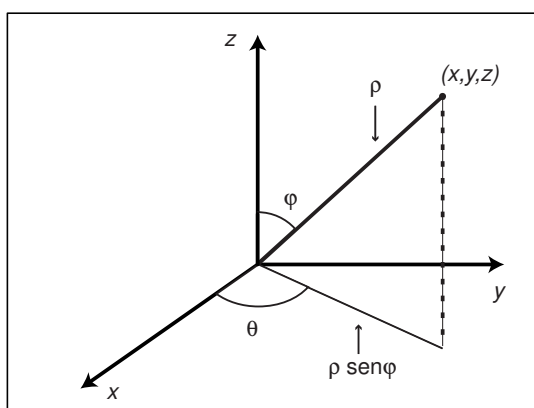


FIGURA 1.18. Coordenadas esféricas

Note que:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{x}{r}, & \operatorname{sen} \theta &= \frac{y}{r}, \\ \cos \varphi &= \frac{z}{\rho}, & \operatorname{sen} \varphi &= \frac{r}{\rho}. \end{aligned}$$

**OBSERVACIÓN 1.46.** Sea  $\rho_0$  fijo. La gráfica de  $\rho = \rho_0$  es una esfera con centro en el origen y radio  $\rho_0$ .

Sea  $\theta_0$  fijo. La gráfica de  $\theta = \theta_0$  es un semiplano que contiene al eje  $z$ .

Sea  $\varphi_0$  fijo. La gráfica de  $\varphi = \varphi_0$  es un cono con vértice en el origen y una abertura angular  $2\varphi$ .

**OBSERVACIÓN 1.47.**

- (1) Si  $\rho$  es constante, las cantidades  $(\rho, \theta, \varphi)$  forman un sistema de coordenadas en la superficie de una esfera.
- (2) La latitud y la longitud en la superficie de la tierra también forman un sistema de coordenadas.

- (3) Si restringimos  $\theta$  de modo que  $-\pi < \theta < \pi$ , entonces se llama la longitud del punto en coordenadas esféricas.
- (4)  $\varphi$  se llama colatitud del punto y la latitud del punto es  $\pi/2 - \varphi$ .



**Ejercicios.**  
**Geometría plana y del espacio.**

(1) Representar gráficamente el conjunto de los puntos  $(x, y)$  del plano  $\mathbb{R}^2$  que satisfacen las siguientes desigualdades.

(a)  $|x| \leq 1$ ,

(g)  $y > x^2$  y  $|x| < 2$ ,

(b)  $|x| \leq 1$  y  $|y| \leq 1$ ,

(h)  $(2x - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - x) > 0$ ,

(c)  $|x| < 1$  y  $|y| < 1$ ,

(i)  $x < y < x^2$ ,

(d)  $|x| < 1$  y  $|y| \leq 1$ ,

(j)  $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 7 \geq 0$ ,

(e)  $3x^2 + 2y^2 < 6$ ,

(k)  $4x^2 + 9y^2 + 32x - 18y + 37 \leq 0$ ,

(f)  $|x - 3| < 1$  y  $|y| < |x|$ ,

(l)  $9x^2 - 4y^2 > 36$ .

(2) Identificar cada uno de los siguientes conjuntos de  $\mathbb{R}^3$ .

(a) Todos los puntos cuya distancia al plano  $yz$  es 5.

(b) Todos los puntos cuya distancia al eje  $z$  es 4.

(c) Todos los puntos cuya distancia al plano  $xy$  es 7.

(d) Todos los puntos cuyas distancias al plano  $xz$  y al plano  $yz$  son iguales.

(e) Todos los puntos cuyas distancias a los puntos  $(1, 1, 1)$  y  $(1, -1, 1)$  son iguales.

(3) Hallar las coordenadas  $(x, y)$  del vector (o vectores)  $\vec{v}$  de  $\mathbb{R}^2$  que cumplen:

(a)  $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$  y  $\vec{v}$  forma un ángulo de  $45^\circ$  con el eje  $x$ .

(b)  $\|\vec{v}\| = 1$  y  $\vec{v}$  es perpendicular al vector  $(1, 0)$ .

(c)  $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$  y  $\vec{v}$  es paralelo a  $(-2, 2)$ .

(d)  $\|\vec{v}\| = \sqrt{3}$  y  $\vec{v}$  forma un ángulo de  $30^\circ$  con el vector  $(\sqrt{3}, 1)$ .

(4) Calcular  $\vec{a} \times \vec{b}$ , donde

$$\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} \quad \vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}.$$

(5) Calcular  $\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle$  donde  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  son los vectores del ejercicio anterior y

$$\vec{c} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}.$$

(6) Hallar el volumen del paralelepípedo con lados

$$2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}, \quad 5\vec{i} - 3\vec{k}, \quad \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}.$$

(7) Hallar el volumen del paralelepípedo con lados

$$\vec{i}, \quad 3\vec{j} - \vec{k}, \quad 4\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}.$$

(8) Describir todos los vectores unitarios que son ortogonales a los siguientes vectores.

(a)  $\vec{i}, \vec{j}$

(c)  $-5\vec{i} + 9\vec{j} - 4\vec{k}, 7\vec{i} + 8\vec{j} + 9\vec{k}, \vec{0}$

(b)  $-5\vec{i} + 9\vec{j} - 4\vec{k}, 7\vec{i} + 8\vec{j} + 9\vec{k}$

(d)  $2\vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k}, -4\vec{i} + 8\vec{j} - 6\vec{k}$

(9) Sean  $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$  y  $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ . Calcular

$$\vec{u} + \vec{v}, \quad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle, \quad \|\vec{u}\|, \quad \|\vec{v}\|, \quad \vec{u} \times \vec{v}.$$

(10) Hallar una ecuación para el plano que

(a) es perpendicular a  $\vec{v} = (1, 1, 1)$  y pasa por  $(1, 0, 0)$ ;

(b) es perpendicular a  $\vec{v} = (1, 2, 3)$  y pasa por  $(1, 1, 1)$ ;

(c) es perpendicular a la recta de ecuación  $l(t) = (5, 0, 2)t + (3, -1, 1)$  y pasa por  $(5, -1, 0)$ ;

(d) es perpendicular a la recta de ecuación  $l(t) = (-1, -2, 3)t + (0, 7, 1)$  y pasa por  $(2, 4, -1)$ ;

(e) pasa por el punto  $(1, 2, -3)$  y es perpendicular a la recta de ecuación  $l(t) = (0, -2, 1) + (1, -2, 3)t$ .

(11) (a) Demostrar que  $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ , si y sólo si,  $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{0}$ .

