

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

SERIES DE FOURIER

Ramón Bruzual
Marisela Domínguez

Caracas, Venezuela
Marzo 2003

Ramón Bruzual

Correo-E: rbruzual@euler.ciens.ucv.ve

Marisela Domínguez

Correo-E: mdomin@euler.ciens.ucv.ve

Laboratorio de Formas en Grupos

Centro de Análisis

Escuela de Matemática

Facultad de Ciencias

Universidad Central de Venezuela

<http://euler.ciens.ucv.ve/~labfg>

Prólogo

Estas notas fueron escritas especialmente para los Talleres de Formación Matemática (TForMa), auspiciadas por la Asociación Matemática Venezolana. Han sido concebidas como material de estudio para un primer curso de análisis de Fourier.

Se estudian los siguientes temas: Funciones periódicas y series de Fourier. Condiciones para la convergencia puntual y en media aritmética de una serie de Fourier. Convergencia en media cuadrática de la serie de Fourier. Desigualdad de Bessel, identidad de Parseval y aplicaciones. Comportamiento de las series de Fourier. Desarrollo en serie de senos y en serie de cosenos. Aplicación a la resolución de ecuaciones en derivadas parciales.

Los objetivos fundamentales del curso son motivar a los participantes hacia el estudio del análisis armónico y conseguir que apliquen en forma rigurosa los tópicos que ya han estudiado, tanto para comprender resultados clásicos, como para resolver problemas sencillos.

La noción de integral que usamos es la de Riemann, para un curso de mayor profundidad sería necesaria la integral de Lebesgue.

El requisito fundamental para la lectura de estas notas es un curso avanzado de cálculo diferencial e integral en una variable. Más en detalle: los participantes deben dominar las nociones básicas de los siguientes temas: cálculo diferencial en una variable, integral de Riemann unidimensional, convergencia uniforme de sucesiones y series de funciones. Es recomendable que el participante posea un mínimo de conocimientos de álgebra lineal y rudimentos de cálculo en varias variables.

Finalmente, agradecemos a los organizadores del TForMa la oportunidad de participación que nos han brindado.

Ramón Bruzual.
Marisela Domínguez.
Marzo 2003.

Contenido

Capítulo 1. Funciones periódicas y series de Fourier	1
1. Funciones trigonométricas	1
2. Polinomios trigonométricos	3
3. Período de una función	5
4. Coeficientes de Fourier	6
5. Lema de Riemann-Lebesgue	12
6. Ejercicios adicionales	16
Capítulo 2. Condiciones para la convergencia puntual y en media aritmética de una serie de Fourier	17
1. Condición suficiente para la convergencia puntual	17
2. Convergencia de las medias aritméticas	20
3. Ejercicios adicionales	24
Capítulo 3. Convergencia en media cuadrática de la serie de Fourier	27
1. Media cuadrática	27
2. Aproximación en media cuadrática	28
3. Desigualdad de Bessel e Identidad de Parseval	29
4. Aplicación a sumación de series numéricas	31
5. Ejercicios adicionales	32
Capítulo 4. Comportamiento de las series de Fourier	33
1. Fenómeno de Gibbs	33
2. Integración y derivación de series de Fourier	36
3. Orden de magnitud de los coeficientes de Fourier	40
4. Ejercicios adicionales	41
Capítulo 5. Casos más generales	43

1. Notación compleja	43
2. Funciones de período arbitrario	44
3. Desarrollo en serie de cosenos y en serie de senos	45
4. Ejercicios adicionales	47
Capítulo 6. Aplicación a la resolución de ecuaciones en derivadas parciales	49
1. Introducción	49
2. Ecuación de la cuerda vibrante	50
3. Ecuación del calor	55
Bibliografía	59
Índice	61

CAPÍTULO 1

Funciones periódicas y series de Fourier

1. Funciones trigonométricas

Se supone que el lector está familiarizado con las propiedades básicas de las funciones trigonométricas.

En esta sección repasaremos algunas identidades y enunciaremos algunos resultados básicos que serán necesarios más adelante.

Las funciones sen y cos tienen período 2π , es decir satisfacen:

$$\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen}(x),$$

$$\text{cos}(x + 2\pi) = \text{cos}(x)$$

para todo número real x .

Las siguientes identidades serán utilizadas en distintas partes del libro (x e y denotan números reales).

$$(1.1) \quad \text{sen}(x \pm y) = \text{sen } x \cos y \pm \text{sen } y \cos x$$

$$(1.2) \quad \text{cos}(x \pm y) = \text{cos } x \cos y \mp \text{sen } x \text{sen } y$$

$$(1.3) \quad \text{sen}^2 x = \frac{1 - \text{cos}(2x)}{2}$$

$$(1.4) \quad \text{cos}^2 x = \frac{1 + \text{cos}(2x)}{2}$$

$$(1.5) \quad \text{sen } x \cos y = \frac{1}{2}(\text{sen}(x - y) + \text{sen}(x + y))$$

$$(1.6) \quad \text{sen } x \text{sen } y = \frac{1}{2}(\text{cos}(x - y) - \text{cos}(x + y))$$

$$(1.7) \quad \text{cos } x \cos y = \frac{1}{2}(\text{cos}(x - y) + \text{cos}(x + y))$$

PROPOSICIÓN 1.1. *Sean m y n enteros positivos. Entonces*

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \, dx = \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n; \\ \pi, & \text{si } m = n. \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx \, dx = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Demostraremos que

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \, dx = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n; \\ \pi, & \text{si } m = n. \end{cases}$$

Las demostraciones de las igualdades restantes son análogas y quedarán como ejercicio.

Supongamos $m \neq n$, por la identidad (1.6) tenemos que

$$\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx = \frac{1}{2} (\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)),$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \, dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos((m-n)x) \, dx - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos((m+n)x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{sen}((m-n)x)}{m-n} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{sen}((m+n)x)}{m+n} \right]_0^{2\pi} \\ &= 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

Supongamos $m = n$, por la identidad (1.3) tenemos que

$$\operatorname{sen}^2(mx) = \frac{1 - \cos(2mx)}{2},$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(mx) \, dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(2mx)) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x - \frac{\operatorname{sen}(2mx)}{2m} \right]_0^{2\pi} \\ &= \pi. \end{aligned}$$

□

2. Polinomios trigonométricos

Como es usual \mathbb{R} denotará el cuerpo de los números reales.

DEFINICIÓN 1.2. Un polinomio trigonométrico es una función de \mathbb{R} en \mathbb{R} de la forma

$$(1.8) \quad P(x) = \frac{\alpha_o}{2} + \sum_{k=1}^n \alpha_k \cos kx + \beta_k \operatorname{sen} kx,$$

donde $\alpha_o, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ y β_1, \dots, β_n son constantes reales.

DEFINICIÓN 1.3. Si P es un polinomio trigonométrico de la forma (1.8), el grado de P es el mayor entero k tal que $\alpha_k \neq 0$ ó $\beta_k \neq 0$.

PROPOSICIÓN 1.4. *Sea P un polinomio trigonométrico de la forma (1.8). Entonces*

$$\begin{aligned} \alpha_o &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P(x) dx \\ \alpha_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P(x) \cos kx dx \quad \text{para } k = 1, \dots, n \\ \beta_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P(x) \operatorname{sen} kx dx \quad \text{para } k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Demostraremos la primera y la segunda igualdad, la demostración de la tercera es análoga y la dejaremos como ejercicio.

Por la Proposición 1.1 tenemos que, para $j = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} jx dx &= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} jx \cos 0x dx = 0, \\ \int_0^{2\pi} \cos jx dx &= \int_0^{2\pi} \cos jx \cos 0x dx = 0, \end{aligned}$$

luego

$$\int_0^{2\pi} P(x) dx = \int_0^{2\pi} \frac{\alpha_o}{2} dx + \sum_{j=1}^n \alpha_j \int_0^{2\pi} \cos jx dx + \beta_j \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} jx dx = \pi \alpha_o.$$

Esto prueba la primera igualdad, a continuación probaremos la segunda.

Sea k un entero entre 1 y n . Nuevamente, por la Proposición 1.1 tenemos que,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos kx dx &= \int_0^{2\pi} \cos kx \cos 0x dx = 0, \\ \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} jx \cos kx dx &= 0, \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos jx \cos kx \, dx = \begin{cases} 0, & \text{si } j \neq k; \\ \pi, & \text{si } j = k, \end{cases}$$

para $j = 1, \dots, n$. Luego

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} P(x) \cos kx \, dx &= \frac{\alpha_o}{2} \int_0^{2\pi} \cos kx \, dx + \sum_{j=1}^n \alpha_j \int_0^{2\pi} \cos jx \cos kx \, dx + \beta_j \int_0^{2\pi} \sin jx \cos kx \, dx \\ &= \pi \alpha_k. \end{aligned}$$

□

OBSERVACIÓN 1.5. Como $\cos 0 = 1$ tenemos que las dos primeras fórmulas de la Proposición 1.4 se reducen a

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P(x) \cos kx \, dx \quad \text{para } k = 0, \dots, n.$$

PROPOSICIÓN 1.6. *Sea P un polinomio trigonométrico de la forma (1.8). Entonces*

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (P(x))^2 \, dx = \frac{\alpha_o^2}{2} + \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 + \beta_k^2.$$

DEMOSTRACIÓN. Notemos que

$$(P(x))^2 = \frac{\alpha_o}{2} P(x) + \sum_{k=1}^n \alpha_k P(x) \cos kx + \beta_k P(x) \sin kx,$$

integrando y utilizando la Proposición 1.4 obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (P(x))^2 \, dx &= \frac{\alpha_o}{2} \int_0^{2\pi} P(x) \, dx + \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_0^{2\pi} P(x) \cos kx \, dx + \beta_k \int_0^{2\pi} P(x) \sin kx \, dx \\ &= \frac{\alpha_o}{2} \pi \alpha_o + \sum_{k=1}^n \alpha_k \pi \alpha_k + \beta_k \pi \beta_k \\ &= \pi \left(\frac{\alpha_o^2}{2} + \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 + \beta_k^2 \right). \end{aligned}$$

□

3. Período de una función

DEFINICIÓN 1.7. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es periódica cuando existe un número real T , no nulo, tal que $f(x + T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. En este caso se dice que T es un período para f .

OBSERVACIÓN 1.8. Si T es un período para f entonces $\pm T, \pm 2T, \dots, \pm nT, \dots$ también son períodos para f .

EJEMPLO 1.9.

- (a) Las funciones sen y cos tienen período 2π .
- (b) La función u definida por $u(x) = \cos(2x)$ tiene período π .
- (c) La función v definida por $v(x) = \sin(3x)$ tiene período $\frac{2\pi}{3}$.
- (d) La función f definida por $f(x) = \sin(\sqrt{2}x)$ tiene período $\sqrt{2}\pi$.
- (e) La función g definida por $g(x) = 1 + \cos(2x) + \sin(3x)$ tiene período 2π .
- (f) La función h definida por $h(x) = 1 + \cos(2x) + \sin(4x)$ tiene período π .

OBSERVACIÓN 1.10.

