UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA
LABORATORIO DE FORMAS EN GRUPOS

Introducción a las sucesiones y series numéricas

Ramón Bruzual
Marisela Domínguez

Caracas, Venezuela
Septiembre 2005

Ramón Bruzual
Correo-E: rbruzual@euler.ciens.ucv.ve

Marisela Domínguez
Correo-E: mdomin@euler.ciens.ucv.ve

Laboratorio de Formas en Grupos
Centro de Análisis
Escuela de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad Central de Venezuela

http://euler.ciens.ucv.ve/~labfg

Nota: Este material está disponible en la página web
http://euler.ciens.ucv.ve/~labfg/guias.htm
En general mantenemos una réplica en un servidor externo a la Universidad Central de Venezuela, el vínculo se encuentra indicado en esa misma página web.

Prólogo

Estas notas han sido concebidas para ser utilizadas en la parte de Sucesiones y Series Numéricas, del curso de Matemática III de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela. En este curso participan estudiantes de las Licenciaturas en Biología, Geoquímica, Química, Computación, Física y Matemática.

El trabajo de mecanografía y la elaboración de los gráficos está a cargo de los autores. Agradecemos cualquier observación o comentario que deseen hacernos llegar.

Ramón Bruzual.
Marisela Domínguez.
Septiembre 2005.

CONTENIDO

CAPÍTULO 1

Sucesiones numéricas.

Este capítulo es un repaso de cursos previos.

Concepto de sucesión y ejemplos. Límite de una sucesión. Propiedades del límite. Cálculo de límites de sucesiones.

1. Definiciones y resultados básicos

La idea de sucesión en $\mathbb{R}$ es la de una lista de puntos de $\mathbb{R}$.

Son ejemplos de sucesiones:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

$$2, 4, 6, 8, 10, \dots$$

$$1, 4, 9, 25, 36, \dots$$

$$1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots$$

$$1, 10, 100, 1.000, 10.000, \dots$$

$$1, -1, 1, -1, 1, \dots$$

Lo importante acerca de una sucesión es que a cada número natural n le corresponde un punto de $\mathbb{R}$, por esto damos la siguiente definición.

Definición 1.1. Una sucesión es una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$.

Si $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es una sucesión en vez de escribir $a(1), a(2), a(3), \dots$ suele escribirse

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

La misma sucesión suele designarse mediante un símbolo tal como $\{a_n\}$, (a_n) ó $\{a_1, a_2, \dots\}$. También usaremos $\{a_n\}$, (a_n) ó $\{a_1, a_2, \dots\}$.

Ejemplo 1.2. La sucesión de Fibonacci $\{a_n\}$ está definida por

$$a_1 = a_2 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Esta sucesión fue descubierta por Fibonacci (1175-1250. aprox.) en relación con un problema de conejos. Fibonacci supuso que una pareja de conejos criaba una nueva pareja cada mes y que después de dos meses cada nueva pareja se comportaba del mismo modo. El número a_n de parejas nacidas en el n-ésimo mes es $a_{n-1} + a_{n-2}$, puesto que nace una pareja por cada pareja nacida en el mes anterior, y además cada pareja nacida hace dos meses produce ahora una pareja nueva.

Una sucesión, al igual que toda función, tiene una representación gráfica.

Por ejemplo, sean

$$\alpha_n = n$$
$$\beta_n = (-1)^n$$
$$\gamma_n = \frac{1}{n}$$

Las gráficas de $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ y $\{\gamma_n\}$ son las siguientes:

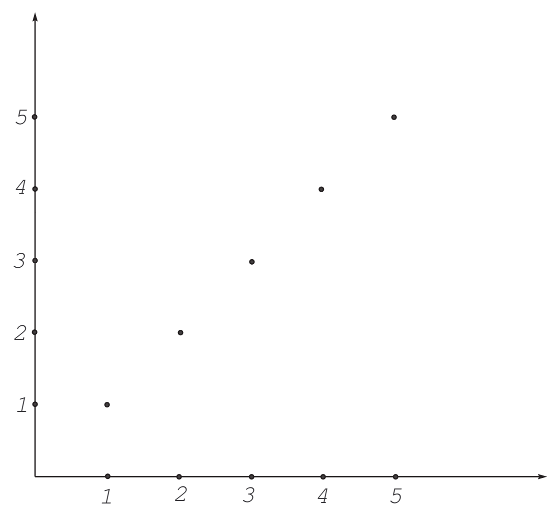

FIGURA 1.1. $\{\alpha_n\}$

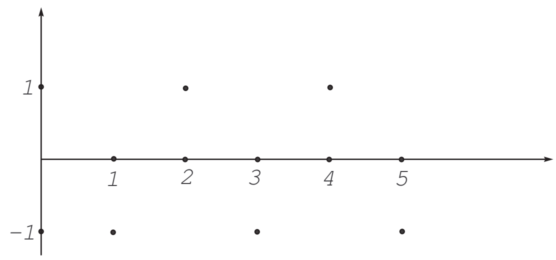

Figura 1.2. $\{\beta_n\}$

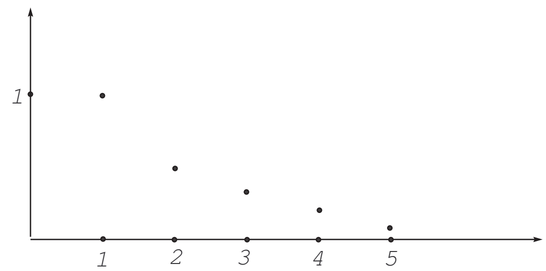

Figura 1.3. $\{\gamma_n\}$

Sin embargo se obtiene una mejor representación de una sucesión marcando los puntos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sobre una recta:

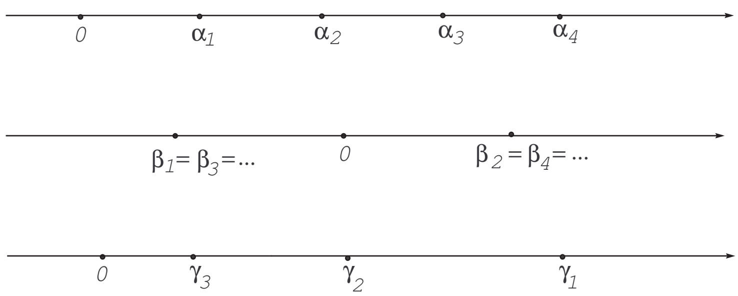

Figura 1.4.

Este tipo de diagramas nos indican "hacia donde va" la sucesión.