(b) Demostrar que  $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} + (\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{u} + (\vec{w} \times \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{0}$  (*identidad de Jacobi*).

(12) Los puntos siguientes están dados en coordenadas cilíndricas; expresar cada uno en coordenadas rectangulares y en coordenadas esféricas.

(a)  $(1, 45^\circ, 1)$ ,

(d)  $(3, \frac{\pi}{6}, 4)$ ,

(b)  $(2, \frac{\pi}{2}, -4)$ ,

(e)  $(1, \frac{\pi}{6}, 0)$ ,

(c)  $(0, 45^\circ, 0)$ ,

(f)  $(2, \frac{3\pi}{4}, -2)$ .

(13) Cambiar los puntos siguientes de coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas y a coordenadas cilíndricas.

(a)  $(2, 1, -2)$ ,

(c)  $(\sqrt{2}, 1, 1)$ ,

(b)  $(0, 3, 4)$ ,

(d)  $(-2\sqrt{3}, -2, 3)$ .

(14) Describir el significado geométrico de las siguientes aplicaciones en coordenadas cilíndricas.

(a)  $(r, \theta, z) \longrightarrow (r, \theta, -z)$

(b)  $(r, \theta, z) \longrightarrow (r, \theta + \pi, -z)$

(c)  $(r, \theta, z) \longrightarrow (-r, \theta - \frac{\pi}{4}, z)$

(15) Representar gráficamente la región del plano cuyas coordenadas polares satisfacen:

(a)  $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi, 1 \leq r \leq 2$

(c)  $r \leq 1, |\theta| \leq \frac{\pi}{4}$

(b)  $r \operatorname{sen} \theta \leq 1, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$

(d)  $r \leq 4 \cos \theta, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

(16) Representar gráficamente el conjunto de los puntos  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$  que satisfacen la ecuación

$$x^2 + 2x + y^2 - 6y + z^2 - 15 = 0.$$

(17) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto  $(3, 4, 5)$  y es ortogonal al vector  $(1, 0, 0)$ .

(18) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto  $(5, 2, 4)$  y es ortogonal al vector  $(1, 2, 3)$ .

(19) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto  $(1, 3, 0)$  y es paralelo al plano de ecuación  $x + 5y - 10z = 8$ .

(20) Hallar la ecuación de la esfera con centro en el origen y radio  $R$  en coordenadas cilíndricas.

(21) Representar gráficamente cada uno de los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$  y expresarlos en coordenadas cilíndricas.

(a)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z\}$ ,

(b)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2\}$ ,

(c)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 9\}$ ,

(d)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 9, -1 \leq z \leq 1\}$ .

(22) Opcional: Decir cuáles de los conjuntos que aparecen en el Ejercicio 1 son abiertos, cuáles son cerrados y hallar su frontera.



## CAPÍTULO 2

### Curvas en el plano y en el espacio.

Funciones de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}^2$  y de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}^3$ . Ejemplos y motivación: movimiento circular uniforme, parabólico, etc. Vector tangente a una curva en términos de las funciones coordenadas. Recta tangente a una curva en términos del vector tangente a dicha curva. Reparametrización y longitud de arco. Trayectoria y forma de la trayectoria de una partícula en movimiento. (Interpretar la reparametrización de una curva como una forma de movimiento a lo largo de esa curva).

#### 1. Motivación.

##### Descripción del movimiento de un proyectil, despreciando la resistencia del aire.

Supongamos que se lanza un proyectil, con velocidad inicial 10 m/seg. y un ángulo de  $45^\circ$ . ¿Cómo describir el movimiento del proyectil?

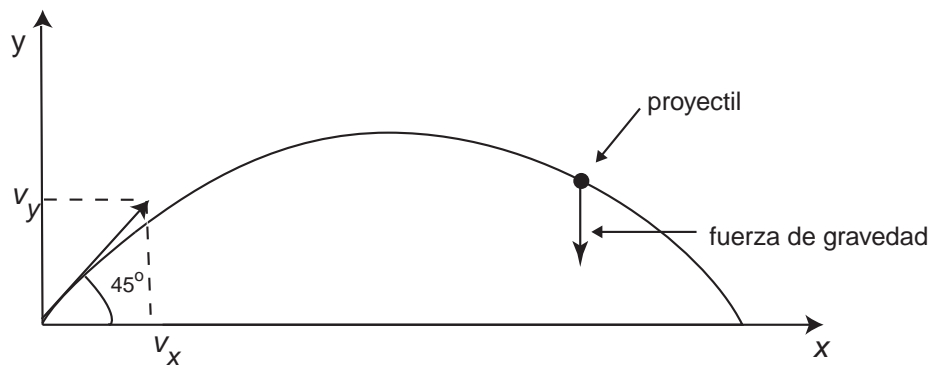


FIGURA 2.1. Lanzamiento de un proyectil

Tenemos que

$$v_x = 10 \cos 45^\circ = 5\sqrt{2},$$

$$v_y = 10 \operatorname{sen} 45^\circ = 5\sqrt{2}.$$

Tomaremos  $g = -10$  m/seg<sup>2</sup>. Así que tenemos que

$$y = y_o + v_y t + \frac{1}{2} g t^2 = 5\sqrt{2}t - 5t^2 = 5t(\sqrt{2} - t)$$

$$x = x_o + v_x t = 5\sqrt{2}t$$

El proyectil vuelve a tocar tierra cuando  $t = \sqrt{2}$ , ya que  $y$  se anula cuando  $t = 0$  y cuando  $t = \sqrt{2}$ .

Queremos averiguar qué forma tiene la trayectoria y cuál es la altura máxima,  $y_{\max}$ , que alcanza el proyectil.

Como  $x = 5\sqrt{2}t$  entonces  $t = \frac{x}{5\sqrt{2}}$ , luego

$$y = 5\sqrt{2}t - 5t^2 = x - \frac{x^2}{10}.$$

De donde sigue que la trayectoria del proyectil es una parábola.

Para hallar la altura máxima resolvemos la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{x}{5} = 0.$$

Tenemos que  $\frac{dy}{dx} = 0$  si y sólo si  $x = 5$ . De donde

$$y_{\max} = 5 - \frac{25}{10} = 2,5.$$

Este ejemplo nos muestra que, para describir el movimiento de un proyectil, debemos considerar cada una de sus coordenadas como una función del tiempo. Es decir, tenemos un par de funciones  $x(t)$ ,  $y(t)$ , tales que el proyectil se encuentra ubicado en el punto  $(x(t), y(t))$  en el instante  $t$ .

Esta es una de las razones por las que es muy natural considerar funciones a valores vectoriales.