Es claro que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de período T entonces f está determinada por sus valores en un intervalo semi-abierto de longitud T .

Supongamos que f es una función a valores reales definida en un intervalo I , de la forma $(a, b]$ ó $[a, b)$, entonces f puede ser extendida, en forma natural, a una función de período $T = b - a$, definida en todo \mathbb{R} mediante la siguiente igualdad:

$$f(x + nT) = f(x),$$

para $x \in I$ y $n \in \mathbb{Z}$.

En particular, cuando se consideran funciones de período 2π , es usual definir las en el intervalo $[0, 2\pi)$, o en el intervalo $[-\pi, \pi)$.

PROPOSICIÓN 1.11. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de período T . Si f es integrable sobre un intervalo de longitud T entonces f es integrable sobre cualquier intervalo de longitud T y para cualquier $a \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\int_{-a}^{T-a} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

DEMOSTRACIÓN. Usando que $f(u - T) = f(u)$ para todo $u \in \mathbb{R}$ y haciendo la sustitución $u = x + T$ obtenemos

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_{T-a}^T f(u - T) du = \int_{T-a}^T f(u) du = \int_{T-a}^T f(x) dx,$$

luego

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{T-a} f(x) dx &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^{T-a} f(x) dx \\ &= \int_{T-a}^T f(x) dx + \int_0^{T-a} f(x) dx \\ &= \int_0^T f(x) dx. \end{aligned}$$

□

EJERCICIO 1.12. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función periódica. El período fundamental de f se define como

$$T_0 = \inf\{T > 0 : T \text{ es un período para } f\}.$$

Probar:

- (a) Si $T_0 \neq 0$ entonces T_0 es un período para f .
- (b) Si $T_0 \neq 0$ entonces cualquier otro período de f es un múltiplo entero de T_0 .
- (c) Si $T_0 = 0$ y f es continua entonces f es constante.

EJERCICIO 1.13. Dar un ejemplo de una función no constante con período fundamental igual a cero.

EJERCICIO 1.14. Probar que si una función f tiene dos períodos T_1 y T_2 tales que T_1/T_2 es irracional entonces el período fundamental de f es 0. Dar un ejemplo de una función no constante con períodos T_1 y T_2 tales que T_1/T_2 es irracional.

4. Coeficientes de Fourier

DEFINICIÓN 1.15. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de período 2π , integrable en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Los coeficientes de Fourier de f son

$$(1.9) \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad (k = 0, 1, \dots),$$

$$(1.10) \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} kx \, dx \quad (k = 1, 2, \dots).$$

La serie de Fourier de f es la siguiente suma formal

$$(1.11) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx$$

Uno de los objetivos fundamentales de este curso es estudiar la convergencia de la serie de Fourier de una función.

Los siguientes ejemplos ilustran, a través de gráficos, el comportamiento de la serie de Fourier de una función.

EJEMPLO 1.16. Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x \leq \pi; \\ -1, & \text{si } \pi < x < 2\pi, \end{cases}$$

extendida por periodicidad a toda la recta.

La serie de Fourier de f es

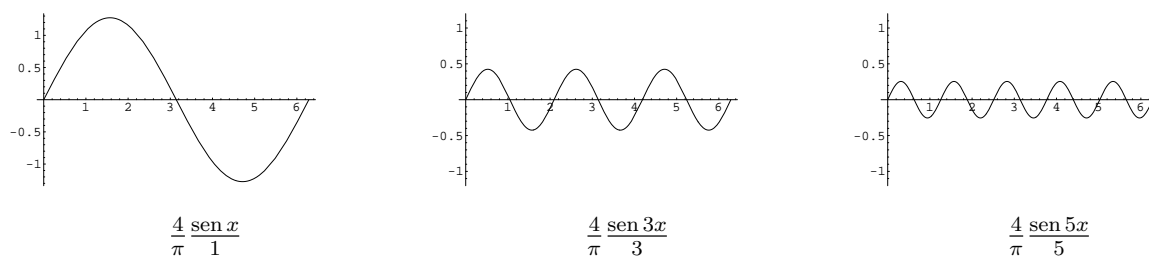
$$\frac{4}{\pi} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{1} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \dots + \frac{\operatorname{sen}(2k+1)x}{2k+1} + \dots \right)$$

(verificarlo como ejercicio).

Consideremos la suma parcial S_5 de esta serie de Fourier, entonces

$$S_5(x) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{1} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} \right).$$

Para visualizar el gráfico de S_5 trazamos primero los gráficos de las funciones $\frac{4}{\pi} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{1} \right)$, $\frac{4}{\pi} \left(\frac{\operatorname{sen} 3x}{3} \right)$ y $\frac{4}{\pi} \left(\frac{\operatorname{sen} 5x}{5} \right)$.



Al trazar el gráfico de la suma obtenemos

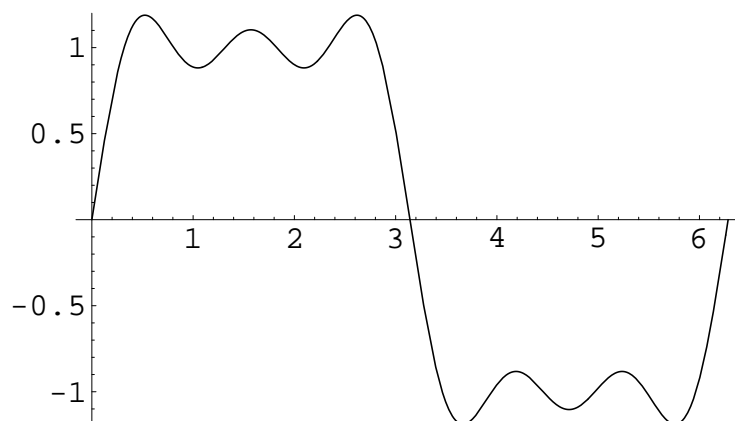


FIGURA 1.1. S_5

Si continuamos hasta S_{11} obtenemos

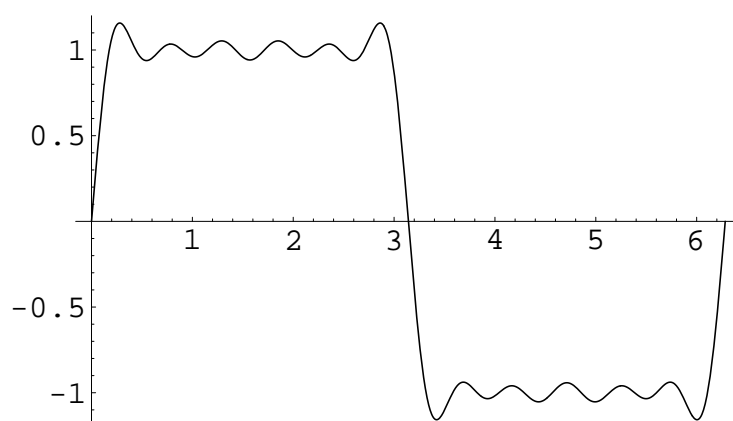


FIGURA 1.2. S_{11}

Estos gráficos sugieren que la serie de Fourier de f converge a f en cada punto de continuidad.

EJEMPLO 1.17. Consideremos la función

$$g(x) = x \quad \text{para} \quad -\pi \leq x < \pi,$$

extendida por periodicidad a toda la recta.

La serie de Fourier de g es

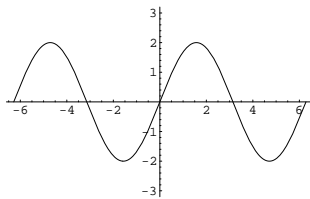
$$2 \left(\frac{\text{sen } x}{1} - \frac{\text{sen } 2x}{2} + \frac{\text{sen } 3x}{3} + \dots + (-1)^{k+1} \frac{\text{sen } kx}{k} + \dots \right)$$

(verificarlo como ejercicio).

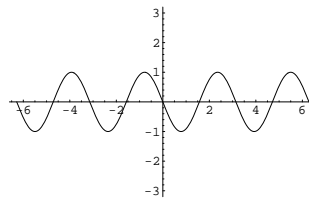
Consideremos la suma parcial S_3 de esta serie de Fourier, entonces

$$S_3(x) = 2 \left(\frac{\text{sen } x}{1} - \frac{\text{sen } 2x}{2} + \frac{\text{sen } 3x}{3} \right).$$

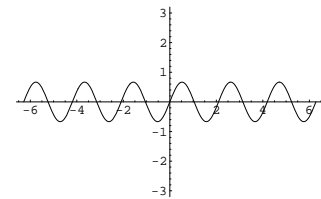
Para visualizar el gráfico de S_3 trazamos primero los gráficos de las funciones $2 \text{sen } x$, $-\text{sen } 2x$ y $\frac{2}{3} \text{sen } 3x$.



$2 \text{sen } x$

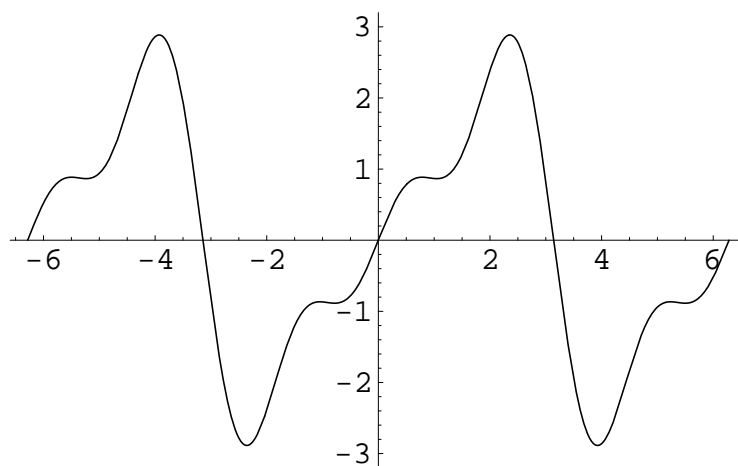


$-\text{sen } 2x$

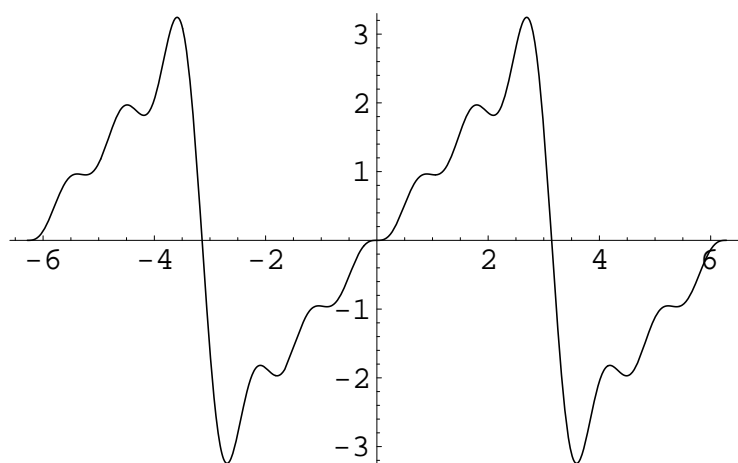


$\frac{2}{3} \text{sen } 3x$

Al trazar el gráfico de la suma obtenemos

FIGURA 1.3. S_3

Si continuamos hasta S_6 obtenemos

FIGURA 1.4. S_6

Al igual que en el ejemplo anterior, estos gráficos sugieren que la serie de Fourier de g converge a g en cada punto de continuidad.