Definición 1.3. Una sucesión $\{a_n\}$ es acotada si $\{a_1, a_2, \ldots\}$ es un conjunto acotado. Es decir, si existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $|a_n| \leq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definición 1.4. Una sucesión $\{a_n\}$ es acotada superiormente si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq M$.

EJEMPLO 1.5. Sea $a_n = 1/n$. Entonces la sucesión $\{a_n\}$ es acotada superiormente por $M = 1$.

DEFINICIÓN 1.6. Una sucesión $\{a_n\}$ es acotada inferiormente si existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \geq m$.

EJEMPLO 1.7. Sea $a_n = n$. Entonces la sucesión $\{a_n\}$ es acotada inferiormente por $m = 1$.

PROPOSICIÓN 1.8. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión, $\{a_n\}$ es acotada si y sólo si $\{a_n\}$ es acotada superiormente y $\{a_n\}$ es acotada inferiormente.*

2. Sucesiones convergentes.

En lo que sigue $\{a_n\}$ denotará una sucesión de números reales.

DEFINICIÓN 1.9. $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ si:
para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $|a_n - L| < \varepsilon$.

En este caso se dice que la sucesión $\{a_n\}$ converge a $L \in \mathbb{R}$, o límite de $\{a_n\}$ es L.

Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ es convergente si existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\{a_n\}$ converge a L; se dice que es divergente (o que diverge) si no es convergente.

EJEMPLO 1.10. Sea $a_n = 1/n$ entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

EJEMPLO 1.11. Sea $a_n = n!$ entonces $\{a_n\}$ es divergente.

TEOREMA 1.12 (unicidad del límite). *Una sucesión convergente tiene uno y sólo un límite.*

PROPOSICIÓN 1.13. *si $\{a_n\}$ es una sucesión que converge a cero y $\{b_n\}$ es una sucesión acotada entonces la sucesión $\{a_nb_n\}$ converge a cero.*

TEOREMA 1.14. *Si $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ son sucesiones tales que $a_n \leq b_n \leq c_n$ para todo n y*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = L.$$

Entonces

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = L.$$

3. El número e.

Se puede probar que la siguiente sucesión converge:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Su límite es único y es conocido como el número e:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

También se puede probar:

(a) $2 < e < 3$
(b) el número e es irracional.

4. Sucesiones monótonas.

Definición 1.15. Una sucesión $\{a_n\}$ es monótona creciente si $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 1.16. Sea $a_n = n$. Entonces la sucesión $\{a_n\}$ es monótona creciente.

Definición 1.17. Una sucesión $\{a_n\}$ es monótona decreciente si $a_{n+1} \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 1.18. Sea $a_n = 1/n$. Entonces la sucesión $\{a_n\}$ es monótona decreciente.

Teorema 1.19.

(i) *Toda sucesión monótona creciente y acotada superiormente es convergente.*
(ii) *Toda sucesión monótona decreciente y acotada inferiormente es convergente.*

5. Operaciones con sucesiones

Teorema 1.20. *Sean $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ sucesiones convergentes.*
Sean $x = \lim_{n\to+\infty} x_n$, $y = \lim_{n\to+\infty} y_n$. Entonces:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n + y_n = x + y.$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que

(a) si $n \geq N_1$ entonces $|x_n - x| < \varepsilon/2$.
(b) si $n \geq N_2$ entonces $|y_n - y| < \varepsilon/2$.

Sea $N = max\{N_1, N_2\}$. Si $n \geq N$ entonces

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (x + y)| &= |(x_n - x) + (y_n) - y)| \\ &\leq |x_n - x| + |y_n - y| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

De donde

$$\lim_{n \to +\infty} x_n + y_n = x + y.$$

□

Teorema 1.21. *Sean $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ sucesiones convergentes.*
Sean $x = \lim_{n \to +\infty} x_n$, $y = \lim_{n \to +\infty} y_n$. Entonces:

$$\lim_{n \to +\infty} x_n \cdot y_n = x \cdot y.$$

Teorema 1.22. *Sean $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ sucesiones convergentes.*
Sean $x = \lim_{n \to +\infty} x_n$, $y = \lim_{n \to +\infty} y_n$. Si $y_n \neq 0$ para todo n, $y \neq 0$, entonces

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}.$$

A los lectores interesados en el Análisis Matemático se les recomienda consultar en algunos de los libros de la bibliografía las demostraciones de estos dos últimos teoremas.

6. Repaso de la regla de L'Hôpital.

La regla de L'Hôpital permite calcular límites indeterminados para funciones de variable real.

Las principales indeterminaciones las agruparemos en tres grupos:

(a) $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$,
(b) $\infty - \infty$, $-\infty + \infty$,
(c) 0^0, 1^∞, ∞^0.

6.1. Indeterminaciones de la forma $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$.

Teorema 1.23 (Regla de L'Hopital). *Sean f y g funciones diferenciables en un intervalo de la forma $(a - r, a + r)$ $a, r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Supongamos que*

(a) $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$
(b) $g'(x) \neq 0$ *para todo x en $(a - r, a + r)$, $x \neq a$.*
(c) $\lim_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

Entonces
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

La demostración del teorema anterior se puede ver en [**5**]. En este momento no estamos en capacidad de dar la prueba, pero podemos dar una justificación.

Como f y g son diferenciables en a, entonces f y g son continuas en a. Luego $f(a) = 0$ y $g(a) = 0$. Por lo tanto
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}}.$$

Si $x \to a$ entonces la expresión de la derecha tiende a
$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Luego
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Ejemplo 1.24.
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x - 3} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2}{12x^2 - 1} = \frac{3}{11}.$$

El primer límite es de la forma $\frac{0}{0}$.

Observación 1.25. La regla de L'Hopital también es válida cuando se consideran

(a) límites laterales ($x \to a^+$ ó $x \to a^-$),
(b) límites infinitos ($x \to +\infty$ ó $x \to -\infty$),
(c) límites de la forma $\frac{\infty}{\infty}$.

Observación 1.26. El resultado anterior permite calcular límites de la forma $0.\infty$, tomando en cuenta que si $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \infty$ entonces $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{h(x)} = 0$. En este caso la regla de L'Hopital se aplica a $g(x) = \dfrac{1}{h(x)}$ para obtener un límite de la forma $\frac{0}{0}$. También se puede llevar a la forma $\frac{\infty}{\infty}$.

Ejemplo 1.27.
$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0.$$

El primer límite es de la forma $0.(-\infty)$, el segundo límite es de la forma $\frac{-\infty}{\infty}$, el tercer límite se simplifica algebraicamente dando origen al cuarto límite que no es una indeterminación.

