UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
Escuela de Matemática
Postgrado en Matemática

Espacios con métrica indefinida

Ramón Bruzual

Caracas, Venezuela
Octubre 2011

Ramón Bruzual
Correo-E: ramon.bruzual@ciens.ucv.ve, ramonbruzual@gmail.com

Laboratorio de Formas en Grupos
Centro de Análisis
Escuela de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad Central de Venezuela

http://www.matematica.ciens.ucv.ve/labfg/

Prólogo

Estas notas corresponden al curso "Espacios con métrica indefinida" dictado en el Postgrado en Matemática de la Universidad Central de Venezuela.

Se da una introducción a los conceptos básicos relativos a los espacios con métrica indefinida, se estudian los resultados básicos correspondientes a los espacios de Krein y a los de Pontryagin.

Se incluye el teorema de Naimark, que generaliza el teorema de Stone a espacios con métrica indefinida.

El requisito fundamental para leer estas notas es un curso básico de análisis funcional y, para algunas partes, conocimientos básicos de teoría espectral. Se ha tratado de que sean autocontenidas y se han incluido dos apéndices: el primero de teoría espectral (sin demostraciones) y el segundo (desarrollado en detalle) que incluye el teorema de Hille-Yosida.

Ramón Bruzual

Índice general

Capítulo 1

Motivación y preliminares

1. Introducción informal del concepto de espacio de Krein y algunos ejemplos

A continuación se da una explicación, breve e informal, de lo que es un espacio de Krein

Supongamos que $\mathfrak{K}$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$. Se dice que $\mathfrak{K}$ es un *espacio de Krein* si

(1) Está definida una función

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathfrak{K} \times \mathfrak{K} \to \mathbb{C}$$

que satisface

(a) $\langle \alpha x_1 + x_2, y\rangle = \alpha\langle x_1 +, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, $x_1, x_2, y \in \mathfrak{K}$.

(b) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ para todo $x, y \in \mathfrak{K}$.

(2) $\mathfrak{K}$ admite una descomposición como suma directa algebraica

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^+ \dot{+} \mathfrak{K}^-.$$

(3) $\langle x, y\rangle = 0$ si $x \in \mathfrak{K}^+$, $y \in \mathfrak{K}^-$.

(4) $(\mathfrak{K}^+, \langle\ ,\ \rangle)$ es un espacio de Hilbert.

(5) $(\mathfrak{K}^-, -\langle\ ,\ \rangle)$ es un espacio de Hilbert.

A todo espacio de Krein se le puede asociar, de manera natural, un espacio de Hilbert de la siguiente manera: Se consideran los espacios de Hilbert $(\mathfrak{K}^+, \langle\ ,\ \rangle)$ y $(\mathfrak{K}^-, -\langle\ ,\ \rangle)$ y se hace su suma directa ortogonal.

Precisando un poco más y fijando algo de notación, sea $|\mathfrak{K}^-|$ el espacio de Hilbert $(\mathfrak{K}^-, -\langle\ ,\ \rangle)$, (el *antiespacio* de $\mathfrak{K}^-$). El espacio de Hilbert asociado a $\mathfrak{K}$ es

$$|\mathfrak{K}| = \mathfrak{K}^+ \oplus |\mathfrak{K}^-|$$

Como $|\mathfrak{K}|$ es un espacio de Hilbert, entonces tiene una topología inducida por su norma. Por lo tanto, podemos definir una topología en $\mathfrak{K}$.

La terminología usual en el contexto de la teoría de espacios con métrica indefinida es llamar a la función $\langle\ ,\ \rangle$ producto interno y lo enunciado en (2) suele abreviarse como

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^+ \oplus \mathfrak{K}^-,$$

donde la ortogonalidad de los espacios $\mathfrak{K}^+$ y $\mathfrak{K}^-$ ha de entenderse con respecto al producto $\langle\ ,\ \rangle$.

Ejemplo 1.1. Sea $\mathfrak{K} = \mathbb{C}^2$, con el producto interno

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1\overline{x_2} - y_1\overline{y_2},$$

es decir si $e_1 = (1, 0)$ y $e_2 = (0, 1)$ entonces

$$\langle e_1, e_1 \rangle = 1, \quad \langle e_1, e_2 \rangle = 0, \quad \langle e_2, e_2 \rangle = -1.$$

Si

$$\mathfrak{K}_1^+ = \{(x, 0) : x \in \mathbb{C}\},$$
$$\mathfrak{K}_1^- = \{(0, y) : y \in \mathbb{C}\},$$

entonces $(\mathfrak{K}_1^+, \langle\ ,\ \rangle)$ y $(\mathfrak{K}_1^-, -\langle\ ,\ \rangle)$ son espacios de Hilbert, $\langle x, y \rangle = 0$ si $x \in \mathfrak{K}_1^+$, $y \in \mathfrak{K}_1^-$ y $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1^+ \dot{+} \mathfrak{K}_1^-$. Por lo tanto $\mathbb{C}^2$ con este producto es un espacio de Krein.

Si se consideran

$$\mathfrak{K}_2^+ = \{\lambda(2, 1) : \lambda \in \mathbb{C}\},$$
$$\mathfrak{K}_2^- = \{\lambda(1, 2) : \lambda \in \mathbb{C}\},$$

entonces también tenemos que $(\mathfrak{K}_2^+, \langle\ ,\ \rangle)$ y $(\mathfrak{K}_2^-, -\langle\ ,\ \rangle)$ son espacios de Hilbert, $\langle x, y \rangle = 0$ si $x \in \mathfrak{K}_2^+$, $y \in \mathfrak{K}_2^-$ y $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_2^+ \dot{+} \mathfrak{K}_2^-$.

Este ejemplo, que viene siendo el espacio de Krein no trivial más sencillo que se puede construir, ilustra que una descomposición de la forma (*descomposición fundamental*)

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^+ \oplus \mathfrak{K}^-$$

no necesariamente es única.

Sin embargo se cumplen los siguientes resultados:

Si $\mathfrak{K}$ es un espacio de Krein y

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1^+ \oplus \mathfrak{K}_1^-,$$
$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_2^+ \oplus \mathfrak{K}_2^-$$

son dos descomposiciones fundamentales, entonces:

$$\dim(\mathfrak{K}_1^+) = \dim(\mathfrak{K}_2^+), \quad \dim(\mathfrak{K}_1^-) = \dim(\mathfrak{K}_2^-)$$

y las topologías de los espacios

$$\mathfrak{K}_1^+ \oplus |\mathfrak{K}_1^-|$$

y

$$\mathfrak{K}_2^+ \oplus |\mathfrak{K}_2^-|$$

son equivalentes.

Esto último es sumamente importante, por lo siguiente: Normalmente un espacio de Krein aparece como un espacio donde está definida una forma sesquilineal hermitiana. La condición de equivalencia de las topologías permite hablar de una topología en el espacio de Krein, sin ningún tipo de ambigüedad.

En el contexto de espacios de Krein las nociones de continuidad y convergencia se refieren a la topología descrita anteriormente.

Otros conceptos tales como operador simétrico, contractivo, adjunto, etc se dan en términos de la forma $\langle\ ,\ \rangle$. Por ejemplo, si $\mathfrak{K}$ es un espacio de Krein, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{K}$ es una variedad lineal y $T : \mathfrak{M} \to \mathfrak{K}$ es un operador lineal entonces se dice que T es una *isometría* si

$$\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle \quad \text{para todo } x, y \in \mathfrak{M},$$

se dice que T es una contracción si

$$\langle Tx, Tx\rangle \leq \langle x, x\rangle \quad \text{para todo } x \in \mathfrak{M}.$$

Ejercicio 1.2. Sea

$$\mathfrak{K} = \{(x_n)_{n=1}^{+\infty} \subset \mathbb{C} : \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty\},$$

con el producto interno

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} x_n \overline{y_n},$$

para $x = (x_n)_{n=1}^{+\infty}, y = (y_n)_{n=1}^{+\infty}$ en $\mathfrak{K}$.

Demostrar que $(\mathfrak{K}, \langle\ ,\ \rangle)$ es un espacio de Krein. Explicar cuál es la topología de $\mathfrak{K}$.

Ejemplo 1.3. Sea $(\mathfrak{K}, \langle\ ,\ \rangle)$ el espacio de Krein del ejemplo anterior y sea $\mathfrak{M}$ la variedad lineal generada por los vectores

$$(1, 1, 0, \dots), (0, 0, 1, 1, 0, \dots), (0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, \dots), \cdots,$$

es decir $\mathfrak{M}$ es el conjunto de las sucesiones de la forma

$$(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \dots, \lambda_N, \lambda_N, 0, 0, \dots),$$

donde $N \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_N \in \mathbb{C}$.

Sea $T : \mathfrak{M} \to \mathfrak{K}$ definido por

$$T(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \ldots, \lambda_N, \lambda_N, 0, 0, \ldots) = (\lambda_1, \lambda_1, 2\lambda_2, 2\lambda_2, \ldots, N\lambda_N, N\lambda_N, 0, 0, \ldots).$$

Entonces

$$\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle = 0$$

para todo $x, y \in \mathfrak{M}$, por lo tanto T es una isometría.

Sin embargo T no es continuo ya que la topología de $\mathfrak{K}$ es la topología de $l^2(\mathbb{N})$ y T no es acotado como operador de $\mathfrak{M}$ en $l^2(\mathbb{N})$.

Es importante notar que en este último ejemplo tenemos que $\langle x, y \rangle = 0$ si x y y pertenecen al dominio de T, es decir, el dominio de T es lo que se llama una variedad lineal nula.

Ejercicio 1.4. Dar un ejemplo de un espacio de Krein $\mathfrak{K}$, una variedad lineal **no nula** $\mathfrak{M}$ contenida en $\mathfrak{K}$ y un operador lineal $T : \mathfrak{M} \to \mathfrak{K}$ que es isométrico y que no es continuo.

Ejercicio 1.5. Dar un ejemplo de un espacio de Krein $\mathfrak{K}$, una variedad lineal **no nula** $\mathfrak{M}$ contenida en $\mathfrak{K}$ y un operador lineal $T : \mathfrak{M} \to \mathfrak{K}$ que es contractivo, que no es isométrico y que no es continuo.

Si un espacio de Krein $\mathfrak{K}$ admite una descomposición de la forma

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^+ \oplus \mathfrak{K}^-$$

y uno de los espacios $\mathfrak{K}^+$ o $\mathfrak{K}^-$ es de dimensión finita, se dice que $\mathfrak{K}$ es un *espacio de Pontryagin*. Este caso es de particular interés, muchos de los problemas que se presentan en espacios de Krein generales son mucho más simples en espacios de Pontryagin.

2. Algunos conceptos básicos y convenciones

Sea $\mathfrak{F}$ un espacio vectorial (en general sobre el cuerpo de los complejos).

Una *variedad lineal* en $\mathfrak{F}$ es un subconjunto no vacío $\mathfrak{L}$ de $\mathfrak{F}$ que es estable con respecto a las operaciones de suma de vectores y producto de un escalar por un vector.

Si en $\mathfrak{F}$ está definida una topología, un *subespacio* de $\mathfrak{F}$ es una variedad lineal cerrada.

Si en $\mathfrak{F}$ está definida una norma $\| \, \|$, se dice que un operador T es *acotado* si existe $M > 0$ tal que $\|Tx\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in \mathfrak{F}$. Se tiene que T es acotado si y sólo si T es continuo. Se dice que T es *acotado inferiormente* si existe $m > 0$ tal que $\|Tx\| \geq m\|x\|$ para todo $x \in \mathfrak{F}$.

Capítulo 2

Espacios con producto interno.

A lo largo de estas notas, salvo que se especifique explícitamente los contrario, el término *espacio vectorial* se refiere a espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos.

1. Producto interno

Definición 2.1. Sea $\mathfrak{F}$ un espacio vectorial. Un *producto interno* en $\mathfrak{F}$ es una función

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathfrak{F} \times \mathfrak{F} \to \mathbb{C}$$

que satisface

(1) $\langle \alpha x_1 + x_2, y\rangle = \alpha\langle x_1 +, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, $x_1, x_2, y \in \mathfrak{K}$.
(2) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ para todo $x, y \in \mathfrak{K}$.

Al par $(\mathfrak{F}, \langle\ ,\ \rangle)$ se le llama *espacio con producto interno.*

Observación 2.2. $(\mathfrak{F}, \langle\ ,\ \rangle)$ es un espacio con producto interno, entonces $(\mathfrak{F}, -\langle\ ,\ \rangle)$ también es un espacio con producto interno . Este espacio se conoce con el nombre de *anti-espacio* de $\mathfrak{F}$.

Ejercicio 2.3 (Fórmula de polarización)**.** Si $(\mathfrak{F}, \langle\ ,\ \rangle)$ es un espacio con producto interno, entonces

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\langle x+y, x+y\rangle - \frac{1}{4}\langle x-y, x-y\rangle + \frac{i}{4}\langle x+iy, x+iy\rangle - \frac{i}{4}\langle x-iy, x-iy\rangle.$$

Es importante destacar que la fórmula anterior implica que un producto interno está determinado por sus valores en “la diagonal” $\{(x, x) : x \in \mathfrak{F}\}$.

Sea x un elemento del espacio con producto interno $(\mathfrak{F}, \langle\ ,\ \rangle)$, como $\langle x, x\rangle = \overline{\langle x, x\rangle}$ se tiene que $\langle x, x\rangle$ es siempre un número real.

Se dice que es x es *positivo, negativo o neutro* si $\langle x, x\rangle > 0$, $\langle x, x\rangle < 0$ ó $\langle x, x\rangle = 0$, respectivamente.

Si el espacio con producto interno $(\mathfrak{F}, \langle, \rangle)$ posee tanto elementos positivos como elementos negativos, se dice que $(\mathfrak{F}, \langle, \rangle)$ es un espacio con producto interno indefinido. En caso contrario se dice que el producto interno es semi-definido.

Lema 2.4 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.** *Si* $(\mathfrak{F}, \langle\ ,\ \rangle)$ *es un espacio con producto interno semi-definido, entonces se cumple la desigualdad de Cauchy-Schwarz*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle \, \langle y, y\rangle \qquad \textit{para todo } x, y \in \mathfrak{F}.$$

La demostración es la misma que se da para espacios de Hilbert.

Lema 2.5. *Todo espacio con producto interno indefinido posee elementos neutros no nulos.*

Demostración. Sean x e y tales que $\langle x, x\rangle > 0$, $\langle y, y\rangle < 0$.

La ecuación

$$\langle x, x\rangle + 2\lambda \mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \lambda^2 \langle y, y\rangle = 0$$

tiene solución real λ_o.

Sea $z = x + \lambda_o y$, entonces $\langle z, z\rangle = 0$. Si se cumpliera $z = 0$ entonces se tendría que $\langle x, x\rangle = |\lambda_o|^2 \langle y, y\rangle$, lo que contradice la hipótesis inicial.

□

Un producto interno semi-definido puede ser *semi-definido positivo* si $\langle x, x\rangle \geq 0$ para todo x, *semi-definido negativo* si si $\langle x, x\rangle \leq 0$ para todo x o *neutro* si $\langle x, x\rangle = 0$ para todo x (en este último caso es semi-definido positivo y negativo).

Se dice que un producto interno es definido si $\langle x, x\rangle = 0$ implica $x = 0$. En vista del Lema 2.5 todo producto interno definido es semi-definido, por lo tanto en este caso se tiene que $\langle x, x\rangle > 0$ para $x \neq 0$ (*producto interno definido positivo*) o $\langle x, x\rangle < 0$ para $x \neq 0$ (*producto interno definido negativo*) .

De manera natural se define variedad lineal definida positiva, definida negativa, etc. Por ejemplo una variedad lineal $\mathcal{A}$ es *definida positiva* si para $x \in \mathcal{A}$ se cumple que $\langle x, x\rangle > 0$ para $x \neq 0$.

Ejemplo 2.6. Sea $(\alpha_n)_{n=1}^{+\infty}$ una sucesión de números reales. Sea

$$\mathfrak{F} = \{(x_n)_{n=1}^{+\infty} \subset \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n| \, |x_n|^2 < \infty\}.$$

La fórmula

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \, x_n \, \overline{y_n} \qquad \big(x = (x_n)_{n=1}^{+\infty}, y = (y_n)_{n=1}^{+\infty}\big)$$

define un producto interno. Dependiendo de como se escoja la sucesión $(\alpha_n)_{n=1}^{+\infty}$ se obtendrá un producto indefinido, semi-definido, definido, etc.

Ejemplo 2.7. Sea μ una medida real (signada) definida en un espacio medible (Ω, Σ).

Sea $|\mu|$ la variación total de la medida μ y sea

$$\mathfrak{F} = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C} : \int\limits_{\Omega} |f(\omega)|^2 \, d|\mu|(\omega) < \infty \right\}.$$

Se tiene que

$$\langle f, g \rangle = \int\limits_{\Omega} f(\omega)\overline{g(\omega)} \, d\mu(\omega)$$

define un producto interno en $\mathfrak{F}$. Dependiendo de las características de la medida μ se obtendrá un producto indefinido, semi-definido, definido, etc.

Teorema 2.8 (Krein-Smulian)**.** *Si el espacio con producto interno $\mathfrak{F}$ posee un vector positivo (negativo), entonces todo elemento de $\mathfrak{F}$ es la suma de dos vectores positivos (negativos).*

Demostración. Sea $x \in \mathcal{F}$ y sea $x_o \in \mathcal{F}$ tal que $\langle x_o, x_o \rangle > 0$.

Para $\alpha \in \mathbb{R}$ sea

$$p(\alpha) = \langle x + \alpha x_o, x + \alpha x_o \rangle = \langle x, x \rangle + 2\alpha \mathrm{Re}(\langle x, x_o \rangle) + \alpha^2 \langle x_o, x_o \rangle.$$

Como $\langle x_o, x_o \rangle > 0$ se tiene que

$$\lim_{\alpha \to +\infty} p(\alpha) = +\infty,$$

luego para α grande se tiene que

$$\langle x + \alpha x_o, x + \alpha x_o \rangle$$

es positivo.

Finalmente $x = (x + \alpha x_o) + (-\alpha x_o)$ y los elementos $x + \alpha x_o$ y $-\alpha x_o$ son positivos.

El otro caso se obtiene (vector negativo) se obtiene a partir de éste, considerando el anti-espacio de $\mathcal{F}$, es decir, cambiándole el signo al producto interno.

$\square$

Si $\mathfrak{F}$ es un espacio con producto interno, se definen los siguientes conjuntos

$$\mathfrak{B}^0 = \{x \in \mathfrak{F} : \langle x, x\rangle = 0\}$$
$$\mathfrak{B}^{00} = \{x \in \mathfrak{F} : \langle x, x\rangle = 0,\ x \neq 0\}$$
$$\mathfrak{B}^{+} = \{x \in \mathfrak{F} : \langle x, x\rangle \geq 0\}$$
$$\mathfrak{B}^{++} = \{x \in \mathfrak{F} : \langle x, x\rangle > 0, \text{ ó } x = 0\}$$
$$\mathfrak{B}^{-} = \{x \in \mathfrak{F} : \langle x, x\rangle \leq 0\}$$
$$\mathfrak{B}^{--} = \{x \in \mathfrak{F} : \langle x, x\rangle < 0, \text{ ó } x = 0\}$$

Corolario 2.9 (Krein-Smulian)**.** *Si $\mathfrak{F}$ es un espacio con producto interno indefinido entonces ninguno de los conjuntos $\mathfrak{B}^+$, $\mathfrak{B}^{++}$, $\mathfrak{B}^-$, $\mathfrak{B}^{--}$ es una variedad lineal en $\mathfrak{F}$.*

Ejercicio 2.10. ¿Determinar en cuál o cuáles casos es $\mathfrak{B}^0$ una variedad lineal?

2. Ortogonalidad

Sea $\mathfrak{F}$ es un espacio con producto interno y sean $x, y \in \mathfrak{F}$. Se dice que x e y son *ortogonales* si $\langle x, y\rangle = 0$ (abreviado: $x \perp y$).

Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son dos subconjuntos de $\mathfrak{F}$ se dice que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son *ortogonales* (abreviado $\mathcal{A} \perp \mathcal{B}$) si $x \perp y$ para todo $x \in \mathcal{A}$, $y \in \mathcal{B}$.

La siguiente notación es bastante común, si $\mathcal{A}_1, \cdots, \mathcal{A}_n$ son subconjuntos de $\mathfrak{F}$, la variedad lineal generada por $\mathcal{A}_1, \cdots, \mathcal{A}_n$ se denotará por

$$\bigvee \{\mathcal{A}_1, \cdots, \mathcal{A}_n\}.$$

Lema 2.11. *Sean $\mathcal{L}_1, \cdots, \mathcal{L}_n$ variedades lineales contenidas en $\mathfrak{F}$, ortogonales dos a dos.*

Si cada una de las variedades lineales $\mathcal{L}_1, \cdots, \mathcal{L}_n$ es semi-definida positiva (semi-definida negativa, neutra, definida positiva, definida negativa), entonces $\bigvee \{\mathcal{L}_1, \cdots, \mathcal{L}_n\}$ es semi-definida positiva (semi-definida negativa, neutra, definida positiva, definida negativa), respectivamente.