Sea  $D \subset \mathbb{R}$ . Si tenemos un par de funciones  $g_1 : D \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$ , podemos considerar el par  $(g_1(t), g_2(t))$  y definir

$$g(t) = (g_1(t), g_2(t))$$

para  $t \in \mathbb{R}$ .

Así obtenemos una función  $g : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Análogamente se definen funciones a valores en  $\mathbb{R}^3$ .



Sea  $D \subset \mathbb{R}$ . Si tenemos  $g_1 : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g_3 : D \rightarrow \mathbb{R}$ , podemos definir  $g : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  mediante la fórmula

$$g(t) = (g_1(t), g_2(t), g_3(t)).$$

## 2. Curvas y trayectorias.

Con frecuencia se piensa en una curva como una línea, de diferentes formas, trazada en el papel o en el espacio. Debe quedar claro que para describir el movimiento de una partícula esto es bastante impreciso.

La definición precisa de curva y de trayectoria las daremos a continuación.

Sea  $n = 2$  ó  $n = 3$ . Sea  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  un intervalo.

DEFINICIÓN 2.1. Una *trayectoria* es una función  $g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

El concepto de trayectoria tiene una interpretación muy natural: Si queremos describir el movimiento de una partícula en el plano o en el espacio, debemos indicar en que posición se encuentra la partícula en cada instante. En otras palabras, a cada instante  $t$ , debemos asignarle un punto  $g(t)$  en el plano o en el espacio. Por lo tanto, podemos pensar en una trayectoria como una función que nos permite describir el movimiento de una partícula en el espacio  $n$ -dimensional.

DEFINICIÓN 2.2. Una *curva* es la imagen de una trayectoria. Es decir,  $G \subset \mathbb{R}^n$  es una curva si existe una trayectoria  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $G = g([a, b])$ .

Los puntos  $g(a)$  y  $g(b)$  se llaman los *extremos* de la trayectoria,  $g(a)$  es el extremo inicial y  $g(b)$  el extremo final. Si indicamos cual es la curva  $G$ , cual es su extremo inicial y cual es su extremo final, estamos indicando la dirección en que fue recorrida  $G$ . Por esto a la terna

$$(g([a, b]), g(a), g(b))$$

se le suele llamar *curva orientada*. A la trayectoria  $g$  se le suele llamar *parametrización* de la curva  $G$ .

También es usual considerar trayectorias cuyo dominio es toda la recta  $\mathbb{R}$ . En este caso no tenemos punto inicial, ni punto final, pero sí un sentido de recorrido. Se dice que una curva  $G$  es *cerrada* cuando su extremo final coincide con su extremo inicial.

## EJEMPLO 2.3.

(1) Sean  $\vec{p}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ,  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por

$$g(t) = \vec{p} + t\vec{v}.$$

Entonces  $g$  es una trayectoria, la curva correspondiente es la recta que pasa por  $\vec{p}$  en la dirección de  $\vec{v}$ .

(2) Sean  $g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$g(t) = (r \cos t, r \sin t).$$

Entonces  $g$  es una trayectoria, la curva correspondiente es una circunferencia de centro  $(0, 0)$  y radio  $r$ .

(3) Dada  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Sea  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$g(t) = (t, f(t)).$$

Entonces  $g$  es una trayectoria, la curva correspondiente es la gráfica de  $f$ .

(4) Sea  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$h(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t).$$

Entonces  $h$  es una trayectoria, la curva correspondiente es una *hélice*.

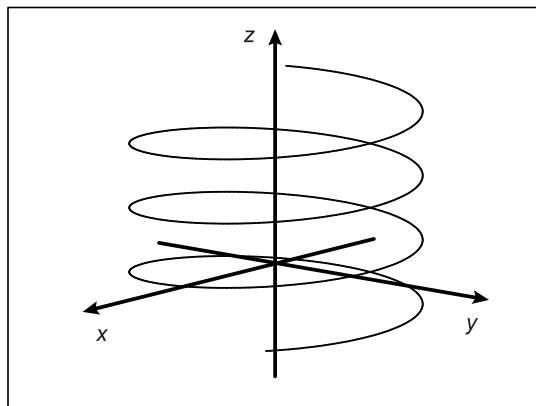


FIGURA 2.2. Hélice

Es importante notar que dos trayectorias diferentes pueden dar origen a la misma curva.

Podemos interpretar la existencia de dos trayectorias asociadas a la misma curva como dos formas diferentes de movimiento a lo largo de la curva dada.

### 3. Límites y continuidad de las trayectorias.

Nuevamente sea  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo y sea  $n = 2$  ó  $3$ .

DEFINICIÓN 2.4. Sean  $t_o \in I$ ,  $L \in \mathbb{R}^n$ ,  $g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  una trayectoria. Decimos que

$$\lim_{t \rightarrow t_o} g(t) = L$$

si para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta_\varepsilon > 0$  tal que si  $0 < |t - t_o| < \delta$  entonces  $\|g(t) - L\| < \varepsilon$ .

DEFINICIÓN 2.5. Sean  $t_o \in I$ ,  $g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  una trayectoria. Decimos que  $g$  es continua en  $t_o$  si

$$\lim_{t \rightarrow t_o} g(t) = g(t_o).$$

Sea  $g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función, entonces

$$g(t) = (g_1(t), \dots, g_n(t)),$$

donde  $g_k : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

Las funciones  $g_k$  se llaman funciones coordenadas y, en este caso, escribiremos

$$g = (g_1, \dots, g_n).$$

PROPOSICIÓN 2.6. Sean  $t_o \in I$ ,  $L = (L_1, \dots, L_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  una trayectoria.

- (a)  $\lim_{t \rightarrow t_o} g(t) = L$  si y sólo si  $\lim_{t \rightarrow t_o} g_k(t) = L_k$  para  $k = 1, \dots, n$ .
- (b)  $g$  es continua en  $t_o$  si y sólo si  $g_k$  es continua en  $t_o$  para  $k = 1, \dots, n$ .

### 4. Vector tangente a una curva.

Sea  $I$  un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$ .

DEFINICIÓN 2.7. Sean  $t_o \in I$ ,  $g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  una trayectoria. Decimos que  $g$  derivable en  $t_o$  si existe

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t_o + h) - g(t_o)}{h}.$$

Decimos que  $g$  es derivable en  $I$  cuando  $g$  es derivable en todo punto de  $I$ .

PROPOSICIÓN 2.8. Sean  $t_o \in I$ ,  $L = (L_1, \dots, L_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  una trayectoria.  $g$  es derivable en  $t_o$  si y sólo si  $g_k$  es derivable en  $t_o$  para  $k = 1, \dots, n$ .