6.2. Indeterminaciones de la forma $\infty - \infty, \quad -\infty + \infty$.

Estas indeterminaciones se resuelven haciendo operaciones algebraicas para llevarlo a alguna de las formas consideradas antes, es decir, $\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0.\infty$.

EJEMPLO 1.28.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{4x+1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{(4x+1)\operatorname{sen} x - x}{x \operatorname{sen} x} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{4\operatorname{sen} x + (4x+1)(\cos x) - 1}{\operatorname{sen} x + x\cos x} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{4\cos x + 4\cos x - (4x+1)\operatorname{sen} x}{\cos x + \cos x - x \operatorname{sen} x} \\
&= \frac{4+4}{2} = 4.
\end{aligned}
$$

El primer límite es de la forma $\infty - \infty$, el segundo límite es de la forma $\frac{0}{0}$, el tercer límite es de la forma $\frac{0}{0}$ y el cuarto límite ya no es una indeterminación.

6.3. Indeterminaciones de la forma $0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty^0$.

Estos límites se calculan usando la siguiente propiedad:

PROPOSICIÓN 1.29. *Si* $\lim_{x\to a} f(x)$ *existe, entonces*

$$\lim_{x\to a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x\to a} f(x)}.$$

OBSERVACIÓN 1.30. Esta Proposición también es válida cuando se consideran

(a) límites laterales ($x \to a^+$ ó $x \to a^-$),
(b) límites infinitos ($x \to +\infty$ ó $x \to -\infty$).

EJEMPLO 1.31. Calcularemos

$$\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x$$

Este límite es de la forma 0^0.

Tenemos que

$$(\operatorname{sen} x)^x = e^{\ln((\operatorname{sen} x)^x)} = e^{x \ln(\operatorname{sen} x)}.$$

Comenzaremos calculando

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln(\operatorname{sen} x).$$

que es un límite de la forma $0.\infty$. Luego aplicaremos la exponencial.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} x\ln(\operatorname{sen} x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\frac{-1}{x^2}} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2\cos x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x\cos x + x^2 \operatorname{sen} x}{\cos x} = 0.\end{aligned}$$

El primer límite es de la forma $0.\infty$, el segundo límite es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, el tercer límite se simplifica algebraicamente dando origen al cuarto límite que es de la forma $\frac{0}{0}$, el quinto límite no es una indeterminación.

Ahora aplicamos la exponencial

$$\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln(\operatorname{sen} x)} = e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln(\operatorname{sen} x)} = e^0 = 1.$$

7. Límite infinito

Definición 1.32. Sea $\{a_n\}$ una sucesión.

Diremos que $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ si para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $a_n \geq \lambda$.

Diremos que $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ si para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $a_n \leq \lambda$.

Es importante notar que las sucesiones que tienen límite infinito **no son convergentes**.

Proposición 1.33. *Si $\{a_n\}$ es una sucesión convergente y $\{b_n\}$ es una sucesión tal que $b_n \neq 0$ para todo n y $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$. Entonces $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.*

7.1. Cálculo de límite de sucesiones usando la regla de L'Hopital.

Para calcular el límite de una sucesión usando la regla de L'Hopital se deben usar una funciones auxiliares de variable real.

Por ejemplo, si la sucesión está dada por $a_n = n^2$ la función auxiliar f puede ser $f(x) = x^2$. Otro ejemplo: si la sucesión está dada por $a_n = \ln n$ la función auxiliar f puede ser $f(x) = \ln x$. Estas funciones auxiliares son sencillas y en estos casos se calcula el límite cuando $x \to +\infty$.

Ejemplo 1.34. Consideremos

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right).$$

Este es un límite de sucesiones, de la forma $0.(-\infty)$.

Para hallarlo, en lugar de n colocamos x y calculamos el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{1/x}\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = 0.$$

Luego

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

A veces no conviene usar estas funciones auxiliares sencillas. Puede ser más conveniente considerar como funciones auxiliares algo aparentemente un poco más complicado. Por ejemplo, si la sucesión está dada por $a_n = n^2$ la función auxiliar f puede ser $f(x) = (1/x)^2$. Otro ejemplo: si la sucesión está dada por $a_n = \operatorname{sen}(1/n)$ la función auxiliar f puede ser $f(x) = \operatorname{sen} x$. En estos casos se calcula el límite cuando $x \to 0+$.

Ejemplo 1.35. Consideremos

$$\lim_{n\to+\infty} n - \frac{1}{\operatorname{sen}(1/n)}.$$

Este es un límite de sucesiones, de la forma $\infty - \infty$.

Para hallarlo, podríamos calcular el siguiente límite auxiliar.

$$\lim_{x\to+\infty} x - \frac{1}{\operatorname{sen}(1/x)}.$$

En lugar de n hemos colocado x. Este es un límite de funciones, de la forma $\infty - \infty$. Usted podría tratar de calcularlo. Hemos hecho una cambio sencillo, pero el límite que se debe calcular no es sencillo.

Sin embargo si hacemos un cambio un poco más complicado el límite que tendremos que calcular es más sencillo. En efecto, en lugar de n colocamos $1/x$ y obtenemos

$$\lim_{x\to0+} \frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}.$$

Este también es un límite de funciones, de la forma $\infty - \infty$. A continuación lo calcularemos.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0+} \frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} &= \lim_{x\to0+} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to0+} \frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x + x\cos x} \\ &= \lim_{x\to0+} \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x + \cos x - x \operatorname{sen} x} = \frac{0}{2} = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to+\infty} n - \frac{1}{\operatorname{sen}(1/n)} = 0.$$

8. Sumas finitas y el símbolo sumatorio.

Cuando queremos referirnos a una suma con n sumandos, en la que tenemos una fórmula para cada sumando a_k usamos la siguiente expresión

$$a_1 + \cdots + a_n$$

que también se escribe de la siguiente manera:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

Es decir,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n.$$

Ejemplo 1.36.

(1) Sumar el número 1, n veces:

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n.$$

(2) La suma de los n primeros números naturales es:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + \cdots + n.$$

(3) La suma de los cuadrados de los n primeros números naturales es:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1 + 2^2 + \cdots + n^2.$$

Se puede probar que

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1.1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}. \tag{1.2}$$

Ejercicio Adicional: Usando el método de inducción completa demuestre las fórmulas 1.1 y 1.2.

Una propiedad importante de las sumas finitas es la llamada propiedad telescópica que afirma que:

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1}.$$

Estas sumas son denominadas sumas telescópicas.

Ejercicios.
Sucesiones.