Demostración. Basta notar que si $x_i \in \mathcal{L}_i$, $i = 1, \ldots, n$ entonces

$$\langle x_1 + \cdots + x_n, x_1 + \cdots + x_n\rangle = \langle x_1, x_1\rangle + \cdots + \langle x_n, x_n\rangle.$$

□

Definición 2.12. Sea $\mathcal{L}$ una variedad lineal contenida en $\mathfrak{F}$. Si $\mathcal{L}$ es la suma de variedades lineales $\mathcal{L}_1, \cdots, \mathcal{L}_n$ ortogonales dos a dos, se dice que $\mathcal{L}$ es la *suma ortogonal* de las variedades

$\mathcal{L}_1, \cdots, \mathcal{L}_n$ y se escribe

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1(+)\cdots(+)\mathcal{L}_n.$$

Si además la suma es directa, se dice que $\mathcal{L}$ es la *suma directa ortogonal* de las variedades $\mathcal{L}_1, \cdots, \mathcal{L}_n$ y se escribe

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1(\dot{+})\cdots(\dot{+})\mathcal{L}_n.$$

Ejercicio 2.13. Dar un ejemplo de un espacio con producto interno no nulo $\mathfrak{F}$ y variedades lineales $\mathcal{L}, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \subseteq \mathfrak{F}$ tales que $\mathcal{L}$ es la suma ortogonal de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$, pero la suma no es directa.

El siguiente concepto viene a generalizar el concepto de complemento ortogonal que aparece en la teoría de espacios de Hilbert, es importante notar que sus propiedades son menos agradables que en el caso Hilbert.

Para cualquier conjunto $\mathcal{N} \subseteq \mathfrak{F}$, se define el *compañero ortogonal* (en inglés: orthogonal companion) de $\mathcal{N}$ por

$$\mathcal{N}^{\perp} = \{x \in \mathfrak{F} : x \perp \mathcal{N}\}.$$

Ejercicio 2.14. Sea $\mathfrak{K}$ el espacio del ejemplo 1.1 y sea $\mathcal{L}$ la variedad lineal definida por

$$\mathcal{L} = \{(x, x) : x \in \mathbb{C}\}.$$

Demostrar que

$$\mathcal{L}^{\perp} = \mathcal{L}.$$

Este ejercicio muestra lo siguiente:

(1) Una variedad lineal puede tener intersección no nula con su compañero ortogonal.
(2) Puede ocurrir que el compañero ortogonal de una variedad lineal no contenga una variedad lineal complementaria (aún en el caso finito dimensional).

Es claro que

$$\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}^{\perp\perp}.$$

Más adelante se dará un ejemplo que muestra que, aunque $\mathcal{N}$ sea una variedad lineal, la inclusión puede ser propia. El caso $\mathcal{N} = \mathcal{N}^{\perp\perp}$ será caracterizado más adelante.

Ejercicio 2.15. Demostrar que

$$\mathcal{N}^{\perp} \subseteq \mathcal{N}^{\perp\perp\perp}.$$

3. Vectores isotrópicos

Definición 2.16. Sea $\mathfrak{L}$ una variedad lineal contenida en un espacio con producto interno $\mathfrak{F}$. La variedad lineal $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}^{\perp}$, que se denotará por $\mathfrak{L}^{o}$, se llama la *parte isotrópica* de $\mathfrak{L}$ y sus elementos son llamados los *vectores isotrópicos* de $\mathfrak{L}$. Si $\mathfrak{L}^{o} \neq \{0\}$ se dice que $\mathfrak{L}$ es *degenerado*, o que el producto interno es degenerado en $\mathfrak{L}$.

Notar que todo el espacio $\mathfrak{F}$ es degenerado si su parte isotrópica $\mathfrak{F}^{o} = \mathfrak{F}^{\perp}$ no es igual a la variedad lineal nula $\{0\}$.

Por ejemplo, si $\mathfrak{K}$ es el espacio del Ejemplo 1.1 la variedad lineal $\mathfrak{L} = \{(x, x) : x \in \mathbb{C}\}$ es un ejemplo de una variedad lineal degenerada contenida en un espacio no degenerado. El espacio del Ejemplo 2.6 es degenerado si y sólo si $\alpha_j = 0$ para algún j.

La demostración del siguiente resultado es sencilla.

Lema 2.17. *Si $\mathfrak{L}, \mathfrak{L}_1, \ldots, \mathfrak{L}_n$ son variedades lineales contenidas en el espacio con producto interno $\mathfrak{F}$ tales que $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 (\dot{+}) \cdots (\dot{+}) \mathfrak{L}_n$ entonces*

$$\mathfrak{L}^{o} = \mathfrak{L}_1^{o} (\dot{+}) \cdots (\dot{+}) \mathfrak{L}_n^{o}.$$

Corolario 2.18. *La suma directa ortogonal de variedades lineales no degeneradas es no degenerada.*

Los vectores isotrópicos son ortogonales a si mismos y la parte isotrópica de una variedad lineal es neutra. Por lo tanto toda variedad lineal definida es no degenerada.

En el Ejemplo 1.1 el vector $e_1 + e_2$ es neutro, es isotrópico para $\mathfrak{L} = \{(x, x) : x \in \mathbb{C}\}$, pero no es isotrópico para todo el espacio $\mathfrak{K}$. El siguiente lema implica que este tipo de vectores solamente pueden existir en espacios indefinidos.

Lema 2.19. *La parte isotrópica $\mathfrak{F}^{o}$ de un espacio con producto interno semi-definido $\mathfrak{F}$ es el conjunto de los vectores neutros de $\mathfrak{F}$.*

Demostración. Claramente todo vector isotrópico es neutro. Como en $\mathfrak{F}$ vale la desigualdad de Cauchy-Schwarz (Lema 2.4) se tiene que si $x \in \mathfrak{F}$ y $\langle x, x \rangle = 0$, entonces $\langle x, y \rangle = 0$ para todo $y \in \mathfrak{F}$. $\square$

Como consecuencia de este lema se tiene que un espacio con producto interno neutro es necesariamente trivial, es decir

Corolario 2.20. *Si $\mathfrak{F}$ es un espacio con producto interno neutro, entonces $\langle x, y \rangle = 0$ para todo $x, y \in \mathfrak{F}$.*

Observación 2.21. Este último resultado también se puede obtener a través de la fórmula de polarización (Ejercicio 2.3)

Corolario 2.22. *Si* $\mathfrak{F}$ *es un espacio con producto interno y existen vectores* $x, y \in \mathfrak{F}$ *tales que* $\langle x, x\rangle = 0$, $\langle x, y\rangle \neq 0$ *entonces* $\bigvee\{x, y\}$ *es indefinida.*

Lema 2.23. *Si* $\mathfrak{L}$ *es una variedad lineal neutra, entonces* $\mathfrak{L}^{\perp\perp}$ *también es neutra.*

Demostración. Por el Corolario 2.20 $\langle x, y\rangle = 0$ para todo $x, y \in \mathfrak{L}$ y por lo tanto $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}^{\perp}$, luego $\mathfrak{L}^{\perp\perp} \subseteq \mathfrak{L}^{\perp}$, de donde sigue que $\mathfrak{L}^{\perp\perp} \subseteq \mathfrak{L}^{\perp\perp\perp} = \mathfrak{L}$.

□

4. Proyecciones y variedades lineales orto-complementadas

Sea $\mathfrak{F}$ un espacio con producto interno y sea $\mathfrak{L}$ una variedad lineal contenida en $\mathfrak{F}$.

Sea x un elemento de $\mathfrak{F}$. Si existen $y \in \mathfrak{L}$, $z \in \mathfrak{L}^{\perp}$ tales que $x = y + z$, decimos que y es una *proyección* de x sobre $\mathfrak{L}$.

Ni la existencia, ni la unicidad de la proyección sobre un espacio está garantizada.

Ejemplo 2.24. Sea $\mathfrak{K}$ el espacio del Ejemplo 1.1 y $\mathfrak{L}$ es la variedad lineal generada por $e_1 + e_2$ cualquier elemento de $\mathfrak{L}$ es la proyección de un elemento de $\mathfrak{L}$ y los elementos que no están en $\mathfrak{L}$ no poseen proyección en $\mathfrak{L}$.

Lema 2.25. *Dos proyecciones del vector* $x \in \mathfrak{F}$ *sobre la variedad lineal* $\mathfrak{L}$ *difieren en un vector isotrópico de* $\mathfrak{L}$.

Demostración. Supóngase $x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2$, $y_i \in \mathfrak{L}$ $z_i \in \mathfrak{L}^{\perp}$ $i = 1, 2$, entonces

$$y_1 - y_2 = z_2 - z_1.$$

Por lo tanto $y_1 - y_2 \in \mathfrak{L}^o = \mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}^{\perp}$.

Recíprocamente, si $x = y + z$ con $y \in \mathfrak{L}$, $z \in \mathfrak{L}^{\perp}$ y $u \in \mathfrak{L}^o$ entonces

$$x = y + u + z - u$$

y $y + u \in \mathfrak{L}$, $z - u \in \mathfrak{L}^{\perp}$ y $u \in \mathfrak{L}^o$.

□

Corolario 2.26. *Si existe un elemento en* $\mathfrak{F}$ *que tiene exactamente una proyección sobre la variedad lineal* $\mathfrak{L}$, *entonces* $\mathfrak{L}$ *es no degenerado. Si* $\mathfrak{L}$ *es no degenerado los elementos de* $\mathfrak{F}$ *tienen a lo sumo una proyección sobre* $\mathfrak{L}$.

Teorema 2.27. *Sea $\mathfrak{L}$ una variedad lineal definida positiva del espacio con producto interno $\mathfrak{F}$. El elemento $x \in \mathfrak{F}$ admite una proyección sobre $\mathfrak{L}$ si y sólo si la función $\varphi : \mathfrak{L} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\varphi(y) = \langle x - y, x - y \rangle$$

alcanza un mínimo en algún $y_o \in \mathfrak{L}$.

Este elemento y_o es único y es la proyección de x sobre $\mathfrak{L}$. Para $\mathfrak{L}$ definido negativo se cumple un resultado análogo, cambiando mínimo por máximo.

Demostración. Sea $\mathfrak{L}$ definido positivo. Si $x = y_o + z$, donde $y_o \in \mathfrak{L}$, $z \in \mathfrak{L}^{\perp}$, entonces para $y \in \mathfrak{L}$, $y \neq y_o$, se tiene que

$$\begin{aligned}\langle x - y, x - y \rangle &= \langle z + y_o - y, z + y_o - y \rangle \\ &= \langle z, z \rangle + \langle y_o - y, y_o - y \rangle \\ &> \langle z, z \rangle = \langle x - y_o, x - y_o \rangle\end{aligned}$$

Recíprocamente, si para algún $y_o \in \mathfrak{L}$ se satisface

$$\langle x - y_o, x - y_o \rangle = \min_{y \in \mathfrak{L}} \langle x - y, x - y \rangle,$$

entonces se tiene que, para todo $y \in \mathfrak{L}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\langle x - y_o + \lambda y, x - y_o + \lambda y \rangle \geq \langle x - y_o, x - y_o \rangle.$$

Luego

$$\lambda \langle y, x - y_o \rangle + \overline{\lambda} \langle x - y_o, y \rangle + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle \geq 0.$$

Tomando

$$\lambda = \frac{1}{\mu} \langle x - y_o, y \rangle,$$

con μ real y no nulo, se obtiene

$$2\mu |\langle x - y_o, y \rangle|^2 + |\langle x - y_o, y \rangle|^2 \langle y, y \rangle \geq 0 \quad \mu \in \mathbb{R}, \mu \neq 0,$$

de donde $\langle x - y_o, y \rangle = 0$, es decir $x - y_o \perp \mathfrak{L}$. □

Ejercicio 2.28. Demostrar el siguiente resultado

Supóngase que la variedad lineal $\mathfrak{L}$ es la suma directa ortogonal de n variedades lineales $\mathfrak{L}_1, \ldots, \mathfrak{L}_n$.

Entonces el vector $y \in \mathfrak{L}$ es una proyección del vector $x \in \mathfrak{F}$ sobre $\mathfrak{L}$ si y sólo si

$$y = y_1 + \cdots + y_n,$$

donde y_i es una proyección de x sobre $\mathfrak{L}_i$ $i = 1, \ldots, n$.

Sea $\mathcal{L}$ una variedad lineal contenida en el espacio con producto interno $\mathfrak{F}$. Se dice que $\mathcal{L}$ es *orto-complementada* si

$$\bigvee\{\mathcal{L}, \mathcal{L}^{\perp}\} = \mathfrak{F}.$$

Es importante notar que si $\mathcal{L}$ es no degenerado, entonces $\mathcal{L}$ es orto-complementada si y sólo si

$$\mathcal{L}(\dot{+})\mathcal{L}^{\perp} = \mathfrak{F}$$

y por lo tanto cada elemento de $\mathcal{F}$ tiene una y sólo una proyección sobre $\mathcal{L}$.

Ejercicio 2.29. Demostrar que si $\mathfrak{F}$ es no degenerado y $\mathcal{L}$ es una variedad lineal orto-complementada, entonces $\mathcal{L}$ es no degenerado.

Ejercicio 2.30. Demostrar que si $\mathcal{L}$ es una variedad lineal orto-complementada, entonces $\mathcal{L}^{\perp}$ también es una variedad lineal orto-complementada.

Ejercicio 2.31. Demostrar que si $\mathcal{L}, \mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n$ son variedades lineales tales que

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1(\dot{+})\cdots(\dot{+})\mathcal{L}_n$$

entonces $\mathcal{L}$ es orto-complementada si y sólo si cada $\mathcal{L}_i$ lo es (Indicación: Utilizar el Ejercicio 2.28).

Lema 2.32. *Si $\mathcal{L}$ es una variedad lineal orto-complementada y $\mathfrak{F}$ es no degenerado, entonces*

$$\mathcal{L}^{\perp\perp} = \mathcal{L}.$$

Demostración. Como $\mathfrak{F}$ es no degenerado, por el Ejercicio 2.29 $\mathcal{L}$ es no degenerado, luego

$$\mathfrak{F} = \mathcal{L}(\dot{+})\mathcal{L}^{\perp}.$$

Como $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^{\perp\perp}$, se tiene que $\mathcal{L}^{\perp}$ es orto-complementado, nuevamente por el Ejercicio 2.29, $\mathcal{L}^{\perp}$ es no degenerado, es decir $\mathcal{L}^{\perp} \cap \mathcal{L}^{\perp\perp} = \{0\}$. Luego

$$\mathfrak{F} = \mathcal{L}^{\perp}(\dot{+})\mathcal{L}^{\perp\perp}.$$

Si se tuviera que $\mathcal{L} \subsetneqq \mathcal{L}^{\perp\perp}$ entonces se tendría que $\mathcal{L}^{\perp} \cap \mathcal{L}^{\perp\perp} \neq \{0\}$, por lo tanto

$$\mathcal{L}^{\perp\perp} = \mathcal{L}.$$

$\square$

En un espacio de Hilbert la condición

$$\mathcal{L}^{\perp\perp} = \mathcal{L}$$

es necesaria y suficiente para que la variedad lineal $\mathcal{L}$ sea orto-complementada.

Por el Ejercicio 2.29 y el Lema 2.32, en un espacio con producto interno no degenerado, para que la variedad lineal $\mathcal{L}$ sea orto-complementada es necesario que se cumplan las siguientes condiciones:

$$\mathcal{L}^{\perp\perp} = \mathcal{L}, \;\; \mathcal{L} \cap \mathcal{L}^{\perp} = \{0\}.$$

El siguiente ejercicio muestra que estas dos condiciones no son suficientes para que $\mathcal{L}$ sea orto-complementada.

Ejercicio 2.33. Sea $\mathfrak{F}$ el espacio del Ejemplo 2.6 con $\alpha_j = (-1)^j$, $(j = 1, 2, \dots)$.

Sea

$$\mathcal{L} = \left\{ (x_n)_{n=1}^{+\infty} \in \mathfrak{F} : \; x_{2j} = \frac{2j}{2j-1} x_{2j-1}, \; j = 1, 2, \dots \right\}.$$

Demostrar que la variedad lineal $\mathcal{L}$ es definida positiva, luego $\mathcal{L}^o = \mathcal{L} \cap \mathcal{L}^{\perp} = \{0\}$.

Demostrar que

$$\mathcal{L}^{\perp} = \left\{ (x_n)_{n=1}^{+\infty} \in \mathfrak{F} : \; x_{2j} = \frac{2j-1}{2j} x_{2j-1}, \; j = 1, 2, \dots \right\}$$

y

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{\perp\perp}.$$

Demostrar que $\mathcal{L}$ no es orto-complementada.

Indicación: Suponga que el elemento $z = (z_n)_{n=1}^{+\infty}$ dado por

$$z_{2j-1} = 0, \;\; z_{2j} = \frac{1}{2j} \quad (j = 1, 2, \dots)$$

se puede escribir en la forma $z = x + y$ con $x \in \mathcal{L}$, $y \in \mathcal{L}^{\perp}$. Probar que se debe cumplir que

$$x_{2j-1} = \frac{2j-1}{4j-1},$$

por lo que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 = +\infty,$$

lo que es una contradicción.

Lema 2.34. *Toda variedad lineal definida y de dimensión finita es orto-complementada.*

Demostración. Sea $\mathcal{L}$ una variedad lineal definida positiva y de dimensión finita n. Se puede encontrar una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathcal{L}$ que es ortonormal, es decir $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$.

Si $x \in \mathfrak{F}$ entonces

$$\sum_{j=1}^{n} \langle x, x_j \rangle e_j$$

es la proyección de x sobre $\mathcal{L}$.

El caso de un espacio negativo se obtiene a partir de este, con un cambio de signo.

□

5. Algunos conceptos básicos de operadores en espacios con producto interno

Sea $\mathfrak{F}$ un espacio con producto interno $\langle\ ,\ \rangle$. A continuación se dan unas definiciones que extienden a las que se suelen dar para operadores en espacios de Hilbert.

Sea $\mathcal{D} \subseteq \mathfrak{F}$ una variedad lineal y sea

$$T : \mathcal{D} \to \mathfrak{F}$$

un operador lineal.

A la variedad lineal $\mathcal{D}$ se le llama el *dominio* del operador y se suele denotar con $\mathcal{D}(T)$.

Se dice que T es *hermitiano* (o $\langle\ ,\ \rangle$*-hermitiano* si se quiere ser más especifico) si

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \quad \text{para todo } x, y \in \mathcal{D}(T).$$

Como es usual se dice que el operador lineal $P : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$ es una *proyección* si

$$P^2 = P.$$

Se dice que el operador lineal $P : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$ es una *proyección ortogonal* o un *proyector ortogonal* (o una *proyección* $\langle\ ,\ \rangle$*-ortogonal* si se quiere ser más especifico) si P es una proyección y P es hermitiano.

Se dice que el operador lineal $T : \mathcal{D}(T) \to \mathfrak{F}$ es una *isometría* (o una $\langle\ ,\ \rangle$*-isometría* si se quiere ser más especifico) si

$$\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{para todo } x, y \in \mathcal{D}(T).$$

Se dice que el operador lineal T es *unitario* (o $\langle\ ,\ \rangle$*-unitario* si se quiere ser más especifico) si $\mathcal{D}(T) = \mathfrak{F}$, T es una isometría y Rango$(T) = \mathfrak{F}$.

Ejercicio 2.35. Demostrar que el operador lineal $T : \mathcal{D}(T) \to \mathfrak{F}$ es una isometría si y sólo si

$$\langle Tx, Tx\rangle = \langle x, x\rangle \quad \text{para todo } x \in \mathcal{D}(T).$$

El siguiente resultado, que se debe a Pontryagin y que generaliza un resultado similar en espacios de Hilbert, justifica la definición dada de proyección ortogonal.

Ejercicio 2.36 (Pontryagin)**.** Si P es un proyector ortogonal en el espacio con producto interno $\mathfrak{F}$, entonces el rango de P es orto-complementado y para cada $x \in \mathfrak{F}$ el vector Px es una proyección de x sobre el rango de P.

Si $\mathcal{L}$ es una variedad lineal orto-complementada contenida en el espacio con producto interno no degenerado $\mathfrak{F}$ y $P_{\mathcal{L}}$ es la aplicación que manda cada vector $x \in \mathfrak{F}$ a su proyección sobre $\mathcal{L}$, entonces $P_{\mathcal{L}}$ es un proyector ortogonal con rango $\mathcal{L}$.

