UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
POSTGRADO EN MATEMÁTICA

DILATACIÓN UNITARIA DE SEMIGRUPOS LOCALES DE CONTRACCIONES Y APLICACIONES A TRAVÉS DE TÉCNICAS DE DISCRETIZACIÓN

Autor: MSc. Angel Padilla.
Tutor: Dr. Ramón Bruzual.

Tesis Doctoral presentada ante la ilustre Universidad Central de Venezuela para optar al título de Doctor en Ciencias, Mención Matemática.

Caracas, Venezuela

Junio 2013

Dedicatoria

Le dedico este trabajo a Isaí Samuel, mi hijo amado.

Agradecimiento

En primer lugar le agradezco al Padre, al Hijo y al Espíritu Santo por llenarme de sabiduría y conocimiento. Gracias Padre Celestial por todas las puertas que abriste para que culminara esta etapa de mi vida.

En segundo lugar le agradezco a mi tutor Ramón Bruzual por todo su apoyo y dedicación, y por ser mi mentor durante todo este tiempo. Gracias a la profesora Marisela Domínguez por sus sugerencias en todo el desarrollo de esta tesis.

En tercer lugar le agradezco a mi madre, padre, hermanos, sobrinos, suegros y cuñados por su apoyo incondicional. A mi amada esposa Yenny Cerveleón le doy gracias infinitas por todo su amor brindado, por ser mi ayuda idónea.

En cuarto lugar le agradezco al Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico de la Universidad Central de Venezuela (CDCH-UCV) por haber financiado mi doctorado.

Índice general

Resumen

Se consideran familias multiplicativas de contracciones en un espacio de Hilbert separable, con parámetro en los racionales diádicos no negativos y menores que 1 y se da un resultado de dilatación para este tipo de familias. A partir de este resultado y, usando técnicas de discretización del parámetro, se prueba que todo semigrupo local de contracciones fuertemente continuo en un espacio de Hilbert separable, con parámetro en los elementos no negativos y menores que 1, de un subgrupo aditivo de los números reales que contiene a los racionales diádicos, posee una dilatación unitaria con parámetro en el conjunto de los números reales y a valores en un espacio de Hilbert mas grande. Como aplicación se dan resultados de extensión de funciones definidas positivas en la recta, que generalizan el teorema de extensión de Kreĭn.

También se obtienen resultados análogos de dilatación para familias multiplicas de contracciones a dos parámetros, uno de los cuales varía en un grupo abeliano y el otro en un subconjunto de la recta real. Como aplicación se da un resultado de extensión de funciones definidas positivas en una banda.

Capítulo 1

Preliminares

El objetivo de éste capítulo es presentar algunas definiciones, teoremas y proposiciones que servirán de herramienta para la lectura de los siguientes capítulos.

A continuación se fija algo de la notación que se utilizará en el desarrollo de este trabajo.

Como es usual $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}_+, \mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{C}$ representan el conjunto de los números naturales, enteros, racionales, racionales positivos, reales, reales positivos y complejos, respectivamente.

En lo que sigue $\mathcal{H}$ será un espacio de Hilbert (salvo que se indique lo contrario se supondrá que $\mathcal{H}$ es complejo) con producto interno $\langle , \rangle_{\mathcal{H}}$ y norma $\| \|_{\mathcal{H}}$.

Si no hay lugar a confusión se usará simplemente $\langle , \rangle$ y $\| \|$.

1. Distintos tipos de convergencia en espacios de Hilbert.

Definición 1.1. Sean $\{h_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{H}$ una sucesión y $h \in \mathcal{H}$.

(i) $\{h_n\}_{n\geq 1}$ *converge fuertemente* a h si

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|h_n - h\| = 0.$$

(ii) $\{h_n\}_{n\geq 1}$ *converge débilmente* a h si

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \langle h_n, g\rangle = \langle h, g\rangle$$

para todo $g \in \mathcal{H}$.

De la desigualdad de Cauchy Schwartz se obtiene que la convergencia fuerte implica la convergencia débil, sin embargo el recíproco no es cierto como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2. Sea $l_2 = \left\{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\right\}$.

Considérese la sucesión

$$e^{(n)} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$$

donde el 1 se encuentra en el n-ésimo lugar.

Evidentemente $e^{(n)} \in l_2$ y $\|e^{(n)}\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto $e^{(n)}$ no puede converger fuertemente a 0. Sin embargo

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \langle e^{(n)}, h \rangle = 0$$

para todo $h \in l_2$.

Definición 1.3. Una sucesión $\{h_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{H}$ es *débilmente de Cauchy* si la sucesión $\{\langle h_n, g \rangle\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy para todo $g \in \mathcal{H}$.

Proposición 1.4. *Todo espacio de Hilbert es débilmente completo, es decir toda sucesión débilmente de Cauchy es débilmente convergente.*

Demostración.

Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión débilmente de Cauchy en $\mathcal{H}$, entonces la sucesión

$$\{\langle h_n, g \rangle\}_{n=1}^{\infty}$$

es de Cauchy para toda $g \in \mathcal{H}$.

Como $\mathbb{C}$ es completo se tiene que la sucesión $\{\langle h_n, g \rangle\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente para toda $g \in \mathcal{H}$.

Dado $g \in \mathcal{H}$, sea

$$L(g) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \langle g, h_n \rangle.$$

Se tiene que L es un funcional lineal y acotado, por ser límite fuerte de funcionales lineales y acotados.

Por el teorema de representación de Riesz existe un único $h \in \mathcal{H}$ tal que

$$L(g) = \langle g, h \rangle,$$

por lo tanto

$$\langle g, h \rangle = \lim_{n \longrightarrow \infty} \langle g, h_n \rangle.$$

De donde $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente a h. $\square$

Proposición 1.5. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ una sucesión acotada, entonces $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ contiene una subsucesión débilmente convergente.*

Demostración.

Sea $\{h_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ denso.

Por la desigualdad de Cauchy Schwartz se tiene que la sucesión $\{\langle g_n, h_1\rangle\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ es acotada y por lo tanto contiene una subsucesión convergente $\{\langle g_{1n}, h_1\rangle\}_{n=1}^{\infty}$.

Análogamente $\{\langle g_{1n}, h_2\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ contiene una subsucesión convergente $\{\langle g_{2n}, h_2\rangle\}_{n=1}^{\infty}$.

Continuando de esta manera se obtiene una subsucesión convergente $\{\langle g_{kn}, h_k\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ la sucesión definida por $f_n = g_{nn}$.

A partir del lugar k, la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{g_{kn}\}_{n=1}^{\infty}$. Por lo tanto la sucesión

$$\{\langle f_n, h_k\rangle\}_{n=1}^{\infty}$$

converge para todo $k \in \mathbb{N}$.

Por otro lado se tiene que existe $M > 0$ tal que $\|f_n\| \leq M$ para todo n.

Sean $h \in \mathcal{H}$ y $\varepsilon > 0$. Como $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ es denso en $\mathcal{H}$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|h - h_{k_0}\| < \frac{\varepsilon}{3M}$.

Además, la sucesión

$$\{\langle f_n, h_{k_0}\rangle\}_{n=1}^{\infty}$$

converge.

Por lo tanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$ entonces

$$|\langle f_n - f_m, h_{k_0}\rangle| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Luego, si $n, m \geq N$ se tiene que

$$\begin{aligned}
|\langle f_n, h\rangle - \langle f_m, h\rangle| &= |\langle f_n, h - h_{k_0}\rangle + \langle f_n, h_{k_0}\rangle - (\langle f_m, h - h_{k_0}\rangle + \langle f_m, h_{k_0}\rangle)| \\
&\leq |\langle f_n - f_m, h_{k_0}\rangle| + |\langle f_n, h - h_{k_0}\rangle| + |\langle f_m, h - h_{k_0}\rangle| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \|f_n\|\|h - h_{k_0}\| + \|f_m\|\|h - h_{k_0}\| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

De donde la sucesión $\{\langle f_n, h\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy para todo $h \in \mathcal{H}$.

De la Proposición 1.4 sigue que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente. $\square$

2. Operadores acotados en espacios de Hilbert.

Definición 1.6. Sea $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ decimos que T es un *operador lineal* si

(i) $T(h+g) = T(h) + T(g)$ para todo $h, g \in \mathcal{H}$,

(ii) $T(\lambda h) = \lambda T(h)$ para todo $h \in \mathcal{H}$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Definición 1.7. Sea $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ un operador lineal. Decimos que T es un *operador acotado* cuando existe $M > 0$ tal que

$$\|T(h)\| \leq M\|h\| \quad \text{para todo } h \in \mathcal{H}.$$

Es fácil probar que un operador lineal es acotado si y solo si es continuo.

Definición 1.8. Sea

$$L(\mathcal{H}) = \{T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \text{ tal que } T \text{ es un operador lineal continuo }\}.$$

Proposición 1.9. $L(\mathcal{H})$ *es un espacio vectorial con las operaciones usuales*

$$(\lambda T)(h) = \lambda T(h),$$

$$(T_1 + T_2)(h) = T_1(h) + T_2(h).$$

Definición 1.10. Para $T \in L(\mathcal{H})$ definimos la norma de T por

$$\|T\|_{L(\mathcal{H})} = \sup_{\|h\|=1} \|T(h)\|$$

Observación 1.11. Se puede probar que:

(i) $\|T\|_{L(\mathcal{H})} = \sup_{\|h\|\leq 1} \|T(h)\|$

(ii) $\|T\|_{L(\mathcal{H})} = \sup_{h\neq 0} \dfrac{\|T(h)\|}{\|h\|}$

(iii) $\|T\|_{L(\mathcal{H})} = \text{ínf}\,\{M : \|T(h)\| \leq M\|h\| \text{ para todo } h \in \mathcal{H}\}$

De aquí se deduce que: Si $T \in L(\mathcal{H})$ entonces

$$\|T(h)\| \leq \|T\|_{L(\mathcal{H})}\|h\| \text{ para todo } h \in \mathcal{H}.$$

Proposición 1.12. *Sea $T \in L(\mathcal{H})$, si*

$$\langle T(h), h\rangle = 0 \textit{ para todo } h \in \mathcal{H}$$

entonces $T = 0$.

Demostración.

Sean $h, g \in \mathcal{H}$, por hipótesis

$$\begin{aligned} 0 &= \langle T(h+g), h+g\rangle = \langle T(h) + T(g), h+g\rangle \\ &= \langle T(h), h\rangle + \langle T(h), g\rangle + \langle T(g), h\rangle + \langle T(g), g\rangle \\ &= \langle T(h), g\rangle + \langle T(g), h\rangle . \end{aligned}$$

Es decir

$$\langle T(h), g\rangle = -\langle T(g), h\rangle . \quad (1.1)$$

Como $\mathcal{H}$ es un espacio vectorial complejo, se puede cambiar g por ig, obteniendo que

$$-i\langle T(h), g\rangle = -i\langle T(g), h\rangle . \quad (1.2)$$

De las ecuaciones (1.1) y (1.2) se obtiene que

$$\langle T(h), g\rangle = 0.$$

Si se toma $g = T(h)$, entonces

$$\langle T(h), T(h)\rangle = 0.$$

Por lo tanto $T(h) = 0$ para todo $h \in \mathcal{H}$. $\square$

Observación 1.13. En el caso de un espacio vectorial real la Proposición anterior no es cierta. Por ejemplo, considere una rotación de noventa grados en $\mathbb{R}^2$, es decir $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por

$$T(x, y) = (-y, x).$$

Se tiene que

$$\langle T(x, y), (x, y)\rangle = 0 \text{ para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Sin embargo $T \neq 0$.