(1) Sugiera el término general de cada una de las siguientes sucesiones:

(a) $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$

(b) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$

(c) $1, 8, 27, 64, \ldots$

(d) $\frac{1}{2}, \frac{-2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{-4}{5}, \ldots$

(e) $0, 5, 0, 5, 0, 5, \ldots$

(f) $\frac{1}{2}, 0, \sqrt{3}, \frac{1}{2}, 0, \sqrt{3}, \ldots$

(2) Se deja caer una pelota desde una altura inicial de 15 pies sobre la losa de concreto. Cada vez que rebota alcanza una altura equivalente a 2/3 de la altura anterior. Determine la altura que alcanza en el tercer rebote y en el n-ésimo rebote.

(3) Un objeto se deja caer desde una gran altura, de tal manera que recorre 16 pies durante el primer segundo, 48 pies durante el segundo, 80 pies durante el tercero y así sucesivamente. ¿Cuánto recorre el objeto durante el sexto segundo?

(4) Sea $\{a_n\}$ una sucesión (infinita) con término general a_n. Estudie la sucesión: Diga si es acotada superiormente, acotada inferiormente, acotada, no acotada, monótona creciente, monótona decreciente, no monótona. Dibuje el gráfico de la sucesión. Determine si converge o diverge, y en caso de que converja halle su límite.

(a) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$

(b) $a_n = \dfrac{-1}{n} + \dfrac{n+1}{n^2}$

(c) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

(d) $a_n = \operatorname{sen}(n\pi)$

(e) $a_n = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + n\pi\right)$

(f) $a_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + n\pi\right)$

(g) $a_n = \cos(n\pi)$

(h) $a_n = 1 + (-1)^n$

(i) $a_n = \dfrac{n^2 - 1}{n - 1}$

(j) $a_n = \dfrac{n+1}{n-1}$

(k) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^7$

(l) $a_n = n^4$

(m) $a_n = (1/n)^3$

(n) $a_n = 8^{1/n}$

(o) $a_n = (1/2)^n$

(p) $a_n = 6^n$

(5) La sucesión de Fibonacci:

(a) Suponga que la vida de los conejos es eterna y que cada mes una pareja procrea una nueva pareja, que es fértil al mes. Si comenzamos con una pareja de recién nacidos y a_n representa el número de parejas nacidas en el n-ésimo mes demuestre que

$$a_1 = a_2 = 1, \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{si } n \geq 3$$

(la igualdad de la derecha es una fórmula recurrente).

(b) Verifique que el término general de la sucesión de Fibonacci es

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

demostrando que esta expresión satisface la fórmula recurrente dada en (a).

(6) Sean c, r constantes reales. Considere la sucesión $\{a_n\}$ definida por $a_n = cr^{n-1}$. Se define la sucesión $\{S_n\}$ por

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n.$$

Probar que

(a) $S_n = \dfrac{c - cr^n}{1-r}$

(b) $\{S_n\}$ converge si y sólo si $|r| < 1$.

(c) Si $|r| < 1$ entonces

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{c}{1-r}.$$

(7) Dar ejemplos de sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tales que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = 0,$$

pero

(a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = -\infty$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$

(d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$ no existe.

(8) EL propósito de este ejercicio es recordar la fórmula para la derivada de un cociente, que no debe confundirse con el cociente de derivadas.

Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones, en los puntos en los que son derivables:

(a) $f(x) = \dfrac{\tan x}{\ln x}$

(b) $f(x) = \dfrac{a^x}{\csc x}$

(c) $f(x) = \dfrac{\arctan x}{x-1}$

(d) $f(x) = \dfrac{\sec x}{\sqrt{x}}$

(9) Calcular los siguientes límites de funciones:

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{x} \right)$

(b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} \left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{x} \right)$

(c) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$

(d) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\left(\frac{1}{\ln x}\right)}$

(e) $\lim\limits_{x\to 1^+} x^{\frac{1}{x-1}}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{sen}(3x))^{\operatorname{sen}(5x)}$

(10) Sea $\{a_n\}$ una sucesión (infinita) con término general a_n. Para cada uno de los siguientes casos determine si $\{a_n\}$ converge o diverge, y en caso de que converja halle su límite.

(a) $a_n = \dfrac{4n-3}{3n+4}$

(b) $a_n = \sqrt{n}$

(c) $a_n = \dfrac{n^2-1}{n^2+1}$

(d) $a_n = \dfrac{n^2}{n+1}$

(e) $a_n = \dfrac{3+(-1)^n}{n^2}$

(f) $a_n = n^{\left(\frac{1}{\ln n}\right)}$

(g) $a_n = (1/n)^{1/n}$

(h) $a_n = \dfrac{(-1)^n n^2}{1+n^3}$

(i) $a_n = \dfrac{4n^3+3n^2+1}{5n^3+3}$

(j) $a_n = n2^{-n}$

(k) $a_n = n^2\left(1 - \cos\dfrac{1}{n}\right)$

(l) $a_n = 1 + (-1)^n$

(m) $a_n = \dfrac{\operatorname{sen} n}{n}$

(n) $a_n = \dfrac{\operatorname{sen} n^2}{n}$

(o) $a_n = \dfrac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}}$

(p) $a_n = \sqrt{n+8} - \sqrt{n}$

(q) $a_n = \dfrac{2^n}{3^n + 1}$

(r) $a_n = \dfrac{5 - 2^{-n}}{6 + 4^{-n}}$

(s) $a_n = \dfrac{\ln(2 + e^n)}{3n}$

(t) $a_n = \ln(n+1) - \ln(n)$

(u) $a_n = \left(1 - \dfrac{4}{n}\right)^n$

(v) $a_n = 5 + \dfrac{5^n}{3^n}$

(w) $a_n = 10^{(n+1)/n}$

(x) $a_n = n^{2/(n+1)}$

(y) $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

(z) $a_n = n \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)$

(11) * Demostrar que:

(a) Si $0 < a < 2$ entonces $a < \sqrt{2a} < 2$.

(b) La sucesión $\sqrt{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\ \ldots$ es convergente.

(c) Hallar el límite de la sucesión anterior.

(12) * Demostrar que si $\{a_n\}$ es una sucesión que converge a cero y $\{b_n\}$ es una sucesión acotada entonces la sucesión $\{a_n b_n\}$ converge a cero.

(13) * Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ sucesiones tales que $a_n \leq b_n \leq c_n$ para todo n y

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = L.$$

Demostrar que

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = L.$$

(14) * Sean $\{a_n\}$ una sucesión convergente y $\{b_n\}$ una sucesión tal que $b_n \neq 0$ para todo n y $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$. Demuestre que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

CAPÍTULO 2

Series numéricas.