6. Descomposiciones y simetrías fundamentales

6.1. Descomposiciones fundamentales.

Definición 2.37. Sea $\mathfrak{F}$ un espacio con producto interno. Se dice que $\mathfrak{F}$ es *descomponible* si se puede escribir como suma directa ortogonal de una variedad lineal neutra, una variedad lineal definida positiva y una variedad lineal negativa definida, es decir, existen variedades lineales $\mathfrak{F}^o$, $\mathfrak{F}^+$ y $\mathfrak{F}^-$ tales que

$$\begin{gathered}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^o(\dot{+})\mathfrak{F}^+(\dot{+})\mathfrak{F}^- \\ \mathfrak{F}^o \subseteq \mathfrak{B}^o,\ \ \mathfrak{F}^+ \subset \mathfrak{B}^{++},\ \ \mathfrak{F}^- \subseteq \mathfrak{B}^{--}.\end{gathered} \tag{2.1}$$

Toda descomposición del tipo anterior se llama *descomposición fundamental*.

La siguiente proposición justifica la notación utilizada en (2.1).

Lema 2.38. *Si $\mathfrak{F}^o$, $\mathfrak{F}^+$ y $\mathfrak{F}^-$ satisfacen (2.1), entonces $\mathfrak{F}^o$ es la parte isotrópica de $\mathfrak{F}$.*

Demostración. Por el Lema 2.17 se tiene que la parte isotrópica de $\mathfrak{F}$ es igual a la suma directa ortogonal de las partes isotrópicas de $\mathfrak{F}^o$, $\mathfrak{F}^+$ y $\mathfrak{F}^-$. Como $\mathfrak{F}^+$ y $\mathfrak{F}^-$ son definidos, su parte isotrópica es el espacio nulo y como $\mathfrak{F}^o$ es neutro, su parte isotrópica es el mismo. □

Corolario 2.39. *Toda descomposición fundamental de un espacio con producto interno no degenerado $\mathfrak{F}$ es de la forma*

$$\begin{gathered}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^+(\dot{+})\mathfrak{F}^- \\ \mathfrak{F}^+ \subseteq \mathfrak{B}^{++},\ \mathfrak{F}^- \subseteq \mathfrak{B}^{--}.\end{gathered} \tag{2.2}$$

Ejemplo 2.40 (Mackey)**.** El propósito del siguiente ejemplo es mostrar que no todo espacio con producto interno es descomponible.

Los siguientes resultados, que se presentan como ejercicios serán necesarios en este ejemplo.

Ejercicio 2.41. Sea

$$\mathcal{W} = \left\{ (x_n)_{n=-\infty}^{+\infty} \subset \mathbb{C} : \ x_j = 0 \text{ salvo para una cantidad finita de índices } j \right\}.$$

Demostrar que la dimensión algebraica de $\mathcal{W}$ es $\aleph_o = \mathrm{card}(\mathbb{N})$.

Ejercicio 2.42. Sea

$$\mathcal{V} = \left\{ (x_n)_{n=-\infty}^{+\infty} \subset \mathbb{C} \right\}.$$

Demostrar que la dimensión algebraica de $\mathcal{V}$ es estrictamente mayor que $\aleph_o = \mathrm{card}(\mathbb{N})$.

Sugerencia:

Un camino es notar que $l^2(\mathbb{N}) \subseteq \mathcal{V}$ y utilizar que un espacio de Banach no puede tener una base de Hamel numerable.

Otro camino (más elemental) es el siguiente: Como $l^2(\mathbb{N}) \subseteq \mathcal{V}$, si la dimensión algebraica de $\mathcal{V}$ fuese $\aleph_o$ entonces $l^2(\mathbb{N})$ tendría una base de Hamel numerable $\{f_n\}$. Aplicando el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt a $\{f_n\}$ se obtiene una base ortonormal $\{e_n\}$ de $l^2(\mathbb{N})$ tal que $V\{f_1, \dots, f_N\} = V\{e_1, \dots, e_N\}$ para cada $N \in \mathbb{N}$. Luego el vector $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e_n}{n}$ no puede estar en $V\{f_1, f_2, \dots\}$.

El ejemplo del espacio no degenerado y no descomponible es el siguiente: Sea

$$\mathfrak{F} = \left\{ (x_n)_{n=-\infty}^{+\infty} \subset \mathbb{C} : \ x_j = 0 \text{ para } j \leq j_o(x) \right\},$$

es decir, $\mathfrak{F}$ está formado por las sucesiones con parámetro entero, que son finitas a izquierda.

Para $x = (x_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$, $y = (y_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ en $\mathfrak{F}$ se define

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} x_j \overline{y_{-j-1}}.$$

Es fácil verificar que $\langle \ , \ \rangle$ es un producto interno no degenerado en $\mathfrak{F}$.

Sea $T : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$ la aplicación definida por

$$(Tx)_j = \begin{cases} x_j & \text{si } j < 0, \\ 0 & \text{si } j \geq 0. \end{cases}$$

Si $Tx = 0$ entonces $x_{-1} = x_{-2} = \cdots = 0$ y por lo tanto $\langle x, x \rangle = 0$, por lo tanto la restricción de T a cualquier variedad lineal definida es inyectiva.

Supóngase $\mathcal{F}$ es descomponible, es decir, que se cumple (2.2).

Entonces $T|_{\mathfrak{F}^+} : \mathfrak{F}^+ \to \text{Rango}(T)$ y $T|_{\mathfrak{F}^-} : \mathfrak{F}^- \to \text{Rango}(T)$ son aplicaciones lineales inyectivas y por lo tanto la dimensión algebraica de $\mathfrak{F}^+$ y la de $\mathfrak{F}^-$ son menores o iguales que la dimensión algebraica del rango de T. Por el Ejercicio 2.41 la dimensión algebraica del rango de T es $\aleph_o$.

Utilizando $\dim_{\mathrm{A}}$ para denotar la dimensión algebraica de un espacio, se tiene que

$$\dim_{\mathrm{A}}(\mathfrak{F}) \le \dim_{\mathrm{A}}(\mathfrak{F}^+) + \dim_{\mathrm{A}}(\mathfrak{F}^-) \le \dim_{\mathrm{A}}(\text{Rango}(T)) = \aleph_o.$$

Como la dimensión algebraica de $\mathfrak{F}$ es mayor igual que la dimensión algebraica del espacio $\mathcal{V}$ del Ejercicio 2.42 la desigualdad anterior es contradictoria, por lo tanto $\mathfrak{F}$ no puede ser descomponible.

6.2. Simetrías fundamentales. Sea $\mathfrak{F}$ un espacio con producto interno no degenerado, descomponible y sea

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^+ (\dot{+}) \mathfrak{F}^-$$

una descomposición fundamental de $\mathfrak{F}$.

Si $x \in \mathfrak{F}$, entonces x se puede descomponer, de manera única, como

$$x = x^+ + x^- \qquad \text{con } x^+ \in \mathfrak{F}^+, x^- \in \mathfrak{F}^-.$$

Se definen los *proyectores fundamentales* asociados a la descomposición $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^+ (\dot{+}) \mathfrak{F}^-$ por

$$P^+ x = x^+, \qquad P^- x = x^-.$$

Por el Ejercicio 2.36 P^+ y P^- son proyectores ortogonales.

El operador $J : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$ definido por

$$J = P^+ - P^-$$

se llama *simetría fundamental* correspondiente a la descomposición $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^+ (\dot{+}) \mathfrak{F}^-$.

Ejercicio 2.43. Demostrar que

$$P^+ = \frac{1}{2}(I + J) \qquad P^- = \frac{1}{2}(I - J)$$

$$J^2 = I.$$

Por lo tanto J es un operador invertible y P^+ y P^- están determinadas por J.

Ejercicio 2.44. Demostrar las siguientes afirmaciones:

(1) J es una isometría, es decir

$$\langle Jx, Jy\rangle = \langle x, y\rangle \quad \text{para todo } x, y \in \mathfrak{F}.$$

(2) J es hermitiano, es decir

$$\langle Jx, y\rangle = \langle x, Jy\rangle \quad \text{para todo } x, y \in \mathfrak{F}.$$

(3) Si se define $\langle\ ,\ \rangle_J$ por

$$\langle x, y\rangle_J = \langle Jx, y\rangle,$$

entonces $\langle\ ,\ \rangle_J$ es un producto interno definido positivo en $\mathfrak{F}$.

El producto interno $\langle\ ,\ \rangle_J$ se conoce con el nombre de *J-producto interno*. Como este producto es definido positivo, tiene una norma cuadrática asociada (la *J-norma*) definida por

$$\|x\|_J = \left(\langle x, x\rangle_J \right)^{1/2}.$$

Lema 2.45. *Sea J la simetría fundamental correspondiente a la descomposición $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^+ (\dot{+}) \mathfrak{F}^-$, entonces*

(1) *$\mathfrak{F}^+$ y $\mathfrak{F}^-$ son $\langle\ ,\ \rangle_J$-ortogonales.*
(2) *El operador J es una $\|\ \|_J$-isometría.*

Demostración.

(1) Sean $x \in \mathfrak{F}^+$, $y \in \mathfrak{F}^-$, entonces $Jx = x$ y por lo tanto

$$\langle x, y\rangle_J = \langle Jx, y\rangle = \langle x, y\rangle = 0.$$

(2) Sea $x \in \mathfrak{F}$, entonces

$$\|Jx\|_J^2 = \langle Jx, Jx\rangle_J = \langle J^2 x, Jx\rangle = \langle x, Jx\rangle = \langle Jx, x\rangle = \|x\|_J^2.$$

□

Lema 2.46. *Sea J la simetría fundamental correspondiente a la descomposición $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^+ (\dot{+}) \mathfrak{F}^-$, entonces*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_J \, \|y\|_J$$

para todo $x, y \in \mathfrak{F}$.

Demostración.

$$\begin{aligned}|\langle x,y\rangle| &= |\langle Jx,Jy\rangle| = |\langle x,Jy\rangle_J|\\ &\leq \|x\|_J\,\|Jy\|_J = \|x\|_J\,\|y\|_J.\end{aligned}$$

□

Ejercicio 2.47. Sean P^+ y P^- los proyectores fundamentales asociados a la descomposición $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^+[\dot{+}]\mathfrak{F}^-$. Demostrar que

$$\|P^+x\|_J \leq \|x\|_J \quad \text{y} \quad \|P^-x\|_J \leq \|x\|_J \text{ para todo } x \in \mathfrak{F}.$$

Capítulo 3

Topologías en espacios con producto interno

1. Preliminares sobre espacios vectoriales topológicos

El objetivo de esta sección es precisar algunos resultados acerca de espacios vectoriales topológicos que serán necesarios posteriormente. Los resultados se dan sin demostración, como referencia para esta parte se recomienda el primer capítulo del libro de análisis funcional de W. Rudin [**10**].

Tal como ya se precisó, el término espacio vectorial se refiere a espacio vectorial sobre el cuerpo de los números complejos.

Un *espacio vectorial topológico* (abreviado e.v.t.) es un espacio vectorial $\mathcal{F}$ en el que está definida una topología τ tal que las operaciones de suma de vectores y producto de un escalar por un vector son continuas con respecto a la topología τ.

Observación 3.1. Algunos autores agregan el que todo conjunto formado por un solo punto es cerrado como condición adicional en la definición de e.v.t. Esto equivale a que el e.v.t. sea de Hausdorff.

Se dice que un e.v.t. es *localmente convexo* (abreviado e.v.t.l.c.) si todo entorno de un punto contiene un entorno convexo.

Definición 3.2. Sea p una función a valores reales definida en un espacio vectorial $\mathfrak{F}$. Se dice que p es una *seminorma* si

(1) $p(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathfrak{F}$.
(2) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, $x \in \mathfrak{F}$.
(3) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ para todo $x, y \in \mathfrak{F}$.

Se dice que la seminorma p es *cuadrática* si existe un producto interno definido positivo $\langle\ ,\ \rangle$ en $\mathfrak{F}$ tal que

$$p(x) = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Sea $\{p_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ una familia de seminormas en el espacio vectorial $\mathfrak{F}$. Esta familia induce una topología en $\mathfrak{F}$ de la siguiente manera: El conjunto $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{F}$ es abierto si y sólo si para cada

$x \in \mathcal{A}$ existen una cantidad finita de índices $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ y $\varepsilon > 0$ tales que las condiciones $y \in \mathfrak{F}$, $p_{\gamma_j}(x-y) < \varepsilon$ (j=1, ..., n) implican $y \in \mathcal{A}$.

Ejercicio 3.3. Sea τ la topología inducida por la familia de seminormas $\{p_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ en el espacio vectorial $\mathfrak{F}$. Demostrar que τ es de Hausdorff si y sólo si la condición $p_\gamma(x) = 0$ para todo $\gamma \in \Gamma$ implica $x = 0$.

Los siguientes resultados serán utilizados más adelante.

Teorema 3.4 (Ver Remark 1.38 (b) en [**10**])**.** *Toda topología localmente convexa es inducida por una familia de seminormas.*

Teorema 3.5 (Ver Remark 1.38 (c) en [**10**])**.** *Una topología localmente convexa y de Hausdorff es metrizable si y sólo si es inducida por una familia numerable de seminormas.*

Observación 3.6. Un e.v.t.l.c. cuya topología es inducida por una familia numerable de seminormas (y por lo tanto es metrizable) y que es completo se conoce con el nombre de *espacio de Frechet*.

Sean τ_1 y τ_2 dos topologías en el mismo espacio $\mathfrak{F}$. Se dice que τ_1 es *más débil* que (o que τ_2 es *más fuerte* que τ_1) τ_2 si todo abierto en τ_1 es abierto en τ_2, es decir si $\tau_1 \subseteq \tau_2$

Observación 3.7. También se cumple el siguiente resultado.

La topología definida por la seminorma p_1 es más débil que la definida por la seminorma p_2 si y sólo si existe $\alpha > 0$ tal que $p_1(x) \leq \alpha p_2(x)$ para todo x.

Si dos seminormas p_1 y p_2 dan origen a la misma topología, se dice que son *equivalentes*.

2. Topología débil y mayorantes parciales en un espacio de métrica indefinida

Sea $\mathfrak{F}$ un espacio con producto interno $\langle\ ,\ \rangle$.

Definición 3.8. Sea τ una topología en $\mathfrak{F}$. Se dice que τ es una *mayorante parcial del producto interno* $\langle\ ,\ \rangle$ o una *mayorante parcial sobre* $\mathfrak{F}$ si:

(1) $(\mathfrak{F}, \tau)$ es un e.v.t.l.c.
(2) Para cada $y \in \mathfrak{F}$, la función lineal $\varphi_y(x) = \langle x, y\rangle$ es τ-continua.

Observación 3.9. Cómo el producto interno satisface $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$, la condición (2) de la Definición 3.8 equivale a la continuidad de la función $\psi_x(y) = \langle x, y\rangle$ (x fijo).

Por lo tanto una topología localmente convexa τ en $\mathfrak{F}$ es una mayorante parcial si y sólo si el producto interno es τ-continuo por separado en cada una de sus variables.

Definición 3.10. La *topología débil* τ_o del espacio $\mathfrak{F}$ es la topología inducida por la familia de seminormas $\{p_y\}_{y\in\mathfrak{F}}$, donde

$$p_y(x) = |\langle x, y\rangle|.$$

Ejercicio 3.11. Demostrar que si el espacio con producto interno $\mathfrak{F}$ es no degenerado, entonces la topología débil en $\mathfrak{F}$ es de Hausdorff.

Indicación: Utilizar el Ejercicio 3.3.

Teorema 3.12. *La topología débil τ_o en un espacio con producto interno $\mathfrak{F}$ es una mayorante parcial sobre $\mathfrak{F}$. Una topología localmente convexa τ es una mayorante parcial si y sólo si $\tau_o \subseteq \tau$.*

Demostración. Sean $x, x_o, y \in \mathfrak{F}$ y $\varepsilon > 0$. Entonces $|\langle x, y\rangle - \langle x_o, y\rangle| < \varepsilon$ si y sólo si x pertenece al conjunto $\{u \in \mathfrak{F} : p_y(u - x_o) < \varepsilon\}$; este conjunto es un τ_o-entorno de x_o. Por lo tanto τ_o es una mayorante parcial y toda topología localmente convexa τ tal que $\tau \supseteq \tau_o$ es una mayorante parcial.

Para el recíproco, sea τ una topología localmente convexa que es una mayorante parcial.

Sean $x_o, y_j \in \mathfrak{F}$ $(j = 1, \ldots, n)$ y $\varepsilon > 0$, basta probar que el entorno débil de x_o,

$$A = \{x \in \mathfrak{F} : p_{y_j}(x - x_o) < \varepsilon,\ \ j = 1, \ldots, n\}$$

contiene un τ-entorno de x_o.

Cómo τ es una mayorante parcial existen τ-entornos A_j de x_o tales que $x \in A_j$ implica que $p_{y_j}(x - x_o) = |\langle x, y_j\rangle - \langle x_o, y_j\rangle| < \varepsilon$.

Finalmente, basta notar que

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_j$$

es un τ-entorno de x_o contenido en A.

□

Corolario 3.13. *Toda mayorante parcial en un espacio con producto interno no degenerado es de Hausdorff.*

Lema 3.14. *Sea τ una mayorante parcial sobre un espacio con producto interno $\mathfrak{F}$. Si $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{F}$ es una variedad lineal, entonces $\mathfrak{L}^{\perp}$ es τ-cerrado.*

Demostración. Sea $x_o \in \mathfrak{F}$ tal que $x_o \notin \mathfrak{L}^{\perp}$, entonces

$$|\langle x_o, y_o\rangle| > 0$$

para algún $y_o \in \mathfrak{L}$. Como τ es una mayorante parcial se tiene que existe un τ-entorno de x_o, A tal que

$$|\langle x, y_o\rangle| > 0 \qquad \text{para todo } x \in A,$$

es decir

$$A \subseteq (\mathcal{L}^{\perp})^c = \mathfrak{F} \setminus \mathcal{L}^{\perp}.$$

Por lo tanto $(\mathcal{L}^{\perp})^c$ es abierto.

□

Teorema 3.15. *Sea τ una mayorante parcial sobre un espacio con producto interno no degenerado $\mathfrak{F}$. Entonces toda variedad lineal orto-complementada de $\mathfrak{F}$ es τ-cerrada.*

Demostración. Sea $\mathcal{L} \subseteq \mathfrak{F}$ una variedad lineal orto-complementada. Por el Lema 2.32 se tiene que

$$\mathcal{L}^{\perp\perp} = \mathcal{L}.$$

Por el Lema 3.14 se tiene que $\mathcal{L}$ es τ-cerrada.

□

Corolario 3.16. *Sea τ una mayorante parcial en un espacio con producto interno descomponible y no degenerado $\mathfrak{F}$ y sea*

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^{+}(\dot{+})\mathfrak{F}^{-}$$

una descomposición fundamental. Entonces $\mathfrak{F}^{+}$ y $\mathfrak{F}^{-}$ son τ-cerrados.

Teorema 3.17. *Sea $\mathfrak{F}$ un espacio con producto interno no degenerado y supóngase que existen dos mayorantes parciales τ_1 y τ_2 tales que $\mathfrak{F}$ con cualquiera de las topologías τ_1 o τ_2 es un espacio de Frechet. Entonces $\tau_1 = \tau_2$.*

Demostración. Tanto la topología τ_1 como la topología τ_2 están dadas por familias numerables de seminormas. La unión de estas dos familias, que también es una familia numerable de seminormas, define una topología localmente convexa y metrizable que se denotará por τ. Por construcción se tiene que $\tau_j \subseteq \tau$, $j = 1, 2$.

El primer paso es demostrar que $\mathfrak{F}$ con la topología τ también es un espacio de Frechet:

Sea $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ una sucesión de Cauchy con respecto a la topología τ. Entonces $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ es de Cauchy con respecto a cada una de las topologías τ_j, $j = 1, 2$. Sea y_j el límite de (x_n) en la topología τ_j.

Como cada τ_j es una mayorante parcial, se tiene que

$$\lim_{n\to+\infty} \langle x_n, z\rangle = \langle y_j, z\rangle$$

para todo $z \in \mathfrak{F}$, $j = 1, 2$. Como se supone que $\mathfrak{F}$ es no degenerado, tiene que ser $y_1 = y_2$. Por lo tanto la sucesión (x_n) tiene límite en la topología τ y es igual al límite en las topologías τ_1 y τ_2.

Para concluir la demostración se consideran las aplicaciones

$$I_j : (\mathfrak{F}, \tau) \to (\mathfrak{F}, \tau_j) \qquad (j = 1, 2).$$

Como $\tau_j \subseteq \tau$, cada una de estas aplicaciones es continua. Por el teorema de la aplicación abierta son abiertas, por lo tanto $\tau \subseteq \tau_j$ $(j = 1, 2)$, de donde se concluye que $\tau_1 = \tau_2 = \tau$.

□

3. Topologías mayorantes

Sea $\mathfrak{F}$ un espacio con producto interno $\langle\ ,\ \rangle$.

Definición 3.18. Sea τ una topología en $\mathfrak{F}$. Se dice que τ es una *mayorante del producto interno* $\langle\ ,\ \rangle$ o una *mayorante sobre* $\mathfrak{F}$ si:

(1) $(\mathfrak{F}, \tau)$ es un e.v.t.l.c.
(2) El producto interno $\langle\ ,\ \rangle$ es τ-continuo (considerado como una función de dos variables).