En este caso,

$$g'(t) = (g'_1(t), \dots, g'_n(t)).$$

Esta última igualdad nos proporciona una manera de calcular derivadas de trayectorias.

DEFINICIÓN 2.9. Sea  $g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  una trayectoria derivable. El vector velocidad en  $g(t)$  es

$$g'(t) = (g'_1(t), \dots, g'_n(t)).$$

DEFINICIÓN 2.10. Sea  $g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  una trayectoria derivable. La rapidez en  $g(t)$  es la longitud del vector velocidad, es decir

$$\|g'(t)\| = \sqrt{(g'_1(t))^2 + \dots + (g'_n(t))^2}.$$

EJEMPLO 2.11. Sea

$$g(t) = \begin{cases} (t, t) & \text{si } t \geq 0 \\ (-t, t) & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Entonces

$$g'(t) = \begin{cases} (1, 1) & \text{si } t > 0 \\ (-1, 1) & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Notar que  $g'(t)$  no está definida para  $t = 0$ .

Por lo tanto

$$\|g'(t)\| = \sqrt{2} \quad t \neq 0.$$

#### 4.1. Interpretación geométrica de la derivada.

El vector derivada es paralelo a la recta tangente a la curva  $g$  en el punto  $g(t_o)$ . Esto se expresa diciendo que  $g'(t)$  es un vector tangente a la curva  $g$  en el punto  $g(t)$ . A manera de ejercicio, justificar este hecho de manera geométrica.

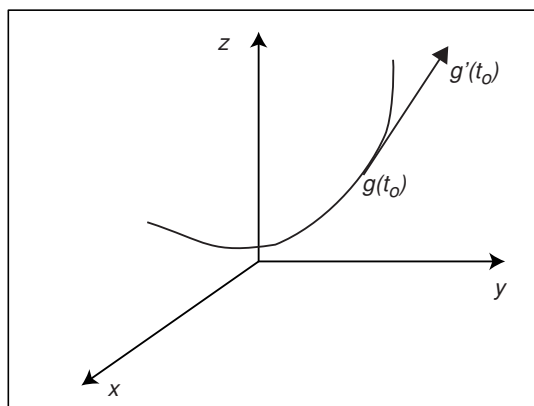


FIGURA 2.3. Vector tangente a una curva

La ecuación de la tangente a la curva  $g$  en  $g(t_0)$  en términos del vector tangente a dicha curva es:

$$\vec{u} = g(t_0) + tg'(t_0),$$

donde  $\vec{u} = (x, y)$  o  $\vec{u} = (x, y, z)$ , según  $n$  sea 2 ó 3.

EJEMPLO 2.12. Sean  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$g(t) = (\cos t, \sin t).$$

Entonces  $g$  es una trayectoria, la curva correspondiente es una circunferencia de centro  $(0, 0)$  y radio 1.

Como ejercicio, verificar que el vector  $g'(t)$  es ortogonal a  $g(t)$ , e interpretar geoméricamente.

EJEMPLO 2.13. Sea

$$g(t) = \begin{cases} (t^2, t^2) & \text{si } t \geq 0 \\ (-t^2, t^2) & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Notar que la curva que corresponde con la trayectoria  $g$  es el gráfico de la función valor absoluto.

Entonces

$$g'(t) = \begin{cases} (2t, 2t) & \text{si } t > 0 \\ (-2t, 2t) & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Notemos que  $g'(0)$  está definido y  $g'(0) = (0, 0)$ .

Tenemos que  $g'(t)$  es el vector tangente a la curva  $g$  en el punto  $g(t)$ . Además

$$\|g'(t)\| = \sqrt{4t^2 + 4t^2} = 2\sqrt{2}t.$$

OBSERVACIÓN 2.14. Puede ocurrir que una trayectoria  $g$  sea diferenciable y sin embargo la curva  $G = g(I)$  tenga “picos”. En ese caso no está definida una dirección tangente en el punto donde hay un “pico”.

En la función del Ejemplo 2.13 tenemos que  $g'(0) = (0, 0)$ . Sin embargo  $g$  tiene un pico en  $g(0) = (0, 0)$ . Por supuesto, no está definida una dirección tangente en  $(0, 0)$ . La interpretación física es la siguiente: Una partícula se mueve sobre la curva en dirección al origen, va disminuyendo su velocidad, se detiene en el origen y cambia la dirección del movimiento.

EJEMPLO 2.15. La cicloide es la trayectoria descrita por un punto moviéndose sobre una circunferencia que comienza a rodar, con velocidad constante. En el instante  $t$  el centro de la circunferencia está en el punto  $(t, 1)$ .

A manera de ejercicio, verificar que la siguiente trayectoria corresponde con una cicloide.

$$g(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \operatorname{cos} t) = (t, 1) - (\operatorname{sen} t, \operatorname{cos} t).$$

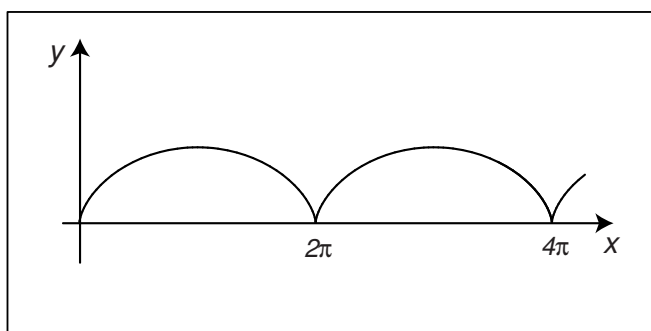


FIGURA 2.4. Cicloide

La cicloide tiene un “pico” en el punto  $(2\pi, 0)$ , sin embargo es derivable en ese punto.

OBSERVACIÓN 2.16. Para poder garantizar que una trayectoria diferenciable  $g$  no tenga “picos” es necesario pedirle  $g'(t) \neq 0$  para todo  $t$  en el dominio de  $g$ .

DEFINICIÓN 2.17. Se dice que una función es de clase  $C^1$  cuando es diferenciable y su derivada es continua.

De ahora en adelante consideraremos trayectorias  $g$ , que son diferenciables y tales que su derivada es continua, es decir, son de clase  $C^1$ .

### 5. Reparametrización.

EJEMPLO 2.18. Sean  $g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$g(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

y consideremos la curva cerrada  $G = g([0, 2\pi])$ .

Sea  $h : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$h(t) = (-\cos t, -\operatorname{sen} t).$$

Las dos trayectorias  $g$  y  $h$  dan origen a la misma curva, que es una circunferencia en el plano, con centro  $(0, 0)$  y radio 1. La trayectoria  $g$  recorre la circunferencia en sentido antihorario, comenzando en el punto  $(1, 0)$ . La trayectoria  $h$  también recorre la circunferencia en sentido antihorario, también comenzando en el punto  $(1, 0)$ .