Definición y ejemplos. Criterios de convergencia para series de términos positivos: comparación, límites, raíz, razón, integral. Series alternadas: criterio de Leibnitz.

¿Las expresiones indefinidamente largas, tales como

$$x + x^2 + x^3 \dots$$

(lo que los matemáticos llaman series infinitas) pueden ser tratadas por medio de las reglas de la aritmética, o son necesarias técnicas especiales para poder abarcar su infinidad?

Enfrentada con tales dificultades conceptuales, la mente de los matemáticos del siglo XVIII empezó a titubear. Lagrange se desesperó tanto que abandonó las matemáticas durante un período de varios años, y, en una carta a su amigo y colega Jean Baptiste D'Alembert, en 1.781, expresó la opinión de que las matemáticas estaban ahondando demasiado, con peligro de ser destruidas. D'Alembert, en cambio, no sosegó a sus alumnos, sino que les exhortó:

"Seguid adelante y la fe vendrá a vosotros".

1. Series.

Las series permiten entender la idea de querer hacer sumas en las que hay una cantidad infinita de sumandos (tantos sumandos como números naturales).

Para dar la idea de una *serie* debemos considerar dos tipos de números reales:

(1) la expresión para cada sumando: a_n

(2) la expresión para la suma finita de los primeros n sumandos:

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

La siguiente terminología es usual:

(1) A a_n se le llama término general de la serie.

(2) A s_n se le llama la suma parcial de la serie.

Por lo tanto una serie está relacionada con dos sucesiones:

(1) la sucesión $\{a_n\}$ de los términos generales de la serie.
(2) la sucesión $\{s_n\}$ de sumas parciales de la serie.

La siguiente notación es usual: En vez de referirse a la serie como un par de sucesiones es usual hablar de la serie como

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

EJEMPLO 2.1. Para la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n$$

tenemos que

$$a_n = n$$

$$s_n = 1 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Para obtener la última expresión hemos usado la ecuación 1.1.

Una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es una *serie de términos positivos* cuando $a_n > 0$ para cada n.

Una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es una *serie alternada* cuando

$$a_n = (-1)^n c_n$$

para alguna sucesión $\{c_n\}$ tal que $c_n > 0$ para cada n.

EJEMPLO 2.2. La *serie armónica* es:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}.$$

Para esta serie

$$a_n = \frac{1}{n}.$$

Entonces se trata de una serie de términos positivos. Además

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Una cuenta interesante es la siguiente:

$$\begin{aligned} s_{2n} - s_n &= \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &= n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

En conclusión, para la serie armónica:

$$s_{2n} - s_n \geq \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 2.3. Para la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$$

tenemos que

$$a_n = (-1)^n.$$

Entonces se trata de una serie alternada. Además

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k = -1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^n = \begin{cases} -1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Ejemplo 2.4. La *serie geométrica* (de razón r) es:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n.$$

Para esta serie

$$a_n = r^n.$$

Si $r > 0$ entonces se trata de una serie de términos positivos. Si $r < 0$ entonces se trata de una serie alternada. Además

$$s_n = 1 + r + \cdots + r^n = \sum_{k=0}^{n} r^k.$$

Un hecho curioso es que para eta serie: Entonces

$$rs_n = r + r^2 + \cdots + r^{n+1}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} (1-r)s_n &= s_n - rs_n \\ &= (1 + r + \cdots + r^n) - (r + r^2 + \cdots + r^{n+1}) \\ &= 1 - r^{n+1} \end{aligned}$$

En conclusión, si $r \neq 1$ para la serie geométrica:

$$s_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

A veces se puede decir con exactitud cuánto da la suma finita (la suma $\sum_{k=1}^{n} a_k$), pero en general es muy difícil decir cuánto da la suma infinita (la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$).

Ejemplo 2.5. Para la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 + \cos(n^3)}{2^n + n}.$$

tenemos que

$$a_n = \frac{2 + \cos(n^3)}{2^n + n}$$

Esta serie es de términos positivos. Además

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2 + \cos(k^3)}{2^k + k}$$

2. Convergencia y divergencia de series.

Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge o es una *serie convergente* cuando la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ tiene límite finito.

Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge o es una *serie divergente* cuando la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ no converge (ya sea porque el límite da $+\infty$, da $-\infty$ ó no existe).

Sea $s \in \mathbb{R}$, si la sucesión $\{s_n\}$ converge a s se suele escribir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s.$$

En otras palabras, la expresión anterior quiere decir:

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n \to +\infty} s_n = s.$$

En esto último debe quedar claro que s no se obtiene simplemente por adición, s es el límite de una sucesión de sumas.

Ejemplo 2.6. Para la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$$
ya vimos que
$$s_n = \begin{cases} -1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$
Como $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$ no existe tenemos que $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ diverge.

Ejemplo 2.7. La serie armónica es:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}.$$
Anteriormente vimos que
$$\frac{1}{2} \leq s_{2n} - s_n. \tag{2.1}$$
Supongamos que existe un número real s tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = s$. Usando la ecuación (2.1) tenemos que
$$\frac{1}{2} \leq \lim_{n\to+\infty} s_{2n} - \lim_{n\to+\infty} s_n.$$
Como $\lim\limits_{n\to+\infty} s_{2n} = s$ tenemos que
$$\frac{1}{2} \leq s - s = 0.$$
Y esta es una contradicción (porque $0 < \frac{1}{2}$).

La contradicción proviene de haber supuesto que existe un número real s tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = s$.

Por el método de reducción al absurdo concluimos que no existe un número real s tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = s$.

Es decir, la serie armónica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Criterio 2.8 (Criterio del término general).
Dada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

(i) *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ *entonces la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverge.*
(ii) *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, *no hay información (puede ser que la serie converja o puede ser que la serie diverja).*

Note que si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, este criterio no permite llegar a ninguna conclusión. En este caso debe recurrir a otro criterio.

Ejemplo 2.9. Consideremos la serie geométrica (de razón r):

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n.$$

Si $|r| \geq 1$ entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n \neq 0$. Por el criterio del término general. $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n$ diverge si $|r| \geq 1$.

Por otro lado se probó que si $r \neq 1$ entonces

$$s_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Sabemos que $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n = 0$ si $|r| < 1$. Luego

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r}.$$

En conclusión, si $|r| < 1$ entonces la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n$ converge a $\frac{1}{1-r}$, es decir,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1 - r}.$$

Más adelante estudiaremos qué ocurre cuando $|r| \geq 1$.

Este caso de la serie geométrica es uno de los pocos casos en los que se puede decir a qué valor converge la serie. En general no podemos decir cuánto vale.