De la definición sigue que si τ es una mayorante, entonces la función

$$x \mapsto \langle x, x \rangle$$

es τ-continua.

Ejercicio 3.19. Demostrar que si la topología τ está definida por una única seminorma p, entonces la continuidad de la función $x \mapsto \langle x, x \rangle$ implica que existe $\alpha > 0$ tal que

$$|\langle x, x \rangle| \le \alpha (p(x))^2.$$

El siguiente resultado muestra que, para una topología definida por una única seminorma, la continuidad de la función $x \mapsto \langle x, x \rangle$ es una condición suficiente para que la topología sea una mayorante.

Lema 3.20. *Sea $\mathfrak{F}$ un espacio con producto interno $\langle\ ,\ \rangle$ y sea p una seminorma definida en $\mathfrak{F}$. Si existe $\alpha > 0$ tal que*

$$|\langle x, x \rangle| \le \alpha (p(x))^2 \qquad \textit{para todo } x \in \mathfrak{F},$$

entonces

(1) $|\langle x, y \rangle| \le 2\, \alpha\, p(x)\, p(y)$ *para todo* $x, y \in \mathfrak{F}$

(2) *La topología definida por p es una mayorante del producto $\langle\ ,\ \rangle$.*

Demostración.

(1) Por la fórmula de polarización (ver Ejercicio 2.3) se tiene que

$$\begin{aligned} |\langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle| &= \frac{1}{2}\,|\langle x+y,x+y\rangle - \langle x-y,x-y\rangle| \\ &\le \frac{1}{2}\,\alpha\,(p(x+y))^2 + \frac{1}{2}\,\alpha\,(p(x-y))^2 \\ &\le \alpha\,(p(x)+p(y))^2 \end{aligned}$$

Sea $\gamma \in \mathbb{C}$ tal que $|\gamma| = 1$ y $\gamma\,\langle x,y\rangle = |\langle x,y\rangle|$, si en vez de considerar x en la desigualdad anterior, se considera $\gamma\,x$ se obtiene

$$|\langle x,y\rangle| \le \frac{1}{2}\alpha\,(p(x)+p(y))^2.$$

Si $p(x) \neq 0$ y $p(x) \neq 0$, reemplazando x por $(1/p(x))\,x$, se obtiene

$$\left|\left\langle \frac{x}{p(x)}, \frac{y}{p(y)}\right\rangle\right| \le \frac{1}{2}\alpha\,\left(p\left(\frac{x}{p(x)}\right) + p\left(\frac{y}{p(y)}\right)\right)^2 \le 2\,\alpha.$$

Si $p(x) = 0$, reemplazando x con nx $(n = 1, 2, \dots)$ se obtiene

$$n\,|\langle x,y\rangle| \le \frac{1}{2}\alpha\,(p(y))^2$$

y por lo tanto $\langle x,y\rangle = 0$. De igual manera se obtiene que si $p(y) = 0$, entonces $\langle x,y\rangle = 0$.

(2) Se debe probar la continuidad de la función $(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$.

Sean $x, y, x_o, y_o \in \mathfrak{F}$, entonces

$$\begin{aligned} |\langle x,y\rangle - \langle x_o,y_o\rangle| &= |\langle x-x_o,y-y_o\rangle + \langle x,y_o\rangle + \langle x_o,y\rangle - 2\langle x_o,y_o\rangle| \\ &= |\langle x-x_o,y-y_o\rangle + \langle x-x_o,y_o\rangle + \langle x_o,y-y_o\rangle| \\ &\le |\langle x-x_o,y-y_o\rangle| + |\langle x-x_o,y_o\rangle + |\langle x_o,y-y_o\rangle| \\ &\le 2\alpha(\,p(x-x_o)p(y-y_o) + p(x-x_o)p(y_o) + p(x_o)p(y-y_o)\,). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\langle x,y\rangle \to \langle x_o,y_o\rangle \quad \text{si } (x,y) \to (x_o,y_o).$$

□

Corolario 3.21. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *La seminorma p es una mayorante para el producto $\langle\ ,\ \rangle$.*

(2) *Existe $\beta > 0$ tal que $|\langle x,y\rangle| \le \beta\,p(x)\,p(y)$ para todo $x, y \in \mathfrak{F}$.*

(3) *Existe $\alpha > 0$ tal que $|\langle x,x\rangle| \le \alpha(p(x))^2$ para todo $x \in \mathfrak{F}$.*

4. Mayorantes y descomponibilidad

Sea $\mathfrak{F}$ un espacio con producto interno no degenerado y descomponible. Sea J una simetría fundamental de $\mathfrak{F}$. Por el Lema 2.46 la J-norma define una topología mayorante en $\mathfrak{F}$, que se denotará por τ_J y que recibe el nombre de *mayorante de descomposición.*

Por lo tanto todo espacio no degenerado y descomponible posee una mayorante definida por una norma cuadrática. Puede ocurrir, tal como lo muestra el siguiente ejemplo, que un espacio con una mayorante definida por una norma cuadrática no sea descomponible.

Ejemplo 3.22. Sea

$$\mathfrak{F} = \left\{ (x_n)_{n=-\infty}^{+\infty} \subset \mathbb{C} : \ x_j = 0 \text{ para } j \leq j_o(x) \text{ y } \sum_{j=1}^{+\infty} |x_j|^2 < +\infty \right\}.$$

Para $x = (x_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$, $y = (y_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ en $\mathfrak{F}$ se define

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} x_j \, \overline{y_{-j-1}}.$$

De la misma manera que se hizo en el Ejemplo 2.40 se prueba que el espacio $\mathfrak{F}$ no es descomponible. Sin embargo $\mathfrak{F}$ admite una mayorante definida por la norma cuadrática

$$\|x\| = \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |x_j|^2 \right)^{1/2}.$$

Definición 3.23. Sea $\mathfrak{F}$ un espacio con producto interno $\langle \ , \ \rangle$ y sea τ una mayorante. Se dice que τ es una mayorante de Hilbert si τ está dada por una norma cuadrática $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle_\tau$ y $\mathfrak{F}$ con el producto $\langle \ , \ \rangle_\tau$ es un espacio de Hilbert.

Observación 3.24. Notar que si τ es una mayorante de Hilbert (como en la definición anterior), entonces existe $\alpha > 0$ tal que

$$|\langle x, y \rangle| \leq \alpha \|x\| \|y\|,$$

para todo $x, y \in \mathfrak{F}$.

Supongamos que el espacio $\mathfrak{F}$ con producto interno $\langle \ , \ \rangle$ posee una mayorante de Hilbert dada por la norma cuadrática $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle_\tau$.

Ejercicio 3.25. Demostrar que en este caso existe un operado lineal $G : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$ tal que

$$\langle x, y \rangle = \langle Gx, y \rangle_\tau$$

para todo $x, y \in \mathfrak{F}$.

Demostrar que G también satisface

$$\|Gx\| \leq \alpha \|x\|$$

y

$$\langle Gx, y\rangle_\tau = \langle x, Gy\rangle_\tau.$$

Al operador G se le llama el *operador de Gram* del producto $\langle\ ,\ \rangle$ con respecto al producto $\langle\ ,\ \rangle_\tau$.

Teorema 3.26. *Si el espacio con producto interno $\mathfrak{F}$ admite una mayorante de Hilbert, entonces $\mathfrak{F}$ es descomponible.*

Además la descomposición puede escogerse de manera que cada una de las tres componentes o la suma directa algebraica de dos de ellas sean cerradas con respecto a esta mayorante.

Demostración. Sea τ la mayorante de Hilbert y $\langle\ ,\ \rangle_\tau$ un producto interno asociado.

Entonces $(\mathfrak{F}, \langle\ ,\ \rangle_\tau)$ es un espacio de Hilbert y

$$G : (\mathfrak{F}, \langle\ ,\ \rangle_\tau) \to (\mathfrak{F}, \langle\ ,\ \rangle_\tau)$$

es un operador autoadjunto.

Sea E la medida espectral de G (ver Apéndice A).

Sean $\mathfrak{F}^o$, $\mathfrak{F}^+$ y $\mathfrak{F}^-$ definidos por

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}^o &= E(\sigma(T) \cap 0)(\mathfrak{F}) \\
\mathfrak{F}^+ &= E(\sigma(T) \cap (0, +\infty)\,)(\mathfrak{F}) \\
\mathfrak{F}^- &= E(\sigma(T) \cap (-\infty, 0)\,)(\mathfrak{F})
\end{aligned}$$

Por las propiedades de la medida espectral se tiene que $\mathfrak{F}$ es suma directa τ-ortogonal de los subespacios (cerrados) $\mathfrak{F}^o$, $\mathfrak{F}^+$ y $\mathfrak{F}^-$.

Sean $x \in \mathfrak{F}^+$, $y \in \mathfrak{F}^-$. Entonces

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle = \langle x, y\rangle_\tau &= \int\limits_{\sigma(T)} \lambda\, d\langle E(\lambda)\, E(\sigma(T) \cap (0, +\infty))x, E(\sigma(T) \cap (-\infty, 0))y\rangle_\tau \\
&= \int\limits_{\sigma(T)} \lambda\, d\langle E(\lambda)\, E(\emptyset)x, y\rangle_\tau = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathfrak{F}^+$ y $\mathfrak{F}^-$ son $\langle\, ,\, \rangle$-ortogonales. De igual manera la $\langle\, ,\, \rangle$-ortogonalidad los espacios restantes.

Por lo tanto

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^o(\dot{+})\mathfrak{F}^+(\dot{+})\mathfrak{F}^-.$$

Supóngase que $x \in \mathfrak{F}^-$ no es nulo, entonces $E(\sigma(T) \cap (-\infty, 0)\,)x \neq 0$

$$\begin{aligned}\langle x, x\rangle &= \langle Gx, x\rangle_\tau \\ &= \langle GE(\sigma(T) \cap (-\infty, 0)x, x\rangle_\tau \\ &= \int\limits_{\sigma(T)\cap(-\infty,0)} \lambda\, d\langle E(\lambda)x, x\rangle_\tau < 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathfrak{F}^-$ es definido negativo. De igual manera se prueba que $\mathfrak{F}^o$ es neutro y que $\mathfrak{F}^+$ es definido positivo.

La última parte del teorema sigue de que la suma $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^o + \mathfrak{F}^+ + \mathfrak{F}^-$ también es directa y ortogonal con respecto a $\langle\ ,\ \rangle_\tau$.

$\square$

Capítulo 4

Espacios de Krein

1. Preliminares

En esta sección se repasan algunos resultados vistos en los capítulos anteriores, que serán necesarios para demostrar algunos de los resultados que se dan en este Capítulo.

Es importante recordar (ver Sección 6.2 del Capítulo 2) que si $\mathfrak{F}$ un espacio con producto interno no degenerado, descomponible y

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^{+}(\dot{+})\mathfrak{F}^{-}$$

es una descomposición fundamental de $\mathfrak{F}$, se define la simetría fundamental asociada a la descomposición por

$$J(x^{+} + x^{-}) = x^{+} - x^{-}.$$

Se cumple lo siguiente:

(1) J es una isometría, es decir

$$\langle Jx, Jy\rangle = \langle x, y\rangle \quad \text{para todo } x, y \in \mathfrak{F}.$$

(2) J es hermitiano, es decir

$$\langle Jx, y\rangle = \langle x, Jy\rangle \quad \text{para todo } x, y \in \mathfrak{F}.$$

(3) Si se define $\langle\ ,\ \rangle_J$ por

$$\langle x, y\rangle_J = \langle Jx, y\rangle,$$

entonces $\langle\ ,\ \rangle_J$ es un producto interno definido positivo en $\mathfrak{F}$.

(4) $\mathfrak{F}^{+}$ y $\mathfrak{F}^{-}$ son $\langle\ ,\ \rangle_J$-ortogonales.

(5) El operador J es una $\|\ \|_J$-isometría (donde $\|\ \|_J$ es la norma asociada a $\langle\ ,\ \rangle_J$).

(6) $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_J\,\|y\|_J$ para todo $x, y \in \mathfrak{F}$ y por lo tanto la topología inducida por $\|\ \|_J$ es una mayorante cuadrática.

2. Descomposiciones fundamentales y completitud

Teorema 4.1. *Sea $\mathfrak{F}$ un espacio con producto interno, no degenerado y descomponible.*

Sean

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1^+ (\dot{+}) \mathfrak{F}_1^-, \qquad \mathfrak{F}_1^+ \subseteq \mathfrak{B}^{++},\ \mathfrak{F}_1^- \subseteq \mathfrak{B}^{--}$$

y

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_2^+ (\dot{+}) \mathfrak{F}_2^-, \qquad \mathfrak{F}_2^+ \subseteq \mathfrak{B}^{++},\ \mathfrak{F}_2^- \subseteq \mathfrak{B}^{--}$$

dos descomposiciones fundamentales de $\mathfrak{F}$.

Si $(\mathfrak{F}_1^+, \langle , \rangle)$ y $(\mathfrak{F}_1^-, -\langle , \rangle)$ son espacios de Hilbert, entonces $(\mathfrak{F}_2^+, \langle , \rangle)$ y $(\mathfrak{F}_2^-, -\langle , \rangle)$ también son espacios de Hilbert y las normas hilbertianas inducidas por ambas descomposiciones son equivalentes.

Demostración. Para $q = 1, 2$ sea J_q la simetría fundamental correspondiente a la descomposición

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_q^+ (\dot{+}) \mathfrak{F}_q^-$$

y sea τ_{J_q} la topología mayorante de descomposición que corresponde con la J_q-norma, $\| \, \|_{J_q}$.

Basta probar que las normas $\| \, \|_{J_1}$ y $\| \, \|_{J_2}$ son equivalentes.

La demostración se hará en varios pasos:

Paso 1: Existe una constante $c_1 > 0$ tal que

$$\|x^+\|_{J_2} \leq c_1 \, \|x^+\|_{J_1} \text{ para todo } x^+ \in \mathfrak{F}_1^+.$$

Por el Lema 2.46 se tiene que

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_{J_2} \|y\|_{J_2} \text{ para todo } x, y \in \mathfrak{F}.$$

Para $y \in \mathfrak{F}$, sea $\psi_y : \mathfrak{F}_1^+ \to \mathbb{C}$ definido por

$$\psi_y(x^+) = \langle x^+, y \rangle,$$

entonces para cada $x^+ \in \mathfrak{F}_1^+$ se tiene que

$$\sup\{|\psi_y(x^+)| : y \in \mathfrak{F},\ \|y\|_{J_2} \leq 1\} < +\infty.$$

Del principio de acotación uniforme se deduce que

$$\sup\{\|\psi_y\|_{L(\mathfrak{F}_1^+, \mathbb{C})} : y \in \mathfrak{F},\ \|y\|_{J_2} \leq 1\} < +\infty,$$

es decir existe $\beta > 0$ tal que para todo $y \in \mathfrak{F}$ tal que $\|y\|_{J_2} \leq 1$ y para todo $x^+ \in \mathfrak{F}_1^+$ se cumple que

$$|\langle x^+, y \rangle| = |\psi_y(x^+)| \leq \beta \|x^+\|_{J_1}.$$

Si $x^+ \in \mathfrak{F}_1^+$, entonces

$$\|x^+\|_{J_2} = \sup_{\|y\|_{J_2} \leq 1} |\langle x^+, y\rangle_{J_2}|.$$

Como J_2 es un operador $\langle \ , \ \rangle_{J_2}$-unitario se tiene que

$$\begin{aligned}
\|x^+\|_{J_2} &= \sup_{\|y\|_{J_2} \leq 1} |\langle x^+, y\rangle_{J_2}| = \sup_{\|y\|_{J_2} \leq 1} |\langle x^+, J_2 y\rangle| \\
&= \sup_{\|J_2 y\|_{J_2} \leq 1} |\langle x^+, J_2 y\rangle| = \sup_{\|z\|_{J_2} \leq 1} |\langle x^+, z\rangle| \\
&\leq \beta \|x^+\|_{J_1}.
\end{aligned}$$

Paso 2: Existe una constante $c_2 > 0$ tal que

$$\|x^-\|_{J_2} \leq c_2 \, \|x^-\|_{J_1} \text{ para todo } x^- \in \mathfrak{F}_1^-.$$

Se deduce del Paso 1, cambiándole el signo al producto interno.

Paso 3: Existe una constante $c_3 > 0$ tal que

$$\|x\|_{J_2} \leq c_3 \, \|x\|_{J_1} \text{ para todo } x \in \mathfrak{F}.$$

Para $x \in \mathfrak{F}$ sea $x = x^+ + x^-$ la descomposición correspondiente a la suma $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1^+ (\dot{+}) \mathfrak{F}_1^-$, entonces

$$\begin{aligned}
\|x\|_{J_2}^2 &\leq \left(\|x^+\|_{J_2} + \|x^-\|_{J_2}\right)^2 \leq \left(c_1 \|x^+\|_{J_1} + c_2 \|x^-\|_{J_1}\right)^2 \\
&\leq (\text{máx}\{c_1, c_2\})^2 \, \left(\|x^+\|_{J_1} + \|x^-\|_{J_1}\right)^2 \\
&\leq 2 \, (\text{máx}\{c_1, c_2\})^2 \, \left(\|x^+\|_{J_1}^2 + \|x^-\|_{J_1}^2 \right) \\
&= 2 \, (\text{máx}\{c_1, c_2\})^2 \, \|x\|_{J_1}^2
\end{aligned}$$

Paso 4: Para $x \in \mathfrak{F}$ sea $x = x^+ + x^-$ la descomposición correspondiente a la suma $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1^+ (\dot{+}) \mathfrak{F}_1^-$, entonces existe una constante $c_4 > 0$ tal que

$$\|x^+\|_{J_2} \leq c_4 \, \|x\|_{J_2} \text{ para todo } x \in \mathfrak{F}.$$

Por lo hecho en el Paso 1

$$\begin{aligned}
\|x^+\|_{J_2}^2 &\leq c_1^2 \, \|x^+\|_{J_1}^2 = c_1^2 \, \langle x^+, x^+\rangle \\
&= c_1^2 \, \langle x^+, x\rangle \leq c_1^2 \, \|x^+\|_{J_2} \, \|x\|_{J_2},
\end{aligned}$$

de donde

$$\|x^+\|_{J_2} \leq c_1^2 \, \|x\|_{J_2}.$$

Paso 5: Existe una constante $c_5 > 0$ tal que

$$\|x\|_{J_1} \leq c_5 \, \|x\|_{J_2} \text{ para todo } x \in \mathfrak{F}.$$

Para $x \in \mathfrak{F}$ sea $x = x^+ + x^-$ la descomposición correspondiente a la suma $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1^+ (\dot{+}) \mathfrak{F}_1^-$, entonces

$$\begin{aligned} \|x\|_{J_1}^2 &= \langle J_1 x, x \rangle \leq \|J_1 x\|_{J_2} \|x\|_{J_2} \\ &= \|2x^+ - x\|_{J_2} \|x\|_{J_2} \\ &\leq (2\|x^+\|_{J_2} + \|x\|_{J_2}) \|x\|_{J_2} \\ &\leq (2c_4 + 1)\|x\|_{J_2}^2. \end{aligned}$$

□

3. Definición y caracterización básica de los espacios de Krein

Definición 4.2. Un *espacio de Krein* es un espacio $\mathfrak{K}$ con producto interno $\langle\ ,\ \rangle$ que admite una descomposición fundamental

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^+ (\dot{+}) \mathfrak{K}^-, \qquad \mathfrak{K}^+ \subseteq \mathfrak{B}^{++},\ \mathfrak{K}^- \subseteq \mathfrak{B}^{--}$$

tal que $(\mathfrak{K}^+, \langle\ ,\ \rangle)$ y $(\mathfrak{K}^-, -\langle\ ,\ \rangle)$ son espacios de Hilbert.

Notación. En los textos y trabajos recientes relacionados con el tema de espacios con métrica indefinida es usual utilizar el símbolo $\oplus$ en vez del símbolo $(\dot{+})$. De ahora en adelante se usará esta notación, del contexto deberá siempre quedar claro con respecto a que producto se refiere la ortogonalidad. Es importante destacar que en espacios no degenerados no hay que distinguir entre suma directa ortogonal ($\oplus$ ó $(\dot{+})$) y suma ortogonal.

Del Lema 2.38 y el Teorema 4.1 se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 4.3. *Un espacio de Krein es no degenerado y descomponible.*

Si $\mathfrak{K}$ es un espacio de Krein y

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^+ \oplus \mathfrak{K}^-$$

es una descomposición fundamental, entonces $(\mathfrak{K}^+, \langle\ ,\ \rangle)$ y $(\mathfrak{K}^-, -\langle\ ,\ \rangle)$ son espacios de Hilbert.