Corolario 1.14. *Sean* $S; T \in L(\mathcal{H})$ *tales que*

$$\langle S(h), h\rangle = \langle T(h), h\rangle \ \textit{para todo } h \in \mathcal{H}$$

entonces $S = T$.

Proposición 1.15. *Sean* $\mathcal{H}$ *un espacio de Hilbert separable y* $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L(\mathcal{H})$ *una sucesión de operadores uniformemente acotada. Sea* $\{h_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ *denso. Si* $\{T_n h_k\}_{n=1}^{\infty}$ *converge débilmente para todo* k, *entonces* $\{T_n h\}_{n=1}^{\infty}$ *converge débilmente para todo* $h \in \mathcal{H}$.

Demostración.

Sea $h \in \mathcal{H}$. En virtud de la Proposición 1.4, basta probar que la sucesión $\{T_n h\}_{n=1}^{\infty}$ es débilmente de Cauchy.

Sea $\varepsilon > 0$.

Como $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ es uniformemente acotada existe $M > 0$ tal que $\|T_n\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $g \in \mathcal{H}$. Como $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ denso en $\mathcal{H}$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|h - h_{k_0}\| < \frac{\varepsilon}{3M\|g\|}$.

Además, se tiene que la sucesión

$$\{T_n h_{k_0}\}_{n=1}^{\infty}$$

converge débilmente. Por lo tanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$ entonces

$$|\langle T_n h_{k_0} - T_m h_{k_0}, g\rangle| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Luego, si $n, m \geq N$ se tiene que

$$\begin{aligned}
|\langle T_n h, g\rangle - \langle T_m h, g\rangle| &= |\langle T_n(h-h_{k_0}), g\rangle + \langle T_n h_{k_0}, g\rangle - (\langle T_m(h-h_{k_0}), g\rangle + \langle T_m h_{k_0}, g\rangle)| \\
&\leq |\langle T_n h_{k_0} - T_m h_{k_0}, g\rangle| + |\langle T_n(h-h_{k_0}), g\rangle| + |\langle T_m(h-h_{k_0}), g\rangle| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \|T_n\|\|h-h_{k_0}\|\|g\| + \|T_m\|\|h-h_{k_0}\|\|g\| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

De donde $\{T_n h\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión débilmente de Cauchy. □

3. Adjunto de un operador.

Teorema 1.16. *Si $T \in L(\mathcal{H})$ entonces existe un único operador $T^* \in L(\mathcal{H})$ tal que*

$$\langle T(h), g\rangle = \langle h, T^*(g)\rangle$$

para todo $h, g \in \mathcal{H}$.

Además se tiene que $\|T\| = \|T^*\|$.

Demostración.

Se probará la existencia.

Dado $g \in \mathcal{H}$, sea $\Lambda_g : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ la función definida por

$$\Lambda_g(h) = \langle T(h), g\rangle .$$

Claramente Λ_g es una función lineal. Además

$$|\Lambda_g(h)| = |\langle T(h), g\rangle| \leq \|T(h)\|\|g\| \leq \|T\|\|h\|\|g\|,$$

por lo tanto Λ_g es un funcional lineal continuo.

Por el teorema de representación de Riesz existe un único $\delta_g \in \mathcal{H}$ tal que

$$\Lambda_g(h) = \langle h, \delta_g\rangle .$$

Definiendo $T^* : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ mediante

$$T^*(g) = \delta_g,$$

se obtiene que

$$\langle T(h), g \rangle = \Lambda_g(h) = \langle h, T^*(g) \rangle .$$

Ahora se probará que T^* es lineal.

Sean $h, g_1, g_2 \in \mathcal{H}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ entonces

$$\begin{aligned}
\langle h, T^*(\lambda g_1 + g_2) \rangle &= \langle T(h), \lambda g_1 + g_2 \rangle \\
&= \overline{\lambda} \langle T(h), g_1 \rangle + \langle T(h), g_2 \rangle \\
&= \overline{\lambda} \langle h, T^*(g_1) \rangle + \langle h, T^*(g_2) \rangle \\
&= \langle h, \lambda T^*(g_1) + T^*(g_2) \rangle .
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$T^*(\lambda g_1 + g_2) = \lambda T^*(g_1) + T^*(g_2).$$

T^* es continuo. En efecto, sea $g \in \mathcal{H}$ entonces

$$\|T^*(g)\|^2 = | \langle T^*(g), T^*(g) \rangle | = | \langle T\left(T^*(g)\right), g \rangle | \leq \|T\| \|T^*(g)\| \|g\|.$$

De aquí se obtiene que

$$\|T^*(g)\| \leq \|T\| \|g\|.$$

Luego $T^* \in L(\mathcal{H})$ y $\|T^*\| \leq \|T\|$.

Ahora se probará la igualdad para las normas.

Aplicando lo hecho antes a T^* se obtiene que

$$T^{**} = T,$$

y por lo tanto

$$\|T\| = \|T^{**}\| \leq \|T^*\|.$$

De donde

$$\|T\| = \|T^*\|.$$

La unicidad de T^* se obtiene del siguiente hecho: Si $\langle h, f \rangle = 0$ para todo $h \in \mathcal{H}$ entonces $f = 0$.

□

Definición 1.17. El operador T^* es llamado *el adjunto* de T.

4. Operadores de contracción y unitarios.

$I_{\mathcal{H}}$ denotará el operador identidad en $\mathcal{H}$.

Definición 1.18. Sea $T \in L(\mathcal{H})$, decimos que T es:

(a) Una *contracción* si $\|Th\| \leq \|h\|$, para todo $h \in \mathcal{H}$.

(b) Una *isometría* si $\|Th\| = \|h\|$, para todo $h \in \mathcal{H}$.

(c) *Unitario* si es una isometría sobreyectiva.

Observación 1.19. Sea $T \in L(\mathcal{H})$.

(a) T es una contracción si y sólo si $\langle (I_{\mathcal{H}} - T^*T)h, h\rangle \geq 0$ para todo $h \in \mathcal{H}$, es decir, si $I_{\mathcal{H}} - T^*T$ es un operador positivo.

(b) T es una isometría si y sólo si $T^*T = I_{\mathcal{H}}$.

(c) T es unitario si y sólo si $T^*T = TT^* = I_{\mathcal{H}}$. En este caso $T^{-1} = T^*$.

Proposición 1.20. *Sean $\mathcal{H}_0$ un subespacio denso en $\mathcal{H}$ y $T_0 : \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H}$ una contracción, entonces existe una única contracción $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ que extiende a T_0.*

Demostración.

Sea $h \in \mathcal{H}$. Como $\mathcal{H}_0$ es denso en $\mathcal{H}$ existe una sucesión $\{h_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}_0$ tal que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} h_n = h.$$

Como T_0 es un operador acotado, sigue que

$$\{T_0(h_n)\}_{n=1}^{\infty}$$

es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}$.

Por la completitud de $\mathcal{H}$ existe $g \in \mathcal{H}$ tal que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} T_0(h_n) = g.$$

Sea $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, definido por $T(h) = g$. Es decir

$$T(h) = \lim_{n \longrightarrow \infty} T_0(h_n).$$

Es fácil probar que:

(1) T está bien definido

(2) T es lineal

(3) T es una contracción

(4) $T(h) = T_0(h)$ para todo $h \in \mathcal{H}_0$.

$\square$

5. Distintos tipos de convergencia de operadores en $L(\mathcal{H})$.

Definición 1.21. Sean $\{T_n\}_{n\geq 1} \subset L(\mathcal{H})$ una sucesión y $T \in L(\mathcal{H})$.

(i) $\{T_n\}_{n\geq 1}$ *converge uniformemente* a T si

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|T_n - T\| = 0.$$

(ii) $\{T_n\}_{n\geq 1}$ *converge fuertemente* a T si

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|T_n(h) - T(h)\| = 0$$

para todo $h \in \mathcal{H}$.

(iii) $\{T_n\}_{n\geq 1}$ *converge débilmente* a T si

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \langle T_n(h), g\rangle = \langle T(h), g\rangle$$

para todo $h, g \in \mathcal{H}$.

Proposición 1.22.

(a) *La convergencia uniforme implica la convergencia fuerte.*

(a) *La convergencia fuerte implica la convergencia débil.*

Observación 1.23. Los recíprocos de la proposición anterior no son ciertos, tal como lo muestran los siguientes ejemplos.

(a) La convergencia fuerte no implica la convergencia uniforme.

En $l^2(\mathbb{N})$, para $N \in \mathbb{N}$ sea P_N el operador definido por

$$P_N(\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}) = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N, 0, 0, \ldots\}.$$

Entonces

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P_n(x) = x$$

para todo $x \in l^2(\mathbb{N})$, es decir $\{P_n\}_{n\geq 1}$ converge fuertemente a I (operador identidad en $l^2(\mathbb{N})$).

Sin embargo

$$\|P_n - I\| = 1$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto $\{P_n\}_{n\geq 1}$ no converge uniformemente a I.

(b) La convergencia débil no implica la convergencia fuerte.

En $l^2(\mathbb{N})$, sea S el operador definido por

$$S(\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}) = \{0, x_1, x_2, x_3, \ldots\},$$

entonces

$$S^n(\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}) = \{0, 0, \ldots, 0, x_1, x_2, x_3, \ldots\},$$

donde x_1 se encuentra en el lugar $n+1$ (En el término de la derecha).

Sean $x, y \in l^2(\mathbb{N})$. Se tiene que

$$\langle S^n(x), y\rangle = \langle \{0, 0, \ldots, 0, x_1, x_2, x_3, \ldots\}, \{y_1, y_2, y_3, \ldots\}\rangle = \sum_{k=n}^{\infty} x_{k-n+1} y_{k+1}.$$

De donde

$$\begin{aligned}|\langle S^n(x), y\rangle|^2 &\leq \left(\sum_{k=n}^{\infty} |x_{k-n+1}|^2\right)\left(\sum_{k=n}^{\infty} |y_{k+1}|^2\right)\\ &= \|x\|^2 \left(\sum_{k=n}^{\infty} |y_{k+1}|^2\right).\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \langle S^n(x), y\rangle = 0$$

para todo $x, y \in l^2(\mathbb{N})$, es decir $\{S^n\}_{n\geq 1}$ converge débilmente al operador nulo.