En el Capítulo 2 daremos condiciones suficientes para la convergencia de la serie de Fourier de una función.

PROPOSICIÓN 1.18. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de período 2π , si la serie de Fourier de f converge uniformemente a f en $[0, 2\pi]$ entonces

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx = \frac{a_o^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2.$$

DEMOSTRACIÓN. Notar que por hipótesis f es continua, ya que es límite uniforme de funciones continuas. Por lo tanto f^2 es integrable en $[0, 2\pi]$.

Como

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

entonces

$$(f(x))^2 = \frac{a_o f(x)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k f(x) \cos kx + b_k f(x) \sin kx.$$

y la convergencia es uniforme.

Integrando obtenemos

$$\int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx = \frac{a_o}{2} \int_0^{2\pi} f(x) dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx + b_k \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx \right).$$

Luego

$$\int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx = \frac{a_o^2}{2} \pi + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 \pi + b_k^2 \pi).$$

□

OBSERVACIÓN 1.19. El resultado anterior se conoce como Identidad de Parseval y es válida en casos más generales, tal como veremos más adelante (ver Teorema 3.10).

PROPOSICIÓN 1.20. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua de período 2π y sean a_k y b_k los coeficientes de Fourier de f . Para cualquier entero positivo n

$$\frac{a_o^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_k^2 \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx.$$

DEMOSTRACIÓN. Consideramos las sumas parciales de la serie de Fourier de f , esto es para $n \geq 1$ sea

$$(1.12) \quad S_n(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Tenemos que

$$(f(x))^2 - 2f(x)S_n(x) + (S_n(x))^2 = (f(x) - S_n(x))^2 \geq 0$$

y por lo tanto

$$\int_0^{2\pi} (f(x))^2 - 2f(x)S_n(x) + (S_n(x))^2 dx \geq 0.$$

Luego

$$\int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx \geq 2 \int_0^{2\pi} f(x)S_n(x) dx - \int_0^{2\pi} (S_n(x))^2 dx.$$

Calcularemos las integrales que están a la derecha de esta expresión

Multiplicando (1.12) por $f(x)$ e integrando de 0 a 2π , obtenemos

$$\int_0^{2\pi} f(x)S_n(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} f(x) dx + \sum_{k=1}^n \left(a_k \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx + b_k \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx \right),$$

luego

$$\int_0^{2\pi} f(x)S_n(x) dx = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_k^2 \right).$$

Por la Proposición 1.6 tenemos que

$$\int_0^{2\pi} (S_n(x))^2 dx = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_k^2 \right),$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx &\geq 2\pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_k^2 \right) - \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_k^2 \right) \\ &= \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_k^2 \right). \end{aligned}$$

□

OBSERVACIÓN 1.21. El resultado anterior se conoce como Desigualdad de Bessel y es válido en casos más generales, tal como veremos más adelante (ver Proposición 3.6).

5. Lema de Riemann-Lebesgue

El siguiente resultado, que dejamos como ejercicio, lo necesitaremos para probar el resultado fundamental de esta sección.

EJERCICIO 1.22. Sea f una función integrable en $[a, b]$.

Demostrar que para cada $\varepsilon > 0$, existe una función escalonada h , definida en $[a, b]$, tal que

$$\int_a^b |f(x) - h(x)| dx < \varepsilon.$$

LEMA 1.23 (Riemann-Lebesgue). *Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable. Entonces*

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(\lambda x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \operatorname{cos}(\lambda x) dx = 0.$$

DEMOSTRACIÓN.

Demostraremos que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(\lambda x) dx = 0,$$

el otro límite es análogo.

Consideraremos tres casos.

Caso 1: f es la función característica de un intervalo $[c, d]$ contenido en $[a, b]$, es decir

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [c, d]; \\ 0, & x \notin [c, d]. \end{cases}$$

En este caso

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(\lambda x) dx &= \int_c^d \operatorname{sen}(\lambda x) dx \\ &= \left[-\frac{\operatorname{cos}(\lambda x)}{\lambda} \right]_c^d \\ &= \frac{1}{\lambda} (\operatorname{cos}(\lambda c) - \operatorname{cos}(\lambda d)), \end{aligned}$$

como la función coseno es acotada, esta última expresión tiende a 0 si λ tiende a ∞ .

Caso 2: f es una función escalonada.

En este caso f es una combinación lineal finita de funciones características de intervalos contenidos en $[a, b]$, por la linealidad de la integral el resultado para este caso se obtiene inmediatamente del caso 1.

Caso 3: Caso general, sea f integrable en $[a, b]$.

Sea $\varepsilon > 0$, por el Ejercicio 1.22, existe una función escalonada h , definida en $[a, b]$, tal que

$$\int_a^b |f(x) - h(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por lo probado en el caso anterior existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que si $\lambda \geq \lambda_0$ entonces

$$\left| \int_a^b h(x) \operatorname{sen}(\lambda x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por lo tanto, si $\lambda \geq \lambda_0$, tenemos que

$$\begin{aligned}
 \left| \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(\lambda x) dx \right| &= \left| \int_a^b (f(x) - h(x) + h(x)) \operatorname{sen}(\lambda x) dx \right| \\
 &\leq \left| \int_a^b (f(x) - h(x)) \operatorname{sen}(\lambda x) dx \right| + \left| \int_a^b h(x) \operatorname{sen}(\lambda x) dx \right| \\
 &\leq \int_a^b |(f(x) - h(x)) \operatorname{sen}(\lambda x)| dx + \left| \int_a^b h(x) \operatorname{sen}(\lambda x) dx \right| \\
 &\leq \int_a^b |f(x) - h(x)| dx + \left| \int_a^b h(x) \operatorname{sen}(\lambda x) dx \right| \\
 &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
 \end{aligned}$$

□

COROLARIO 1.24. *Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de período 2π , integrable en el intervalo $[0, 2\pi]$. Si $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ son sus coeficientes de Fourier, entonces*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} b_k = 0.$$

A continuación probaremos una fórmula de sumación y aplicaremos el Lema de Riemann-Lebesgue al cálculo de una integral definida que no es posible obtener a través del Teorema fundamental del cálculo.

PROPOSICIÓN 1.25. *Si $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sen}(\frac{x}{2}) \neq 0$ y n es un número natural, entonces*

$$(1.13) \quad \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\operatorname{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned}
 \left(2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \left(\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx\right) &= \\
 &= \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cos x + \cdots + 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cos nx
 \end{aligned}$$

Por la identidad (1.5) tenemos que, para $k = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sen} \left(\frac{x}{2} \right) \cos kx &= \operatorname{sen} \left(\frac{x}{2} - kx \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{x}{2} + kx \right) \\ &= \operatorname{sen} \left(\left(\frac{1}{2} - k \right) x \right) + \operatorname{sen} \left(\left(\frac{1}{2} + k \right) x \right) \\ &= -\operatorname{sen} \left(\left(k - \frac{1}{2} \right) x \right) + \operatorname{sen} \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) x \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} &\left(2 \operatorname{sen} \left(\frac{x}{2} \right) \right) \left(\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx \right) = \\ &= \operatorname{sen} \left(\frac{x}{2} \right) - \operatorname{sen} \left(\frac{x}{2} \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{3x}{2} \right) - \operatorname{sen} \left(\frac{3x}{2} \right) + \dots - \operatorname{sen} \left(\left(n - \frac{1}{2} \right) x \right) + \operatorname{sen} \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right) \\ &= \operatorname{sen} \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right). \end{aligned}$$

□

EJERCICIO 1.26. El propósito del siguiente ejercicio es calcular el valor de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt.$$

(a) Demostrar la convergencia de la integral impropia

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt.$$

(b) Utilizar el Lema de Riemann-Lebesgue para demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} \left[\frac{2}{t} - \frac{1}{\operatorname{sen} \left(\frac{t}{2} \right)} \right] \operatorname{sen} \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right) dt = 0.$$

(c) Utilizar la fórmula de sumación (1.13) para demostrar que, para todo entero $n \geq 1$ se tiene que

$$\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right)}{\operatorname{sen} \left(\frac{t}{2} \right)} dt = \pi.$$

(d) Utilizar el cambio de variable $u = n + \frac{1}{2}t$ para demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt.$$

(e) Demostrar que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

6. Ejercicios adicionales

(1) Calcular

(a) $\int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos 3x + \cos^2 3x) dx.$

(b) $\int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos 3x + 4 \cos 5x - 2 \operatorname{sen} 10x)^2 dx.$

(2) Considerar la función f definida por

$$f(x) = x \quad \text{para } -\pi \leq x < \pi,$$

extendida por periodicidad a toda la recta.

(a) Trazar el gráfico de f .

(b) Hallar los coeficientes de Fourier.

(c) Trazar, en forma aproximada, el gráfico de las primeras sumas parciales de la serie de Fourier de f .

(3) Considerar la función f definida por

$$f(x) = x^2 \quad \text{para } -\pi \leq x < \pi,$$

extendida por periodicidad a toda la recta.

(a) Trazar el gráfico de f .

(b) Hallar los coeficientes de Fourier.

(c) Trazar, en forma aproximada, el gráfico de las primeras sumas parciales de la serie de Fourier de f .

CAPÍTULO 2

Condiciones para la convergencia puntual y en media aritmética de una serie de Fourier

1. Condición suficiente para la convergencia puntual

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de período 2π , integrable en el intervalo $[0, 2\pi]$. Sea $\{S_n\}$ la sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de f , es decir

$$(2.1) \quad S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx,$$

donde a_k y b_k son los coeficientes de Fourier de f .