4. Topología fuerte de un espacio de Krein

Sea $\mathfrak{K}$ un espacio de Krein y

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^+ \oplus \mathfrak{K}^-$$

una descomposición fundamental de $\mathfrak{K}$.

Si $|\mathfrak{K}^-|$ denota el anti-espacio de $\mathfrak{K}^-$ se tiene que

$$|\mathfrak{K}| = \mathfrak{K}^+ \oplus |\mathfrak{K}^-|$$

es un espacio de Hilbert. Este espacio de Hilbert tiene un producto interno $\langle\ ,\ \rangle_{|\mathfrak{K}|}$ y una norma $\|\ \|_{|\mathfrak{K}|}$. Por el Teorema 4.1 dos descomposiciones fundamentales dan origen a normas equivalentes y por lo tanto dan origen a la misma topología. Esta topología es la que se conoce como *topología fuerte* del espacio de Krein $|\mathfrak{K}^-|$. Además se cumple

$$|\langle x, y\rangle_{\mathfrak{K}}| \leq \|x\|_{|\mathfrak{K}|}\ \|y\|_{|\mathfrak{K}|} \text{ para todo } x, y \in \mathfrak{K}.$$

En general, los conceptos de convergencia, continuidad, etc en un espacio de Krein se refieren a esta topología.

Ejercicio 4.4. Sea $\mathfrak{K}$ un espacio de Krein y

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^+ \oplus \mathfrak{K}^-$$

una descomposición fundamental de $\mathfrak{K}$.

Demostrar que la topología débil del espacio de Hilbert $|\mathfrak{K}|$ coincide con la topología débil de $\mathfrak{K}$ según la Definición 3.10.

Ejercicio 4.5. Sea $\mathfrak{K}$ un espacio de Krein y

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^+ \oplus \mathfrak{K}^-$$

una descomposición fundamental de $\mathfrak{K}$.

Demostrar que la el operador de Gram y la simetría fundamental asociados a la descomposición anterior coinciden.

5. Índices de un espacio de Krein

Lema 4.6. *Sea $\mathfrak{F}$ un espacio con producto interno, no degenerado y descomponible y sea*

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^+(\dot{+})\mathfrak{F}^-, \qquad \mathfrak{F}^+ \subseteq \mathfrak{B}^{++},\ \mathfrak{F}^- \subseteq \mathfrak{B}^{--}$$

una descomposición fundamental de $\mathfrak{F}$.

Sea J la simetría fundamental y P^+ y P^- las proyecciones fundamentales asociadas a esta descomposición.

Si $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{F}$ es una variedad lineal definida positiva entonces el operador $P^+|_{\mathfrak{L}}$ es acotado inferiormente con respecto a la norma cuadrática $\|\ \|_J$.

De igual manera, Si $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{F}$ es una variedad lineal definida negativa entonces el operador $P^-|_{\mathfrak{L}}$ es acotado inferiormente con respecto a la norma cuadrática $\|\ \|_J$.

Demostración. Sea $x \in \mathfrak{F}$ positivo. Entonces

$$\|x\|_J^2 = \|P^+x\|_J^2 + \|P^-x\|_J^2 = 2\,\|P^+x\|_J^2 - \langle x, x\rangle \leq 2\,\|P^+x\|_J^2.$$

De manera análoga, si $x \in \mathfrak{F}$ es negativo, entonces

$$\|x\|_J^2 = 2\,\|P^-x\|_J^2 + \langle x, x\rangle \leq 2\,\|P^-x\|_J^2.$$

□

Corolario 4.7. *Sea $\mathfrak{F}$ un espacio con producto interno, no degenerado y descomponible y sea*

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^+(\dot{+})\mathfrak{F}^-, \qquad \mathfrak{F}^+ \subseteq \mathfrak{B}^{++},\ \mathfrak{F}^- \subseteq \mathfrak{B}^{--}$$

una descomposición fundamental de $\mathfrak{F}$.

Si $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{F}$ es una variedad lineal definida positiva (definida negativa) entonces la dimensión algebraica de $\mathfrak{L}$ es menor o igual que la dimensión algebraica de $\mathfrak{F}^+$ ($\mathfrak{F}^-$).

Si $\mathfrak{F}$ es un espacio de Krein y $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{F}$ es un subespacio definido positivo (definido negativo) entonces la dimensión (hilbertiana) de $\mathfrak{L}$ es menor o igual que la dimensión (hilbertiana) de $\mathfrak{F}^+$ ($\mathfrak{F}^-$).

Demostración. Se tiene que

$$P^+|_{\mathfrak{L}} : \mathfrak{L} \to P^+(\mathfrak{L})$$

es un operador lineal biyectivo. Además es acotado y acotado inferiormente con respecto a la norma de la descomposición.

Siempre

$$\dim P^+(\mathfrak{L}) \leq \dim \mathfrak{F}^+,$$

donde dim denota la dimensión algebraica o la dimensión hilbertiana.

Como $\dim \mathfrak{L} = \dim P^+(\mathfrak{L})$ se obtiene el resultado para el caso definido positivo. El caso definido negativo es análogo.

□

Por lo anterior se tiene el siguiente resultado, fundamental en la teoría de espacios de Krein.

Teorema 4.8. *Sea $\mathfrak{K}$ un espacio de Krein y sean*

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1^+ \oplus \mathfrak{K}_1^-, \qquad \mathfrak{K}_1^+ \subseteq \mathfrak{B}^{++},\ \mathfrak{K}_1^- \subseteq \mathfrak{B}^{--}$$

y

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_2^+ \oplus \mathfrak{K}_2^-, \qquad \mathfrak{K}_2^+ \subseteq \mathfrak{B}^{++},\ \mathfrak{K}_2^- \subseteq \mathfrak{B}^{--}$$

dos descomposiciones fundamentales de $\mathfrak{K}$.

Entonces:

(1) *La dimensión algebraica de $\mathfrak{K}_1^+$ es igual a la dimensión algebraica de $\mathfrak{K}_2^+$.*
(2) *La dimensión algebraica de $\mathfrak{K}_1^-$ es igual a la dimensión algebraica de $\mathfrak{K}_2^-$.*
(3) *La dimensión hilbertiana de $\mathfrak{K}_1^+$ es igual a la dimensión hilbertiana de $\mathfrak{K}_2^+$.*
(4) *La dimensión hilbertiana de $|\mathfrak{K}_1^-|$ es igual a la dimensión hilbertiana de $|\mathfrak{K}_2^-|$.*

Sea $\mathfrak{K}$ un espacio de Krein, con descomposición fundamental

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^+ \oplus \mathfrak{K}^-, \qquad \mathfrak{K}^+ \subseteq \mathfrak{B}^{++},\ \mathfrak{K}^- \subseteq \mathfrak{B}^{--}.$$

Basándose en este último teorema se define el *rango de positividad* (o *índice positivo*) de un espacio de Krein como la dimensión Hilbertiana de $\mathfrak{K}^+$ y el *rango de negatividad* (o *índice negativo*) de un espacio de Krein como la dimensión Hilbertiana de $|\mathfrak{K}^-|$.

6. Funcionales lineales continuos

Salvo que se especifique explícitamente lo contrario, en lo que sigue de este capítulo se supondrá que $(\mathfrak{K}, \langle\ ,\ \rangle)$ es un espacio de Krein, que se ha escogido una descomposición fundamental

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^+ \oplus \mathfrak{K}^-, \qquad \mathfrak{K}^+ \subseteq \mathfrak{B}^{++},\ \mathfrak{K}^- \subseteq \mathfrak{B}^{--},$$

J es la simetría fundamental asociada a la descomposición y $\langle\ ,\ \rangle_J$ es el producto hilbertiano que corresponde con la descomposición.

Lema 4.9. *Si $\mathcal{M} \subseteq \mathfrak{K}$ es un subconjunto denso, $x \in \mathfrak{K}$ y*

$$\langle x, y\rangle = 0 \ \textit{para todo}\ y \in \mathcal{M},$$

entonces $x = 0$.

Demostración. Es importante destacar que el que $\mathcal{M}$ sea denso, lo que quiere decir que $\mathcal{M}$ es denso en $|\mathfrak{K}|$. Como el producto en $|\mathfrak{K}|$ es $\langle\ ,\ \rangle_J$, se tiene que si $z \in \mathfrak{K}$ y

$$\langle z, y\rangle_J = 0 \text{ para todo } y \in \mathfrak{K},$$

entonces $z = 0$.

Como $\langle x, y\rangle = \langle Jx, y\rangle_J$ se tiene que $Jx = 0$ y por lo tanto $x = 0$.

$\square$

El siguiente resultado extiende el teorema de representación de Riesz a espacios de Krein.

Teorema 4.10. *Sea $f : \mathfrak{K} \to \mathbb{C}$ un funcional lineal y continuo. Entonces existe un único vector $y \in \mathfrak{K}$ tal que*

$$f(x) = \langle x, y \rangle \text{ para todo } x \in \mathfrak{K}.$$

Demostración. Por la definición de la topología en $\mathfrak{K}$ se tiene que $f : |\mathfrak{K}| \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal y continuo.

Por el teorema de representación de Riesz existe $z \in \mathfrak{K}$ tal que $f(x) = \langle x, z \rangle_J$ para todo $x \in \mathfrak{K}$. Como $\langle x, z \rangle_J = \langle x, Jz \rangle$, tomando $y = Jz$ se obtiene el resultado de existencia.

La unicidad sigue de que $\mathfrak{K}$ es no degenerado. $\square$

7. Adjunto de un operador

Sea $\mathcal{D}(T) \subseteq \mathfrak{K}$ una variedad lineal densa y sea $T : \mathcal{D}(T) \to \mathfrak{K}$ un operador lineal.

La definición del adjunto de T se hace de manera análoga a cómo se hace en espacios de Hilbert.

Sea

$$\mathcal{D}(T^*) = \{y \in \mathfrak{K} : \text{ la función lineal } x \mapsto \langle Tx, y \rangle \text{ es continua } \}.$$

Sea $y \in \mathcal{D}(T^*)$. Entonces la función lineal $x \mapsto \langle Tx, y \rangle$, con dominio $\mathcal{D}(T)$, se puede extender de manera continua a todo $\mathfrak{K}$. Por el Teorema 4.10 existe $z \in \mathfrak{K}$ tal que

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, z \rangle.$$

Por la densidad de $\mathcal{D}(T)$ z es único. Se define $T^*y = z$.

Ejercicio 4.11. Demostrar que, fijado y, el vector z es único y la correspondencia

$$y \mapsto T^*y$$

es lineal.

Al operador T^* se le llama el *adjunto* de T.

En resumen, el adjunto de T es el único operador lineal $T^* : \mathcal{D}(T^*) \to \mathfrak{K}$ tal que

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$$

para todo $x \in \mathcal{D}(T)$, $y \in \mathcal{D}(T^*)$

Ejercicio 4.12. Dar un ejemplo de un operador lineal T tal que $\mathcal{D}(T^*) = \{0\}$.

Ejercicio 4.13. Demostrar las siguientes propiedades del operador adjunto.

(1) $0^* = 0$, $I^* = I$.
(2) T^* siempre es un operador cerrado.

(3) Si T es continuo, con dominio $\mathfrak{K}$, entonces $\mathcal{D}(T^*) = \mathfrak{K}$ y T^* también es continuo.

Observación 4.14. Si consideramos a T como operador de $|\mathfrak{K}|$ en $|\mathfrak{K}|$, entonces T tiene un adjunto, que se llamará el J-adjunto de T y se denotará por T^{*_J}, y que satisface

$$\langle Tx, y\rangle_J = \langle x, T^{*_J} y\rangle_J \text{ para todo } x \in \mathcal{D}(T),\ y \in \mathcal{D}(T^{*_J}),$$

es decir

$$\langle x, T^* Jy\rangle = \langle x, JT^{*_J} y\rangle \text{ para todo } x \in \mathcal{D}(T),\ y \in \mathcal{D}(T^{*_J}).$$

Por lo tanto $\mathcal{D}(T^{*_J}) = J\mathcal{D}(T^*)$, $J\mathcal{D}(T^{*_J}) = \mathcal{D}(T^*)$ y

$$T^* = JT^{*_J} J.$$

Esta última igualdad permite trasladar resultados de operadores en espacios de Hilbert a operadores en espacios de Krein. Los siguientes resultados se pueden obtener de esta manera.

Teorema 4.15. *Sea T un operador con dominio denso. Entonces T admite una extensión cerrada si y sólo si existe T^{**}. En este caso T^{**} es la clausura de T.*

Teorema 4.16. *Sean T_1 y T_2 operadores con dominio denso. Si $T_1 \subseteq T_2$, entonces $T_2^* \subseteq T_1^*$*

Teorema 4.17. *Sea T un operador con dominio denso. Si $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*) = \mathfrak{K}$ entonces T es continuo.*

8. Condiciones para la continuidad de operadores isométricos

Tal como se dijo en el Capítulo 2, se dice que el operador lineal $V : \mathcal{D}(V) \to \mathfrak{K}$ es una *isometría* (o una $\langle\ ,\ \rangle$-*isometría* si se quiere ser más especifico) si

$$\langle Vx, Vy\rangle = \langle x, y\rangle \quad \text{para todo } x, y \in \mathcal{D}(V).$$

Se dice que el operador lineal U es *unitario* (o $\langle\ ,\ \rangle$-*unitario* si se quiere ser más especifico) si $\mathcal{D}(U) = \mathfrak{K}$, U es una isometría y Rango$(U) = \mathfrak{K}$.

Lema 4.18. *Sea $V : \mathcal{D}(V) \to \mathfrak{K}$ un operador isométrico, si $\mathcal{D}(V)$ es no degenerado entonces V es inyectivo.*

Demostración. Sea $x \in \mathcal{D}(V)$ tal que $Vx = 0$. Entonces

$$\langle x, y\rangle = \langle Vx, Vy\rangle = 0 \text{ para todo } y \in \mathcal{D}(V).$$

Como $\mathcal{D}(V)$ es no degenerado, se tiene que $x = 0$.

□

Teorema 4.19. *Sea $V : \mathcal{D}(V) \to \mathfrak{K}$ un operador isométrico. Si $\mathcal{D}(V)$ es cerrado y no degenerado y la clausura del rango de V es no degenerada, entonces V es continuo.*

Demostración. Ya que $\mathcal{D}(V)$ y la clausura del rango de V son completos en la topología fuerte, por el teorema del gráfico cerrado basta demostrar que el gráfico de V es cerrado.

Sea $(x_n) \subset \mathcal{D}(V)$ tal que

$$x_n \to x_o, \qquad Vx_n \to y_o.$$

Por el Lema 4.18 V tiene inverso $V^{-1} : \text{Rango}(V) \to \mathcal{D}(V)$, por ser $\mathcal{D}(V)$ cerrado se tiene que $x_o \in \mathcal{D}(V)$. Por lo tanto, para $z \in \text{Rango}(V)$ se tiene que

$$\langle Vx_n, z\rangle = \langle x_n, V^{-1}z\rangle \to \langle x_o, V^{-1}z\rangle = \langle Vx_o, z\rangle,$$

como $Vx_n \to y_o$ también se tiene que

$$\langle y_o, z\rangle = \langle Vx_o, z\rangle.$$

Por lo tanto

$$\langle Vx_o - y_o, z\rangle = 0 \text{ para todo } z \in \text{Rango}(V),$$

de donde

$$\langle Vx_o - y_o, z\rangle = 0 \text{ para todo } z \in \overline{\text{Rango}(V)}.$$

Como $Vx_o - y_o \in \overline{\text{Rango}(V)}$ y $\overline{\text{Rango}(V)}$ es no degenerado, tiene que ser

$$Vx_o = y_o.$$

$\square$

Corolario 4.20. *Todo operador unitario en un espacio de Krein es continuo.*

También se cumple el siguiente resultado (se enuncia sin demostración, ver [**5**])

Teorema 4.21. *Si V es una isometría con dominio orto-complementado entonces V es continua si y sólo si su rango es orto-complementado.*

Capítulo 5

Espacios de Pontryagin

1. Definición y resultados básicos

Un *espacio de Pontryagin* es un espacio de Krein tal que uno de sus índices es finito (para la definición de índice ver página 37).

Por lo tanto un espacio de Pontryagin es un espacio de Krein $\mathfrak{K}$ con descomposición fundamental

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^+ \oplus \mathfrak{K}^-, \qquad \mathfrak{K}^+ \subseteq \mathfrak{B}^{++},\, \mathfrak{K}^- \subseteq \mathfrak{B}^{--}$$

tal que la dimensión de $\mathfrak{K}^+$ o la dimensión de $\mathfrak{K}^-$ es finita.

Por definición todo espacio de Pontryagin es un espacio de Krein, todo espacio de Hilbert es un espacio de Pontryagin y todo espacio con producto interno no degenerado y de dimensión finita es un espacio de Pontryagin.

Al hablar de espacio de Pontryagin se supondrá que el índice finito es el negativo. Este índice finito se suele denotar con el símbolo κ (la letra griega kappa) y el símbolo Π_κ denotará un espacio de Pontryagin de índice κ. Esto no es nada restrictivo, ya que un espacio de Pontryagin o es un espacio Π_κ o es el anti-espacio de un Π_κ.

Del Corolario 4.7 y de otros hechos básicos se puede deducir el siguiente resultado, su demostración queda como ejercicio.

Teorema 5.1.

(1) *Si $\mathcal{L}$ es una variedad lineal definida negativa de un espacio Π_κ entonces* $\dim(\mathcal{L}) \leq \kappa$.

(2) *Si $\mathcal{L}$ es una variedad lineal definida negativa de un espacio Π_κ entonces $\mathcal{L}$ es maximal definida negativa si y sólo si* $\dim(\mathcal{L}) = \kappa$.

(3) *Si $\mathcal{L}$ es una variedad lineal κ-dimensional y definida negativa de un espacio Π_κ entonces existe una descomposición fundamental*

$$\Pi_\kappa = \Pi^+ \oplus \Pi^-, \qquad \Pi^+ \subseteq \mathfrak{B}^{++},\, \Pi^- \subseteq \mathfrak{B}^{--}$$

tal que $\Pi^- = \mathcal{L}$.

Ejercicio 5.2. Demostrar que si $\mathcal{L}$ es una variedad lineal contenida en un espacio Π_κ y $\mathcal{L}$ contiene una variedad lineal definida negativa de dimensión κ, entonces $\mathcal{L}$ es no degenerado.

Teorema 5.3. *Toda variedad lineal densa en un espacio Π_κ contiene una variedad lineal definida negativa de dimensión κ.*

Demostración. El caso $\kappa = 0$ es inmediato, por lo tanto se puede suponer $\kappa \geq 1$.

Sea $\mathcal{L} \subseteq \Pi_\kappa$ una variedad lineal densa.

Sea

$$\Pi_\kappa = \Pi^+ \oplus \Pi^-, \qquad \Pi^+ \subseteq \mathfrak{B}^{++},\ \Pi^- \subseteq \mathfrak{B}^{--}$$

una descomposición fundamental y J la simetría fundamental correspondiente.

Sea $\{e_1, \ldots, e_\kappa\}$ una base ortonormal de $|\Pi^-|$. Por la densidad de la variedad lineal $\mathcal{L}$ existe $\{f_1, \ldots, f_\kappa\} \subset \mathcal{L}$ tal que

$$\|f_q - e_q\| < \frac{1}{6\kappa^2} \quad (q = 1, \ldots, \kappa).$$

Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_\kappa \in \mathbb{C}$ satisfacen

$$\sum_{q=1}^{\kappa} |\alpha_q|^2 = 1$$

y si se consideran

$$x = \sum_{q=1}^{\kappa} \alpha_q e_q, \quad y = \sum_{q=1}^{\kappa} \alpha_q f_q,$$

entonces

$$\|x - y\|_J \leq \sum_{q=1}^{\kappa} |\alpha_q|\, \|e_q - f_q\| < \kappa \frac{1}{6\kappa^2} = \frac{1}{6\kappa},$$

$$-\langle x, x\rangle = \|x\|_J^2 = 1, \quad \|y\|_J \leq \sum_{q=1}^{\kappa} |\alpha_q| \|f_q\|_J \leq \kappa \left(1 + \frac{1}{6\kappa^2}\right) = \kappa + \frac{1}{6\kappa}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
|\langle y, y\rangle + 1| &= |\langle y, y\rangle - \langle x, x\rangle| \leq |\langle y, y - x\rangle| + |\langle y - x, x\rangle| \\
&\leq \|y\|_J\, \|y - x\|_J + \|x\|_J\, \|y - x\|_J \\
&< \left(\kappa + \frac{1}{6\kappa} + 1\right) \frac{1}{6\kappa} = \frac{1}{6} + \frac{1}{36\kappa^2} + \frac{1}{6\kappa} \\
&\leq \frac{1}{6} + \frac{1}{36} + \frac{1}{6} < 1,
\end{aligned}$$

de donde se obtiene que

$$\langle y, y\rangle < 0.$$

Finalmente sea

$$z = \sum_{q=1}^{\kappa} \beta_q f_q$$

un elemento no nulo de $\mathcal{L}$, entonces $\beta^2 = \sum_{q=1}^{\kappa} |\beta_q|^2 > 0$. Aplicando el argumento anterior con $y = \frac{1}{\beta} z$ se obtiene

$$\langle z, z\rangle < 0.$$

En consecuencia los vectores $f_1, \ldots, f_\kappa$ son linealmente independientes y generan una variedad lineal definida negativa.