Sin embargo, es imposible que $\lim_{n\longrightarrow\infty} S^n(x)$ sea 0 para todo $x \in l^2(\mathbb{N})$, ya que $\|S(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in l^2(\mathbb{N})$, lo que implica que $\{S^n\}_{n\geq 1}$ no converge fuertemente al operador nulo.

Proposición 1.24. *Sea $\{T_n\}_{n\geq 1} \subset L(\mathcal{H})$ una sucesión de operadores lineales de contracción tal que $\{T_n(h)\}_{n\geq 1}$ converge débilmente para todo $h \in \mathcal{H}$, entonces existe un operador lineal de contracción $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ tal que $\{T_n\}_{n\geq 1}$ converge débilmente a T.*

Demostración.

Para $h \in \mathcal{H}$, sea f_h el límite débil de $\{T_n(h)\}_{n\geq 1}$. Es decir

$$\langle f_h, g\rangle = \lim_{n\longrightarrow\infty} \langle T_n(h), g\rangle \text{ para todo } g \in \mathcal{H}.$$

Sea $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, definido por $T(h) = f_h$. Se probará que T es un operador lineal de contracción.

Sean $h_1, h_2, g \in \mathcal{H}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Por la linealidad de cada T_n se obtiene que

$$\begin{aligned}
\langle T(\lambda h_1 + h_2), g\rangle &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \langle T_n(\lambda h_1 + h_2), g\rangle \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \langle \lambda T_n(h_1) + T_n(h_2), g\rangle \\
&= \lambda \lim_{n\longrightarrow\infty} \langle T_n(h_1), g\rangle + \lim_{n\longrightarrow\infty} \langle T_n(h_2), g\rangle \\
&= \lambda\langle T(h_1), g\rangle + \langle T(h_2), g\rangle \\
&= \langle \lambda T(h_1) + T(h_2), g\rangle.
\end{aligned}$$

luego, $T(\lambda h_1 + h_2) = \lambda T(h_1) + T(h_2)$.

Sea $h \in \mathcal{H}$, de la desigualdad de Cauchy-Schwartz, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|T(h)\|^2 &= |\langle T(h), T(h)\rangle| \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} |\langle T_n(h), T(h)\rangle| \\
&\leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \|T_n\|\|h\|\|T(h)\| \\
&\leq \|h\|\|T(h)\|.
\end{aligned}$$

Por lo tanto T es una contracción. Además $\{T_n\}_{n\geq 1}$ converge débilmente a T, ya que

$$\langle T(h), g\rangle = \lim_{n\longrightarrow\infty} \langle T_n(h), g\rangle, \text{ para todo } h, g \in \mathcal{H}.$$

□

6. Dilatación unitaria de una contracción.

Definición 1.25. Sean $\mathfrak{F}$ un espacio de Hilbert que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado, $A \in L(\mathcal{H})$ y $B \in L(\mathfrak{F})$, se dice que B es una *dilatación* de A si

$$A^n = P_{\mathcal{H}}^{\mathfrak{F}} B^n, \text{ para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

donde $P_{\mathcal{H}}^{\mathfrak{F}}$ es la proyección ortogonal de $\mathfrak{F}$ sobre $\mathcal{H}$.

Si $B_1 \in L(\mathfrak{F}_1)$ y $B_2 \in L(\mathfrak{F}_2)$ son dos dilataciones de A, se dice que B_1 y B_2 son *isomorfas* si existe una transformación unitaria $\varphi : \mathfrak{F}_1 \longrightarrow \mathfrak{F}_2$ tal que

(i) $\varphi\, h = h$, para todo $h \in \mathcal{H}$.
(ii) $B_2 = \varphi\, B_1 \varphi^{-1}$.

La versión discreta del teorema de dilatación de Sz-Nagy establece que toda contracción posee una única dilatación unitaria minimal. En detalle

Teorema 1.26. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ una contracción. Entonces existe un espacio de Hilbert $\mathfrak{F}$ que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y un operador unitario $U \in L(\mathfrak{F})$ tal que*

$$T^n = P_{\mathcal{H}}^{\mathfrak{F}} U^n, \text{ para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

donde $P_{\mathcal{H}}^{\mathfrak{F}}$ es la proyección ortogonal de $\mathfrak{F}$ sobre $\mathcal{H}$.

Si se pide la condición de minimalidad

$$\mathfrak{F} = \bigvee_{n=-\infty}^{\infty} U^n \mathcal{H}$$

entonces U es único, salvo isomorfismo.

La demostración del teorema anterior se puede conseguir en la sección 4 del Capítulo 1 del libro [**20**].

Capítulo 2

Semigrupos de operadores y funciones definidas positivas

En lo que sigue $(\Gamma, +)$ denotará un subgrupo aditivo de $(\mathbb{R}, +)$ y $\Gamma_+ = \Gamma \cap \mathbb{R}_+$.

1. Semigrupos de operadores.

Definición 2.1. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Un *semigrupo de operadores* con parámetro en Γ_+, es una familia de operadores $(T_\omega)_{\omega\in\Gamma_+} \subset L(\mathcal{H})$ que satisface:

(a) $T_{\omega_1+\omega_2} = T_{\omega_1}T_{\omega_2}$ para todo $\omega_1, \omega_2 \in \Gamma_+$.

(b) $T_0 = I_{\mathcal{H}}$.

Se dice que el semigrupo de operadores es de *contracción* si T_ω es una contracción para todo $\omega \in \Gamma_+$.

Definición 2.2. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Un *grupo de operadores* con parámetro en Γ, es una familia de operadores $(U_\omega)_{\omega\in\Gamma} \subset L(\mathcal{H})$ que satisface:

(a) $U_{\omega_1+\omega_2} = U_{\omega_1}U_{\omega_2}$ para todo $\omega_1, \omega_2 \in \Gamma$

(b) $U_0 = I_{\mathcal{H}}$.

Se dice que el grupo de operadores es *unitario* si U_ω es un operador unitario para todo $\omega \in \Gamma$. En este caso,

$$U_\omega^* = U_{-\omega} \text{ para todo } \omega \in \Gamma.$$

Definición 2.3. Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $(U_\omega)_{\omega\in\Gamma} \subset L(\mathcal{H})$ un grupo de operadores. Se dice que $(U_\omega)_{\omega\in\Gamma}$ es:

(a) *Débilmente continuo* si, para cada $h, h' \in \mathcal{H}$, la aplicación $\omega \longmapsto \langle U_\omega h, h'\rangle_{\mathcal{H}}$ de Γ en $\mathbb{C}$ es continua.

(b) *Fuertemente continuo* si, para cada $h \in \mathcal{H}$, la aplicación $\omega \longmapsto U_\omega h$ de Γ en $\mathcal{H}$ es continua.

(c) *Uniformemente fuertemente continuo* si, para cada $h \in \mathcal{H}$, la aplicación $\omega \longmapsto U_\omega h$ de Γ en $\mathcal{H}$ uniformemente continua.

Observación 2.4. Si en la definición anterior, se cambia Γ por Γ_+ y U_ω por T_ω, se tiene la definición de semigrupo de operadores débilmente, fuertemente y uniformemente continuo.

Ejemplo.

Sea $A \in L(\mathcal{H})$ autoadjunto.

Para $t \in \mathbb{R}$ sea $U_t = e^{itA}$.

Entonces $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ es un grupo de operadores unitarios de $\mathbb{R}$ en $L(\mathcal{H})$, fuertemente continuo.

Si el grupo de operadores es unitario, las condiciones de continuidad dadas anteriormente son equivalentes, tal como lo indica el siguiente resultado.

Proposición 2.5. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $(U_\omega)_{\omega\in\Gamma} \subset L(\mathcal{H})$ un grupo de operadores unitarios. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $(U_\omega)_{\omega\in\Gamma}$ *es débilmente continuo en* 0.
(b) $(U_\omega)_{\omega\in\Gamma}$ *es fuertemente continuo en* 0.
(c) $(U_\omega)_{\omega\in\Gamma}$ *es fuertemente continuo.*
(d) $(U_\omega)_{\omega\in\Gamma}$ *es uniformemente fuertemente continuo.*

Demostración.

Como el grupo $(U_\omega)_{\omega\in\Gamma}$ es unitario se tiene que $\|U_\omega\| = 1$ para todo $\omega \in \Gamma$.

$(a) \Longrightarrow (b)$

El resultado es consecuencia de la siguiente igualdad,

$$\|U_\omega h - h\|_{\mathcal{H}}^2 = 2\|h\|_{\mathcal{H}}^2 - 2Re(\langle U_\omega h, h\rangle_{\mathcal{H}}) \quad (h \in \mathcal{H}, \omega \in \Gamma),$$

$(b) \Longrightarrow (c)$

Sean $\varepsilon > 0$, $\omega_0 \in \Gamma$ y $h \in \mathcal{H}$.

Por (b), existe $\delta > 0$ tal que si $\gamma \in \Gamma$ y $|\gamma| < \delta$, se tiene que

$$\|U_\gamma h - h\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon.$$

Luego, si $\omega \in \Gamma$ es tal que $|\omega - \omega_0| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned}\|U_\omega h - U_{\omega_0} h\|_{\mathcal{H}} &= \|U_{\omega_0}(U_{\omega-\omega_0} h - h)\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq \|U_{\omega_0}\| \|U_{\omega-\omega_0} h - h\|_{\mathcal{H}} \\ &= \|U_{\omega-\omega_0} h - h\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon.\end{aligned}$$

(c)$\Longrightarrow$(d)

Sean $\varepsilon > 0$ y $h \in \mathcal{H}$.

Por (c), existe $\delta > 0$ tal que si $\gamma \in \Gamma$ y $|\gamma| < \delta$, entonces

$$\|U_\gamma h - h\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon.$$

Luego si $\omega, \omega' \in \Gamma$ son tales que $|\omega - \omega'| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned}\|U_\omega h - U_{\omega'} h\|_{\mathcal{H}} &= \|U_{\omega'}(U_{\omega-\omega'} h - h)\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq \|U_{\omega'}\| \|U_{\omega-\omega'} h - h\|_{\mathcal{H}} \\ &= \|U_{\omega-\omega'} h - h\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon.\end{aligned}$$

(d)$\Longrightarrow$(a)

Dados $h, h' \in \mathcal{H}$, la aplicación $\omega \longmapsto U_\omega h$ es uniformemente continua en Γ, por lo tanto es continua en 0.