Si sustituimos las fórmulas (1.9) y (1.10) en la expresión (2.1) obtenemos

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \cos kx + \operatorname{sen} kt \operatorname{sen} kx \right] dt,$$

de la identidad (1.2) para el coseno de la suma, sigue que

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k(t-x)) \right] dt,$$

por la fórmula de sumación obtenida en la Proposición 1.25 tenemos que

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{\operatorname{sen}((n + \frac{1}{2})(t-x))}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}(t-x))} dt.$$

Si hacemos el cambio de variable $\tau = t - x$ y usamos la Proposición 1.11 obtenemos

$$(2.2) \quad S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + \tau) \frac{\operatorname{sen}((n + \frac{1}{2})\tau)}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\tau)} d\tau.$$

DEFINICIÓN 2.1. El núcleo de Dirichlet es la sucesión de funciones $\{D_n\}$ definida por

$$D_n(t) = \frac{\operatorname{sen}((n + \frac{1}{2})t)}{2\pi \operatorname{sen}(\frac{1}{2}t)}$$

De la igualdad (2.2) se obtiene que, para f como antes,

$$(2.3) \quad S_n(x) = \int_0^{2\pi} f(x+t)D_n(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t) dt.$$

OBSERVACIÓN 2.2. De la fórmula de sumación obtenida en la Proposición 1.25 se deduce que

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} (\cos t + \cos 2t + \cdots \cos nt).$$

de esta última igualdad se obtiene que

$$\int_0^{2\pi} D_n(t) dt = 1,$$

$$\int_0^{\pi} D_n(t) dt = \int_{-\pi}^0 D_n(t) dt = \frac{1}{2}.$$

DEFINICIÓN 2.3. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y acotado, sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es continua a trozos en I si f tiene una cantidad finita de discontinuidades de salto, es decir si:

- (i) I se puede dividir en una cantidad finita de sub-intervalos $[z_0, z_1], [z_1, z_2], \dots, [z_{p-1}, z_p]$ ($z_0 < z_1 < \cdots < z_p$), tales que f es continua en cada uno de los intervalos (z_{k-1}, z_k) .
- (ii) Para cada $k = 1, \dots, p-1$, los siguientes límites existen y son finitos

$$\lim_{x \rightarrow z_k^+} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow z_k^-} f(x).$$

- (iii) Los siguientes límites existen y son finitos

$$\lim_{x \rightarrow z_0^+} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow z_p^-} f(x).$$

TEOREMA 2.4. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de período 2π , tal que:

- (i) f es continua a trozos en $[0, 2\pi]$.
- (ii) Es posible subdividir $[0, 2\pi]$, de acuerdo a la Definición 2.3, en sub-intervalos $[z_{k-1}, z_k]$, de manera que f sea derivable en (z_{k-1}, z_k) y existen las derivadas laterales

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(z_k + h) - f(z_k^+)}{h} \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(z_k + h) - f(z_k^-)}{h}.$$

Entonces, para cada $x \in \mathbb{R}$, la serie de Fourier de f converge a

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in \mathbb{R}$. Sea $\{S_n(x)\}$ la sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de f , entonces

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t) dt.$$

Luego

$$\begin{aligned} S_n(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t) dt - f(x^+) \int_0^{\pi} D_n(t) dt - f(x^-) \int_{-\pi}^0 D_n(t) dt \\ &= \int_0^{\pi} (f(x+t) - f(x^+))D_n(t) dt + \int_{-\pi}^0 (f(x+t) - f(x^-))D_n(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{f(x+t) - f(x^+)}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}t)} \right) \operatorname{sen} \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right) dt \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 \left(\frac{f(x+t) - f(x^-)}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}t)} \right) \operatorname{sen} \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right) dt. \end{aligned}$$

Para $t \in [0, \pi]$ sea

$$g(t) = \frac{f(x+t) - f(x^+)}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}t)},$$

claramente

$$g(t) = \left(\frac{f(x+t) - f(x^+)}{t} \right) \left(\frac{t}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}t)} \right),$$

de las hipótesis sobre f sigue inmediatamente que existe $\lim_{t \rightarrow 0} g(t)$ y que si definimos $g(0)$ como este límite entonces g es continua a trozos en $[0, \pi]$.

Por el Lema de Riemann-Lebesgue (ver Lema 1.23) tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{f(x+t) - f(x^+)}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}t)} \right) \operatorname{sen} \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right) dt = 0.$$

De manera completamente análoga se prueba que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 \left(\frac{f(x+t) - f(x^-)}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}t)} \right) \operatorname{sen} \left((n + \frac{1}{2})t \right) dt = 0.$$

Por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

□

OBSERVACIÓN 2.5. Notar que si f satisface las hipótesis del Teorema 2.4 entonces su serie de Fourier converge puntualmente a f en cada punto de continuidad.

COROLARIO 2.6. *Si f satisface las hipótesis del Teorema anterior y todos sus coeficientes de Fourier son iguales a cero entonces f es nula, salvo en una cantidad finita de puntos.*

COROLARIO 2.7. *Si f y g satisfacen las hipótesis del Teorema anterior y los coeficientes de Fourier de f son iguales a los de g entonces $f = g$, salvo en una cantidad finita de puntos.*

EJERCICIO 2.8. Demostrar que

$$\frac{\pi}{2} = 2 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right).$$

Indicación: Considerar la serie de Fourier de la función

$$f(x) = x \quad \text{para} \quad -\pi \leq x < \pi.$$

2. Convergencia de las medias aritméticas

DEFINICIÓN 2.9. Sea $\lambda_0, \lambda_1, \dots$ una sucesión de números reales. La sucesión de las medias de Cesaro, o medias aritméticas, de la sucesión $\{\lambda_n\}$ es la sucesión $\{\xi_n\}$ definida por

$$\xi_n = \frac{\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n}{n+1}.$$

EJERCICIO 2.10.

- (1) Demostrar que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = L$ entonces la sucesión de las medias de Cesaro de $\{\lambda_n\}$ también converge a L .
- (2) Dar un ejemplo de una sucesión $\{\lambda_n\}$ tal que existe

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n}{n+1},$$

pero sin embargo no existe $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n$.

Es muy natural preguntarse qué ocurre con las medias de Cesaro de las sumas parciales de la serie de Fourier de una función. A continuación veremos algunos resultados en esta dirección.

Al igual que en la Sección anterior sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de período 2π , integrable en el intervalo $[0, 2\pi]$ y sea $\{S_n\}$ la sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de f . Consideremos sus medias de Cesaro

$$(2.4) \quad \sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \cdots + S_n(x)}{n+1}$$

Por la fórmula (2.3) tenemos que

$$(2.5) \quad \sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left(\frac{D_0(t) + D_1(t) + \cdots + D_n(t)}{n+1} \right) dt.$$

DEFINICIÓN 2.11. El núcleo de Fejer es la sucesión de funciones $\{K_n\}$ definida por

$$(2.6) \quad K_n(t) = \frac{D_0(t) + D_1(t) + \cdots + D_n(t)}{n+1},$$

donde $\{D_n\}$ es el núcleo de Dirichlet.

OBSERVACIÓN 2.12. Claramente

$$(2.7) \quad \sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) K_n(t) dt.$$

PROPOSICIÓN 2.13. *Sea $\{K_n\}$ el núcleo de Fejer. Entonces:*

$$(a) \quad \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt = 1,$$

$$(b) \quad K_n(t) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \left(\frac{\operatorname{sen} \left(\frac{(n+1)t}{2} \right)}{\operatorname{sen} \left(\frac{t}{2} \right)} \right)^2,$$

$$(c) \quad K_n(t) \geq 0.$$

DEMOSTRACIÓN.

(a) Es inmediato, ya que $\int_{-\pi}^{\pi} D_k(t) dt = 1$, para $k = 0, 1, 2, \dots$

(b) Usando las identidades (1.3) y (1.6), obtenemos que, para $k = 0, \dots, n$,

$$\begin{aligned} D_k(t) &= \frac{\operatorname{sen}((k + \frac{1}{2})t)}{2\pi \operatorname{sen}(\frac{1}{2}t)} = \frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}t) \operatorname{sen}((k + \frac{1}{2})t)}{2\pi \operatorname{sen}^2(\frac{1}{2}t)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\cos kt - \cos(k + 1)t}{1 - \cos t} \right), \end{aligned}$$

de donde,

$$\begin{aligned} K_n(t) &= \frac{D_0(t) + D_1(t) + \dots + D_n(t)}{n + 1} \\ &= \frac{1}{2\pi(n + 1)} \left(\frac{1 - \cos(n + 1)t}{1 - \cos t} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi(n + 1)} \left(\frac{\operatorname{sen} \left(\frac{(n+1)t}{2} \right)}{\operatorname{sen} \left(\frac{t}{2} \right)} \right)^2. \end{aligned}$$

(c) Sigue inmediatamente de (b).

□

TEOREMA 2.14 (Fejer). *Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua de período 2π , sea $\{\sigma_n\}$ la sucesión de las medias de Cesaro de las sumas parciales de la serie de Fourier de f . Entonces $\{\sigma_n\}$ converge uniformemente a f en \mathbb{R} .*

DEMOSTRACIÓN. Claramente f es uniformemente continua y acotada en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Por la periodicidad f es uniformemente continua y acotada en todo \mathbb{R} .

Sea $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $x, x' \in \mathbb{R}$ y $|x - x'| < \delta$.

Sea $x \in \mathbb{R}$, por la fórmula (2.7) y por (b) de la Proposición 2.13, tenemos que

$$\begin{aligned}
|\sigma_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x))K_n(t) dt \right| \\
&\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|K_n(t) dt \\
&= \int_{-\delta}^{\delta} |f(x+t) - f(x)|K_n(t) dt \\
&\quad + \int_{\delta}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|K_n(t) dt \\
&\quad + \int_{-\pi}^{-\delta} |f(x+t) - f(x)|K_n(t) dt \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} K_n(t) dt + 2M \int_{\delta}^{\pi} K_n(t) dt + 2M \int_{-\pi}^{-\delta} K_n(t) dt \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt + \frac{2M}{2\pi(n+1)} \int_{\delta}^{\pi} \frac{1}{\text{sen}^2(\frac{t}{2})} dt + \frac{2M}{2\pi(n+1)} \int_{-\pi}^{-\delta} \frac{1}{\text{sen}^2(\frac{t}{2})} dt \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\pi(n+1)} \int_{\delta}^{\pi} \frac{1}{\text{sen}^2(\frac{t}{2})} dt.
\end{aligned}$$

La función $\text{sen}(\frac{x}{2})$ es creciente para $0 \leq x \leq \pi$. Luego

$$\frac{1}{\text{sen}^2(\frac{t}{2})} \leq \frac{1}{\text{sen}^2(\frac{\delta}{2})},$$

para $\delta \leq t \leq \pi$. Por lo tanto

$$\int_{\delta}^{\pi} \frac{1}{\text{sen}^2(\frac{t}{2})} dt \leq (\pi - \delta) \frac{1}{\text{sen}^2(\frac{\delta}{2})} \leq \frac{\pi}{\text{sen}^2(\frac{\delta}{2})}.$$

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

existe un entero positivo N_o tal que, si $n \geq N_o$ entonces

$$\frac{2M}{(n+1) \text{sen}^2(\frac{\delta}{2})} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tenemos que si $n \geq N_o$ entonces

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. □

Como ejercicio demostrar los siguientes resultados.

COROLARIO 2.15. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua de período 2π . Si $x \in \mathbb{R}$ y existe $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x)$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = f(x).$$

TEOREMA 2.16 (Teorema de aproximación de Weierstrass). Toda función continua a valores reales, definida en un intervalo cerrado y acotado puede ser aproximada uniformemente por polinomios.

Indicación:

- (A) Considerar primero el caso en que f está definida en un intervalo $[a, b]$ y $0 < a < b < 2\pi$.
- (i) Demostrar que en este caso f se puede extender a una función continua g con dominio $[0, 2\pi]$, tal que $g(0) = g(2\pi)$.
 - (ii) Demostrar que g tiene una extensión continua y de período 2π definida en todo \mathbb{R} .
 - (iii) Utilizar el Teorema de Fejer para demostrar que g puede ser aproximada uniformemente por polinomios trigonométricos en \mathbb{R} .
 - (iv) Utilizar el Teorema de Taylor para demostrar que g se puede aproximar uniformemente por polinomios en el intervalo $[a, b]$.
- (B) Obtener el caso general a partir del anterior.