$\square$

2. Espacios pre-Pontryagin

Definición 5.4. Sea κ un entero no negativo. Un *espacio pre-*Π_κ es un espacio $\mathfrak{F}$ con producto interno no degenerado, que contiene una variedad lineal maximal definida negativa de dimensión κ.

Un *espacio pre-Pontryagin* es un espacio con producto interno $\mathfrak{F}$ tal que $\mathfrak{F}$ o su antiespacio es un espacio pre-Π_κ.

Ejercicio 5.5. Sea $\mathcal{F}$ un espacio con producto interno y $\mathcal{L} \subseteq \mathfrak{F}$ una variedad lineal definida negativa de dimensión finita n. Demostrar que existen n vectores $e_1, \ldots, e_n \in \mathcal{L}$ tales que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de $\mathcal{L}$ y

$$\langle e_j, e_q\rangle = -\delta_{jq} \quad (j, q = 1, \ldots, n).$$

En las mismas condiciones que en el ejercicio anterior, se dice que el conjunto $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una *base ortonormal* de $\mathcal{L}$.

Teorema 5.6. *Sea $\mathcal{F}$ un espacio pre-Π_κ y sea $\mathcal{N} \subseteq \mathfrak{F}$ una variedad lineal definida negativa de dimensión κ, entonces*

(1) $\mathcal{N}^\perp$ *es un espacio pre-Hilbert y $\mathfrak{F}$ es la suma directa ortogonal de $\mathcal{N}$ y $\mathcal{N}^\perp$, es decir*

$$\mathfrak{F} = \mathcal{N} \oplus \mathcal{N}^\perp.$$

(2) *Si $\mathcal{M} \subseteq \mathfrak{F}$ es una variedad lineal maximal definida negativa, entonces* $\dim(\mathcal{M}) = \kappa$.

(3) *Si $\mathcal{L} \subseteq \mathfrak{F}$ es una variedad lineal semi-definida negativa, entonces* $\dim(\mathcal{L}) \leq \kappa$.

Demostración.

Nota: Se hará una demostración lo más autocontenida posible. Es importante destacar que algunos de los argumentos que se dan a continuación se pueden simplificar u obtener de resultados ya establecidos, por lo que se podría acortar y simplificar esta prueba.

Prueba de (1): Sea $\{e_1, \ldots, e_\kappa\}$ una base ortonormal de $\mathcal{N}$. Para $x \in \mathfrak{F}$, sea x^+ el vector definido por

$$x^+ = x + \sum_{j=1}^{\kappa} \langle x, e_j \rangle e_j.$$

Entonces

$$\langle x^+, e_q \rangle = \langle x, e_q \rangle + \sum_{j=1}^{\kappa} \langle x, e_j \rangle \langle e_j, e_q \rangle = \langle x, e_q \rangle - \langle x, e_q \rangle = 0,$$

por lo tanto x^+ pertenece a $\mathcal{N}^\perp$, luego $\mathfrak{F} = \mathcal{N} + \mathcal{N}^\perp$.

Como $\mathcal{N}$ es definida negativa entonces $\mathcal{N} \cap \mathcal{N}^\perp = \{0\}$.

Para terminar la demostración de (1) sólo falta probar que $\mathcal{N}^\perp$ es un pre-Hilbert es decir, se debe probar que si $x \in \mathcal{N}^\perp$ y $x \neq 0$ entonces $\langle x, x \rangle > 0$.

Sea $x \in \mathcal{N}^\perp$ un vector no nulo.

Si se cumpliera que $\langle x, x \rangle < 0$ entonces la variedad lineal generada por $\mathcal{N}$ y $\{x\}$ sería una variedad lineal definida negativa de dimensión $\kappa + 1$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto $\mathcal{N}^\perp$ es semi-definido positivo. Si se tuviera que $\langle x, x \rangle = 0$, por ser $\mathcal{N}^\perp$ semi-definido positivo se tendría que $x \perp \mathcal{N}^\perp$ y por lo tanto $x \perp \mathfrak{F}$, lo que implicaría que $x = 0$ ya que $\mathfrak{F}$ es no degenerado.

Luego la única posibilidad es $\langle x, x \rangle > 0$.

Prueba de (3): Por (1) todo vector de $\mathfrak{F}$ tiene una única representación de la forma

$$x = x^+ + x^- \quad (x^- \in \mathcal{N},\ x^+ \in \mathcal{N}^\perp).$$

Además

$$x^- = -\sum_{j=1}^{\kappa} \langle x, e_j \rangle e_j$$

por lo tanto la aplicación $x \mapsto x^-$ es lineal.

Para probar (3) basta probar que la aplicación lineal de $\mathcal{L}$ en $\mathcal{N}$ dada por $x \mapsto x^-$ es inyectiva. Sean $x, y \in \mathcal{L}$ tales que $x^- = y^-$, entonces $x - y = x^+ - y^+ \in \mathcal{N}^\perp \cap \mathcal{L}$. Como $\mathcal{L}$ es semi-definido negativo y $\mathcal{N}^\perp$ es un espacio pre-Hilbert, debe ser $x - y = 0$.

Prueba de (2): Por (3) $\dim(\mathcal{M}) \leq \dim(\mathcal{N}) = \kappa$. Como $\mathcal{M}$ es maximal definida negativa, usando los mismos argumentos anteriores se puede probar que $\mathcal{M}^\perp$ es pre-Hilbert y por lo tanto $\dim(\mathcal{N}) \leq \dim(\mathcal{M})$. Luego $\dim(\mathcal{M}) = \kappa$.

$\square$

Observación 5.7 (Una fórmula para las J-normas)**.** Sea $\mathcal{F}$ un espacio pre-Π_κ, sea $\mathcal{N} \subseteq \mathfrak{F}$ una variedad lineal definida negativa de dimensión κ. Entonces $\mathcal{N}^\perp$ es un espacio pre-Hilbert

$$\mathfrak{F} = \mathcal{N} \oplus \mathcal{N}^\perp.$$

Sea J la simetría fundamental correspondiente a esta descomposición y sea $\| \|_J$ la norma correspondiente.

Sea $\{e_1, \ldots, e_\kappa\}$ una base ortonormal de $\mathcal{N}$. Si $x \in \mathfrak{F}$ entonces $x = x^+ + x^-$ ($x^- \in \mathcal{N}$, $x^+ \in \mathcal{N}^\perp$), donde

$$x^- = -\sum_{j=1}^{\kappa} \langle x, e_j \rangle e_j.$$

Luego

$$\begin{aligned} \|x\|_J^2 &= \langle x^+, x^+ \rangle - \langle x^-, x^- \rangle \\ &= \langle x^+ + x^-, x^+ + x^- \rangle - 2\langle x^-, x^- \rangle \\ &= \langle x, x \rangle - 2\langle x^-, x^- \rangle, \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$\|x\|_J^2 = \langle x, x \rangle + 2 \sum_{j=1}^{\kappa} |\langle x, e_j \rangle|^2. \tag{5.1}$$

Teorema 5.8. *Sea $\mathfrak{F}$ un espacio pre-Π_κ y sean $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 \subseteq \mathfrak{F}$ dos variedades lineales definidas negativas de dimensión κ. Entonces las topologías que inducen en $\mathcal{F}$ las descomposiciones*

$$\mathfrak{F} = \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_1^\perp \quad y \quad \mathfrak{F} = \mathcal{N}_2 \oplus \mathcal{N}_2^\perp$$

son equivalentes, es decir todas las J-normas de $\mathcal{F}$ son equivalentes.

Demostración. Sea J_q la simetría fundamental correspondiente a la descomposición

$$\mathfrak{F} = \mathcal{N}_q \oplus \mathcal{N}_q^\perp \quad q = 1, 2$$

y sea $\| \|_{J_q}$ la norma correspondiente.

Sea $\{e_1, \ldots, e_\kappa\}$ una base ortonormal de $\mathcal{N}_1$ y sea $x \in \mathfrak{F}$, por la Fórmula (5.1) se tiene que

$$\begin{aligned} \|x\|_{J_1}^2 = \langle x, x \rangle + 2 \sum_{j=1}^{\kappa} |\langle x, e_j \rangle|^2 &\leq |\langle x, x \rangle| + 2 \sum_{j=1}^{\kappa} |\langle x, e_j \rangle|^2 \\ &\leq \|x\|_{J_2}^2 + 2 \sum_{j=1}^{\kappa} \|x\|_{J_2}^2 \, \|e_j\|_{J_2}^2 \\ &= \left(1 + 2 \sum_{j=1}^{\kappa} \|e_j\|_{J_2}^2\right) \|x\|_{J_2}^2 \end{aligned}$$

$\square$

Como consecuencia de este resultado se tiene que en todo espacio pre-Π_κ está definida, de manera natural, una topología que proviene de una norma cuadrática.

Como ejercicio demostrar los siguientes resultados.

Teorema 5.9. *Demostrar que si $\mathfrak{F}$ es un espacio pre-Π_κ entonces existe un espacio Π_κ tal que $\mathfrak{F} \subseteq \Pi_\kappa$, $\langle x, y\rangle_{\mathfrak{F}} = \langle x, y\rangle_{\Pi_\kappa}$ para todo $x, y \in \mathfrak{F}$ y $\mathfrak{F}$ es denso en Π_κ.*

Dicho de otra manera: todo espacio pre-Π_κ puede ser completado.

Teorema 5.10. *Toda variedad lineal densa en un espacio pre-Π_κ contiene una variedad lineal definida negativa de dimensión κ.*

Corolario 5.11. *Toda variedad lineal densa en un espacio pre-Π_κ es un espacio pre-Π_κ.*

3. Una condición para la continuidad de operadores isométricos

Lema 5.12. *Sean $\mathfrak{F}$ un espacio pre-Π_κ, $\mathcal{D}(V) \subseteq \mathfrak{F}$ una variedad lineal y $V : \mathcal{D}(V) \to \mathfrak{F}$ un operador isométrico.*

Si $\mathcal{D}(V)$ contiene una variedad lineal definida negativa de dimensión κ, entonces V es continuo.

Demostración. Sea $\mathcal{N} \subset \mathcal{D}(V)$ una variedad lineal definida negativa de dimensión κ. Por el Teorema 5.6 existe una descomposición fundamental, con simetría fundamental J, de la forma

$$\mathfrak{F} = \mathcal{N}^\perp \oplus \mathcal{N}, \qquad \mathcal{N}^\perp \subseteq \mathfrak{B}^{++}.$$

Sea $x \in \mathcal{D}(V)$, de acuerdo con la descomposición anterior

$$x = x^+ + x^- \text{ donde } x^+ \in \mathcal{N}^\perp,\ x^- \in \mathcal{N},$$

por lo tanto $x^+ = x - x^- \in \mathcal{D}(V)$, de donde se concluye que

$$\mathcal{D}(V) = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N},$$

donde $\mathcal{M} \subset \mathcal{D}(V) \cap \mathcal{N}^\perp$ es una variedad lineal definida positiva.

Como V es una isometría, $V(\mathcal{N})$ es una variedad lineal definida negativa de dimensión κ. Al igual que antes se tiene la descomposición fundamental, con simetría fundamental J', de la forma

$$\mathfrak{F} = V(\mathcal{N})^\perp \oplus V(\mathcal{N}), \qquad V(\mathcal{N})^\perp \subseteq \mathfrak{B}^{++}.$$

Además

$$\text{rango}(V) = V(\mathcal{M}) \oplus V(\mathcal{N}),$$

y $V(\mathcal{M}) \subset V(\mathcal{N})^\perp$ es una variedad lineal definida positiva.

Sea $x \in \mathcal{D}(V)$ con J-descomposición $x = x^+ + x^-$, entonces

$$\begin{aligned}\|Vx\|_{J'}^2 &= \|Vx^+ + Vx^-\|_{J'}^2 = \|Vx^+\|_{J'}^2 + \|Vx^-\|_{J'}^2 \\ &= \langle Vx^+, Vx^+\rangle - \langle Vx^-, Vx^-\rangle \\ &= \langle x^+, x^+\rangle - \langle x^-, x^-\rangle \\ &= \|x\|_J^2.\end{aligned}$$

Finalmente de que $\| \|_J$ y $\| \|_{J'}$ son equivalentes (Teorema 5.8) se obtiene el resultado.

$\square$

Con las mismas hipótesis que en el lema anterior, por el Ejercicio 5.2 $\mathcal{D}(V)$ es no degenerado y por el Lema 4.18 V es inyectivo.

Por lo tanto se tiene el siguiente resultado.

Teorema 5.13. *Sean Π_κ un espacio de Pontryagin de índice κ, $\mathcal{D}(V) \subseteq \Pi_\kappa$ una variedad lineal y $V : \mathcal{D}(V) \to \Pi_\kappa$ un operador isométrico.*

Si $\mathcal{D}(V)$ contiene una variedad lineal definida negativa de dimensión κ, entonces V es inyectivo y los operadores V y V^{-1} son continuos.

Capítulo 6

Teorema de Naimark. (Extensión del teorema de Stone a espacios de Krein y de Pontryagin)

En este capítulo se prueba la extensión del teorema de Stone a espacios con métrica indefinida dada por Naimark en [**9**]. Para la lectura de este capítulo es necesario conocer el teorema de Hille-Yosida, expuesto en el Apéndice B.

1. El caso de un espacio de Krein general

Proposición 6.1. *Sean $\mathfrak{K}$ un espacio de Krein con producto interno $\langle\ ,\ \rangle$, $\mathcal{D}(T) \subseteq \mathfrak{K}$ una variedad lineal densa y $T : \mathcal{D}(T) \to \mathfrak{K}$ un operador lineal simétrico y cerrado.*

Si existe un número complejo λ tal que λ y $\overline{\lambda}$ pertenecen al conjunto resolvente de T entonces T es autoadjunto.

Demostración. Como $\lambda I - T^*$ extiende a $\lambda I - T$ se tiene que $\lambda I - T^*$ es sobreyectivo. Sean $x \in \mathcal{D}(T^*)$, $y \in \mathfrak{K}$, entonces

$$\begin{aligned}
\langle [(\overline{\lambda} I - T)^{-1}]^* \, (\lambda I - T^*)x, y\rangle &= \langle (\lambda I - T^*)x, (\overline{\lambda} I - T)^{-1} y\rangle \\
&= \langle (\overline{\lambda} I - T)^* x, (\overline{\lambda} I - T)^{-1} y\rangle \\
&= \langle x, (\overline{\lambda} I - T)(\overline{\lambda} I - T)^{-1} y\rangle \\
&= \langle x, y\rangle.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $[(\overline{\lambda} I - T)^{-1}]^* \, (\lambda I - T^*)x = x$, luego $\lambda I - T^*$ es inyectivo, así que (ver Definición B.10) λ pertenece al conjunto resolvente de T^*.

Finalmente se tiene que $\lambda I - T$ es una biyección entre $\mathcal{D}(T)$ y $\mathfrak{X}$ y su extensión, $\lambda I - T^*$ es una biyección entre $\mathcal{D}(T^*)$ y $\mathfrak{X}$, de donde $\lambda I - T = \lambda I - T^*$, es decir $T = T^*$.

$\square$

Teorema 6.2 (Naimark)**.**

Sea $\mathfrak{K}$ un espacio de Krein. El operador lineal A es el generador infinitesimal de un grupo fuertemente continuo de operadores unitarios

$$(U_t)_{-\infty<t<+\infty} \subset L(\mathfrak{K})$$

si y sólo si iA es un operador autoadjunto y existen constantes M y a positivas tales que el conjunto $\{\lambda \in \mathbb{R} : |\lambda| > a\}$ está contenido en el conjunto resolvente de A y

$$\|(\lambda I - A)^{-m}\| \leq M(|\lambda| - a)^{-m}$$

para todo λ tal que $|\lambda| > a$ y para todo entero $m \geq 1$.

Demostración.

($\Rightarrow$) Supongamos que A es el generador infinitesimal de un grupo fuertemente continuo de operadores unitarios $(U_t)_{-\infty<t<+\infty} \subset L(\mathfrak{K})$.

Es claro que $(U_t)_{-\infty<t<+\infty}$ es un semigrupo de clase C_o, por el teorema de Hille-Yosida se cumple que existen constantes M y a positivas tales que el conjunto $\{\lambda \in \mathbb{R} : |\lambda| > a\}$ está contenido en el conjunto resolvente de A y

$$\|(\lambda I - A)^{-m}\| \leq M(|\lambda| - a)^{-m}$$

para todo $|\lambda| > a$ y para todo entero $m \geq 1$.

Sean $x, y \in \mathrm{Dom}(A)$, entonces

$$\begin{aligned}
\langle Ax, y\rangle &= \lim_{t\to 0^+} \left\langle \frac{U_t x - x}{t}, y \right\rangle = \lim_{t\to 0^+} \left\langle x, \frac{U_{-t} y - y}{t} y \right\rangle \\
&= \lim_{t\to 0^+} \left\langle x, U_{-t} \left(\frac{y - U_t y}{t} y \right) \right\rangle \\
&= -\langle x, Ay\rangle,
\end{aligned}$$

es decir

$$\langle iAx, y\rangle = \langle x, iAy\rangle.$$

Por lo tanto iA es un operador simétrico. Como el conjunto $\{i\lambda \ : \ \lambda \in \mathbb{R} \text{ y } |\lambda| > a\}$ está contenido en el conjunto resolvente de iA, de la Proposición 6.1 se deduce que iA es un operador autoadjunto.

($\Leftarrow$) Esta implicación se deja como ejercicio.

Indicación: Si el operador A satisface las hipótesis correspondientes, entonces genera un grupo $(U_t)_{-\infty<t<+\infty} \subset L(\mathfrak{K})$. Para $x, y \in \mathrm{Dom}(A)$ hallar

$$\frac{d}{dt}\langle U_t x, U_t y\rangle.$$

$\square$

2. El caso de un espacio de Hilbert (teorema de Stone)

En esta sección se verá como el teorema de Stone se puede deducir del teorema de Naimark.

Teorema 6.3 (Stone)**.** *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. El operador lineal A es el generador infinitesimal de un grupo fuertemente continuo de operadores unitarios*

$$(U_t)_{-\infty<t<+\infty} \subset L(\mathcal{H})$$

si y sólo si iA es un operador autoadjunto.

Demostración. Basta demostrar que si iA es un operador autoadjunto, entonces existen constantes M y a positivas tales que el conjunto $\{\lambda \in \mathbb{R} : |\lambda| > a\}$ está contenido en el conjunto resolvente de A y

$$\|(\lambda I - A)^{-m}\| \leq M(|\lambda| - a)^{-m}$$

para todo $|\lambda| > a$ y para todo entero $m \geq 1$.

Sea A tal que iA es un operador autoadjunto, entonces A es antiadjunto, es decir $A^* = -A$.

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ no nulo.

Paso 1: $\|(\lambda I - A)x\| \geq |\lambda|\|x\|$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(A)$.

$$\begin{aligned}
\|(\lambda I - A)x\| &= \langle(\lambda I - A)x, (\lambda I - A)x\rangle \\
&= \langle\lambda x, \lambda x\rangle + \langle Ax, Ax\rangle - \langle\lambda x, Ax\rangle - \langle Ax, \lambda x\rangle \\
&= |\lambda|^2\|x\|^2 + \|Ax\|^2 - \lambda\langle x, Ax\rangle + \lambda\langle x, Ax\rangle \\
&= |\lambda|^2\|x\|^2 + \|Ax\|^2 \\
&\geq |\lambda|^2\|x\|^2
\end{aligned}$$

Paso 2: $\mathrm{Ran}(\lambda I - A)$ es cerrado.

Sea $y \in \overline{\mathrm{Ran}(\lambda I - A)}$, entonces existe una sucesión $(x_n) \subset \mathrm{Dom}(A)$ tal que

$$(\lambda I - A)x_n \to y.$$

Como $\|(\lambda I - A)(x_n - x_m\| \geq |\lambda|\|x_n - x_m\|$ se tiene que (x_n) es de Cauchy y por lo tanto existe $x \in \mathcal{H}$ tal que $x_n \to x$. Como A es cerrado, $\lambda I - A$ también es cerrado y por lo tanto $x \in \mathrm{Dom}(A)$ y $y = (\lambda I - A)x \in \mathrm{Ran}(\lambda I - A)$.

Paso 3: $\mathrm{Ran}(\lambda I - A)$ es denso en $\mathcal{H}$ (y por lo tanto igual a $\mathcal{H}$).