Para saber si estamos trabajando con un número o no. Es conveniente dar varios criterios de convergencia de series.

3. Criterios de convergencia para series de términos positivos.

Vamos a estudiar las series de la forma $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ donde $a_n > 0$. En estas condiciones

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n > 0.$$

Para indicar que una serie de términos positivos es convergente se suele escribir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty.$$

Esta notación <u>no</u> se usa para otro tipo de series.

Criterio 2.10 (Criterio de acotación).

Dada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ con $a_n > 0$. Si la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ es acotada entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$.

El criterio de acotación es muy usado por los matemáticos para demostrar teoremas. Muchas de las demostraciones de los criterios siguientes se basan en éste. Por otro lado, la demostración del criterio de acotación requiere una comprensión bien profunda del conjunto de los números reales, especialmente del axioma del supremo.

Criterio 2.11 (Criterio de comparación).
Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones tales que $0 < a_n \leq b_n$ para todo n.

(i) *Si $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ también converge.*
(ii) *Si $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ también diverge.*

Ejemplo 2.12. Estudiar la convergencia de la siguiente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2+\cos(n^3)}{2^n+n}.$$

Sabemos que

$$0 \leq \frac{2+\cos(n^3)}{2^n+n} \leq \frac{3}{2^n} = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Sean

$$a_n = \frac{2+\cos(n^3)}{2^n+n}.$$

$$b_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

entonces $0 \leq a_n \leq b_n$.

Como

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^n = 3\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n < +\infty$$

porque la serie de la derecha es una geométrica de razón $1/2 < 1$. Es decir, tenemos que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge.

Por el criterio de comparación, obtenemos $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$. Esto es,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2+\cos(n^3)}{2^n+n} < +\infty.$$

Ejemplo 2.13. Estudiar la convergencia de la siguiente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

usando que

$$2^{n-1} \leq n! \qquad \text{para todo } n \geq 1.$$

(Los estudiantes de la Licenciatura en Matemática deberían ser capaces de probar esta desigualdad usando el método de inducción completa).

Se sigue que,

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Sean

$$a_n = \frac{1}{n!}, \qquad b_n = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Además

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k < +\infty,$$

porque la serie de la derecha es una geométrica de razón $1/2 < 1$.

Por el criterio de comparación

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} < +\infty.$$

Criterio 2.14 (Criterio del límite).

Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ dos sucesiones tales que $0 \leq a_n$, $0 < b_n$ y sea

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

(i) *Si λ es finito y $\lambda \neq 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.*
(ii) *Si $\lambda = \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge .*
(iii) *En los otros casos no hay información.*

Ejemplo 2.15. Estudiaremos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Recuerde que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Sean $a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$ y $b_n = \frac{1}{n}$. Usando el límite anterior tenemos que

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Como λ es finito y $\lambda \neq 0$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge, por el criterio del límite tenemos que: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge.

Criterio 2.16 (Criterio de la raíz).
Sea $\{a_n\}$ *una sucesión tal que* $a_n > 0$ *y sea* $\alpha = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$. *Entonces*

(i) *Si* $\alpha < 1$, *la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge.*
(ii) *Si* $\alpha > 1$, *la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverge.*
(iii) *Si* $\alpha = 1$, *no hay información (puede ser que la serie converja o puede ser que la serie diverja).*

Cuando se aplica un criterio y se llega al caso en que éste no da información, se deja este criterio de lado y se trabaja con otro criterio.

Ejemplo 2.17. Estudiaremos la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}.$$

Tenemos

$$a_n = \frac{1}{(\ln n)^n},$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \frac{1}{\ln n}.$$

$$\alpha = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1.$$

Por el criterio de la raíz

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^n} < +\infty.$$

Criterio 2.18 (Criterio del cociente o de la razón).
Sea $\{a_n\}$ *una sucesión tal que* $a_n > 0$ *y sea* $\beta = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. *Entonces*

(i) *Si* $\beta < 1$, *la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge.*
(ii) *Si* $\beta > 1$, *la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverge.*
(iii) *Si* $\beta = 1$, *no hay información (puede ser que la serie converja o puede ser que la serie diverja).*

Ejemplo 2.19. Estudiaremos la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

Tenemos

$$a_n = \frac{n!}{n^n},$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}.$$

$$\begin{aligned}
\beta &= \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!\,n^n}{n!\,(n+1)^{n+1}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)n!\,n^n}{n!\,(n+1)\,(n+1)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \\
&= \frac{1}{e} < 1
\end{aligned}$$

(porque $e > 1$).

Por el criterio del cociente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} < +\infty.$$

Para dar el próximo criterio de series usaremos integrales impropias de la forma

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Se dice que la integral impropia

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge}$$

cuando el límite

$$\lim_{b\to+\infty}\int_1^b f(x)\,dx \text{ existe y es finito.}$$

Ejemplo 2.20. Estudiaremos la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx.$$

Tenemos

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} [(\ln x)]_1^b = \lim_{b\to+\infty} \ln b = +\infty.$$

Luego

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx \text{ diverge}$$

Criterio 2.21 (Criterio de la integral).

Sea f una función positiva y estrictamente decreciente definida en $[1, +\infty)$ tal que $f(n) = a_n$ para todo n natural.

La integral

$$\int_1^{+\infty} f(x)\, dx \text{ converge}$$

si y sólo si la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge.}$$

Cuando queremos usar este criterio para estudiar una serie procedemos así a partir de a_n escogemos f, revisamos que f cumpla las condiciones dadas en el criterio. Calculamos la integral y luego aplicamos lo siguiente:

(1) Si $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ converge entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

(2) Si $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ diverge entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

Ejemplo 2.22. Estudiaremos la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Sea

$$f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Es claro que f es positiva. Por otro lado,

$$f'(x) = -2x^{-3} < 0$$

si $x > 0$ de donde f es estrictamente decreciente en $[1, +\infty)$.

Estudiaremos la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx.$$

Tenemos

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{-1}{x}\right]_1^b = \lim_{b \to +\infty} 1 - \frac{1}{b} = 1.$$

Luego

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx \text{ converge}$$

entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

4. Criterios de convergencia para series de términos alternadas.

CRITERIO 2.23 (Criterio de Leibnitz).
Sea $\{c_n\}$ una sucesión tal que

(a) $c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq 0.$
(b) $\lim_{n\to+\infty} c_n = 0.$

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n c_n$ converge.

Recuerde que como la serie no es de términos positivos para decir que la serie converge no se usa la notación $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$..