3. Ejercicios adicionales

- (1) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, de período 2π . Demostrar que si

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx = 0 \quad \text{para } k = 0, 1, \dots,$$

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx = 0 \quad \text{para } k = 1, 2, \dots$$

entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

- (2) Demostrar que

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

Indicación: Ver el Ejercicio 2 de la Sección 6 del Capítulo 1

- (3) Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y acotado y sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Demostrar que si

$$\int_a^b x^k f(x) dx = 0 \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots$$

entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$.

Indicación: Utilizar el teorema de aproximación de Weierstrass.

CAPÍTULO 3

Convergencia en media cuadrática de la serie de Fourier

1. Media cuadrática

DEFINICIÓN 3.1. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de período 2π , continua a trozos, se define

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

EJERCICIO 3.2. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de período 2π , continua a trozos. Demostrar que para cada $\varepsilon > 0$ existe $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continua y de período 2π tal que

$$\|f - g\|_2 < \varepsilon.$$

PROPOSICIÓN 3.3 (Desigualdad de Cauchy-Schwartz). Si $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones de período 2π y continuas a trozos entonces

$$\left| \int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx \right| \leq \left(\int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{2\pi} (g(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int_0^{2\pi} (f(x) - \lambda g(x))^2 dx \geq 0,$$

de donde,

$$\int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx - 2\lambda \int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx + \lambda^2 \int_0^{2\pi} (g(x))^2 dx \geq 0.$$

La expresión de la izquierda es un polinomio de grado 2 en la variable λ , por lo tanto su discriminante es menor o igual que cero, es decir

$$4 \left(\int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx \right)^2 - 4 \left(\int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx \right) \left(\int_0^{2\pi} (g(x))^2 dx \right) \leq 0.$$

□

Como ejercicio establecer el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 3.4. *Si $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones de período 2π y continuas a trozos entonces*

- (i) $\|f\|_2 = 0$ si y sólo si f es nula, salvo en una cantidad finita de puntos.
- (ii) $\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$,
- (iii) Si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\|\lambda f\|_2 = |\lambda| \|f\|_2$

2. Aproximación en media cuadrática

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de período 2π , continua a trozos y sea

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx$$

la sucesión de sumas parciales de su serie de Fourier.

Sea N un entero positivo y sea P un polinomio trigonométrico de la forma (1.8) de grado N , es decir

$$P(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^N \alpha_k \cos kx + \beta_k \operatorname{sen} kx.$$

Entonces

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(x) - P(x))^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx - \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)P(x) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (P(x))^2 dx.$$

Por la Proposición 1.6 tenemos que

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (P(x))^2 dx = \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^N \alpha_k^2 + \beta_k^2,$$

por otra parte

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)P(x) dx &= \\ &= \frac{\alpha_0}{2} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx + \sum_{k=1}^N \alpha_k \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx + \beta_k \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} kx dx \\ &= \frac{\alpha_0 a_0}{2} + \sum_{k=1}^N \alpha_k a_k + \beta_k b_k. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(x) - P(x))^2 dx = \\
 (3.1) \quad & = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx - 2 \left(\frac{\alpha_o a_o}{2} + \sum_{k=1}^N \alpha_k a_k + \beta_k b_k \right) + \frac{\alpha_o^2}{2} + \sum_{k=1}^N \alpha_k^2 + \beta_k^2 \\
 & = \|f\|_2^2 + \frac{(a_o - \alpha_o)^2}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k - \alpha_k)^2 + (b_k - \beta_k)^2 - \left(\frac{a_o^2}{2} + \sum_{k=1}^N a_k^2 + b_k^2 \right)
 \end{aligned}$$

TEOREMA 3.5. *Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de período 2π , continua a trozos, sea N un entero positivo y sea P un polinomio trigonométrico de grado N . Sea $\{S_n\}$ la sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de f . Entonces*

$$\|f - S_N\|_2 \leq \|f - P\|_2$$

y hay igualdad si y sólo si $P = S_N$.

DEMOSTRACIÓN. De la fórmula (3.1) sigue inmediatamente el resultado. \square

3. Desigualdad de Bessel e Identidad de Parseval

PROPOSICIÓN 3.6 (Desigualdad de Bessel). *Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de período 2π , continua a trozos y sean a_k y b_k sus coeficientes de Fourier. Entonces*

$$\frac{a_o^2}{2} + \sum_{k=1}^N a_k^2 + b_k^2 \leq \|f\|_2^2$$

para todo entero positivo N .

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{S_n\}$ la sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de f , considerando la fórmula (3.1) con $P = S_N$, obtenemos

$$\|f\|_2^2 - \left(\frac{a_o^2}{2} + \sum_{k=1}^N a_k^2 + b_k^2 \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(x) - S_N(x))^2 dx \geq 0.$$

\square

COROLARIO 3.7. *Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de período 2π , continua a trozos y sean a_k y b_k sus coeficientes de Fourier. Entonces la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2$$

es convergente

TEOREMA 3.8. *Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de período 2π , continua a trozos y sea $\{S_n\}$ la sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de f . Entonces*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - S_n\|_2 = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que f es continua. Sea $\{\sigma_n\}$ la sucesión de las medias de Cesaro de las sumas parciales de la serie de Fourier de f . Por el Teorema 2.14 $\{\sigma_n\}$ converge uniformemente a f en \mathbb{R} , por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - \sigma_n\|_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{2\pi} (f(x) - \sigma_n(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Por el Teorema 3.5 $\|f - S_n\|_2 \leq \|f - \sigma_n\|_2$, para cada $n \in \mathbb{N}$, luego

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - S_n\|_2 = 0.$$

Sea f continua a trozos y de período 2π .

Dado $\varepsilon > 0$ existe g continua y de período 2π (ver Ejercicio 3.2) tal que

$$\|f - g\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $\{S_{g,n}\}$ la sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de g , por lo que acabamos de probar, existe un entero positivo N_o tal que si $n \geq N_o$ entonces

$$\|g - S_{g,n}\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por el Teorema 3.5 tenemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f - S_n\|_2 \leq \|f - S_{g,n}\|_2.$$

Sea $n \geq N_o$, entonces

$$\begin{aligned} \|f - S_n\|_2 &\leq \|f - S_{g,n}\|_2 \\ &\leq \|f - g\|_2 + \|g - S_{g,n}\|_2 \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

OBSERVACIÓN 3.9. Se puede probar que el resultado anterior vale para cualquier función de cuadrado integrable, no necesariamente continua a trozos.

TEOREMA 3.10 (Identidad de Parseval). *Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de período 2π , continua a trozos y sean a_k y b_k sus coeficientes de Fourier. Entonces*

$$\frac{a_o^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 = \|f\|_2^2.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{S_n(x)\}$ la sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de f , considerando la fórmula (3.1) con $P = S_n$, obtenemos

$$\|f\|_2^2 - \left(\frac{a_o^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_k^2 \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(x) - S_n(x))^2 dx = \|f - S_n\|_2^2.$$

Tomando límite cuando n tiende a infinito y usando el Teorema 3.8 tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\|f\|_2^2 - \left(\frac{a_o^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_k^2 \right) \right) = 0.$$

□

4. Aplicación a sumación de series numéricas

EJEMPLO 3.11. Vamos a ver como la identidad de Parseval nos permite establecer que

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Consideremos la función

$$f(x) = x \quad \text{para} \quad -\pi \leq x < \pi,$$

extendida por periodicidad a toda la recta.

Su serie de Fourier es (ver Ejemplo 1.17)

$$2 \left(\frac{\operatorname{sen} x}{1} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \cdots + (-1)^{k+1} \frac{\operatorname{sen}(k)x}{k} + \cdots \right).$$

Al aplicar la identidad de Parseval obtenemos

$$\begin{aligned} 4 \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots \right) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{3} \pi^2, \end{aligned}$$

de donde se obtiene el resultado.

5. Ejercicios adicionales

(1) Demostrar que

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}.$$

(2) Hallar el valor de

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \cdots .$$

(3) Hallar el valor de

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \cdots .$$

CAPÍTULO 4

Comportamiento de las series de Fourier

1. Fenómeno de Gibbs

La convergencia de la serie de Fourier de una función en las cercanías de una discontinuidad de salto muestra ciertas características muy particulares que fueron estudiadas por el matemático J. N. Gibbs alrededor del año 1899.

Sea f una función de período 2π y sea $\{S_n\}$ la sucesión de sumas parciales de su serie de Fourier. Gibbs observó lo siguiente: en un entorno de una discontinuidad de salto S_n siempre difiere de f en un valor que es aproximadamente igual al 9% del tamaño del salto. Esta propiedad se conoce como fenómeno de Gibbs.

Vamos a ilustrar el fenómeno de Gibbs a través de un ejemplo muy sencillo, para más información y detalles se pueden consultar los textos [1] y [2].

En lo que resta de esta sección f será la función definida por

$$f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x) \quad (0 \leq x < 2\pi),$$

extendida por periodicidad a toda la recta.

Si representamos gráficamente a esta función obtenemos:

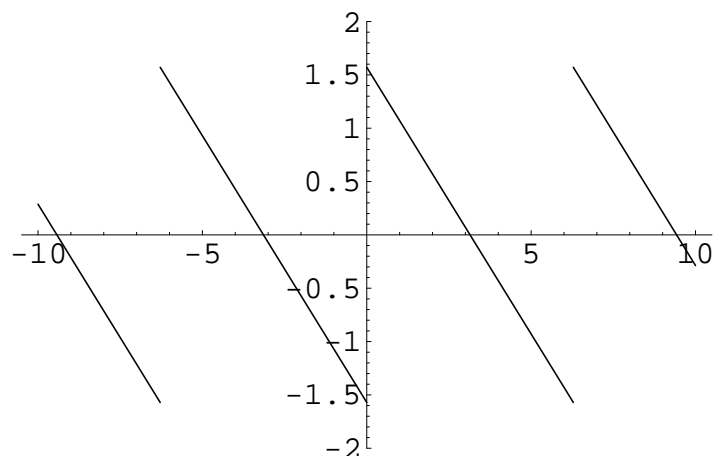


FIGURA 4.1. gráfico de f

Se observa que f tiene una discontinuidad de salto en los puntos $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$

EJERCICIO 4.1. Demostrar que la serie de Fourier de f es igual a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sen } kx}{k}.$$