Sea $y \in \mathcal{H}$ tal que $y \perp \mathrm{Ran}(\lambda I - A)$, entonces

$$\langle (\lambda I - A)x, y\rangle = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathrm{Dom}(A),$$

de donde se deduce que

$$y \in \mathrm{Dom}(A) = \mathrm{Dom}(A^*) \quad \text{y} \quad A^* y = \lambda y.$$

Como $A^* = -A$, se tiene que

$$-\lambda\langle y, y\rangle = \langle Ay, y\rangle = \langle y, A^* y\rangle = \lambda\langle y, y\rangle$$

y por lo tanto $y = 0$.

Finalmente, se ha probado que si $\lambda \in \mathbb{R}$ y λ no es nulo, entonces λ pertenece al conjunto resolvente de A y

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq |\lambda|^{-1},$$

por lo que se satisfacen las condiciones requeridas con $M = 1$, $a = 0$.

□

3. El caso de un espacio de Pontryagin

Sea κ un entero no negativo y sea $\mathfrak{F}$ un espacio Π_κ.

Sea $\mathrm{Dom}(T)$ una variedad lineal densa en $\mathfrak{F}$ y sea

$$T : \mathrm{Dom}(T) \to \mathfrak{F}$$

un operador autoadjunto. Como $\mathrm{Dom}(T)$ es denso, existe un subespacio $\mathcal{N}$ de $\mathfrak{F}$ tal que $\mathcal{N} \subseteq \mathrm{Dom}(T)$, $\mathcal{N}$ es definido negativo, la dimensión de $\mathcal{N}$ es κ y $\mathcal{N}^\perp$ es definido positivo.

Sean J, P_+ y P_- la simetría y las proyecciones fundamentales asociadas a la descomposición

$$\mathfrak{F} = \mathcal{N}^\perp \oplus \mathcal{N}.$$

Como $\mathcal{N} \subseteq \mathrm{Dom}(T)$, se tiene que si $x \in \mathrm{Dom}(T)$ entonces $x_+ = P_+ x \in \mathrm{Dom}(T)$ y $x_- = P_- x \in \mathrm{Dom}(T)$, por lo tanto T se puede descomponer de la siguiente manera

$$T = P_+ T P_+ + P_- T P_- + P_+ T P_- + P_- T P_+.$$

Sea $T_o = P_+TP_+ + P_-TP_-$, entonces (ver Observación 4.14 y recordar que $P_+^{*_J} = P_+$ y $P_-^{*_J} = P_-$) se tiene que

$$\begin{aligned} T_o^{*_J} &= P_+^{*_J}T^{*_J}P_+^{*_J} + P_-^{*_J}T^{*_J}P_-^{*_J} \\ &= P_+JT^*JP_+ + P_-JT^*JP_- \\ &= P_+T^*P_+ + (-P_-)T^*(-P_-) \\ &= P_+TP_+ + P_-TP_- \\ &= T_o. \end{aligned}$$

Por lo tanto T_o es un operador autoadjunto en el espacio de Hilbert $|\mathfrak{F}| = (\mathfrak{F}, \langle\ ,\ \rangle_J)$.

De manera análoga se prueba que $T_o^* = T_o$.

Como $\dim \mathcal{N} = \kappa < \infty$ la restricción de T a $\mathcal{N}$ es un operador continuo y por lo tanto el operador $T_{12} = P_+TP_-$ es continuo. Sea $T_{21} = P_-TP_+$, si $x, y \in \mathrm{Dom}(T)$ entonces

$$\langle T_{21}x, y\rangle = \langle P_-TP_+x, y\rangle = \langle x, P_+TP_-y\rangle = \langle x, T_{12}y\rangle = \langle T_{12}^*x, y\rangle,$$

luego T_{12}^* extiende a T_{21} y por lo tanto T_{21} también es un operador acotado.

Si $T_1 = T_{12} + T_{21}$, entonces T_1 es un operado acotado, con una extensión continua a todo el espacio que se seguirá denotando por T_1 y $T_1^* = T_1$.

En resumen,

$$T = T_o + T_1,$$

donde

$$T_o^* = T_o, \quad T_1^* = T_1,$$
$$T_o^{*_J} = T_o$$

y T_1 es continuo.

Sea A un operador tal que iA es autoadjunto, de lo anterior se deduce que

$$A = A_o + A_1,$$

donde

$$A_o^* = -A_O, \quad A_1^* = -A_1,$$
$$A_o^{*_J} = -A_o$$

y A_1 es continuo.

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, no nulo. Por lo hecho en la sección previa $\lambda I - A_o$ es invertible y

$$\|(\lambda I - A_o)^{-1}\| \leq |\lambda|^{-1}.$$

Luego

$$\begin{aligned}\lambda I - A &= \lambda I - A_o - A_1 \\ &= (\lambda I - A_o)(I - (\lambda I - A_o)^{-1}A_1)\end{aligned}$$

y

$$\|(\lambda I - A_o)^{-1}A_1\| \leq \frac{\|A_1\|}{|\lambda|} < 1 \quad \text{si}|\lambda| > \|A_1\|.$$

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $|\lambda| > \|A_1\|$. Entonces el operador $I - (\lambda I - A_o)^{-1}A_1$ es invertible y

$$\|(I - (\lambda I - A_o)^{-1}A_1)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|(\lambda I - A_o)^{-1}A_1\|} \leq \frac{|\lambda|}{|\lambda| - \|A_1\|}.$$

Por lo tanto el operador $\lambda I - A$ es invertible y

$$\begin{aligned}\|(\lambda I - A)^{-m}\| &\leq \|(\lambda I - A_o)^{-m}\| \, \|(I - (\lambda I - A_o)^{-1}A_1)^{-m}\| \\ &\leq \frac{1}{|\lambda|^m} \frac{|\lambda|^m}{(|\lambda| - \|A_1\|)^m} \\ &= \frac{1}{(|\lambda| - \|A_1\|)^m}\end{aligned}$$

En consecuencia se tiene el siguiente resultado

Teorema 6.4 (Naimark para espacios de Pontryagin)**.** *Sea $\mathfrak{F}$ un espacio de Pontryagin. El operador lineal A es el generador infinitesimal de un grupo fuertemente continuo de operadores unitarios*

$$(U_t)_{-\infty < t < +\infty} \subset L(\mathfrak{F})$$

si y sólo si iA es un operador autoadjunto.

Apéndice A

Nociones de teoría espectral para operadores en espacios de Hilbert

Los resultados y definiciones que se dan en este apéndice son necesarios para la lectura de estas notas. Se dan sin demostración, una buena referencia para estudiarlos en detalle es el libro de W. Rudin [**10**].

1. Medidas espectrales

Sea Ω un espacio de Hausdorff localmente compacto. Sea $\mathcal{B}(\Omega)$ la σ álgebra de Borel de Ω, es decir, la σ álgebra generada por los abiertos.

Sea μ una medida no negativa en Ω.
Se dice que μ es de *Borel* si μ está definida en $\mathcal{B}(\Omega)$ y $\mu(K) < +\infty$ si $K \subseteq \Omega$ es compacto.
Se dice que μ es *regular* si para cada $\omega \in \mathcal{B}(\Omega)$ se tiene que

$$\begin{aligned}\mu(\omega) &= \operatorname{ínf}\{\mu(A) :\ \omega \subseteq A,\ A \text{ abierto}\}\\ &= \sup\{\mu(K) :\ K \subseteq \omega,\ K \text{ compacto}\}.\end{aligned}$$

Se dice que μ es de *Radon* si μ es medida de Borel regular.

Sea μ una medida compleja en Ω.
Se dice que μ es *regular* si la medida $|\mu|$ (variación total de μ) es regular.

Es importante destacar que la medida que aparece en el teorema de representación de Riesz es regular.

Definición A.1. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo, una *medida espectral* (también llamada *familia espectral* o *resolución de la identidad*) es una función

$$E : \mathcal{B}(\Omega) \to L(\mathcal{H})$$

tal que:

(1) $E(\emptyset) = 0$, $E(\Omega) = I_{\mathcal{H}}$.
(2) Para cada $\omega \in \mathcal{B}(\Omega)$ se tiene que $E(\omega)$ es una proyección ortogonal, es decir se cumple: $E(\omega)^2 = E(\omega)$, $E(\omega)^* = E(\omega)$.
(3) Si $\omega, \omega' \in \mathcal{B}(\Omega)$ entonces

$$E(\omega \cap \omega') = E(\omega)E(\omega').$$

(4) Si $\omega, \omega' \in \mathcal{B}(\Omega)$ y $\omega \cap \omega' = \emptyset$ entonces

$$E(\omega \cup \omega') = E(\omega) + E(\omega').$$

(5) Si $h, h' \in \mathcal{H}$, la función de $\mathcal{B}(\Omega)$ en $\mathbb{C}$ definida por

$$\mu_{h,h'}(\omega) = \langle E(\omega)h, h' \rangle$$

es una medida de Radon.

2. Teorema espectral para operadores normales acotados

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo.
Si $T \in L(\mathcal{H})$ el *espectro* de T se define como

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ no es invertible}\}.$$

Se cumple que el espectro de T es un subconjunto compacto y no vacío del plano complejo $\mathbb{C}$.

El teorema espectral para operadores normales acotados en un espacio de Hilbert establece los siguiente.

Teorema A.2. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo y sea $T \in L(\mathcal{H})$ un operador normal. Entonces existe una medida espectral E en $\sigma(T)$ tal que*

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda \, dE(\lambda).$$

Un operador $S \in L(\mathcal{H})$ conmuta con T si y sólo si T conmuta con cada proyección $E(\omega)$, $\omega \in \mathcal{B}(\sigma(T))$.

Observación A.3. La igualdad

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda \, dE(\lambda)$$

quiere decir que

$$\langle Th, h' \rangle = \int\limits_{\sigma(T)} \lambda \, d\langle E(\lambda)h, h' \rangle,$$

para todo par $h, h' \in \mathcal{H}$.

Observación A.4. Se cumple que si $T \in L(\mathcal{H})$ es un operador autoadjunto ($T = T^*$) entonces

$$\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}.$$

Observación A.5 (Cálculo funcional para operadores normales)**.** Sean T y E como en el Teorema A.2. Sea $\mathcal{M}$ el álgebra de las funciones a valores escalares, medibles Borel y acotadas con dominio $\sigma(T)$.

Si se define la aplicación $f \mapsto f(T)$ de $\mathcal{M}$ en $L(\mathcal{H})$ por

$$f(T) = \int\limits_{\sigma(T)} f(\lambda) \, dE(\lambda),$$

es decir

$$\langle f(T)h, h' \rangle = \int\limits_{\sigma(T)} f(\lambda) \, d\langle E(\lambda)h, h' \rangle,$$

para todo par $h, h' \in \mathcal{H}$, entonces se cumple

(1) La aplicación $f \mapsto f(T)$ es un homomorfismo de álgebras.
(2) $\overline{f}(T) = f(T)^*$
(3) $\|f(T)\| \leq \sup\{|f(\lambda)| : \lambda \in \sigma(T)\}$ para $f \in \mathcal{B}$ y si f es continua se cumple la igualdad.

Apéndice B

Semigrupos de operadores y teorema de Hille-Yosida

En este apéndice se da una introducción a la teoría de semigrupos de operadores en espacios de Banach. Los resultados aquí expuestos son necesarios para la demostración del teorema de Naimark, que se da en el Capítulo 6. Una buena referencia para profundizar en el tema es el libro de K. Yosida [**12**]

A lo largo de este apéndice $\mathfrak{X}$ es un espacio de Banach sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos, con norma $\| \ \|$.

1. Semigrupos de operadores y condiciones de continuidad

Definición B.1. Un *semigrupo de operadores* es una familia de operadores $(T_t)_{t\geq 0} \subset L(\mathfrak{X})$ tal que

(1) Para cada $s, t \geq 0$

$$T_{t+s} = T_t T_s,$$

(2) $T_0 = I$,

Si además se cumple que para cada $t_o \geq 0$ y $x \in \mathfrak{X}$,

$$\lim_{t\to t_o} T_t x = T_{t_o} x,$$

se dice que el semigrupo es *de clase C_o*.

Proposición B.2. *Sea $(T_t)_{t\geq 0} \subset L(\mathfrak{X})$ un semigrupo de operadores.*

Supóngase que se cumple que

$$\lim_{t\to 0^+} T_t x = x$$

para todo $x \in \mathfrak{X}$. Entonces:

(a) *Existen constantes M y a positivas tales que*

$$\|T_t\| \leq M e^{at}$$

para todo $t \geq 0$.

(b) $(T_t)_{t\geq 0}$ *es un semigrupo de clase C_o.*

Demostración. Para $n > 0$, sea

$$c_n = \sup\left\{\|T_t\| : 0 \leq t \leq \frac{1}{n}\right\}.$$

El primer paso es demostrar que existe $n > 0$ tal que $c_n < +\infty$. Pare ver esto, supóngase lo contrario. Entonces existe una sucesión $(t_n)_{n\geq 1}$ tal que

$$0 \leq t_n \leq \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad \|T_{t_n}\| \geq n.$$

Por el principio de acotación uniforme tiene que existir $x \in \mathfrak{X}$ tal que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|T_{t_n}x\| = +\infty,$$

lo que es una contradicción, ya que por hipótesis $\lim T_{t_n}x$ debe ser igual a x.

Si se escoge n_o de manera que $c_{n_o} < +\infty$ y se define $c = c_{n_o}^{n_o}$ entonces, para $t \in [0,1]$

$$\|T_t\| = \left\|\left(T_{\frac{t}{n_o}}\right)^{n_o}\right\| \leq \|T_{\frac{t}{n_o}}\|^{n_o} \leq c_{n_o}^{n_o} = c.$$

Si $[t]$ es la parte-entera de t entonces, para $t \geq 0$

$$\|T_t\| = \left\|\left(T_{\frac{t}{[t]+1}}\right)^{[t]+1}\right\| \leq c^{[t]+1} \leq c^{t+1} = Me^{at}.$$

Para probar que el semigrupo es de clase C_o basta notar que si $s \geq 0$, entonces

$$\|T_{t+s}x - T_tx\| \leq \|T_t\|\|T_sx - x\| \leq Me^{at}\|T_sx - x\|$$

y si $s < 0$

$$\|T_{t+s}x - T_tx\| \leq \|T_{t+s}\|\|x - T_{-s}x\| \leq Me^{a(t-s)}\|T_{-s}x - x\|$$

□

Observación B.3. Se puede probar que en la proposición anterior la condición

$$\lim_{t\to 0^+} T_tx = x$$

para todo $x \in \mathfrak{X}$ puede ser reemplazada por

$$w - \lim_{t\to 0^+} T_tx = x$$

para todo $x \in \mathfrak{X}$ (límite débil).

2. Generador infinitesimal

Definición B.4. El *generador infinitesimal* del semigrupo $(T_t)_{t\geq 0}$ se define por

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{T_t x - x}{t},$$

para $x \in \mathcal{D}(A)$, donde

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in \mathfrak{X} : \lim_{t\to 0^+} \frac{T_t x - x}{t} \text{ existe} \right\}.$$

Es claro que $\mathcal{D}(A)$ es una variedad lineal y que $A : \mathcal{D}(A) \to \mathfrak{X}$ es un operador lineal.

A lo largo de esta sección, salvo que se especifique lo contrario, se supondrá que $(T_t)_{t\geq 0} \subset L(\mathfrak{X})$ es un semigrupo de operadores de clase C_o y que A es su generador infinitesimal.

Para continuar es necesaria la noción de integral de una función que toma valores en un espacio de Banach. Como solamente se considerarán funciones continuas la definición resulta muy sencilla. Si $f : [a, b] \to \mathfrak{X}$ es una función continua se define

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

mediante la aproximación de f por funciones constantes a trozos, es decir, al estilo de la integral de Riemann. La demostración de la existencia de la integral es completamente análoga a la que corresponde con el caso escalar y se tiene que

$$\left\| \int_a^b f(x)\, dx \right\| \leq \int_a^b \|f(x)\|\, dx.$$

Muchos resultados referentes a la integral de Riemann de funciones a valores reales, tales como el teorema fundamental del cálculo y algunos resultados de cambio de límite con integral se extienden para integrales a funciones a valores en un espacio de Banach. En general la demostración es sencilla y se usarán a lo largo de este apéndice.

Lema B.5. *La variedad lineal $\mathcal{D}(A)$ es densa en $\mathfrak{X}$, $\mathcal{D}(A)$ es invariante para cada T_t y A conmuta con $(T_t)_{t\geq 0}$, más precisamente*

$$T_t(\mathcal{D}(A)) \subseteq \mathcal{D}(A)$$

para todo $t \geq 0$ y además

$$T_t\, Ax = A\, T_t x$$

para todo $x \in \mathcal{D}(A)$ y $t \geq 0$.

Demostración. Para $x \in \mathfrak{X}$ y $t \geq 0$, sea

$$x_t = \int_0^t T_s x \, ds,$$

entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{u \to 0^+} \frac{T_u x_t - x_t}{u} &= \lim_{u \to 0^+} \frac{1}{u} \left\{ T_u \int_0^t T_s x \, ds - \int_0^t T_s x \, ds \right\} \\
&= \lim_{u \to 0^+} \frac{1}{u} \left\{ \int_0^t T_{u+s} x \, ds - \int_0^t T_s x \, ds \right\} \\
&= \lim_{u \to 0^+} \frac{1}{u} \int_u^{u+t} T_s x \, ds - \frac{1}{u} \int_0^t T_s x \, ds \\
&= T_t x - x.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $x_t \in \mathcal{D}(A)$ y

$$A x_t = T_t x - x.$$

Como

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{x_t}{t} = x,$$

se tiene que $\mathcal{D}(A)$ es densa en $\mathfrak{X}$.

Si $x \in \mathcal{D}(A)$ y $t \geq 0$ entonces

$$\lim_{s \to 0^+} \frac{T_s T_t x - T_t x}{s} = \lim_{s \to 0^+} T_t \left(\frac{T_s x - x}{s} \right) = T_t A x.$$

Por lo tanto $T_t x \in \mathcal{D}(A)$ y $T_t \, A x = A \, T_t x$

$\square$

Lema B.6. *Si $x \in \mathcal{D}(A)$ y $t \geq 0$ entonces*

$$T_t x - x = \int_0^t T_s A x \, ds.$$

Demostración. Basta demostrar

$$\varphi \left(T_t x - x - \int_0^t T_s A x \, ds \right) = 0 \text{ para todo } \varphi \in \mathfrak{X}^*.$$

Dada $\varphi \in \mathfrak{X}^*$, sea $F : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ definida por

$$F(t) = \varphi \left(T_t x - x - \int_0^t T_s A x \, ds \right)$$

y sea $F'_+(t)$ la derivada por la derecha de F en el punto t.

Como F es continua y $F(0) = 0$, para demostrar que $F \equiv 0$ basta demostrar que $F'_+(t) = 0$ para todo $t \geq 0$.

$$\begin{aligned}
F'_+(t) &= \lim_{u\to 0^+} \frac{F(t+u) - F(t)}{u} \\
&= \lim_{u\to 0^+} \varphi\left(\frac{T_{t+u}x - T_t x}{u} \; - \; \frac{1}{u}\int_t^{t+u} T_s Ax\, ds\right) \\
&= \lim_{u\to 0^+} \varphi\left(T_t\left(\frac{T_u x - x}{u}\right) \; - \; T_t Ax\right) \\
&= \lim_{u\to 0^+} \varphi\left(T_t Ax \; - \; T_t Ax\right) = 0
\end{aligned}$$

$\square$

Lema B.7. *Si $x \in \mathcal{D}(A)$ entonces la función $x_t = T_t x$ es continuamente diferenciable en $[0, +\infty)$ y*

$$x'_t = AT_t x.$$

Demostración. Sea $D_+ x_t$ y $D_- x_t$ las derivadas por la derecha y por la izquierda respectivamente de x_t.

En la demostración del Lema B.5 se probó que $D_+ x_t = AT_t x = T_t Ax$. Por otra parte

$$D_- x_t = \lim_{u\to 0^+} \frac{T_t x - T_{t-u} x}{u}$$

Por el Lema B.6 se tiene que

$$D_- x_t = \lim_{u\to 0^+} \frac{1}{u}\int_{t-u}^{t} T_s Ax\, ds = T_t Ax.$$

$\square$

Teorema B.8. *El operador A es cerrado.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n=1}^{+\infty} \subset \mathcal{D}(A)$ una sucesión tal que

$$x_n \to x \qquad Ax_n \to y.$$

Por el Lema B.6

$$\begin{aligned}
T_t x - x &= \lim_{n\to +\infty} T_t\, x_n - x_n \\
&= \lim_{n\to +\infty} \int_0^t T_s A x_n\, ds \\
&= \int_0^t T_s y\, ds.
\end{aligned}$$

Es importante destacar que la Proposición B.2 justifica este último cambio de límite con integral.

Por lo tanto

$$\lim_{t\to 0}\frac{T_t x - x}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t T_s y\, ds = y,$$

de donde sigue que $x \in \mathcal{D}(A)$ y $Ax = y$. $\square$

Ejercicio B.9. Demostrar que si $f : [0, +\infty) \to \mathrm{Dom}(A)$ es una función que satisface

$$f'(t) = Af(t)$$

para todo $t \in [0, +\infty)$, entonces

$$f(t) = T_t f(0)$$

para todo $t \in [0, +\infty)$.