Luego, de la desigualdad de Cauchy-Schwartz, se deduce que la aplicación $\omega \longmapsto \langle U_\omega h, h' \rangle_{\mathcal{H}}$ es continua en 0. □

2. Dilatación unitaria de un semigrupo de contracciones.

Definición 2.6. Sean $\mathcal{H}, \mathfrak{F}$ dos espacios de Hilbert tales que $\mathfrak{F}$ contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado. Sean $(T_\omega)_{\omega \in \Gamma_+} \subset L(\mathcal{H})$ un semigrupo de operadores y $(U_\omega)_{\omega \in \Gamma} \subset L(\mathfrak{F})$ un grupo de operadores. Se dice que $(U_\omega)_{\omega \in \Gamma}$ es una *dilatación* de $(T_\omega)_{\omega \in \Gamma_+}$ si

$$T_\omega = P_{\mathcal{H}}^{\mathfrak{F}} U_\omega, \text{ para todo } \omega \in \Gamma_+.$$

donde $P_{\mathcal{H}}^{\mathfrak{F}}$ es la proyección ortogonal de $\mathfrak{F}$ sobre $\mathcal{H}$.

Se dice que la dilatación es *unitaria* si U_ω es unitario para todo $\omega \in \Gamma$.

Definición 2.7. Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $(T_\omega)_{\omega\in\Gamma_+} \subset L(\mathcal{H})$ un semigrupo de operadores. Sean $\mathcal{B}_1 = (U_\omega)_{\omega\in\Gamma} \subset L(\mathfrak{F}_1)$ y $\mathcal{B}_2 = (V_\omega)_{\omega\in\Gamma} \subset L(\mathfrak{F}_2)$ dos dilataciones de $(T_\omega)_{\omega\in\Gamma_+}$, decimos que B_1 y B_2 son *isomorfas* si existe una transformación unitaria $\varphi : \mathfrak{F}_1 \longrightarrow \mathfrak{F}_2$ tal que

(i) $\varphi\, h = h$, para todo $h \in \mathcal{H}$.
(ii) $V(\omega) = \varphi\, U(\omega)\varphi^{-1}$ para todo $\omega \in \Gamma$.

La versión continua del teorema de dilatación de Sz.-Nagy ([**21**]) establece que todo semigrupo de contracciones fuertemente continuo en un espacio de Hilbert, con parámetro en $\mathbb{R}_+$, tiene una única dilatación unitaria minimal. En detalle

Teorema 2.8. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $(T_\omega)_{\omega\in\mathbb{R}_+} \subset L(\mathcal{H})$ un semigrupo de contracciones fuertemente continuo, entonces existe un espacio de Hilbert $\mathfrak{F}$ que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y un grupo $(U_\omega)_{\omega\in\mathbb{R}} \subset L(\mathfrak{F})$, de operadores unitarios fuertemente continuo tales que*

$$T_\omega = P_{\mathcal{H}}^{\mathfrak{F}} U_\omega|_{\mathcal{H}}, \text{ para todo } \omega \in \mathbb{R}_+.$$

Si se pide la condición de minimalidad

$$\mathfrak{F} = \bigvee_{\omega\in\mathbb{R}} U_\omega(\mathcal{H})$$

entonces, $(U_\omega)_{\omega\in\mathbb{R}}$ es único salvo isomorfismos.

La demostración del teorema anterior se puede conseguir en la sección 8 del capítulo 1 del libro [**20**].

3. Funciones definidas positivas a valores operadores.

Definición 2.9. Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $f : \Gamma \longrightarrow L(\mathcal{H})$. Se dice que F es *definida positiva* si

$$\sum_{x,y\in\Gamma} \langle\, f(x-y)h(x), h(y)\rangle \geq 0,$$

para toda función $h : \Gamma \longrightarrow \mathcal{H}$ de soporte finito.

Proposición 2.10. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Sea $F_n : \Gamma \longrightarrow L(\mathcal{H})$ para $n \in \mathbb{N}$, una sucesión débilmente convergente de funciones definidas positivas. Si $F : \Gamma \longrightarrow L(\mathcal{H})$ es el límite débil de $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ entonces F es definida positiva.*

Demostración.

Sea $h : \Gamma \longrightarrow \mathcal{H}$ una función de soporte finito.

Se cumple que

$$\sum_{x,y\in\Gamma} \langle\, F_n(x-y)h(x), h(y)\rangle \geq 0,$$

para todo n.

Como h tiene soporte finito se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{x,y\in\Gamma} \langle\, F(x-y)h(x), h(y)\rangle &= \sum_{x,y\in\Gamma} \left(\lim_{n\longrightarrow\infty} \langle\, F_n(x-y)h(x), h(y)\rangle\right)\\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \left(\sum_{x,y\in\Gamma} \langle\, F_n(x-y)h(x), h(y)\rangle\right) \geq 0.\end{aligned}$$

□

Proposición 2.11. *Sean $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ dos espacios de Hilbert tales que $\mathcal{G}$ contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado. Si $(U_\omega)_{\omega\in\Gamma} \subset L(\mathcal{G})$ es un grupo de operadores unitarios, entonces la función $F : \Gamma \longrightarrow L(\mathcal{H})$, definida por*

$$F(\omega) = P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}} U_\omega|_{\mathcal{H}}$$

es definida positiva.

Demostración.

Sea $h : \Gamma \longrightarrow \mathcal{H}$ una función de soporte finito. Supóngase que

$$\text{soporte}(h) = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\},$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{x,y\in\Gamma} \langle\, F(x-y)h(x), h(y)\rangle_{\mathcal{H}} &= \sum_{x,y\in\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n\}} \langle\, F(x-y)h(x), h(y)\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \sum_{s,j=1}^{n} \langle\, F(\omega_s-\omega_j)h(\omega_s), h(\omega_j)\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \sum_{s,j=1}^{n} \left\langle\, P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}} U_{\omega_s-\omega_j} h(\omega_s), h(\omega_j)\right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \sum_{s,j=1}^{n} \left\langle\, U_{\omega_s} h(\omega_s), U_{\omega_j} h(\omega_j)\right\rangle_{\mathcal{G}} \\
&= \left\| \sum_{j=1}^{n} U_{\omega_j} h(\omega_j) \right\|_{\mathcal{G}}^{2} \geq 0.
\end{aligned}$$

□

El Teorema de Naimark establece que toda función definida positiva en Γ a valores operadores es de la forma anterior. En detalle,

Teorema 2.12 (Naimark)**.** *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $F : \Gamma \longrightarrow L(\mathcal{H})$ una función definida positiva tal que $F(0) = I_{\mathcal{H}}$.*

(a) *Existen un espacio de Hilbert $\mathcal{G}$ que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y un grupo unitario $(U_\omega)_{\omega\in\Gamma} \subset L(\mathcal{G})$ tal que*

$$F(\omega) = P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}} U_\omega|_{\mathcal{H}} \quad \textit{para todo } \omega \in \Gamma.$$

(b) *Si adicionalmente se supone que*

$$\mathcal{G} = \bigvee_{\omega\in\Delta} U_\omega(\mathcal{H}),$$

entonces el grupo unitario $(U_\omega)_{\omega\in\Gamma}$ es único salvo isomorfismos.

(c) *Si F es débilmente continua entonces $(U_\omega)_{\omega\in\Gamma}$ es un grupo de operadores fuertemente continuo.*

La demostración del teorema anterior se puede conseguir en la sección 7 del Capítulo 1 del libro [**20**].

Lema 2.13. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ una contracción. Entonces la función $F : \mathbb{Z} \longrightarrow L(\mathcal{H})$, definida por*

$$F(n) = \begin{cases} T^n & si\ \ n \geq 0 \\ T^{*-n} & si\ \ n < 0 \end{cases}$$

es definida positiva.

Demostración.

Se debe probar que

$$\sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \langle\, F(n-m)h(n), h(m)\rangle_{\mathcal{H}} \geq 0$$

para toda función $h : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{H}$ de soporte finito.

Trasladando el soporte, basta probar que

$$\sum_{n,m\in\mathbb{N}} \langle\, F(n-m)h(n), h(m)\rangle_{\mathcal{H}} \geq 0$$

para toda función $h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{H}$ de soporte finito.

Sea

$$B = \{h = (h_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{H} :\ \text{soporte de } h \text{ es finito }\}.$$

Sea $h = (h_n)_{n=0}^{\infty} \in B$. Tomando

$$g_n = \sum_{m\geq n} T^{m-n} h_m,$$

se tiene que

$$\begin{aligned} g_n - Tg_{n+1} &= \sum_{m\geq n} T^{m-n} h_m - T\left(\sum_{m\geq n+1} T^{m-(n+1)} h_m\right) \\ &= \sum_{m\geq n} T^{m-n} h_m - \sum_{m\geq n+1} T^{m-n} h_m = h_n. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la aplicación $(h_n)_{n=0}^{\infty} \longleftrightarrow (g_n)_{n=0}^{\infty}$ define una biyección de B en B.

De manera que para probar que F es una función definida positiva, basta probar que

$$\sum_{n,m\in\mathbb{N}} \langle\, F(n-m)(g_n - Tg_{n+1}), (g_m - Tg_{m+1})\rangle_{\mathcal{H}} \geq 0$$

para toda sucesión $(g_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ de soporte finito.

Sea $(g_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ de soporte finito.

Se puede probar que

$$\sum_{n,m\in\mathbb{N}} \langle\, F(n-m)(g_n - Tg_{n+1}), (g_m - Tg_{m+1})\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{n,m\in\mathbb{N}} \langle\, D(n-m)g_n, g_m\rangle_{\mathcal{H}}\,,$$

donde

$D(0,0) = F(0) = I$.

$D(1,0) = F(1) - F(0)T = 0$.

$D(0,1) = F(-1) - T^*F(0) = 0$.

$D(n,n) = F(0) - F(-1)T - T^*F(1) + T^*F(0)T = I - T^*T$ para $n \geq 1$.

$D(n,m) = F(k) - F(k-1)T - T^*F(k+1) + T^*F(k)T = 0$ para $n - m = k \geq 1$.

$D(n,m) = F(-k) - F(-k-1)T - T^*F(-k+1) + T^*F(-k)T = 0$ para $n - m = -k \leq -1$.

Luego,

$$\sum_{n,m\in\mathbb{N}} \langle\, F(n-m)(g_n - Tg_{n+1}), (g_m - Tg_{m+1})\rangle_{\mathcal{H}} = \langle\, g_0, g_0\rangle_{\mathcal{H}} + \sum_{n=1}^{\infty} \langle\, (I - T^*T)g_n, g_n\rangle_{\mathcal{H}} \geq 0,$$

ya que $I - T^*T$ es un operador positivo (T es una contracción).

□

Observación 2.14. Combinando el lema anterior con el Teorema 2.12 se puede probar la existencia de la dilatación unitaria de una contracción. (Ver, Teorema 1.26)

Capítulo 3

Dilatación unitaria de semigrupos locales de contracciones.

Nuevamente $(\Gamma, +)$ denotará un subgrupo aditivo de $(\mathbb{R}, +)$. Además $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ ó $a = +\infty$.

Sea $I_\Gamma = [0, a) \cap \Gamma$.