EJEMPLO 2.24. Estudiaremos la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n}.$$

En este caso el término general es

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n}.$$

Sea

$$c_n = \frac{1}{n}.$$

Entonces $c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq 0.$

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Por el criterio de Leibnitz tenemos que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n} \text{ converge.}$$

5. Series telescópicas.

Las series $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ tales que el término general se puede representar como una diferencia de la forma:

$$a_n = b_n - b_{n+1}$$

se denominan series telescópicas y su comportamiento está garantizado por el siguiente teorema.

Teorema 2.25. *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones de números reales tales que*

$$a_n = b_n - b_{n+1}$$

para $n = 1, 2, \ldots$. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge si y sólo si la sucesión $\{b_n\}$ converge, en cuyo caso tenemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = b_1 - L,$$

donde $L = \lim_{n\to+\infty} b_n$.

Ejemplo 2.26. Queremos determinar si converge o no la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n}.$$

Sea

$$a_n = \frac{1}{n^2+n}.$$

Se tiene que

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Tomando $b_n = 1/n$ tenemos que

$$a_n = b_n - b_{n+1}.$$

Además sabemos que $b_1 = 1$ y

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} 1/n = 0.$$

Aplicando el teorema anterior obtenemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n} = 1.$$

Ejercicios.
Series.

(1) Verifique que las siguientes series son divergentes

(a) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\dots$

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3n}{n+1}$

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2n+3}$

(d) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{n^2+1}$

(e) $3-\frac{9}{2}+\frac{27}{4}-\frac{81}{8}+\dots$

(f) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n$

(g) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+1}{2^{n+1}}$

(h) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

(2) Verifique que las siguientes series son convergentes

(a) $2+\frac{3}{2}+\frac{9}{8}+\frac{27}{32}+\dots$

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty}(0.9)^n$

(c) $2-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\dots$

(d) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-0.6)^n$

(3) Pruebe que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}$ diverge.

(4) ¿Qué está mal en la siguiente "demostración" de que la serie geométrica divergente $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}$ tiene por suma cero?

"Demostración":

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} &= [1+(-1)]+[1+(-1)]+\dots+[1+(-1)]+\dots\\ &= 0+0+\dots+0+\dots=0\end{aligned}$$

(5) Demuestre que

(a) La serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ converge y determine su suma.

(b) Se cumple la siguiente igualdad $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)}=\frac{1}{3}$.

Sugerencia: use la parte (a).

(6) Demuestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7}{n(n+1)} - \frac{2}{3^{n-1}}$ converge y determine su suma.

(7) Encuentre una fórmula para S_n y demuestre que la serie converge o diverge usando $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln(\frac{n}{n+1})$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{9n^2+3n-2}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

(Sugerencia: racionalice el denominador).

(8) Determine si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{5^n} + \frac{1}{n}\right)$ converge o diverge.

(9) Demuestre o dé un contraejemplo:

"Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ divergen entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n + b_n$ diverge".

(10) Supongamos que $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_{n+1} - a_n)$ existe. Demostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1}) = a_0 - a_1 + \lim_{n\to+\infty} (a_{n+1} - a_n).$$

(11) Determine si las siguientes series telescópicas convergen o divergen.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln((1+1/n)^n(1+n))}{\ln(n^n)\ln((n+1)^{n+1})}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan\left(\frac{2}{n^2}\right)$

Ayuda: use la fórmula:

$$\arctan\alpha \pm \arctan\beta = \arctan\left(\frac{\alpha\pm\beta}{1\mp\alpha\beta}\right).$$

(12) Aplique el criterio más conveniente para determinar si las siguientes series convergen o divergen.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{e}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{n+2}-\frac{5}{n+3}\right)$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\ln(n+1)}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{2n}{7n-5}\right)$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{4}{n}\right)$

(13) *** Determine los valores positivos de p, para los cuales converge la serie indicada

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\,p^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(\frac{2}{p}\right)^n$

(14) *** Determine los valores reales de p, para los cuales converge la serie indicada

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p}{n!}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^p}$

(15) Sea $\{a_n\}$ la sucesión de Fibonacci. Sea

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Demuestre que

(a) $b_{n-1} = 1 + \dfrac{1}{b_{n-2}}$,

(b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(c) La serie

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$$

es convergente.

(16) Use el criterio de series alternadas para determinar si las siguientes series son convergentes

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n+2}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+2}{n^3}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n+2}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3n-1}{n+5}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{3^n}\right)$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n+1}{4^n}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4\sqrt{n}}{2n+3}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\pi)\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^3}$

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}$

(l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n^{10}}{n^2}$

CAPÍTULO 3

Fórmula de Stirling y producto de Wallis.

Justificación elemental de la fórmula de Stirling y producto de Wallis.

La fórmula de Stirling da un estimado para $n!$ y el producto de Wallis da una expresión para $\pi/2$ como límite de un cociente de números parecidos a los factoriales.

1. La fórmula de Stirling.

Comenzamos dando un estimado para $\sqrt[n]{n!}$.

Proposición 3.1. *Se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

Demostración.

El gráfico de la función logaritmo ayuda a entender las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} \ln((n-1)!) &= \ln(1.2.\ldots.(n-1)) = \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln(n-1) \\ &\leq \int_1^n \ln x dx \leq \ln 2 + \cdots + \ln n = \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n \\ &= \ln(1.2.\ldots.(n-1).n) = \ln n! \end{aligned}$$

Pero

$$\int_1^n \ln x dx = [x \ln x - x]_1^n = n \ln n - n + 1 = \ln(n^n) - n + 1.$$

De donde

$$\ln((n-1)!) \leq \ln n^n - n + 1 \leq \ln n!.$$

Por lo tanto

$$(n-1)! \leq n^n e^{-n}\, e \leq n!. \tag{3.1}$$

De la segunda desigualdad en (3.1) obtenemos

$$\frac{1}{e}\sqrt[n]{e} \leq \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}. \tag{3.2}$$

Por otro lado, multiplicando por n en la fórmula (3.1) tenemos que

$$n! \leq n^n \, e^{-n} \, e \, n.$$

Luego

$$\sqrt[n]{n!} \leq n \, \frac{1}{e} \, \sqrt[n]{n} \, \sqrt[n]{e}.$$

Y así

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \leq \frac{1}{e} \, \sqrt[n]{n} \, \sqrt[n]{e}. \tag{3.3}$$

Como $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e} = 1$, de las desigualdades (3.2) y (3.3) obtenemos:

$$\frac{1}{e} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e} \, \sqrt[n]{e} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e} \, \sqrt[n]{n} \, \sqrt[n]{e} = \frac{1}{e} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \, \sqrt[n]{e} = \frac{1}{e}.$$

De donde,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

Esta fórmula da un estimado para $n!$.