Demostrar que un semigrupo de clase C_o está unívocamente determinado por su generador infinitesimal.

3. Resolventes

Definición B.10. Sea Z un operador lineal cerrado en $\mathfrak{X}$ con dominio $\mathrm{Dom}(Z)$ y rango $\mathrm{Ran}(Z)$. El *conjunto resolvente* de Z es el conjunto de los $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $\lambda I - Z$ es inyectivo y tiene rango igual a $\mathfrak{X}$.

Ejercicio B.11. Demostrar que si λ pertenece al conjunto resolvente de Z entonces el operador

$$R_\lambda = (\lambda I - Z)^{-1}$$

(que tiene dominio $\mathfrak{X}$) es continuo.

Indicación: Utilizar el teorema del gráfico cerrado.

El *espectro* de Z es el complemento del conjunto resolvente.

Lema B.12. *El conjunto resolvente $\mathcal{R}$ de un operador cerrado Z es abierto, la resolvente de Z*

$$R_\lambda = (\lambda I - Z)^{-1}$$

es una función analítica de λ en $\mathcal{R}$ y si $\lambda, \omega \in \mathcal{R}$, entonces

$$R_\lambda - R_\omega = (\omega - \lambda) R_\lambda R_\omega.$$

Demostración. Sea $\lambda_o \in \mathcal{R}$ y sea $c = \|R_{\lambda_o}\|^{-1}$. Para $|\lambda - \lambda_o| < c$ la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(\lambda-\lambda_o)^n R_{\lambda_o}^{n+1}$$

converge en norma y define un operador acotado S_λ.

Si $x \in \mathrm{Dom}(Z)$, entonces

$$\begin{aligned}
S_\lambda(\lambda I - Z) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(\lambda-\lambda_o)^n R_{\lambda_o}^{n+1}(\lambda_o I - Z + \lambda I - \lambda_o I)x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(\lambda-\lambda_o)^n R_{\lambda_o}^{n} x + (\lambda-\lambda_o)S_\lambda x \\
&= x + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(\lambda-\lambda_o)^n R_{\lambda_o}^{n} x + (\lambda-\lambda_o)S_\lambda x \\
&= x - (\lambda-\lambda_o)\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}(\lambda-\lambda_o)^{n-1} R_{\lambda_o}^{n} x + (\lambda-\lambda_o)S_\lambda x \\
&= x - (\lambda-\lambda_o)S_\lambda x + (\lambda-\lambda_o)S_\lambda x = x.
\end{aligned}$$

Por otra parte, si $x \in \mathfrak{X}$ y

$$y_m = \sum_{n=0}^{m}(-1)^n(\lambda-\lambda_o)^n R_{\lambda_o}^{n+1} x$$

entonces $y_m \in \mathrm{Dom}(Z)$ y

$$\lim_{m\to\infty} y_m = S_\lambda x.$$

Además

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} Z y_m &= \lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}(-1)^n(\lambda-\lambda_o)^n Z R_{\lambda_o}^{n+1} x \\
&= \lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}(-1)^n(\lambda-\lambda_o)^n (\lambda_o R_{\lambda_o} - I) R_{\lambda_o}^{n} x \\
&= \lim_{m\to\infty}\lambda_o\sum_{n=0}^{m}(-1)^n(\lambda-\lambda_o)^n R_{\lambda_o}^{n+1} - \lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}(-1)^n(\lambda-\lambda_o)^n R_{\lambda_o}^{n} x \\
&= \lambda_o S_\lambda x + (\lambda-\lambda_o)S_\lambda x - x \\
&= \lambda S_\lambda x - x.
\end{aligned}$$

Como Z es cerrado, de lo anterior se deduce que $S_\lambda x \in \mathrm{Dom}(Z)$ y

$$Z S_\lambda x = \lambda S_\lambda x - x,$$

es decir

$$(\lambda I - Z)S_\lambda x = x.$$

Por lo tanto $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_o| < c\} \subset \mathcal{R}$ y $S_\lambda = R_\lambda$ para $|\lambda - \lambda_o| < c$.

Así queda establecido que R_λ es analítica y que

$$R_\lambda = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (\lambda - \lambda_o)^n R_{\lambda_o}^{n+1}$$

para $|\lambda - \lambda_o| < \|R_{\lambda_o}\|^{-1}$.

Si $x \in \mathfrak{X}$ y $\lambda, \omega \in \mathcal{R}$, entonces

$$\begin{aligned}(\lambda I - Z)\{R_\lambda - R_\omega - (\omega - \lambda)R_\lambda R_\omega\}x &= x - (\lambda I - Z)R_\omega x - (\omega - \lambda)R_\omega x \\ &= x - (\omega I - Z)R_\omega x \\ &= x - x = 0.\end{aligned}$$

Como $\lambda I - Z$ es inyectivo se concluye que

$$R_\lambda - R_\omega = (\omega - \lambda)R_\lambda R_\omega.$$

□

Teorema B.13. *Sea A el generador infinitesimal de un semigrupo $(T_t)_{t\geq 0} \subset L(\mathfrak{X})$ de clase C_o que satisface*

$$\|T_t\| \leq Me^{at}.$$

Entonces el espectro de A está contenido en el conjunto $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(\lambda) \leq a\}$ y para $\mathrm{Re}(\lambda) > a$ y $x \in \mathfrak{X}$ se tiene que

$$R_\lambda x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T_t x \, dt$$

Demostración. Por la condición de acotación que satisface el semigrupo, la integral

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T_t x \, dt$$

converge para $\mathrm{Re}(\lambda) > a$.

Para $x \in \mathfrak{X}$ y $\mathrm{Re}(\lambda) > a$, sea

$$Q_\lambda x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T_t x \, dt,$$

se probará que $Q_\lambda = R_\lambda$.

Sea $x \in \mathfrak{X}$, si $y = Q_\lambda x$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{s \to 0^+} \frac{T_s y - y}{s} &= \lim_{s \to 0^+} \left\{ \frac{1}{s} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T_{t+s} x \, dt - \frac{1}{s} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T_t x \, dt \right\} \\
&= \lim_{s \to 0^+} \left\{ \frac{1}{s} \int_s^{+\infty} e^{-\lambda (t-s)} T_t x \, dt - \frac{1}{s} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T_t x \, dt \right\} \\
&= \lim_{s \to 0^+} \left\{ -\frac{1}{s} e^{\lambda s} \int_0^{s} e^{-\lambda t} T_t x \, dt + \frac{e^{\lambda s} - 1}{s} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T_t x \, dt \right\} \\
&= -x + \lambda Q_\lambda x = -x + \lambda y.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $y \in \mathrm{Dom}(A)$ y

$$(\lambda I - A) y = x,$$

luego el rango de Q_λ está contenido en el dominio de A y

$$(\lambda I - A) \mathrm{Ran}(Q_\lambda) = \mathfrak{X}.$$

Para completar la demostración basta probar que $\lambda I - A$ es inyectivo en $\mathrm{Dom}(A)$.

Sea $x \in \mathrm{Dom}(A)$ tal que $(\lambda I - A)x = 0$, para $t \geq 0$ sea

$$x_t = e^{\lambda t} x.$$

Entonces $x_t \in \mathrm{Dom}(A)$ para todo $t \geq 0$ y

$$x_t' = \lambda e^{\lambda t} x = A x_t.$$

Por lo tanto (ver Ejercicio B.9)

$$x_t = T_t x,$$

de donde

$$\|T_t x\| = e^{t \mathrm{Re}(\lambda)} \|x\|.$$

Como $\mathrm{Re}(\lambda) > a$, lo anterior sólo es posible si $\|x\| = 0$.

$\square$

4. El teorema de Hille-Yosida

Teorema B.14 (Hille-Yosida)**.** *Sea A un operador cerrado con dominio denso en $\mathfrak{X}$.*

Entonces A es el generador infinitesimal de un semigrupo $(T_t)_{t \geq 0} \subset L(\mathfrak{X})$ de clase C_o que satisface

$$\|T_t\| \leq M e^{at}$$

para todo $t \geq 0$ si y sólo si el conjunto $\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda > a\}$ está contenido en el conjunto resolvente de A y

$$\|(\lambda I - A)^{-m}\| \leq M (\lambda - a)^{-m}$$

para todo $\lambda > a$ y para todo entero $m \geq 1$.

Demostración. Si $(T_t)_{t\geq 0} \subset L(\mathfrak{X})$ satisface

$$\|T_t\| \leq Me^{at}$$

para todo $t \geq 0$ entonces, para $\lambda > a$ se tiene que

$$(\lambda I - A)^{-1}x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T_t x \, dt.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\|(\lambda I - A)^{-m}\| &= \left\| \int_0^{+\infty} \cdots \int_0^{+\infty} e^{-\lambda(t_1+\cdots t_n)} T_{t_1+\cdots t_n} \, dt_1 \cdots dt_n \right\| \\
&\leq \int_0^{+\infty} \cdots \int_0^{+\infty} Me^{(-\lambda-a)(t_1+\cdots t_n)} \, dt_1 \cdots dt_n \\
&= M \left(\int_0^{+\infty} e^{(-\lambda-a)t} \, dt \right)^m \\
&= M(\lambda - a)^{-m}.
\end{aligned}$$

La demostración del recíproco da un poco más de trabajo ya que es necesario construir el semigrupo $(T_t)_{t\geq 0}$. La idea es aproximar A por operadores acotados A_λ y probar que los semigrupos

$$T_t^\lambda = e^{tA_\lambda}$$

convergen a un semigrupo $(T_t)_{t\geq 0}$ cuyo generador es A. Esta prueba se hará en varios pasos.

Para $\lambda > a$ se define el operador acotado A_λ por

$$A_\lambda = \lambda A(\lambda I - A)^{-1} = -\lambda\{I - \lambda(\lambda I - A)^{-1}\}$$

y el semigrupo uniformemente continuo $(T_t^\lambda)_{t\geq 0}$ por

$$T_t^\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A_\lambda^n}{n!}.$$

Paso 1: Si $x \in \mathfrak{X}$, entonces

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \|A(\lambda I - A)^{-1}x\| = 0.$$

Si $x \in \mathrm{Dom}(A)$ entonces

$$\|A(\lambda I - A)^{-1}x\| \leq \|(\lambda I - A)^{-1}\|\|Ax\| \leq M(\lambda - a)^{-1}\|Ax\|,$$

que tiende a 0 si $\lambda \to +\infty$.

Por otra parte

$$\|A(\lambda I - A)^{-1}\| = \|I - \lambda(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{M\lambda}{\lambda - a} + 1$$

es acotado para $\lambda > 2a$.

Como $\mathrm{Dom}(A)$ es denso se obtiene el resultado.

Paso 2: Si $x \in \mathrm{Dom}(A)$, entonces

$$\lim_{\lambda \to +\infty} A_\lambda x = Ax.$$

Dado $x \in \mathrm{Dom}(A)$, sea $b > a$, entonces existe $y \in \mathfrak{X}$ tal que $x = (bI - A)^{-1}y$. Se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda \to +\infty} \|A_\lambda x - Ax\| &= \lim_{\lambda \to +\infty} \|\lambda A(\lambda I - A)^{-1}(bI - A)^{-1}y - A(bI - A)^{-1}y\| \\
&= \lim_{\lambda \to +\infty} \|\lambda A\{(\lambda I - A)^{-1} - (bI - A)^{-1}\}(b - \lambda)^{-1}y - A(bI - A)^{-1}y\| \\
&= \lim_{\lambda \to +\infty} \left\| \left(\frac{-\lambda}{b - \lambda} - 1 \right) A(bI - A)^{-1}y + \frac{\lambda}{b - \lambda} A(\lambda I - A)^{-1}y \right\| \\
&\leq \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{b}{\lambda - b} \|A(bI - A)^{-1}y\| + \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\lambda}{\lambda - b} \|A(\lambda I - A)^{-1}y\| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Paso 3: Existe $\lim_{\lambda \to \infty} T_t^\lambda$ en la topología fuerte y este límite define un semigrupo de clase C_o.

Se tiene que

$$\begin{aligned}
\|T_t^\lambda\| &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \left\{-\lambda I + \lambda^2(\lambda I - A)^{-1}\right\}^n}{n!} \right\| \\
&= \left\| e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \lambda^{2n} (\lambda I - A)^{-n}}{n!} \right\| \\
&\leq e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \lambda^{2n} \|(\lambda I - A)^{-n}\|}{n!} \\
&\leq e^{-\lambda t} M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \lambda^{2n} (\lambda - a)^{-n}}{n!} \\
&= e^{-\lambda t} M e^{t\lambda^2(\lambda - a)^{-1}} = M e^{ta\lambda(\lambda - a)^{-1}} \\
&\leq M e^{2at}
\end{aligned}$$

siempre que $\lambda \geq 2a$. Además

$$\overline{\lim_{\lambda \to +\infty}} \|T_t^\lambda\| \leq Me^{at}.$$

Sean $\mu > a$, $t > 0$ y s tal que $0 \leq s \leq t$. Si $x \in \mathrm{Dom}(A)$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{ds}\{T_{t-s}^\lambda T_s^\mu x\} \right\| &= \| - A_\lambda T_{t-s}^\lambda T_s^\mu x + T_{t-s}^\lambda A_\mu T_s^\mu x\| \\ &= \|T_{t-s}^\lambda T_s^\mu (-A_\lambda x + A_\mu x\| \\ &\leq M^2 e^{4at}\|A_\lambda x - A_\mu x\|, \end{aligned}$$

integrando de 0 a t

$$\|T_t^\mu x - T_t^\lambda x\| = \left\| \int_0^t \frac{d}{ds}\{T_{t-s}^\lambda T_s^\mu x\}\, ds \right\| \leq M^2 t e^{4at}\|A_\lambda x - A_\mu x\|.$$

Esta última expresión converge uniformemente a 0 si $\lambda, \mu \to +\infty$ y t varía en un intervalo acotado. Como $\|T_t^\lambda\|$ está uniformemente acotada para t variando en un intervalo acotado, se tiene que existe

$$\lim_{\lambda \to +\infty} T_t^\lambda x$$

para todo $t \geq 0$ y todo $x \in \mathfrak{X}$.

Se define $(T_t)_{t\geq 0}$ por

$$T_t x = \lim_{\lambda \to +\infty} T_t^\lambda x.$$

De las propiedades de semigrupo de $(T_t^\lambda)_{t\geq 0}$ y los resultados recién probados se deduce que $T_0 = I$,

$$\|T_t\| \leq Me^{at}$$

para todo $t \geq 0$,

$$T_{t+s} = T_t T_s$$

para todo $t, s \geq 0$ y

$$\lim_{t \to 0^+} T_t x = x$$

para todo $x \in \mathfrak{X}$.

Paso 4 (y último): El generador infinitesimal de $(T_t)_{t\geq 0}$ es A.

Sea B el generador de $(T_t)_{t\geq 0}$.

Sea $x \in \mathfrak{X}$, entonces

$$T_t^\lambda x - x = \int_0^t T_s^\lambda A_\lambda x\, ds.$$

Si $x \in \mathrm{Dom}(A)$ entonces se puede tomar límite cuando λ tiende a $+\infty$ en la expresión anterior y se obtiene
$$T_t x - x = \int_0^t T_s A x \, ds.$$
Dividiendo entre t y tomando límite cuando t tiende a 0 se obtiene $Bx = Ax$.

Por lo tanto $\mathrm{Dom}(A) \subseteq \mathrm{Dom}(B)$ y A y B coinciden en $\mathrm{Dom}(A)$. Como $\lambda I - A$ y $\lambda I - B$ son inyectivos y con rango igual a $\mathfrak{X}$ para $\lambda > a$ entonces
$$\mathrm{Dom}(A) \subseteq \mathrm{Dom}(B)$$
y $A = B$.

$\square$

Considerando el caso $M = 1$, $a = 0$ y usando que $(\lambda I - A)^{-m} = ((\lambda I - A)^{-1})^m$ en el teorema anterior se obtiene.

Corolario B.15. *Sea A un operador cerrado con dominio denso en $\mathfrak{X}$.*

Entonces A es el generador infinitesimal de un semigrupo $(T_t)_{t\geq 0} \subset L(\mathfrak{X})$ de contracciones si y sólo si el conjunto $\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda > 0\}$ está contenido en el conjunto resolvente de A y
$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$$
para todo $\lambda > 0$.

5. Teorema de Hille-Yosida para grupos de operadores

Definición B.16. Un *grupo de operadores de clase C_o* es una familia de operadores $(T_t)_{-\infty<t<+\infty} \subset L(\mathfrak{X})$ tal que

(1) Para cada $s, t \in \mathbb{R}$
$$T_{t+s} = T_t T_s,$$
(2) $T_0 = I$,
(3) Para cada $t_o \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathfrak{X}$ se tiene que
$$\lim_{t\to t_o} T_t x = T_{t_o} x.$$

El *generador infinitesimal* del grupo $(T_t)_{t\geq 0}$ también se define por
$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{T_t x - x}{t},$$
para $x \in \mathcal{D}(A)$, donde
$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in \mathfrak{X} : \lim_{t\to 0^+} \frac{T_t x - x}{t} \text{ existe} \right\}.$$

Ejercicio B.17. Sea $(T_t)_{-\infty<t<+\infty} \subset L(\mathfrak{X})$ un grupo de clase C_o.

(1) Demostrar que $(T_t)_{0\leq t<+\infty}$ y $(T_{-t})_{0\leq t<+\infty}$ son semigrupos de clase C_o.

(2) Demostrar que si $(T_t)_{-\infty<t<+\infty}$ es un grupo de clase C_o entonces existen $M, a > 0$ tales que

$$\|T_t\| \leq Me^{a|t|}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

(3) Demostrar que si A es el generador infinitesimal de $(T_t)_{-\infty\leq t<+\infty}$ entonces el generador infinitesimal de $(T_{-t})_{0\leq t<+\infty}$ es -A.

Utilizar el ejercicio anterior y el Teorema B.14 para demostrar el siguiente resultado.

Teorema B.18. *Sea A un operador cerrado con dominio denso en $\mathfrak{X}$.*

Entonces A es el generador infinitesimal de un grupo $(T_t)_{-\infty<t<+\infty} \subset L(\mathfrak{X})$ de clase C_o que satisface

$$\|T_t\| \leq Me^{|a|t}$$

para todo $t \in (-\infty, \infty)$ si y sólo si el conjunto $\{\lambda \in \mathbb{R} : |\lambda| > a\}$ está contenido en el conjunto resolvente de A y

$$\|(\lambda I - A)^{-m}\| \leq M(|\lambda| - a)^{-m}$$

para todo $|\lambda| > a$ y para todo entero $m \geq 1$.

Bibliografía

[1] D. Alpay, A. Dijksma, J. Rovnyak and H. de Snoo, *Schur Functions, Operator Colligations, and Reproducing Kernel Pontryagin Spaces,* Operator Theory: Adv. Appl., Vol. 96, Birkhäuser, Basel, 1997.

[2] T. Andô, *Linear Operators on Kreĭn Spaces,* Hokkaido University, Research Institute of Applied Electricity, Division of Applied Mathematics, Sapporo, 1979.

[3] T.Ya. Azizov and I.S. Iokhvidov, *Foundations of the Theory of Linear Operators in Spaces with Indefinite Metric,* Nauka, Moscow, 1986; *Linear Operators in Spaces with Indefinite Metric,* Wiley, New York, 1989 [English transl.]

[4] S. Berberian, *Lectures in functional analysis and operator thoery.* Springer Verlag 1974 (GTM 15).

[5] J. Bognár, *Indefinite Inner Product Spaces,* Springer-Verlag, Berlin, 1974. Citado en la página(s): 40

[6] R. Douglas, *Banach algebra techniques in operator thoery.* Academic Press 1973.

[7] I.S. Iokhvidov, M.G. Kreĭn and H. Langer, *Introduction to the Spectral Theory of Operators in Spaces with an Indefinite Metric,* Akademie-Verlag, Berlin, 1982.

[8] M.G. Kreĭn and H. Langer, *On some continuation problems which are closely related to the theory of operators in spaces* Π_κ*. IV. Continuous analogues of orthogonal polynomials on the unit circle with respect to an indefinite weight and related continuation problems for some classes of functions,* J. Operator Theory **13** (1985), 299-417.

[9] M.A. Naĭmark, *An analogue of Stone's Theorem in a space with an indefinite metric,* Soviet Math. Dokl. **7** No.5 (1966), 1366-1367. Citado en la página(s): 49

[10] W. Rudin *Functional Analysis,* McGraw-Hill 1973. Citado en la página(s): 21, 22, 55

[11] B. Sz.-Nagy, C. Foias, *Harmonic analysis of operators on Hilbert space,* North Holland Publishing Co. 1970.

[12] K. Yosida, *Functional Analysis,* Springer 1974. Citado en la página(s): 59

Índice alfabético