Note que si definimos  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow [-\pi, \pi]$  por  $\alpha(t) = t - \pi$  tenemos  $g = h \circ \alpha$ .

En este caso se dice que  $h$  es una reparametrización de la curva  $G$  y que las trayectorias  $g$  y  $h$  son equivalentes.

En general, si tenemos dos trayectorias  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $h : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , diremos que  $g$  y  $h$  son equivalentes si existe una función  $\alpha : [a, b] \rightarrow [c, d]$  tal que

- (i)  $\alpha(a) = c, \alpha(b) = d$ .
- (ii)  $\alpha$  es derivable y  $\alpha'(t) > 0$  para todo  $t \in [a, b]$ .
- (iii)  $g = h \circ \alpha$ , esto es  $g(t) = h(\alpha(t))$  para todo  $t \in [a, b]$ .

En este caso se dice que  $h$  es una *reparametrización* de la curva  $g[a, b]$ .

### 6. Longitud de arco.

Sea  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  un intervalo acotado y sea  $g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  una trayectoria. Supongamos que  $P = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$  es una partición de  $I$ , entonces  $P$  da origen a una poligonal, que se obtiene uniendo los puntos  $g(t_0), g(t_1), \dots, g(t_N)$  en ese orden.

La longitud de esta poligonal es

$$\sum_{k=1}^N \|g(t_k) - g(t_{k-1})\|.$$

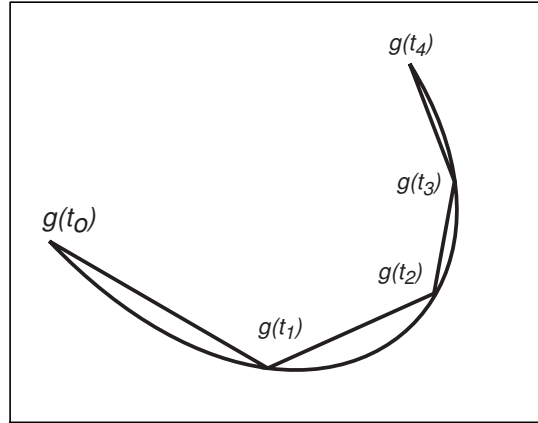


FIGURA 2.5. Poligonal

DEFINICIÓN 2.19. Se dice que una trayectoria  $g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  es *rectificable* si

$$\sup_{P \text{ partición de } I} \sum_{k=1}^N \|g(t_k) - g(t_{k-1})\|$$

existe y es finito.

Diremos que la curva  $G$  es rectificable si existe una parametrización de  $G$  que es rectificable.

DEFINICIÓN 2.20. Si  $g$  es una trayectoria rectificable, se define su *longitud* por

$$l(g) = \sup_{P \text{ partición de } I} \sum_{k=1}^N \|g(t_k) - g(t_{k-1})\|$$

Vamos a considerar cierta clase muy especial de trayectorias: las trayectorias lisas. Sea  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una trayectoria. Se dice que  $g$  es *lisa* si  $g$  es de clase  $\mathcal{C}^1$ . Es decir, cuando existe un intervalo abierto  $V$ , que contiene a  $[a, b]$  y una extensión de  $g$  a  $V$  que tiene derivada continua.

Tenemos el siguiente resultado, que no vamos a demostrar. Sin embargo daremos una justificación intuitiva.

TEOREMA 2.21. *Sea  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una trayectoria lisa. Entonces  $g$  es rectificable y*

$$l(g) = \int_a^b \|g'(t)\| dt.$$

JUSTIFICACIÓN INTUITIVA.

Sea  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  una trayectoria lisa.



Sea  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$  entonces

$$\|g(t_k) - g(t_{k-1})\| = \sqrt{(g_1(t_k) - g_1(t_{k-1}))^2 + (g_2(t_k) - g_2(t_{k-1}))^2 + (g_3(t_k) - g_3(t_{k-1}))^2}.$$

Por el teorema del valor medio tenemos que

$$\begin{aligned} g_1(t_k) - g_1(t_{k-1}) &= g'_1(t_k^1)(t_k - t_{k-1}), \\ g_2(t_k) - g_2(t_{k-1}) &= g'_2(t_k^2)(t_k - t_{k-1}), \\ g_3(t_k) - g_3(t_{k-1}) &= g'_3(t_k^3)(t_k - t_{k-1}), \end{aligned}$$

donde  $t_k^1$ ,  $t_k^2$  y  $t_k^3$  son puntos que se encuentran entre  $t_{k-1}$  y  $t_k$ .

Por lo tanto

$$\|g(t_k) - g(t_{k-1})\| = \left( \sqrt{(g'_1(t_k^1))^2 + (g'_2(t_k^2))^2 + (g'_3(t_k^3))^2} \right) (t_k - t_{k-1}).$$

Luego

$$\sum_{k=1}^N \|g(t_k) - g(t_{k-1})\| = \sum_{k=1}^N \left( \sqrt{(g'_1(t_k^1))^2 + (g'_2(t_k^2))^2 + (g'_3(t_k^3))^2} \right) (t_k - t_{k-1}).$$

Si hacemos tender  $N$  a  $+\infty$  y la separación entre los  $t_k$  la hacemos cada vez más pequeña esta suma se parece a

$$\sum_{k=1}^N \|g'(t_k)\| (t_k - t_{k-1}),$$

que a su vez tiende a

$$\int_a^b \|g'(t)\| dt.$$

□

OBSERVACIÓN 2.22. En la justificación anterior tenemos que

$$\int_a^b \|g'(t)\| dt \approx \sum_{k=1}^N \|g'(t_k)\| (t_k - t_{k-1}),$$

siempre que  $N$  sea “grande” y la separación entre los  $t_k$  “pequeña”.

Esto es porque  $\|g'(t_k)\| (t_k - t_{k-1})$  aproxima muy bien a la longitud de un pedazo “pequeño” de curva y al sumar aproximamos la longitud de la curva.

En Física y otras aplicaciones prácticas es usual pensar en

$$\|g'(t)\| dt$$

como la longitud de un parte muy pequeña de la curva, se le suele llamar *elemento de longitud de arco* y es usual hacer razonamientos y deducciones sobre estos elementos, que después se extienden a toda la curva a través de la integral.

En el siguiente capítulo veremos un ejemplo, al estudiar trabajo mecánico.