Definición 3.1. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Una *familia multiplicativa de contracciones* en $\mathcal{H}$ con parámetro en I_Γ es una familia $(T(s), \mathcal{H}(s))_{s \in I_\Gamma}$ tal que:

(i) $\mathcal{H}(s)$ es un subespacio de $\mathcal{H}$, $T(s) : \mathcal{H}(s) \to \mathcal{H}$ es un operador de contracción, $\mathcal{H}(r) \subset \mathcal{H}(s)$ para $r, s \in I_\Gamma$, $s < r$ y $\mathcal{H}(0) = \mathcal{H}$, $T(0) = I_\mathcal{H}$.

(ii) Si $r, s \in I_\Gamma$ son tales que $r + s < a$ entonces $T(s)\mathcal{H}(r + s) \subset \mathcal{H}(r)$ y $T(r + s)h = T(r)T(s)h$ para todo $h \in \mathcal{H}(r + s)$.

La familia multiplicativa es *fuertemente continua* si para cada $r \in I_\Gamma$ y $h \in \mathcal{H}(r)$ se tiene que la función $s \mapsto T(s)h$ es continua en $[0, r] \cap I_\Gamma$.

La siguiente definición es una extensión de una definición dada en [**1**].

Definición 3.2. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Un *semigrupo local de contracciones* en $\mathcal{H}$ con parámetro en I_Γ es una familia multiplicativa de contracciones $(T(s), \mathcal{H}(s))_{s \in I_\Gamma}$ tal que

$$\bigcup_{r \in (x,a) \cap I_\Gamma} \mathcal{H}(r)$$

es denso en $\mathcal{H}(x)$ para todo $x \in I_\Gamma$.

Si los operadores $T(s)$ son isometrías, se dirá que $(T(s), \mathcal{H}(s))_{s \in I_\Gamma}$ es un *semigrupo local de isometrías* .

Definición 3.3. Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $(T(s), \mathcal{H}(s))_{s \in I_\Gamma}$ un semigrupo local de operadores en $\mathcal{H}$. Sean $\mathfrak{F}$ un espacio de Hilbert y $(U(s))_{s \in \Gamma} \subset L(\mathfrak{F})$ un grupo de operadores, se dice que $(U(s))_{s \in \Gamma}$ es una *dilatación* del semigrupo $(T(s), \mathcal{H}(s))_{s \in I_\Gamma}$ si $\mathfrak{F}$ contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y

$$T(s) = P_\mathcal{H}^\mathfrak{F} U(s)|_{\mathcal{H}(s)} \quad \text{para todo } s \in I_\Gamma,$$

donde $P_{\mathcal{H}}^{\mathfrak{F}}$ es la proyección ortogonal de $\mathfrak{F}$ sobre $\mathcal{H}$.

Observación 3.4. Las definiciones 3.2 y 3.3 generalizan respectivamente las definiciones 2.1 y 2.6 , dadas en el Capítulo 2.

1. Familias multiplicativas de contracciones con parámetro en los racionales diádicos

Sea Δ el conjunto de los racionales diádicos, es decir

$$\Delta = \left\{ \frac{k}{2^n} \, : \, k \in \mathbb{Z}, \, n \in \mathbb{N} \right\},$$

y sea $\Delta^+ = \{s \in \Delta \, : \, s \geq 0\}$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$ sean

$$\Delta_m = \left\{ \frac{k}{2^m} \, : \, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{y} \quad \Delta_m^+ = \{s \in \Delta_m \, : \, s \geq 0\}.$$

En esta sección $\mathcal{H}$ será un espacio de Hilbert separable, $I_\Delta = [0,1) \cap \Delta$ y $(T(s), \mathcal{H}(s))_{s \in I_\Delta}$ denotará una familia multiplicativa de contracciones en $\mathcal{H}$ con parámetro en I_Δ.

Para $s \in I_\Delta$ sea $V(s) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ el operador de contracción definido por

$$V(s) = T(s) P_{\mathcal{H}(s)}^{\mathcal{H}},$$

donde $P_{\mathcal{H}(s)}^{\mathcal{H}}$ denota la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre $\mathcal{H}(s)$.

Lema 3.5. *Si $m, k \in \mathbb{N}$ y $k < 2^m$ entonces*

$$\left(V\left(\tfrac{1}{2^m}\right)\right)^k \Big|_{\mathcal{H}\left(\frac{k}{2^m}\right)} = T\left(\tfrac{k}{2^m}\right).$$

Demostración.

Se procederá por inducción.

Para $k = 2$.

Sea $h \in \mathcal{H}\left(\frac{2}{2^m}\right)$. Entonces $h \in \mathcal{H}\left(\frac{1}{2^m}\right)$ y $P_{\mathcal{H}\left(\frac{1}{2^m}\right)}^{\mathcal{H}} h = h$.

Como $\mathcal{H}\left(\frac{2}{2^m}\right) = \mathcal{H}\left(\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^m}\right)$ se tiene que $T\left(\frac{1}{2^m}\right) h \in \mathcal{H}\left(\frac{1}{2^m}\right)$, lo que implica que $P_{\mathcal{H}\left(\frac{1}{2^m}\right)}^{\mathcal{H}} T\left(\frac{1}{2^m}\right) h = T\left(\frac{1}{2^m}\right) h$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\left(V\left(\tfrac{1}{2^m}\right)\right)^2 h &= \left(T\left(\tfrac{1}{2^m}\right) P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{H}\left(\frac{1}{2^m}\right)}\right)\left(T\left(\tfrac{1}{2^m}\right) P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{H}\left(\frac{1}{2^m}\right)}\right) h \\ &= T\left(\tfrac{1}{2^m}\right) T\left(\tfrac{1}{2^m}\right) h \\ &= T\left(\tfrac{2}{2^m}\right) h.\end{aligned}$$

Supóngase que $\left(V\left(\frac{1}{2^m}\right)\right)^k\Big|_{\mathcal{H}\left(\frac{k}{2^m}\right)} = T\left(\frac{k}{2^m}\right)$ y que $k+1 < 2^m$. Sea $h \in \mathcal{H}\left(\frac{k+1}{2^m}\right)$, entonces $h \in \mathcal{H}\left(\frac{1}{2^m}\right)$ y $V\left(\frac{1}{2^m}\right) h = T\left(\frac{1}{2^m}\right) h$, de donde

$$\left(V\left(\tfrac{1}{2^m}\right)\right)^{k+1} h = \left(V\left(\tfrac{1}{2^m}\right)\right)^k V\left(\tfrac{1}{2^m}\right) h = \left(V\left(\tfrac{1}{2^m}\right)\right)^k T\left(\tfrac{1}{2^m}\right) h.$$

Como $\mathcal{H}\left(\frac{k+1}{2^m}\right) = \mathcal{H}\left(\frac{1}{2^m} + \frac{k}{2^m}\right)$, se tiene que $T\left(\frac{1}{2^m}\right) h \in \mathcal{H}\left(\frac{k}{2^m}\right)$.

Por la hipótesis inductiva

$$\left(V\left(\tfrac{1}{2^m}\right)\right)^k T\left(\tfrac{1}{2^m}\right) h = T\left(\tfrac{k}{2^m}\right) T\left(\tfrac{1}{2^m}\right) h = T\left(\tfrac{k+1}{2^m}\right) h.$$

De aquí se obtiene que

$$\left(V\left(\tfrac{1}{2^m}\right)\right)^{k+1} h = T\left(\tfrac{k+1}{2^m}\right) h.$$

□

Para $m \in \mathbb{N}$ se define $V^{(m)} = \left(V^{(m)}(s)\right)_{s\in\Delta_m^+}$ por

$$V^{(m)}\left(\tfrac{k}{2^m}\right) = \left(V\left(\frac{1}{2^m}\right)\right)^k.$$

Se tiene que $\left(V^{(m)}(s)\right)_{s\in\Delta_m^+}$ es un semigrupo de contracciones.

Proposición 3.6. *La función $F^{(m)} : \Delta_m \to L(\mathcal{H})$ definida por*

$$F^{(m)}(s) = \begin{cases} V^{(m)}(s) & \text{if s} \geq 0, \\ \left(V^{(m)}(-s)\right)^* & \text{if s} < 0, \end{cases}$$

es definida positiva.

Demostración.

Considerando el isomorfismo natural entre el grupo Δ_m y el grupo de los enteros $\mathbb{Z}$ el resultado se obtiene a partir del Lema 2.13.

□

Proposición 3.7. *Sean Υ un espacio topológico y Λ un conjunto numerable de índices. Sea $\{X_\alpha(n)\}_{n=1}^\infty, \alpha \in \Lambda$ una familia de sucesiones en Υ tal que para cada $\alpha \in \Lambda$ toda subsucesión de $\{X_\alpha(n)\}_{n=1}^\infty$ contiene una subsucesión convergente. Entonces existe una sucesión creciente $\{b(n)\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ tal que la sucesión $\{X_\alpha(b(n))\}_{n=1}^\infty$ converge para todo $\alpha \in \Lambda$.*

Demostración.

Como Λ es numerable se tiene que

$$\Lambda = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\}$$

donde $\alpha_k \neq \alpha_j$ para $k \neq j$. Por hipótesis se tiene que

$\{X_{\alpha_1}(n)\}_{n=1}^\infty$ contiene una subsucesión convergente $\{X_{\alpha_1}(b_1(n))\}_{n=1}^\infty$.

$\{X_{\alpha_2}(b_1(n))\}_{n=1}^\infty$ contiene una subsucesión convergente $\{X_{\alpha_2}(b_2(n))\}_{n=1}^\infty$.

$\{X_{\alpha_3}(b_2(n))\}_{n=1}^\infty$ contiene una subsucesión convergente $\{X_{\alpha_3}(b_3(n))\}_{n=1}^\infty$.

Continuando de esta manera se obtienen sucesiones $\{b_1(n)\}_{n\geq 1}, \{b_2(n)\}_{n\geq 1}, \{b_3(n)\}_{n\geq 1}, \ldots$ tales que $\{b_{j+1}(n)\}_{n\geq 1}$ es una subsucesión de $\{b_j(n)\}_{n\geq 1}$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Por construcción se tiene que

$$\{X_{\alpha_j}(b_j(n))\}_{n=1}^\infty$$

converge para cada $j \in \mathbb{N}$.

Sea $\{b(n)\}_{n=1}^\infty$, la sucesión de números naturales definida por $b(n) = b_n(n)$.

Si $j \in \mathbb{N}$ entonces se obtiene que a partir del lugar j, la sucesión $\{b(n)\}_{n=1}^\infty$, es una subsucesión de $\{b_j(n)\}_{n=1}^\infty$. Por lo tanto

$$\{X_{\alpha_j}(b(n))\}_{n=1}^\infty$$

converge.

□

Lema 3.8. *Existe una sucesión creciente de números naturales $\{n_j\}_{j=1}^\infty$ tal que para todo $k, m \in \mathbb{N}$ y $h \in \mathcal{H}$ la sucesión*

$$\left\{V^{(n_j)}\left(\frac{k}{2^m}\right)h\right\}_{j=1}^\infty$$

converge débilmente.

Demostración.