Varios refinamientos del método que acabamos de usar para estimar $\sqrt[n]{n!}$ permiten dar un estimado para $n!$. Más precisamente, se puede demostrar:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n}{n!} = 1$$

y ésta es la conocida fórmula de Stirling.

Para no caer en aspectos demasiado técnicos no damos la prueba. Sin embargo, el lector interesado en ver una demostración de esta fórmula puede hallarla en: Introduction to Calculus and Analysis de R. Courant, F. John. Vol. I.

2. El producto de Wallis.

El producto de Wallis permite aproximar a $\frac{\pi}{2}$ y es el siguiente:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty} \frac{2m2m(2m-2)(2m-2)\dots 6.6.4.4.2.2}{(2m+1)(2m-1)(2m-1)(2m-3)\dots 7.5.5.3.3.1}.$$

Para los estudiantes de la Licenciatura en Matemática damos la demostración. Recordemos que

$$\int \operatorname{sen}^n x \, dx = \frac{-1}{n} \operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx.$$

Integrando entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ se obtiene la siguiente igualdad:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x dx. \tag{3.4}$$

Aplicando esta fórmula varias veces se obtienen las siguientes igualdades:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m} x\,dx = \frac{2m-1}{2m}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-2} x\,dx = \frac{(2m-1)(2m-3)}{2m(2m-2)}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-4} x\,dx$$
$$= \frac{(2m-1)(2m-3)\dots 3.1}{2m(2m-2)\dots 4.2}\int_0^{\pi/2} dx = \frac{(2m-1)(2m-3)\dots 3.1}{2m(2m-2)\dots 4.2}\frac{\pi}{2}.$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m+1} x\,dx = \frac{2m}{2m+1}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-1} x\,dx = \frac{(2m)(2m-2)}{(2m+1)(2m-1)}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-3} x\,dx$$
$$= \frac{(2m)(2m-2)\dots 4.2}{(2m+1)(2m-1)\dots 5.3}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x dx = \frac{(2m)(2m-2)\dots 4.2}{(2m+1)(2m-1)\dots 5.3}.$$

Resumiendo, llegamos a que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m} x\,dx = \frac{(2m-1)(2m-3)\dots 3.1}{2m(2m-2)\dots 4.2}\frac{\pi}{2},$$
$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m+1} x\,dx = \frac{(2m)(2m-2)\dots 4.2}{(2m+1)(2m-1)\dots 5.3}.$$

De las fórmulas anteriores

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2m(2m-2)\dots 4.2}{(2m-1)(2m-3)\dots 3.1}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m} xdx, \tag{3.5}$$

$$1 = \frac{(2m+1)(2m-1)\dots 5.3}{(2m)(2m-2)\dots 4.2}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m+1} xdx. \tag{3.6}$$

Dividiendo la fórmula (3.5) entre la fórmula (3.6), obtenemos que

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2m2m(2m-2)(2m-2)\dots 4.4.2.2}{(2m+1)(2m-1)(2m-1)(2m-3)\dots 5.3.3.1}\,\frac{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m} xdx}{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m+1} xdx} \tag{3.7}$$

A continuación estudiaremos el cociente de estas dos integrales.

En $[0,\pi/2]$ así que $0 \le \operatorname{sen} x \le 1$. Luego

$$\operatorname{sen}^{2m+1} x \le \operatorname{sen}^{2m} x \le \operatorname{sen}^{2m-1} x.$$

Integrando

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m+1} xdx \le \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m} xdx \le \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-1} xdx.$$

Dividiendo entre $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m+1} xdx$ se obtiene

$$1 = \frac{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m+1} xdx}{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m+1} xdx} \le \frac{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m} xdx}{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m+1} xdx} \le \frac{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-1} xdx}{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m+1} xdx} = \frac{2m+1}{2m}$$

(para la última igualdad hemos usado la ecuación (3.4)).

Entonces

$$1 \leq \frac{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m} x dx}{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m+1} x dx} \leq \frac{2m+1}{2m} = 1 + \frac{1}{2m}.$$

De donde

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m} x dx}{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m+1} x dx} = 1$$

Volviendo a la ecuación (3.7) obtenemos que

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty} \frac{2m2m(2m-2)(2m-2)\ldots 6.6.4.4.2.2}{(2m+1)(2m-1)(2m-1)(2m-3)\ldots 7.5.5.3.3.1},$$

y este es el conocido producto de Wallis.

Ejercicios.
Fórmula de Stirling y producto de Wallis.

A continuación indicamos tres fórmulas que permiten calcular límites bastante complicados.

- Estimado para $\sqrt[n]{n!}$:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$
- Fórmula de Stirling:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n}{n!} = 1$$
- Producto de Wallis
$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty} \frac{2m2m(2m-2)(2m-2)\dots 6.6.4.4.2.2}{(2m+1)(2m-1)(2m-1)(2m-3)\dots 7.5.5.3.3.1},$$

Deducir los siguientes límites con la ayuda de las fórmulas anteriores

(1) * $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n!)^{1/n}} = e.$

(2) * $\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}.$

(3) * $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \binom{-1/2}{n} n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$

donde
$$\binom{t}{n} = \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!}.$$

Nota: EL producto $t(t-1)\dots(t-n+1)$ es un polinomio en t de grado n llamado polinomio factorial n-ésimo. Se representa con el símbolo $t^{(n)}$, así pues
$$t^{(n)} = t(t-1)\dots(t-n+1).$$

Bibliografía

[1] Alson, P. *Cálculo Básico.* Editorial Erro.

[2] Apostol, T. *Calculus Volumen 1.* Editorial Reverté.

[3] Apostol, T. *Calculus Volumen 2.* Editorial Reverté.

[4] Bruzual, R. y Domínguez, M. *Guía de problemas de Cálculo III para Matemáticos.* Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela.

[5] Bruzual, R. y Domínguez, M. *Cálculo diferencial en una variable.* Publicaciones del Laboratorio de Formas en Grupos, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela. 7

[6] Bruzual, R. y Domínguez, M. *Cálculo integral en una variable.* Publicaciones del Laboratorio de Formas en Grupos, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela.

[7] Deminovich, B. *Problemas y ejercicios de Análisis Matemático.* Editorial Paraninfo.

[8] Miranda, Guillermo *Matemática III - Física* Fac. Ciencias. UCV.

[9] Swokowsky, E. W. *Cálculo con Geometría Analítica.* Grupo Editorial Iberoamericana.

Índice