**DEFINICIÓN 2.23.** Diremos que una curva  $G$  es *lisa* si puede ser parametrizada por una trayectoria lisa. En este caso definimos la *longitud* de  $G$  como  $l(G) = l(g)$  donde  $g$  es una parametrización lisa de  $G$ .

Se puede probar que la longitud de una curva es independiente de su parametrización.

**EJEMPLO 2.24.** La función  $g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $g(t) = (R \cos t, R \sin t)$  es una parametrización de la circunferencia de radio  $R$  y su longitud es:

$$\int_0^{2\pi} \|g'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R.$$

**EJERCICIO 2.25.** Demostrar que la longitud del gráfico de una función diferenciable, con derivada continua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt.$$

Indicación: considerar la parametrización  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $g(t) = (t, f(t))$ .

**Ejercicios.****Curvas en el plano y en el espacio.**

(1) Sea

$$g(t) = \left( t^3, [t], \frac{\operatorname{sen} t}{t} \right).$$

(a) Halle el dominio de  $g$ .

(b) Determine cuáles de los siguientes límites existen

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t),$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} g(t),$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t).$$

(c) Indique los puntos de continuidad de  $g$ .(d) Indique los puntos de discontinuidad de  $g$ .(2) Demostrar que si  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  si está definida por

$$g(t) = (c_1, c_2, c_3),$$

donde  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ , entonces

$$g'(t) = (0, 0, 0).$$

Interpretar desde el punto de vista físico.

(3) Sea  $n = 2$  ó  $n = 3$ . Sea  $I$  un intervalo abierto y sean  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  funciones diferenciables.

Demuestre que

(a) Si  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $g$  es derivable en  $t$ , entonces  $\lambda g$  es derivable en  $t$  y

$$(\lambda g)'(t) = \lambda g'(t).$$

(b) Si  $f$  y  $g$  son derivables en  $t$  entonces  $f + g$  es derivable en  $t$ . Además

$$(f + g)'(t) = f'(t) + g'(t).$$

(c) Si  $f$  y  $g$  son derivables en  $t$  entonces  $\langle f, g \rangle$  es derivable en  $t$ . Además

$$\langle f, g \rangle'(t) = \langle f'(t), g(t) \rangle + \langle f(t), g'(t) \rangle.$$

(d) Si  $f$  y  $g$  son derivables en  $t$  entonces  $\langle f, g \rangle$  es derivable en  $t$ . Además

$$(f \times g)'(t) = (f'(t) \times g(t)) + (f(t) \times g'(t)).$$

(e) Si  $g$  es derivable en  $t$  entonces

$$\frac{d}{dt} \|g(t)\| = \frac{\langle g(t), g'(t) \rangle}{\|g(t)\|}.$$

(f) Si  $\|g(t)\|$  es constante entonces  $g(t)$  es perpendicular a  $g'(t)$ .

(4) Hallar una parametrización de la elipse

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1,$$

recorrida en sentido anti-horario.

(5) Hallar la rapidez de la trayectoria  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $g(t) = (R \cos \omega t, R \sin \omega t)$ , ( $R$  y  $\omega$  son constantes).

Encontrar una reparametrización que tenga rapidez 1.

(6) Hallar la rapidez de la trayectoria  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $g(t) = (R \cos \omega t, R \sin \omega t, bt)$ , ( $R$ ,  $\omega$  y  $b$  son constantes).

Encontrar una reparametrización que tenga rapidez 1.

(7) Parametrizar el segmento de recta que une los puntos  $(1, 3)$  y  $(4, 5)$

(8) Hallar la longitud de cada una de las siguientes curvas.

(a)  $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln x, \quad 1 \leq x \leq 2.$

(b)  $y = 2x^{3/2}, \quad 0 \leq x \leq 2.$

(c)  $y = \sqrt{36 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq 4.$

(d)  $y = x^2, \quad 0 \leq x \leq 2.$

(e)  $x = 3t, y = \operatorname{sen} t, \quad 0 \leq t \leq \pi.$

(9) Una partícula se mueve en el plano, de manera que en el instante  $t$  se encuentra ubicada en el punto

$$\left( \frac{4t}{t^2 + 4}, \frac{t^2 - 4}{t^2 + 4} \right).$$

demostrar que la partícula se mueve en una circunferencia con centro en el origen.

(10) Sea  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  la trayectoria definida por  $g(t) = (e^t, t)$ .

(a) Representar gráficamente la curva  $g$ .

(b) Representar gráficamente los vectores tangentes  $g'(0)$  y  $g'(1)$ .

(11) Representar gráficamente la curva asociada a la trayectoria  $(x, y) = (t^4, t^8)$ . Verificar que esta parametrización no define un vector tangente en el origen. ¿Será posible encontrar otra parametrización que sí defina un vector tangente en el origen?



## CAPÍTULO 3

### Integrales de línea.

Integrales de línea. Interpretación como trabajo mecánico.

#### 1. Definición y ejemplos de integrales de línea.

Un campo vectorial es una función de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^m$ .

Si  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es un campo vectorial, entonces

$$F = (F_1, \dots, F_m),$$

donde  $F_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

Por ejemplo  $F(x, y) = (x^2, \text{sen}(x + y))$  es un campo vectorial de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$ .

DEFINICIÓN 3.1. Sea  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial y  $G$  una curva lisa orientada. La *integral de línea* de  $F$  a lo largo de  $G$  es

$$\int_G F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n = \int_a^b ( F_1(g(t)) g'_1(t) + \dots + F_n(g(t)) g'_n(t) ) dt.$$

donde  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una parametrización de  $G$  y  $F_1, \dots, F_n$  son las funciones coordenadas de  $F$ .

La integral de línea mide el comportamiento de  $F$  a lo largo de  $G$ .

OBSERVACIÓN 3.2. En el caso  $n = 2$  es usual utilizar  $(x, y)$  en vez de  $(x_1, x_2)$ , así que, para  $n = 2$  se suele escribir

$$\int_G F_1 dx + F_2 dy = \int_a^b ( F_1(g(t)) g'_1(t) + F_2(g(t)) g'_2(t) ) dt.$$

Análogamente, para  $n = 3$  se suele escribir

$$\int_G F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \int_a^b ( F_1(g(t)) g'_1(t) + F_2(g(t)) g'_2(t) + F_3(g(t)) g'_3(t) ) dt.$$

EJEMPLO 3.3. Calcular

$$\int_G (x^2 + y) dx + y^2 dy + z^2 dz,$$

donde  $g(t) = (t, t^2, t^3)$  para  $0 \leq t \leq 1$  y  $G = g[0, 1]$

Sea  $F(x, y, z) = (x^2 + y, y^2, z^2)$ , entonces

$$\begin{aligned} \int_G (x^2 + y) dx + y^2 dy + z^2 dz &= \int_G F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz \\ &= \int_0^1 (F_1(t, t^2, t^3) \cdot 1 + F_2(t, t^2, t^3) 2t + F_3(t, t^2, t^3) 3t^2) dt \\ &= \int_0^1 (t^2 + t^2 + t^4 2t + t^6 3t^2) dt \\ &= \int_0^1 (2t^2 + 2t^5 + 3t^8) dt = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Es importante notar que, para calcular la integral de línea, formalmente consideramos  $x = g_1(t)$ ,  $y = g_2(t)$ ,  $z = g_3(t)$ . Así

$$F_k(x, y, z) = F_k(g(t)) = F_k(g_1(t), g_2(t), g_3(t))$$

y  $dx = g'_1(t) dt$ ,  $dy = g'_2(t) dt$ ,  $dz = g'_3(t) dt$ .