Como $\mathcal{H}$ es separable existe un conjunto numerable $\{h_i\}_{i=1}^{+\infty} \subset \mathcal{H}$ que es denso en $\mathcal{H}$.

Para cada $i, k, m \in \mathbb{N}$ se tiene que la sucesión $\left\{V^{(n)}\left(\frac{k}{2^m}\right)h_i\right\}_{n\geq m} \subset \mathcal{H}$ es acotada.

Como $\mathcal{H}$ es separable, por la Proposición 1.5 se obtiene que para cada $i, k, m \in \mathbb{N}$, la sucesión $\left\{V^{(n)}\left(\frac{k}{2^m}\right)h_i\right\}_{n\geq m}$ contiene una subsucesión débilmente convergente

Aplicando la Proposición 3.7 con el conjunto $\Lambda = \{(i, k, m) : i, k, m \in \mathbb{N}\}$, $\Upsilon = \mathcal{H}$ con la topología débil y la familia $\left\{X_\alpha(n) = V^{(n)}\left(\frac{k}{2^m}\right)h_i; \alpha = (i, k, m) \in \Lambda\right\}_{n\geq m}$, existe una sucesión creciente de números naturales $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ tal que

$$\left\{V^{(n_j)}\left(\frac{k}{2^m}\right)h_i\right\}_{j=1}^{\infty}$$

converge débilmente para todo $i, k, m \in \mathbb{N}$.

Por otro lado se tiene que $\left\{V^{(n_j)}\left(\frac{k}{2^m}\right)\right\}_{j=1}^{\infty} \subset L(\mathcal{H})$ es uniformemente acotada, ya que los $V^{(n_j)}\left(\frac{k}{2^m}\right)$ son contracciones para todo $j \in \mathbb{N}$. Además $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$ es denso en $\mathcal{H}$.

Luego de la Proposición 1.15 se obtiene que para todo $k, m \in \mathbb{N}$, la sucesión

$$\left\{V^{(n_j)}\left(\frac{k}{2^m}\right)h\right\}_{j=1}^{\infty}$$

converge débilmente para todo $h \in \mathcal{H}$. □

Observación 3.9. En virtud de la Proposición 1.24, dado $s \in \Delta^+$ existe un operador lineal de contracción $V^{(o)}(s) : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ tal que la sucesión $\left\{V^{(n_j)}(s)\right\}_{j=1}^{\infty}$ converge débilmente a $V^{(o)}(s)$.

Teorema 3.10. *Existe un espacio de Hilbert $\mathcal{G}$ que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y un grupo de operadores unitarios $(W(s))_{s\in\Delta} \subset L(\mathcal{G})$ tales que*

$$T(s) = P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}} W(s)|_{\mathcal{H}(s)}, \text{ para todo } s \in \Delta^+ \cap [0, 1).$$

Demostración.

Para $s \in \Delta^+$, sea $V^{(o)}(s)$ el operador lineal dado en la observación anterior.

Se tiene que

$$\left\langle V^{(o)}(s)\,h, g\right\rangle_{\mathcal{H}} = \lim_{j\longrightarrow\infty} \left\langle V^{(n_j)}(s)h, g\right\rangle_{\mathcal{H}}, \tag{3.1}$$

para todo $h, g \in \mathcal{H}$.

Sea $F : \Delta \to L(\mathcal{H})$ definida por

$$F(s) = \begin{cases} V^{(o)}(s) & \text{si } s \geq 0, \\ \left(V^{(o)}(-s)\right)^* & \text{si } s < 0, \end{cases}$$

De (3.1) se obtiene que

$$\langle F(s)h, g\rangle_{\mathcal{H}} = \lim_{j\to\infty} \left\langle F^{(n_j)}(s)h, g\right\rangle_{\mathcal{H}}$$

para todo $s \in \Delta$ y $h, g \in \mathcal{H}$, donde $F^{(n_j)}$ es la función definida en la Proposición 3.6, la cual es definida positiva. De la Proposición 2.10 se tiene que F es una función definida positiva.

Por el teorema de dilatación de Naimark existe un espacio de Hilbert $\mathcal{G}$ que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y un grupo de operadores unitarios $(W(s))_{s\in\Delta} \subset L(\mathcal{G})$ tales que

$$V^{(o)}(s) = P^{\mathcal{G}}_{\mathcal{H}} W(s)|_{\mathcal{H}}$$

para todo $s \in \Delta^+$.

Por el Lema 3.5 sigue que

$$V^{(o)}(s)|_{\mathcal{H}(s)} = T(s)$$

para todo $s \in \Delta^+ \cap [0, 1)$.

Finalmente, se obtiene que

$$T(s) = P^{\mathcal{G}}_{\mathcal{H}} W(s)|_{\mathcal{H}(s)}$$

para todo $s \in \Delta^+ \cap [0, 1)$.

□

Observación 3.11. El resultado anterior es original. Es importante notar que en el mismo no fue necesario suponer la continuidad fuerte de la familia multiplicativa de contracciones.

Observación 3.12. Note que si en el Teorema 3.10 se supone que $(T(s), \mathcal{H}(s))_{s\in\Delta^+\cap[0,1)}$ es una familia multiplicativa de isometrías en $\mathcal{H}$, entonces

$$T(s) = W(s)|_{\mathcal{H}(s)}, \text{ para todo } s \in \Delta^+ \cap [0, 1).$$

Es decir, se obtiene una extensión unitaria de la familia multiplicativa de isometrías.

2. Dilatación unitaria de un semigrupo local de contracciones fuertemente continuo

Supóngase que $\Delta \subset \Gamma$. El siguiente resultado es una extensión, para el caso de un espacio de Hilbert separable, del Teorema 1 de [**1**].

Teorema 3.13. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y $(T(s), \mathcal{H}(s))_{s\in[0,1)\cap\Gamma}$ un semigrupo local de contracciones fuertemente continuo en $\mathcal{H}$, entonces existe un espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y un grupo de operadores unitarios fuertemente continuo $(U(s))_{s\in\mathbb{R}} \subset L(\mathcal{F})$ tales que*

$$T(s) = P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}} U(s)|_{\mathcal{H}(s)}, \ \textit{para todo } s \in [0,1) \cap \Gamma.$$

Para la demostración de este Teorema será necesario el siguiente resultado.

Lema 3.14. *Sean $\mathcal{F}$ un espacio de Hilbert y $(V(s))_{s\in\Delta} \subset L(\mathcal{F})$ un grupo de operadores unitarios fuertemente continuo. Entonces existe un grupo de operadores unitarios fuertemente continuo $(U(s))_{s\in\mathbb{R}} \subset L(\mathcal{F})$ que extiende a $(V(s))_{s\in\Delta}$.*

Demostración.

Se tiene que, para cada $h \in \mathcal{F}$ la aplicación $s \mapsto V(s)h$ de Δ en $\mathcal{F}$ es uniformemente continua en Δ.

Como Δ es denso en $\mathbb{R}$, para cada $h \in \mathcal{F}$ existe una única aplicación $s \mapsto U(s)h$ de $\mathbb{R}$ en $\mathcal{F}$ tal que si $s \in \Delta$ entonces

$$U(s)h = V(s)h \quad \text{ para cada } \ h \in \mathcal{F}.$$

Si $s \in \mathbb{R}$ y $\{s_n\}_{n\geq 1} \subset \Delta$ es una sucesión tal que $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ se cumple que

$$U(s)h = \lim_{n\to\infty} V(s_n)h \text{ para todo } h \in \mathcal{F}.$$

Claramente $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ extiende a $(V(s))_{s\in\Delta}$.

Ahora se probará que $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ es un grupo fuertemente continuo de operadores unitarios.

(i) $U(0)h = V(0)h = h$ para cada $h \in \mathcal{F}$

(ii) Sean $h \in \mathcal{F}$ y $s, t \in \mathbb{R}$. Existen sucesiones $\{t_n\}_{n\geq 1}$ y $\{s_n\}_{n\geq 1}$ en Δ tales que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} t_n = t \quad \text{ y } \quad \lim_{n\longrightarrow\infty} s_n = s.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} V(s_n)V(t_n)h = \lim_{n\longrightarrow\infty} V(s_n+t_n)h = U(s+t).$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\|V(s_n)V(t_n)h - U(s)U(t)h\|_{\mathcal{F}} &= \|V(s_n)V(t_n)h - V(s_n)U(t)h + V(s_n)U(t)h - U(s)U(t)h\|_{\mathcal{F}} \\ &\leq \|V(t_n)h - U(t)h\|_{\mathcal{F}} + \|V(s_n)h - U(s)h\|_{\mathcal{F}}.\end{aligned}$$

De donde

$$U(s)U(t)h = \lim_{n\longrightarrow\infty} V(s_n)V(t_n)h = U(s+t)h.$$

(iii) Sean $h, h' \in \mathcal{F}$ y $s \in \mathbb{R}$. Existe una sucesión $\{s_n\}_{n\geq 1}$ en Δ tal que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} s_n = s.$$

De manera que,

$$\begin{aligned}\langle\, U(s)h, h'\rangle_{\mathcal{F}} &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \langle\, V(s_n)h, h'\rangle_{\mathcal{F}} \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \langle\, h, V(-s_n)h'\rangle_{\mathcal{F}} \\ &= \langle\, h, \lim_{n\longrightarrow\infty} V(-s_n)h'\rangle_{\mathcal{F}} = \langle\, h, U(-s)h'\rangle_{\mathcal{F}},\end{aligned}$$

Por lo tanto, $U(-s) = U(s)^*$, lo que implica que $U(s)$ es unitario.

De (i), (ii) y (iii) se tiene que $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ es un grupo unitario. Además $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ es fuertemente continuo, ya que para cada $h \in \mathcal{F}$ la aplicación $t \longmapsto U(t)h$ de $\mathbb{R}$ en $\mathcal{F}$ es continua. □

Demostración del Teorema 3.13.

Del Teorema 3.10 se deduce que existe un espacio de Hilbert $\mathcal{G}$ que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y un grupo de operadores unitarios $(W(s))_{s\in\Delta} \subset L(\mathcal{G})$ tales que

$$T(s) = P^{\mathcal{G}}_{\mathcal{H}} W(s)|_{\mathcal{H}(s)}, \text{ para todo } s \in \Delta^+ \cap [0,1).$$

Sea $\mathcal{F}$ el subespacio cerrado de $\mathcal{G}$ generado por $\{W(s)h \,:\, s \in \Delta,\ h \in \mathcal{H}\}$ y sea $V(s)$ la restricción de $W(s)$ a $\mathcal{F}$, entonces $(V(s))_{s\in\Delta} \subset L(\mathcal{F})$ es un grupo de operadores unitarios tal que

$$T(s) = P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}} V(s)|_{\mathcal{H}(s)} \tag{3.2}$$

para todo $s \in \Delta^+ \cap [0,1)$.

Ahora se probará que $(V(s))_{s\in\Delta}$ es fuertemente continuo.