Sea

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\text{sen } kx}{k}.$$

Si superponemos los gráficos de S_5 y S_9 con el gráfico de f obtenemos

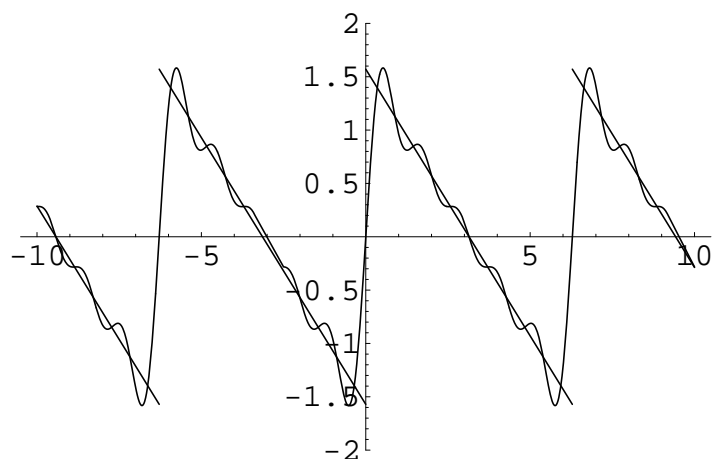


FIGURA 4.2. S_5

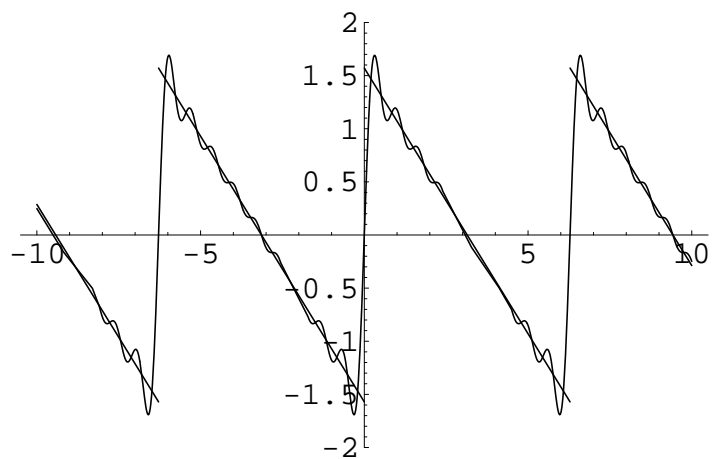


FIGURA 4.3. S_9

En las gráficas se observa claramente un salto de altura similar alrededor de cada discontinuidad.

Si consideramos S_{19} , obtenemos

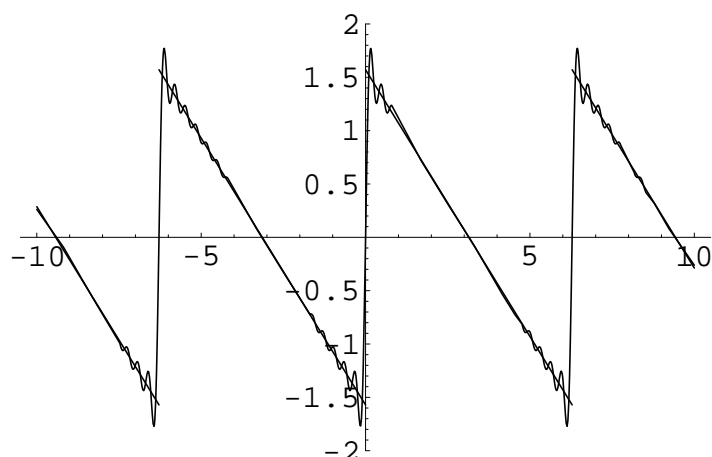


FIGURA 4.4. S_{19}

A través de los siguientes ejercicios vamos a formalizar lo que observamos en los gráficos.

EJERCICIO 4.2. Demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n\left(\frac{\pi}{n}\right) = \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt.$$

Indicación: Identificar $S_n\left(\frac{\pi}{n}\right)$ con una suma de Riemann para la integral $\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt$.

EJERCICIO 4.3. Demostrar que

$$\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt \approx 1,85$$

Indicación: Usar el desarrollo de Taylor de la función sen .

Luego

$$\begin{aligned} S_n\left(\frac{\pi}{n}\right) - f(0^+) &\approx \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt - f(0^+) \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt - \frac{\pi}{2} \\ &\approx 1,85 - \frac{\pi}{2} \approx 0,28 \approx 0,09\pi. \end{aligned}$$

Por otro lado, la altura del salto de f en 0 es

$$f(0^+) - f(0^-) = \pi,$$

por lo tanto, para n bastante grande,

$$S_n\left(\frac{\pi}{n}\right) - f(0^+) \approx \frac{9}{100}(f(0^+) - f(0^-)).$$

En conclusión, a la derecha de 0, las sumas parciales S_n difieren del valor de f en aproximadamente un 9% del valor del salto.

2. Integración y derivación de series de Fourier

Necesitaremos el siguiente resultado, que dejamos como ejercicio.

EJERCICIO 4.4. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y acotado y sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua a trozos. Sea $x_o \in I$ y sea $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_{x_o}^x f(t) dt.$$

Demostrar que F es continua en I y que F posee derivadas laterales en cada punto de I .

En general, una serie infinita puede ser integrada término a término, solamente cuando es uniformemente convergente. Sin embargo para series de Fourier la integración término a término es posible, más precisamente, se tiene.

TEOREMA 4.5. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de período 2π , continua a trozos en $[0, 2\pi]$, con serie de Fourier

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Entonces, para $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple

$$\int_a^b f(t) dt = \frac{a_o}{2}(b-a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(\sin kb - \sin ka) - b_k(\cos kb - \cos ka)}{k}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea F la función definida por

$$F(x) = \int_0^x \left(f(t) - \frac{a_o}{2} \right) dt.$$

Por el Ejercicio 4.4, F es continua y posee derivadas laterales en cada punto de la recta, más aún, por la Proposición 1.11

$$\begin{aligned}
 F(x + 2\pi) &= \int_0^{x+2\pi} \left(f(t) - \frac{a_o}{2} \right) dt \\
 &= \int_0^x \left(f(t) - \frac{a_o}{2} \right) dt + \int_x^{x+2\pi} \left(f(t) - \frac{a_o}{2} \right) dt \\
 &= F(x) + \int_0^{2\pi} \left(f(t) - \frac{a_o}{2} \right) dt \\
 &= F(x) + \int_0^{2\pi} f(t) dt - \pi a_o \\
 &= F(x).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto F tiene período 2π .

Por el Teorema 2.4 la serie de Fourier de F converge a F en cada punto de la recta, es decir, si A_k y B_k son los coeficientes de Fourier de F , tenemos que, para cada $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \frac{A_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos kx + B_k \sin kx.$$

Calculemos A_k y B_k . Integrando por partes obtenemos que, para $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
 A_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \cos(kx) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[F(x) \frac{\sen kx}{k} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{k\pi} \int_0^{2\pi} \left(f(x) - \frac{a_o}{2} \right) \sen kx dx \\
 &= -\frac{b_k}{k},
 \end{aligned}$$

de manera análoga se obtiene

$$B_k = \frac{a_k}{k}.$$

Por lo tanto

$$F(x) = \frac{A_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \sen kx - b_k \cos kx}{k},$$

de donde

$$(4.1) \quad \int_0^x f(t) dt = \frac{a_o x}{2} + \frac{A_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \sen kx - b_k \cos kx}{k}.$$

Para obtener el resultado evaluamos la fórmula anterior en $x = b$, en $x = a$ y restamos.

□

OBSERVACIÓN 4.6. Notar que en el Teorema anterior no se supone la convergencia de la serie de Fourier de f .

OBSERVACIÓN 4.7. Es importante destacar que la conclusión del Teorema anterior se puede expresar de la siguiente manera

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \frac{a_o}{2} dt + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_a^b \cos kt dt + b_k \int_a^b \sin kt dt,$$

es decir, la serie se puede integrar término a término.

COROLARIO 4.8. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de período 2π , continua a trozos en $[0, 2\pi]$, con serie de Fourier

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

entonces la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}$$

converge.

DEMOSTRACIÓN. Substituir $x = 0$ en la fórmula (4.1). □

OBSERVACIÓN 4.9. Notar que de la fórmula (4.1) sigue que

$$\frac{A_o}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}.$$

EJERCICIO 4.10.

(i) Demostrar que la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kx}{\ln k}$$

converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Demostrar que no existe ninguna función continua a trozos y de período 2π cuya serie de Fourier sea

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kx}{\ln k}.$$

EJERCICIO 4.11. Demostrar que

$$\frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin kx}{k}$$

para $-\pi < x < \pi$.

TEOREMA 4.12. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de período 2π , continua a trozos en $[0, 2\pi]$, con serie de Fourier

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx.$$

Entonces, para $-\pi < x < \pi$,

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-b_k \cos kx + (a_k + (-1)^{k+1} a_o) \operatorname{sen} kx}{k}.$$

DEMOSTRACIÓN. Para obtener el resultado basta substituir el valor de $A_o/2$ (ver Observación 4.9) y el desarrollo de $x/2$ (ver Ejercicio 4.11) en la fórmula 4.1.

□

TEOREMA 4.13. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, de período 2π con serie de Fourier

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx.$$

Si f' es continua a trozos, entonces la serie de Fourier de f' es

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(b_k \cos kx - a_k \operatorname{sen} kx),$$

es decir, la serie de Fourier de f' se obtiene derivando término a término la serie de Fourier de f .

DEMOSTRACIÓN. Sean a'_k y b'_k los coeficientes de Fourier de f' . Entonces

$$a'_o = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(x) dx = f(2\pi) - f(0) = 0,$$

$$\begin{aligned} a'_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(x) \cos kx dx \\ &= \frac{1}{\pi} [f(x) \cos kx]_0^{2\pi} + k \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} kx dx \\ &= kb_k. \end{aligned}$$

De igual manera se obtiene

$$b'_k = -ka_k.$$

□

3. Orden de magnitud de los coeficientes de Fourier

TEOREMA 4.14. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de período 2π , diferenciable, con serie de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx,$$

y f' es continua a trozos, entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} k b_k = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. El resultado sigue del Teorema 4.13 y del Corolario 1.24 aplicado a f' . \square

COROLARIO 4.15. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de período 2π , p veces diferenciable, con serie de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx,$$

y $f^{(p)}$ es continua a trozos, entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k^p a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} k^p b_k = 0.$$

COROLARIO 4.16. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de período 2π , dos veces diferenciable, con serie de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx,$$

y $f^{(2)}$ es continua a trozos, entonces la serie de Fourier de f converge uniformemente a f en \mathbb{R} .

DEMOSTRACIÓN. Por el Corolario 4.15 tenemos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k^2 a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} k^2 b_k = 0.$$

De lo anterior se deduce fácilmente que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| < \infty.$$

Del teorema M_n de Weierstrass sigue que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx$$

converge absoluta y uniformemente en \mathbb{R} .

De lo anterior y el Corolario 2.15 se obtiene el resultado. \square

4. Ejercicios adicionales

- (1) Partiendo del desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x) = \frac{x}{2}$ para $-\pi < x < \pi$ (Ejercicio 4.11), hallar el desarrollo de Fourier de la función $f(x) = x^2$ para $-\pi < x < \pi$.
- (2) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de período 2π , tres veces diferenciable. Demostrar que si $f^{(3)}$ es continua a trozos, entonces la serie de Fourier de f' converge uniformemente a f' en \mathbb{R} . ¿Puede generalizar el resultado anterior?