### 1.1. Independencia de la Trayectoria.

Tenemos que la integral de línea sobre una curva orientada  $G$  es independiente de la trayectoria, más precisamente.

Sean  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  una trayectoria lisa y sea  $h : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$  una reparametrización de  $g$ . Sea  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial, entonces

$$\int_a^b (F_1(g(t)) g'_1(t) + \dots + F_n(g(t)) g'_n(t)) dt = \int_c^d (F_1(h(u)) h'_1(u) + \dots + F_n(h(u)) h'_n(u)) du.$$

EJEMPLO 3.4. Sea  $F(x, y) = (x, -y)$  y  $G$  el segmento de la circunferencia de centro  $\vec{0}$  y radio 1 que está en el primer cuadrante, orientado en sentido antihorario. Calcular

$$\int_G F_1 dx + F_2 dy.$$



Sea  $g(t) = (\cos t, \sin t)$  para  $0 \leq t \leq \pi/2$ , así  $G = g[0, \pi/2]$ . Luego

$$\begin{aligned} \int_G F_1 dx + F_2 dy &= \int_0^{\pi/2} (F_1(\cos t, \sin t)(-\sin t) + F_2(\cos t, \sin t) \cos t) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (\cos t(-\sin t) - \sin t \cos t) dt \\ &= - \int_0^{\pi/2} \sin(2t) dt \\ &= \frac{\cos(2t)}{2} \Big|_0^{\pi/2} = -1. \end{aligned}$$

EJEMPLO 3.5. Sea  $G$  la curva dada por  $g(t) = (t, t^2, t)$  para  $0 \leq t \leq 1$ . Calcular la integral de línea del campo vectorial

$$F(x, y, z) = (x^2, y^2 + 2, xz + y - 1)$$

sobre la trayectoria  $g$ .

Lo que debemos calcular es

$$\int_G x^2 dx + (y^2 + 2) dy + (xz + y - 1) dz.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \int_G x^2 dx + (y^2 + 2) dy + (xz + y - 1) dz &= \int_0^1 (F_1(t, t^2, t) + F_2(t, t^2, t) 2t + F_3(t, t^2, t)) dt \\ &= \int_0^1 (t^2 + (t^4 + 2) 2t + (tt + t^2 - 1)) dt \\ &= \int_0^1 (2t^5 + 3t^2 + 4t - 1) dt = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 3.6. Sea  $G$  la curva dada por  $g(t) = (t, -t, t^2, -t^2)$  para  $0 \leq t \leq 1$ . Calcular

$$\int_G (x - y) dx + (y - z) dy + (z - w) dz + (w - x) dw.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \int_G (x - y) dx + (y - z) dy + (z - w) dz + (w - x) dw &= \\ &= \int_0^1 [2t - (-t - t^2) + 2t^2 2t - (-t^2 - t)2t] dt = \dots = 4. \end{aligned}$$

### Otra notación para las integrales de línea.

Es usual denotar la integral de línea del campo vectorial  $F$  a lo largo de la curva  $G$  por

$$\int_G F \cdot d\vec{x}.$$

Esta notación se justifica por el siguiente formalismo:

- (a)  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  es otra notación para  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ ,
- (b)  $\vec{x} = (x, y, z)$ , de manera que  $d\vec{x} = (dx, dy, dz)$ ,
- (c) como  $F = (F_1, F_2, F_3)$ , tenemos que

$$\begin{aligned} F \cdot d\vec{x} &= (F_1, F_2, F_3) \cdot (dx, dy, dz) \\ &= \langle (F_1, F_2, F_3), (dx, dy, dz) \rangle \\ &= F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz. \end{aligned}$$

### Cambio de orientación en una curva.

Si  $G$  es una curva orientada, por  $-G$  denotaremos la misma curva orientada en sentido contrario. Tenemos el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 3.7. *Sea  $G$  una curva lisa entonces*

$$\int_{-G} F \cdot d\vec{x} = - \int_G F \cdot d\vec{x}.$$

## 2. Interpretación como trabajo mecánico.

A continuación veremos la interpretación física de la integral de línea.

Notemos primero que

$$\int_G F \cdot d\vec{x} = \int_a^b \langle F(g(t)), g'(t) \rangle dt = \int_a^b \langle F(g(t)), \frac{g'(t)}{\|g'(t)\|} \rangle \|g'(t)\| dt$$

si la curva  $G$  corresponde con la trayectoria  $g$ .

Consideremos una partícula que se mueve a lo largo de la trayectoria  $g$  y que está sometida a un campo de fuerzas  $F$ .

Recordemos que, en movimiento unidimensional y cuando la fuerza es constante, el trabajo es igual al producto escalar de la fuerza por el desplazamiento, es decir, el trabajo es el producto de la longitud de la proyección de la fuerza en la dirección del desplazamiento, multiplicado por la longitud del desplazamiento.

Cuando consideramos un elemento de longitud de arco, como el desplazamiento es tan pequeño, podemos aproximar el movimiento por un movimiento unidimensional en la dirección de la tangente a la curva, que es  $\frac{g'(t)}{\|g'(t)\|}$ .

Tenemos que

$$\left\langle F(g(t)), \frac{g'(t)}{\|g'(t)\|} \right\rangle$$

es la proyección del vector  $F(g(t))$  (la fuerza), en la dirección de  $g'(t)$  (que es la dirección del desplazamiento),

$$\|g'(t)\| dt$$

es el elemento de longitud de arco.

Por lo tanto, el trabajo realizado al mover la partícula a lo largo del elemento de longitud de arco es

$$\left\langle F(g(t)), \frac{g'(t)}{\|g'(t)\|} \right\rangle \|g'(t)\| dt.$$

Para obtener el trabajo total debemos “sumar” los trabajos correspondientes a cada uno de los elementos de longitud de arco, para esto integramos y obtenemos que la integral de línea es el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de la trayectoria  $g$ , que está sometida al campo de fuerzas  $F$ .