Se tiene que el conjunto

$$\mathcal{F}_o = \left\{ V(s)h \,:\, s \in \Delta,\ h \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}\left(\tfrac{1}{2^n}\right) \right\}$$

es denso en $\mathcal{F}$, ya que $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}\left(\frac{1}{2^n}\right)$ es denso en $\mathcal{H}$.

Sea $g \in \mathcal{F}_o$, entonces existen $s_o \in \Delta$, un número natural n_o y $h_o \in \mathcal{H}\left(\frac{1}{2^{n_o}}\right)$ tales que $g = V(s_o)h_o$.

Sea $s \in I_\Delta$ tal que $s < \frac{1}{2^{n_o}}$, entonces

$$\begin{aligned}
\|V(s)V(s_o)h_o - V(s_o)h_o\|_{\mathcal{F}}^2 &= \|V(s)h_o - h_o\|_{\mathcal{F}}^2 \\
&= \langle V(s)h_o - h_o, V(s)h_o - h_o\rangle_{\mathcal{F}} \\
&= 2\langle h_o, h_o\rangle_{\mathcal{H}} - 2Re\left(\langle P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}} V(s)h_o, h_o\rangle_{\mathcal{H}}\right) \\
&= 2\langle h_o, h_o\rangle_{\mathcal{H}} - 2Re\left(\langle T(s)h_o, h_o\rangle_{\mathcal{H}}\right).
\end{aligned}$$

De esta última igualdad, de la continuidad fuerte del semigrupo local y de la densidad de $\mathcal{F}_o$ en $\mathcal{F}$ sigue la continuidad fuerte del grupo $(V(s))_{s\in\Delta}$ en 0. Como el grupo es unitario, entonces es fuertemente continuo.

Del Lema 3.14 se deduce que existe un grupo de operadores unitarios fuertemente continuo $(U(s))_{s\in\mathbb{R}} \subset L(\mathcal{F})$ tal que

$$U(s) = V(s) \tag{3.3}$$

para todo $s \in \Delta$.

Falta probar que $T(s) = P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}} U(s)|_{\mathcal{H}(s)}$ para todo $s \in [0,1) \cap \Gamma$.

Sean $s \in [0,1) \cap \Gamma$ y $h \in \mathcal{H}(s)$. Como Δ es denso en $\mathbb{R}$ existe una sucesión creciente $\{s_n\}_{n\geq 1}$ en $\Delta^+ \cap [0,1)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ y por lo tanto $\mathcal{H}(s) \subset \mathcal{H}(s_n)$ para todo n.

Por la continuidad fuerte del semigrupo local $(T(s), \mathcal{H}(s))_{s\in[0,1)\cap\Gamma}$ y del grupo $(U(s))_{s\in\mathbb{R}}$ se tiene que

$$\begin{aligned} T(s)h &= \lim_{n\longrightarrow\infty} T(s_n)h \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty} P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}} V(s_n)h \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty} P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}} U(s_n)h \\ &= P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}} U(s)h. \end{aligned}$$

□

Observación 3.15. Notar que si $(T(s), \mathcal{H}(s))_{s\in[0,1)\cap\Gamma}$ es un semigrupo local de isometrías fuertemente continua en $\mathcal{H}$, entonces

$$T(s) = U(s)|_{\mathcal{H}(s)}, \text{ para todo } s \in [0,1) \cap \Gamma.$$

Es decir, se obtiene una extensión unitaria del semigrupo local de isometrías.

Observación 3.16. Para el caso $\Gamma = \mathbb{R}$, trabajar en el intervalo $[0,1)$ no es ninguna restricción, ya que el caso general $[0,a)$, con $a > 0$, se obtiene haciendo un cambio de variable, como sigue: Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y $(T(s), \mathcal{H}(s))_{s\in[0,a)\cap\Gamma}$ un semigrupo local de contracciones fuertemente continuo en $\mathcal{H}$.

Para $t \in [0,1) \cap \Gamma$, sean $R(t) = T(at)$ y $\mathcal{E}(t) = \mathcal{H}(at)$.

Se tiene que $(R(t), \mathcal{E}(t))_{t\in[0,1)\cap\Gamma}$ es un semigrupo local de contracciones fuertemente continuo en $\mathcal{H}$.

Por el Teorema 3.13 existe un espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y un grupo de operadores unitarios fuertemente continuo $(U(s))_{s\in\mathbb{R}} \subset L(\mathcal{F})$ tales que

$$R(t) = P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}} U(t)|_{\mathcal{E}(t)}, \text{ para todo } t \in [0,1) \cap \Gamma.$$

Sea $s \in [0,a) \cap \Gamma$. Tomando $t = \frac{s}{a}$ se obtiene que

$$\begin{aligned} T(s) &= R(t) \\ &= P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}} U(t)|_{\mathcal{E}(t)} \\ &= P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}} U\left(\frac{s}{a}\right)|_{\mathcal{H}(s)}. \end{aligned}$$

3. Extensión de funciones definidas positivas

Definición 3.17. Sea $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{E}})$ un espacio de Hilbert. La función $f : (-a, a) \cap \Gamma \to L(\mathcal{E})$ es *definida positiva* si

$$\sum_{x,y \in [0,a) \cap \Gamma} \langle f(x-y)h(x), h(y) \rangle_{\mathcal{E}} \geq 0$$

para toda función $h : [0, a) \cap \Gamma \to \mathcal{E}$ de soporte finito.

Observación 3.18. La definición dada anteriormente generaliza la definición 2.9 dada en el Capítulo 2.

M. G. Kreĭn [**12**] demostró que toda función continua a valores escalares definida positiva, en un intervalo de la recta real, se puede extender a una función continua definida positiva en toda la recta real. Este resultado fue extendido para funciones fuertemente continuas a valores operadores por M. L. Gorbachuck [**10**].

Una familia multiplicativa de operadores isométricos se puede asociar, de forma natural, a una función definida positiva, véase por ejemplo [**1, 2, 11, 18**] para más detalles. Esta correspondencia se establece de la siguiente manera.

Supóngase que $f : (-a, a) \cap \Gamma \to L(\mathcal{E})$ es una función definida positiva tal que $f(0) = I_{\mathcal{E}}$, donde $I_{\mathcal{E}}$ es el operador identidad.

Sea

$$\mathcal{D} = \{h : [0, a) \cap \Gamma \to \mathcal{E} \mid \text{ soporte de } h \text{ es finito } \}.$$

Entonces $\mathcal{D}$ es un espacio vectorial. Para $h, h' \in \mathcal{D}$ definimos

$$\langle h, h' \rangle_{\mathcal{D}} = \sum_{x,y \in [0,a) \cap \Gamma} \langle f(x-y)h(x), h'(y) \rangle_{\mathcal{E}},$$

entonces$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}}$ es una forma sesquilineal en $\mathcal{D}$, posiblemente degenerada. Sea $\mathcal{H}$ la completación de $\mathcal{D}$, después del cociente natural.

Para $r \in [0, a) \cap \Gamma$ definimos

$$\mathcal{D}(r) = \{h \in \mathcal{D} \mid \text{ soporte } (h) \subset [0, a-r) \cap \Gamma\}$$

y $S(r) : \mathcal{D}(r) \to \mathcal{D}$ por

$$S(r)h(x) = \begin{cases} h(x-r) & \text{si } x \in [r, a), \\ 0 & \text{si } x \in [0, r). \end{cases}$$

Se tiene que $S(r)$ es un operador isométrico y si $\mathcal{H}(r)$ es la clausura de $\mathcal{D}(r)$ en $\mathcal{H}$, entonces $S(r)$ puede ser extendido a un operador isométrico de $\mathcal{H}(r)$ a $\mathcal{H}$, se denotará esta extensión por $T(r)$. Se tiene que $(T(r),\mathcal{H}(r))_{r\in[0,a)\cap\Gamma}$ es una familia multiplicativa de isometrías. Es fácil comprobar que, si f es fuertemente continua, entonces $(T(r),\mathcal{H}(r))_{r\in[0,a)\cap\Gamma}$ es un semigrupo local de isometrías fuertemente continua.

Como $f(0)=I_{\mathcal{E}}$, existe una inmersión natural de $\mathcal{E}$ sobre $\mathcal{H}$ y se tiene que

$$\langle f(x)h,h'\rangle_{\mathcal{E}}=\langle T(x)h,h'\rangle_{\mathcal{H}}$$

para $h,h'\in\mathcal{E}$ y $x\in[0,a)\cap\Gamma$. Si la familia multiplicativa de isometrías $(T(r),\mathcal{H}(r))_{r\in[0,a)\cap\Gamma}$ puede ser extendida a un grupo unitario $(U(r))_{r\in\mathbb{R}}$ en un espacio de Hilbert más grande $\mathcal{F}$ se obtendrá que

$$f(x)=P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}}U(x)|_{\mathcal{E}}\qquad\text{para } x\in(-a,a)\cap\Gamma.$$

Así, la extensión a un grupo unitario de la familia $(T(r),\mathcal{H}(r))_{r\in[0,a)\cap\Gamma}$ es una condición suficiente para la extensión de la función f a una función definida positiva en toda la recta real. Para $f:(-a,a)\cap\Delta\to L(\mathcal{E})$ se procede de manera análoga.

Proposición 3.19. *Sea $(\mathcal{E},\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{E}})$ un espacio de Hilbert separable.*

(a) *Si $f:\Delta\cap(-1,1)\to L(\mathcal{E})$ es una función definida positiva, entonces el correspondiente espacio $(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}})$, asociado a f, también es separable.*

(b) *Si $\Delta\subset\Gamma$ y $f:\Gamma\cap(-1,1)\to L(\mathcal{E})$ es una función definida positiva y fuertemente continua, entonces el correspondiente espacio $(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}})$, asociado a f, también es separable.*

Demostración.

Por ser $\mathcal{H}$ la completación de $\mathcal{D}$, basta probar que $\mathcal{D}$ es separable.

Caso (a):

Sea $h\in\mathcal{D}$, entonces existen $n\in\mathbb{N}$, $x_1,\ldots,x_n\in\Delta\cap[0,1)$ y $\phi_1,\ldots,\phi_n\in\mathcal{E}$ tales que

$$h=\sum_{k=1}^{n}\delta_{x_k}\phi_k,$$

donde, para $r\in\mathbb{R}$, $\delta_r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es la función definida por

$$\delta_r(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x=r,\\ 0 & \text{si } x\neq r.\end{cases}$$

Si $\mathcal{S}$ es un subconjunto denso y numerable contenido en $\mathcal{E}$, $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \mathcal{S}$ y $h' \in \mathcal{D}$ es la función dada por

$$h' = \sum_{k=1}^{n} \delta_{x_k} \psi_k,$$

se tiene que

$$\|h - h'\|_{\mathcal{D}}^2 = \sum_{j,k=1}^{n} \langle f(x_k - x_j)\phi_k - \psi_k, \phi_j - \psi_j \rangle_{\mathcal{E}}.$$

Por lo tanto, aproximando los elementos $\phi_1, \ldots, \phi_n \in \mathcal{E}$ con elementos $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \mathcal{S}$ se logra aproximar a h en $\mathcal{D}$, de donde se concluye que el conjunto

$$\mathcal{N} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \delta_{x_k} \psi_k : n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in \Delta \cap [0,1) \text{ y } \psi_1, \ldots, \psi_n \in \mathcal{S} \right\}$$

es denso en $\mathcal{D}$.