CAPÍTULO 5

Casos más generales

1. Notación compleja

Muchas de las operaciones con funciones trigonométricas se simplifican al pasar a los números complejos, usando la fórmula de Euler

$$(5.1) \quad e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta.$$

De la fórmula de Euler se obtiene

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\ \operatorname{sen} \theta &= \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \end{aligned}$$

EJERCICIO 5.1. Deducir la fórmula de sumación que aparece en la Proposición 1.25 a partir de la fórmula para la suma de una progresión geométrica y de la igualdad

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$$

A continuación enunciamos algunos resultados que pueden ser verificados sin mayores dificultades por el estudiante familiarizado con el manejo de números complejos.

Si en un polinomio trigonométrico de la forma

$$P(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n \alpha_k \cos kx + \beta_k \operatorname{sen} kx,$$

hacemos la substitución

$$\cos kx = \frac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx}) \quad \operatorname{sen} kx = \frac{1}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx}),$$

obtenemos

$$P(x) = \sum_{k=-n}^n \gamma_k e^{ikx},$$

donde los números complejos γ_k están relacionados con los números α_o , α_k y β_k por la ecuaciones

$$\begin{aligned}\gamma_o &= \frac{1}{2}\alpha_o, \\ \gamma_k &= \frac{1}{2}(\alpha_k - i\beta_k), \\ \gamma_{-k} &= \frac{1}{2}(\alpha_k + i\beta_k),\end{aligned}$$

para $k = 1, \dots, n$. También se tiene que

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \gamma_k + \gamma_{-k}, \\ \beta_k &= i(\gamma_k - \gamma_{-k}).\end{aligned}$$

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de período 2π , integrable en el intervalo $[0, 2\pi]$, entonces su serie de Fourier es igual a

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx},$$

donde

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

En este caso la identidad de Parseval queda así:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2.$$

2. Funciones de período arbitrario

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de período $2T$ ($T > 0$), si definimos $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\varphi(x) = f\left(\frac{Tx}{\pi}\right),$$

entonces φ tiene período 2π .

Este cambio de variable permite trasladar, en forma muy natural y sencilla, los resultados que hemos obtenido para funciones de período 2π a funciones de período $2T$.

Una función de período $2T$, integrable en el intervalo $[0, 2T]$, tiene una serie de Fourier (generalizada) de la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{T}\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{T}\right),$$

donde

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{T}\right) dx \quad (k = 0, 1, \dots),$$

$$b_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{T}\right) dx \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Los resultados sobre convergencia, integración, diferenciabilidad, etc... se extienden en forma completamente natural a funciones de período $2T$ con el tipo de expansión que acabamos de señalar.

EJERCICIO 5.2. Escribir la fórmula de Parseval para funciones de período $2T$.

3. Desarrollo en serie de cosenos y en serie de senos

DEFINICIÓN 5.3. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo simétrico con respecto al origen y sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función.

Se dice que f es par si

$$f(x) = f(-x) \quad \text{para todo } x \in I$$

y se dice que f es impar si

$$f(x) = -f(-x) \quad \text{para todo } x \in I.$$

EJERCICIO 5.4. Sea f una función de período $2T$, integrable en el intervalo $[0, 2T]$, con serie de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{T}\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{T}\right).$$

Demostrar que si f es par entonces

$$b_k = 0 \quad \text{para } k = 1, \dots, n,$$

y además

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{T}\right) dx \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Demostrar que si f es impar entonces

$$a_k = 0 \quad \text{para } k = 0, \dots, n,$$

y además

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi x}{T} \right) dx \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Supongamos que tenemos una función f , definida en un intervalo de la forma $[0, T]$, donde $T > 0$.

Si definimos

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0, T], \\ f(-x) & \text{si } x \in [-T, 0], \end{cases}$$

entonces g es una extensión par de f al intervalo $[-T, T]$. La función g tiene una extensión de período $2T$ a toda la recta. La expansión de Fourier de g es lo que se conoce como el desarrollo en serie de cosenos de f .

Si definimos

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0, T], \\ -f(-x) & \text{si } x \in [-T, 0], \end{cases}$$

entonces h es una extensión impar de f al intervalo $[-T, T]$. La función h tiene una extensión de período $2T$ a toda la recta (más precisamente la restricción de h al intervalo $[-T, T]$). La expansión de Fourier de h es lo que se conoce como el desarrollo en serie de senos de f .

Del Ejercicio 5.4 sigue que si $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable, entonces su desarrollo en serie de cosenos es

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \left(\frac{k\pi x}{T} \right),$$

donde

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos \left(\frac{k\pi x}{T} \right) dx \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Su desarrollo en serie de senos es

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi x}{T} \right),$$

donde

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi x}{T} \right) dx \quad (k = 1, 2, \dots).$$

El lector no debe encontrar dificultad en extender los resultados sobre convergencia, integración, diferenciabilidad, etc. a los desarrollos en serie de cosenos y en serie de senos.

4. Ejercicios adicionales

(1) Demostrar que

$$\frac{1}{1^2 3^2} + \frac{1}{3^2 5^2} + \frac{1}{5^2 7^2} + \dots = \frac{\pi^2 - 8}{16}.$$

Indicación: Desarrollar $f(x) = \operatorname{sen} x$, $0 \leq x \leq \pi$ en serie de cosenos.

(2) Desarrollar la función $f(x) = x$, $0 < x < 2$, en serie de cosenos y en serie de senos.

(3) Demostrar que, para $0 \leq x \leq \pi$, se cumplen las siguientes igualdades:

$$(a) \quad x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\cos 2x}{1^2} + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \dots \right).$$

$$(b) \quad x(\pi - x) = \frac{8}{\pi} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{1^3} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3^3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5^3} + \dots \right).$$

(4) Utilizar el ejercicio anterior para demostrar que

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$(b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

$$(c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

(5) Demostrar que

$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{11^3} - \dots = \frac{3\pi^3\sqrt{2}}{16}.$$

CAPÍTULO 6

Aplicación a la resolución de ecuaciones en derivadas parciales

1. Introducción

La idea básica de las series de Fourier es que, una amplia variedad de funciones periódicas se puede expresar como una suma de funciones trigonométricas simples, (senos y cosenos) con un período común.

Esta idea aparece en forma natural en el estudio de fenómenos astronómicos periódicos. Ya los Babilonios usaban una forma primitiva de series de Fourier para la predicción de eventos relacionados con los astros.

La historia más reciente de las series de Fourier comienza con D'Alembert en el año 1747, quien estudiaba el problema de la descripción de la oscilación de una cuerda de violín, para lo cual debía resolver la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

con ciertas condiciones de borde.

La contribución de Fourier comienza en el año 1807, cuando estudia el problema de la transmisión del calor, que está asociado a la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

En su libro *Théorie Analytique de la Chaleur* (1822) aparece un intento serio de demostración de que toda función periódica y suave a trozos puede ser expresada como una serie trigonométrica. Las pruebas rigurosas y precisas de este hecho fueron dadas después por Dirichlet (1829) y por Riemann (1867).

A continuación vamos a considerar la ecuación de la cuerda vibrante y la ecuación del calor en dos situaciones particularmente sencillas y veremos cómo el método de separación de variables, combinado con el método de expansión en series trigonométricas, permite hallar la solución de estas ecuaciones.

2. Ecuación de la cuerda vibrante

2.1. Planteamiento del problema.

Consideremos una cuerda de longitud L , que se encuentra fija en sus extremos. Si esta cuerda realiza un movimiento de vibración en un plano, entonces este movimiento se puede describir mediante una función de dos variables $u(x, t)$ de la siguiente manera: Sea xu el plano en el que vibra la cuerda, supongamos que la posición de equilibrio de la cuerda queda a lo largo del eje x . La función $u(x, t)$ tiene por dominio el conjunto $\{(x, t) : 0 \leq x \leq L, t \geq 0\}$ y para cada $t \geq 0$ el gráfico de la función $x \mapsto u(x, t)$ es la forma de la cuerda en el instante t . La siguiente figura nos ilustra esta situación.

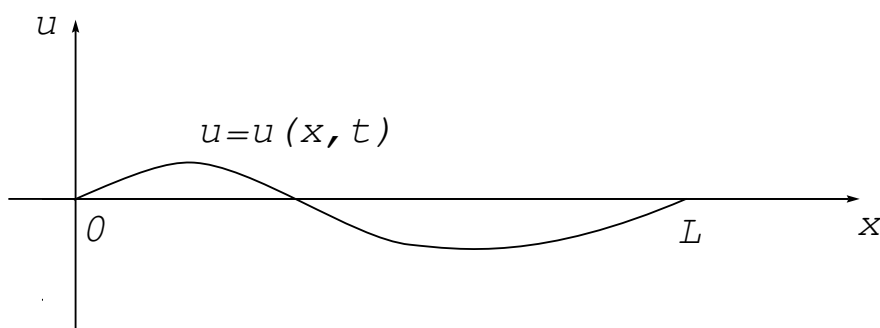


FIGURA 6.1.

Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones ideales:

- (a) La amplitud de la cuerda es pequeña y cada punto de la misma se mueve solamente en dirección vertical.
- (b) Todas las fuerzas de fricción, tanto internas como externas, pueden despreciarse.
- (c) La masa de la cuerda, por unidad de longitud, es pequeña en relación con la tensión en la misma, por lo que la fuerza de gravedad puede ser despreciada.

Entonces la función u , que describe el movimiento de la cuerda, satisface la ecuación en derivadas parciales

$$(6.1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

donde a es una constante positiva, que depende de la tensión y otras características físicas de la cuerda.

Como aplicación de lo que hemos estudiado de series de Fourier, vamos a resolver la ecuación (6.1) sujeta a las condiciones de borde:

$$(6.2) \quad \begin{cases} u(0, t) = u(L, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \end{cases}$$

donde f y g se suponen funciones conocidas.

La interpretación física es sencilla: tal como señalamos anteriormente la función $u(x, t)$ describe el movimiento de una cuerda ideal de longitud L , cuya posición de equilibrio coincide con el eje x y cuyos extremos se encuentran fijos en $x = 0$ y en $x = L$.

Suponemos que la forma inicial de la cuerda es conocida y está dada por el gráfico de f , también supondremos conocida la velocidad inicial de cada punto de la cuerda y que está dada por g .

2.2. Separación de variables.

Vamos a comenzar por buscar soluciones no triviales de la ecuación (6.1) que tengan la forma

$$u(x, t) = \psi(x)\phi(t)$$

y que satisfagan

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad t \geq 0.$$

En este caso tendremos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \psi''(x)\phi(t) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \psi(x)\phi''(t).$$

Substituyendo en (6.1) obtenemos

$$\psi''(x)\phi(t) = \frac{1}{a^2}\psi(x)\phi''(t),$$

por lo tanto

$$(6.3) \quad \frac{\psi''(x)}{\psi(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{\phi''(t)}{\phi(t)},$$

siempre que $\psi(x)\phi(t) \neq 0$. El primer miembro de la ecuación (6.3) sólo depende de x y el segundo miembro sólo depende de t , por lo tanto cada uno de los miembros de esta ecuación

tiene que ser constante. Si llamamos λ a esta constante, obtenemos que la ecuación (6.3) equivale al par de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$(6.4) \quad \begin{aligned} \psi''(x) - \lambda\psi(x) &= 0, \\ \phi''(t) - \lambda a^2\phi(t) &= 0. \end{aligned}$$

Analicemos primero la ecuación

$$(6.5) \quad \psi''(x) - \lambda\psi(x) = 0.$$

Como $u(0, t) = u(L, t) = 0$ para $t \geq 0$, se debe cumplir que $\psi(0) = \psi(L) = 0$.