### 3. Lectura adicional: Integrales de línea sobre curvas lisas a trozos.

DEFINICIÓN 3.8. Sea  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una trayectoria. Diremos que  $g$  es *lisa a trozos* si  $g$  es continua y si existe una partición  $P = \{t_0, \dots, t_N\}$  de  $[a, b]$  tal que, para  $i = 1, \dots, N$ ,

$$g|_{[t_{i-1}, t_i]}$$

es una trayectoria lisa

Se dice que una curva  $G$  es *lisa a trozos* si puede ser parametrizada por una trayectoria lisa a trozos.



FIGURA 3.1. Curva lisa a trozos

En este caso

$$G = G_1 \cup \cdots \cup G_N,$$

donde cada  $G_i$  es una curva lisa y la integral de línea de  $F$  sobre  $G$  se define de la siguiente manera

$$\int_G F \cdot d\vec{x} = \int_{G_1} F \cdot d\vec{x} + \cdots + \int_{G_N} F \cdot d\vec{x}.$$

**Ejercicios.**  
**Integrales de línea.**

(1) En los siguientes casos, calcular

$$\int_C -y \, dx + x \, dy \quad \text{y} \quad \int_C x \, dx + y \, dy.$$

- (a)  $C$  es la circunferencia con centro  $(0, 0)$  y radio 5, recorrida en sentido antihorario.
- (b)  $C$  es la circunferencia con centro  $(0, 0)$  y radio 5, recorrida en sentido horario.
- (c)  $C$  es el segmento que une a  $(0, 1)$  con  $(3, 5)$ .
- (d)  $C$  es el cuadrado con vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$  y  $(0, 1)$  recorrido en sentido antihorario.
- (e)  $C$  es la elipse  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$ , recorrida en sentido horario.

(2) Una partícula se mueve a lo largo de la trayectoria

$$x = t + 1, \quad y = 2t^2 + t + 3, \quad z = 2t, \quad 0 \leq t \leq 5,$$

sometida al campo de fuerzas

$$F(x, y, z) = (x + y, 3y, 2z).$$

Hallar el trabajo realizado.

(3) Calcular las siguientes integrales de línea:

- (a)  $\int_L x \, dx + x \, dy + y \, dz$ , donde  $L$  está dada por  $g(t) = (t, t, t)$  para  $2 \leq t \leq 1$ .
- (b)  $\int_P (x + y) \, dx + dy$ , donde  $P$  está dada por  $g(t) = (t, t^2)$  para  $1 \leq t \leq 3$ .
- (c)  $\int_G e^x \, dx + z \, dy + \sin z \, dz$ , donde  $G$  es  $(x, y, z) = (t, t^2, t^6)$  para  $0 \leq t \leq 1$ .



## Bibliografía

- [1] ALSON, P. *Cálculo Básico*. Editorial Erro.
- [2] APOSTOL, T. *Calculus Volumen 1*. Editorial Reverté.
- [3] APOSTOL, T. *Calculus Volumen 2*. Editorial Reverté.
- [4] BRUZUAL, R. Y DOMÍNGUEZ, M. *Guía de problemas de Cálculo III para Matemáticos*. Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela.
- [5] BRUZUAL, R. Y DOMÍNGUEZ, M. *Cálculo diferencial en una variable*. Publicaciones del Laboratorio de Formas en Grupos, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela.
- [6] BRUZUAL, R. Y DOMÍNGUEZ, M. *Cálculo integral en una variable*. Publicaciones del Laboratorio de Formas en Grupos, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela.
- [7] BRUZUAL, R. Y DOMÍNGUEZ, M. *Cálculo diferencial en varias variables*. Publicaciones del Laboratorio de Formas en Grupos, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela.
- [8] BRUZUAL, R. Y DOMÍNGUEZ, M. *Cálculo integral en varias variables*. Publicaciones del Laboratorio de Formas en Grupos, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela.
- [9] DEMINOVICH, B. *Problemas y ejercicios de Análisis Matemático*. Editorial Paraninfo.
- [10] EDWARDS, C. H. Y PENNEY, D.E. *Ecuaciones diferenciales elementales con aplicaciones*. Prentice Hall.
- [11] MARSDEN, J. Y TROMBA, A. *Cálculo Vectorial* Fondo Educativo Interamericano. Addison-Wesley.
- [12] MIRANDA, GUILLERMO *Matemática III - Física* Fac. Ciencias. UCV.
- [13] PROTTER, M. H. AND MORREY, C. B. *A First Course in Real Analysis*.
- [14] SWOKOWSKY, E. W. *Cálculo con Geometría Analítica*. Grupo Editorial Iberoamericana.





## Índice

- bola
  - abierta, 20
  - cerrada, 20
- círculo, 4
- Cauchy-Schwarz, desigualdad de, 9
- cilindro, 17
- circunferencia, 4
- conjunto
  - abierto, 20, 21
  - cerrado, 20, 21
- cono, 17
- coordenadas cilíndricas, 23
- coordenadas esféricas, 25
- coordenadas polares, 22
- curva, 35
  - cerrada, 35
  - lisa, 44
  - lisa a trozos, 54
  - orientada, 35
  - rectificable, 42
- disco
  - abierto, 20
  - cerrado, 20
- distancia
  - en el espacio, 7
  - en el plano, 3
- elipsoide, 16
- esfera, 7, 15
- frontera, 20, 21
- hélice, 36
- hiperboloide
  - de dos hojas, 18
  - de una hoja, 18
- integral de línea, 49
- longitud
  - de una curva, 44
  - de una trayectoria, 42
- paraboloide
  - de revolución, 16
  - hiperbólico, 19
- parametrización
  - de una curva, 35
- plano, 12
  - ecuación cartesiana, 13
  - ecuaciones paramétricas, 13
  - otra ecuación vectorial, 13
- producto cruz, 10
- producto escalar
  - en el espacio, 8
  - en el plano, 7
- producto vectorial, 10
- puntos interiores, 20
- recta
  - ecuación vectorial, 11
  - ecuaciones paramétricas, 12
- recta en el espacio, 11
- rectas
  - paralelas, 12

- perpendiculares, 12
- rectificable, 42
- reparametrización, 41
  
- trayectoria, 35
  - lisa a trozos, 53
- trayectorias equivalentes, 41
  
- vector director, 11
- vectores ortogonales, 8
- vectores paralelos
  - en el espacio, 6
  - en el plano, 3
- vectores perpendiculares, 8