Consideraremos tres casos: $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ y $\lambda < 0$.

Si $\lambda > 0$ entonces la solución general de la ecuación (6.5) es

$$\psi(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x},$$

donde C_1 y C_2 son constantes reales. Es fácil verificar que si se satisface la condición $\psi(0) = \psi(L) = 0$ entonces $C_1 = C_2 = 0$. Luego, en este caso, sólo obtenemos la solución trivial.

Si $\lambda = 0$ entonces la solución general de la ecuación (6.5) es

$$\psi(x) = C_1 + C_2 x,$$

donde C_1 y C_2 son constantes reales. Al igual que en el caso previo, es fácil verificar que si se satisface la condición $\psi(0) = \psi(L) = 0$ entonces $C_1 = C_2 = 0$. Luego, en este caso, sólo obtenemos la solución trivial.

Si $\lambda < 0$ entonces la solución general de la ecuación (6.5) es

$$(6.6) \quad \psi(x) = C_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x),$$

donde C_1 y C_2 son constantes reales. Como $\psi(0) = 0$ tiene que ser $C_1 = 0$. Como $\psi(L) = 0$ tiene que ser $C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}L) = 0$, por lo tanto para que la solución no sea trivial se debe cumplir

$$\operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}L) = 0,$$

de donde

$$(6.7) \quad \lambda = -\frac{k^2\pi^2}{L^2},$$

para algún entero positivo k .

De la solución general (6.6) obtenemos que, para cada entero positivo k , la función ψ_k definida por

$$\psi_k(x) = \gamma_k \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi}{L} x \right),$$

donde γ_k es una constante real, es una solución de la ecuación (6.5).

Reemplazando el valor de λ , dado en (6.7), en la segunda ecuación de (6.4) obtenemos

$$\phi''(t) + \frac{k^2\pi^2}{L^2} a^2 \phi(t) = 0.$$

La solución general de esta ecuación es

$$\phi_k(t) = \alpha_k \cos \left(\frac{k\pi}{L} at \right) + \beta_k \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi}{L} at \right),$$

donde α_k y β_k son constantes reales.

En conclusión, para cada entero positivo k , tenemos una solución de la ecuación (6.1) de la forma

$$u_k(x, t) = \left(A_k \cos \left(\frac{k\pi}{L} at \right) + B_k \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi}{L} at \right) \right) \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi}{L} x \right),$$

donde A_k y B_k son constantes reales.

Supongamos que la solución de la ecuación (6.1) que satisface las condiciones (6.2), se puede expresar en la forma

$$(6.8) \quad u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t)$$

y supongamos también que es posible derivar la serie término a término.

Entonces tendríamos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, 0) = f(x)$$

y que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial u_k}{\partial t}(x, 0) = g(x),$$

es decir

$$(6.9) \quad \sum_{k=1}^{\infty} A_k \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi}{L} x \right) = f(x)$$

$$(6.10) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{L} a B_k \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi}{L} x \right) = g(x)$$

De la fórmula para el desarrollo en serie de senos de una función (ver Sección 3 del Capítulo 5), obtenemos

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi x}{L} \right) dx$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi x}{L} \right) dx.$$

2.3. Validez de la solución.

Los resultados sobre convergencia y diferenciación término a término de series de Fourier, que hemos establecido en la Sección 2 del Capítulo 4, se pueden extender a series de dos variables de la forma (6.8) y se puede probar que, bajo ciertas hipótesis sobre las funciones f y g , la serie (6.8) converge a una solución de la ecuación (6.1). Más precisamente se puede probar el siguiente resultado (los detalles se pueden encontrar en [4]).

TEOREMA 6.1. *Sea L un número real positivo y sean $f, g : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones tales que*

(i) f, f' y f'' son continuas en $[0, L]$ y

$$f(0) = f''(0) = f(L) = f''(L) = 0.$$

(ii) g y g' son continuas en $[0, L]$ y

$$g(0) = g(L) = 0.$$

Para $k \geq 1$ sean

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi x}{L} \right) dx$$

$$B_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi x}{L} \right) dx.$$

Entonces la serie

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \left(\frac{k\pi}{L} at \right) + B_k \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi}{L} at \right) \right) \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi}{L} x \right)$$

converge uniforme y absolutamente a una solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

con condiciones de borde

$$\begin{cases} u(0, t) = u(L, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x). \end{cases}$$

3. Ecuación del calor

3.1. Planteamiento del problema.

Consideremos una barra homogénea de longitud L , delgada y aislada en forma tal que su calor no puede perderse a través de su superficie. Supongamos además que la temperatura de la barra es constante en cada una de sus secciones transversales. Entonces la temperatura en la barra se puede describir mediante una función $u(x, t)$, donde $0 \leq x \leq L$ y $t \geq 0$.

Se puede probar que la función $u(x, t)$ satisface la ecuación

$$(6.11) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial u}{\partial t},$$

donde a es una constante positiva que depende de la naturaleza del material.

Vamos a resolver la ecuación (6.11) sujeta a las condiciones de borde

$$(6.12) \quad \begin{cases} u(0, t) = u(L, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), \end{cases}$$

donde f es una función que se supone conocida.

La interpretación física es la siguiente: Vamos a describir la distribución de temperatura en un barra, cuyos extremos se mantienen a temperatura constante igual a 0 y cuya distribución inicial de temperatura está dada por la función f .

3.2. Separación de variables.

Al igual que en el ejemplo anterior comenzamos buscando soluciones no triviales de la ecuación (6.11) que tengan la forma

$$u(x, t) = \psi(x)\phi(t)$$

y que satisfagan

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad t \geq 0.$$

En este caso tendremos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \psi''(x)\phi(t) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x)\phi'(t).$$

Substituyendo en (6.11) obtenemos

$$\psi''(x)\phi(t) = a^2\psi(x)\phi'(t),$$

por lo tanto

$$(6.13) \quad \frac{\psi''(x)}{\psi(x)} = a^2 \frac{\phi'(t)}{\phi(t)},$$

siempre que $\psi(x)\phi(t) \neq 0$.

Al igual que en el ejemplo de la cuerda se prueba que cada uno de los miembros de esta ecuación tiene que ser constante. Si llamamos λ a esta constante, obtenemos que la ecuación (6.13) equivale al par de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$(6.14) \quad \begin{aligned} \psi''(x) - \lambda\psi(x) &= 0, \\ \phi'(t) - \frac{\lambda}{a^2}\phi(t) &= 0. \end{aligned}$$

Con consideraciones similares a las correspondientes al caso de la cuerda se obtiene que para que la solución no sea trivial debe ser $\lambda < 0$ y que ψ tiene la forma

$$(6.15) \quad \psi(x) = C_1 \cos(\sqrt{-\lambda} x) + C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda} x),$$

donde C_1 y C_2 son constantes reales. Como $\psi(0) = 0$ tiene que ser $C_1 = 0$. Como $\psi(L) = 0$ tiene que ser $C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda} L) = 0$, luego

$$\operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda} L) = 0,$$

de donde

$$(6.16) \quad \lambda = -\frac{k^2\pi^2}{L^2},$$

para algún entero positivo k .

De la solución general (6.15) obtenemos que, para cada entero positivo k , la función ψ_k definida por

$$\psi_k(x) = \gamma_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L} x\right),$$

donde γ_k es una constante real, es una solución de la primera ecuación de (6.14).

Reemplazando el valor de λ , dado en (6.16), en la segunda ecuación de (6.14) obtenemos

$$\phi'(t) + \frac{k^2\pi^2}{L^2a^2}\phi(t) = 0.$$

La solución general de esta ecuación es

$$\phi_k(t) = \alpha_k \exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{L^2a^2}t\right)$$

donde α_k es una constante real.

En conclusión, para cada entero positivo k , tenemos una solución de la ecuación (6.11) de la forma

$$u_k(x, t) = A_k \exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{L^2a^2}t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right),$$

donde A_k es una constante real.

Supongamos que la solución de la ecuación (6.11) que satisface las condiciones (6.12), se puede expresar en la forma

$$(6.17) \quad u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t)$$

Entonces tendríamos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, 0) = f(x),$$

es decir

$$(6.18) \quad \sum_{k=1}^{\infty} A_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right) = f(x)$$

De la fórmula para el desarrollo en serie de senos de una función (ver Sección 3 del Capítulo 5), obtenemos

$$(6.19) \quad A_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx.$$

Al igual que en el caso de la cuerda se puede probar que, si los coeficientes A_k se definen mediante la fórmula (6.19) y f satisface ciertas condiciones, la serie (6.17) converge a una solución de la ecuación (6.11), que satisface las condiciones de borde (6.12) (ver [4] para más detalles).

Bibliografía

- [1] R. COURANT Y F. JOHN. *Introduction to Calculus and Analysis, Volume I*. Wiley, 1965. 33
- [2] H. DYM Y H.P. MCKEAN. *Fourier Series and Integrals*. Academic Press 1972. 33
- [3] J. FOURIER. *The Analytical Theory of Heat*. Traducido al inglés por A. Freeman. Cambridge University Press, 1878. Reimpreso por Dover, 1955. Obra Original: *Théorie Analytique de la Chaleur*, 1822.
- [4] D. KREIDER, R. KULLER, D. OTSBERG Y F. PERKINS. *Introducción al Análisis Lineal, Parte 2*. Fondo Educativo Interamericano, 1971. 54, 57
- [5] M. SPIEGEL. *Análisis de Fourier*. Serie Schaum. McGraw-Hill, 1977.
- [6] G. TOLSTOV. *Fourier Series*. Dover, 1976.

Índice

- Bessel, desigualdad de, 12, 29
- Cauchy-Schwartz, desigualdad de, 27
- Cesaro, 20
- derivación de series de Fourier, 36
- Dirichlet, Núcleo de, 17
- ecuación de la cuerda, 50
- ecuación del calor, 55
- Fejer
 - Núcleo de , 21
 - Teorema de, 22
- Fourier
 - coeficientes de, 6
 - serie de , 7
- función
 - continua a trozos, 18
 - impar, 45
 - par, 45
 - periódica, 5
- Gibbs, Fenómeno de, 33
- integración de series de Fourier, 36
- Parseval, Identidad de, 11, 31
- período, 5
 - fundamental, 6
 - polinomio trigonométrico, 3
 - grado, 3
- Riemann-Lebesgue, Lema de, 12
- separación de variables, 51, 55
- serie de cosenos, 46
- serie de senos, 47
- Weierstrass, Teorema de, 24