Como $\Delta \cap [0,1)$ es numerable, el conjunto $\mathcal{N}$ es numerable y por lo tanto $\mathcal{D}$ es separable.

Caso (b):

Procediendo de igual manera que en el caso anterior se prueba que el conjunto

$$\mathcal{M} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \delta_{r_k} \psi_k : n \in \mathbb{N}, r_1, \ldots, r_n \in \Gamma \cap [0,1) \text{ y } \psi_1, \ldots, \psi_n \in \mathcal{S} \right\}$$

es denso en $\mathcal{D}$.

Si $r \in \Gamma \cap [0,1)$, $x \in \Delta \cap [0,1)$ y $\psi \in \mathcal{S}$ se tiene que

$$\|\delta_r \psi - \delta_x \psi\|^2 = 2\langle f(0)\psi, \psi \rangle_{\mathcal{E}} - 2\mathrm{Re}\langle f(r-x)\psi, \psi \rangle_{\mathcal{E}}.$$

Por esta última igualdad, la densidad de $\Delta \cap [0,1)$ en $\Gamma \cap [0,1)$ y la continuidad fuerte de f, se tiene que el conjunto $\mathcal{N}$, considerado en el caso anterior, es denso en $\mathcal{M}$ y por lo tanto también es denso en $\mathcal{D}$. Como $\mathcal{N}$ es numerable, se tiene que $\mathcal{D}$ es separable.

$\square$

Luego, a partir de los Teoremas 3.10 y 3.13 se obtienen los siguientes resultados.

Teorema 3.20. *Sean $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{E}})$ un espacio de Hilbert separable y $f : (-1,1) \cap \Delta \to L(\mathcal{E})$ una función definida positiva tal que $f(0) = I_{\mathcal{E}}$, entonces f puede ser extendida a una función definida positiva $F : \Delta \to L(\mathcal{E})$.*

Teorema 3.21. *Supóngase que* $\Delta \subset \Gamma$. *Sean* $(\mathcal{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{E}})$ *un espacio de Hilbert separable y* $f : (-1,1) \cap \Gamma \to L(\mathcal{E})$ *una función definida positiva fuertemente continua tal que* $f(0) = I_{\mathcal{E}}$, *entonces* f *puede ser extendida a una función definida positiva fuertemente continua* $F : \mathbb{R} \to L(\mathcal{E})$.

Observación 3.22. Note que no es necesario asumir la continuidad fuerte de la función en el Teorema 3.20.

Observación 3.23. Para el caso $\Gamma = \mathbb{R}$, trabajar en el intervalo $(-1,1)$ no es ninguna restricción. Procediendo como en la Observación 3.16 se puede mostrar que el resultado es válido para una función definida positiva $f : (-a,a) \cap \Gamma \to L(\mathcal{E})$.

Capítulo 4

Semigrupos locales mixtos de contracciones.

Nuevamente $(\Gamma, +)$ denotará un subgrupo aditivo de $(\mathbb{R}, +)$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ ó $a = +\infty$ y $I_\Gamma = [0, a) \cap \Gamma$.

En lo que sigue $(\Omega, +)$ será un grupo abeliano.

Definición 4.1. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Una *familia multiplicativa mixta de contracciones* en $\mathcal{H}$ con parámetro en $\Omega \times I_\Gamma$ es una familia $(T(\omega, s), \mathcal{H}(s))_{(\omega,s)\in\Omega\times I_\Gamma}$ tal que:

(i) Para cada $s \in I_\Gamma$ se tiene que $\mathcal{H}(s)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ y para cada par $(\omega, s) \in \Omega \times I_\Gamma$ se tiene que $T(\omega, s) : \mathcal{H}(s) \to \mathcal{H}$ es un operador de contracción.

(ii) $(T(0, s), \mathcal{H}(s))_{s\in I_\Gamma}$ es una familia multiplicativa de contracciones.

(iii) $(T(\omega, 0))_{\omega\in\Omega}$ es un grupo de operadores unitarios en $L(\mathcal{H})$.

(iv) Para cada $(\omega, s) \in \Omega \times I_\Gamma$ se tiene que $T(\omega, 0)\mathcal{H}(s) \subset \mathcal{H}(s)$ y

$$T(\omega, s) = T(\omega, 0)T(0, s) = T(0, s)T(\omega, 0)|_{\mathcal{H}(s)}.$$

Si Ω es un grupo topológico, se dirá que la familia es *fuertemente continua* si para cada $r \in I_\Gamma$ y $h \in \mathcal{H}(r)$ se tiene que la función $(\omega, s) \mapsto T(\omega, s)h$ es continua en $\Omega \times ([0, r] \cap I_\Gamma)$.

Definición 4.2. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Un *semigrupo local mixto de contracciones* en $\mathcal{H}$ con parámetro en $\Omega \times I_\Gamma$ es una familia multiplicativa mixta de contracciones $(T(\omega, s), \mathcal{H}(s))_{(\omega,s)\in\Omega\times I_\Gamma}$ tal que $(T(0, s), \mathcal{H}(s))_{s\in I_\Gamma}$ es un semigrupo local de contracciones.

Definición 4.3. Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $(T(\omega, s), \mathcal{H}(s))_{(\omega,s)\in\Omega\times I_\Gamma}$ un semigrupo local mixto de operadores en $\mathcal{H}$. Sean $\mathfrak{F}$ un espacio de Hilbert y $(U(\omega, s))_{(\omega,s)\in\Omega\times\mathbb{R}} \subset L(\mathcal{F})$ un grupo de operadores, se dice que $(U(\omega, s))_{(\omega,s)\in\Omega\times\mathbb{R}}$ es una *dilatación* del semigrupo $(T(\omega, s), \mathcal{H}(s))_{(\omega,s)\in\Omega\times I_\Gamma}$ si $\mathfrak{F}$ contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y

$$T(\omega, s) = P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}} U(\omega, s)|_{\mathcal{H}(s)}, \text{ para todo } (\omega, s) \in \Omega \times I_\Gamma,$$

donde $P^{\mathfrak{F}}_{\mathcal{H}}$ es la proyección ortogonal de $\mathfrak{F}$ sobre $\mathcal{H}$.

Observación 4.4. Las definiciones 4.1, 4.2 y 4.3 dadas anteriormente, generalizan respectivamente las definiciones 3.1, 3.2 y 3.3.

1. Familias multiplicativas mixtas de contracciones con parámetro en los racionales diádicos

Al igual que en el Capítulo 3 se tiene que

$$\Delta = \left\{ \frac{k}{2^n} \; : \; k \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{y} \quad \Delta^+ = \{ s \in \Delta \; : \; s \geq 0 \}.$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$\Delta_m = \left\{ \frac{k}{2^m} \; : \; k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{y} \quad \Delta_m^+ = \{ s \in \Delta_m \; : \; s \geq 0 \}.$$

En esta sección $\mathcal{H}$ será un espacio de Hilbert separable y $(T(\omega,s),\mathcal{H}(s))_{(\omega,s)\in\Omega\times I_\Delta}$ denotará una familia multiplicativa mixta de contracciones en $\mathcal{H}$ con parámetro en $\Omega \times I_\Delta$.

Proposición 4.5. *Si* $(\omega,s) \in \Omega \times I_\Delta$ *entonces*

$$T(\omega,0)\mathcal{H}(s) = \mathcal{H}(s) \quad \textit{y} \quad T(\omega,0)\left(\mathcal{H}(s)^\perp\right) = \mathcal{H}(s)^\perp.$$

Demostración.

Si $(\omega,s) \in \Omega \times I_\Delta$ entonces $T(\omega,0)\mathcal{H}(s) \subset \mathcal{H}(s)$ y $T(-\omega,0)\mathcal{H}(s) \subset \mathcal{H}(s)$. Por lo tanto $T(\omega,0)\mathcal{H}(s) \subset \mathcal{H}(s) \subset T(\omega,0)\mathcal{H}(s)$.

Por otro lado, como $\mathcal{H} = \mathcal{H}(s) \oplus \mathcal{H}(s)^\perp$ y $T(\omega,0)$ es unitario se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(s) \oplus \mathcal{H}(s)^\perp &= T(\omega,0)\mathcal{H}(s) \oplus T(\omega,0)\mathcal{H}(s)^\perp \\ &= \mathcal{H}(s) \oplus T(\omega,0)\mathcal{H}(s)^\perp. \end{aligned}$$

De donde $T(\omega,0)\left(\mathcal{H}(s)^\perp\right) = \mathcal{H}(s)^\perp$. □

Proposición 4.6. *Si* $(\omega,s) \in \Omega \times I_\Delta$ *entonces*

$$T(\omega,0)\left(T(0,s)P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{H}(s)}\right) = \left(T(0,s)P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{H}(s)}\right)T(\omega,0).$$

Demostración.

Paso 1: Para cualquier par $(\omega, s) \in \Omega \times I_\Delta$ y $h \in \mathcal{H}(s)$ se cumple que

$$T(\omega,0)\left(T(0,s)P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{H}(s)}\right)h = \left(T(0,s)P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{H}(s)}\right)T(\omega,0)h.$$

De la Proposición 4.5 se obtiene que

$$\begin{aligned} T(\omega,0)\left(T(0,s)P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{H}(s)}\right)h &= T(\omega,0)T(0,s)h \\ &= T(0,s)T(\omega,0)h \\ &= \left(T(0,s)P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{H}(s)}\right)T(\omega,0)h. \end{aligned}$$

Paso 2: Para cualquier par $(\omega, s) \in \Omega \times I_\Delta$ y $h \in \mathcal{H}(s)^\perp$ se cumple que

$$T(\omega,0)\left(T(0,s)P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{H}(s)}\right)h = \left(T(0,s)P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{H}(s)}\right)T(\omega,0)h.$$

Se tiene que $P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{H}(s)}h = 0$ y de la Proposición 4.5 se tiene que $P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{H}(s)}T(\omega,0)h = 0$, por lo tanto

$$T(\omega,0)\left(T(0,s)P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{H}(s)}\right)h = \left(T(0,s)P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{H}(s)}\right)T(\omega,0)h = 0.$$

De los pasos 1 y 2 se obtiene el resultado. □

De manera análoga al Capítulo 3, para $s \in I_\Delta$ se define $V(s) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ el operador de contracción definido por

$$V(s) = T(0,s)P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{H}(s)}.$$

Lema 4.7. *Si $\omega \in \Omega$, $m, k \in \mathbb{N}$ y $k < 2^m$ entonces*

$$T(\omega,0)\left(V\left(\tfrac{1}{2^m}\right)\right)^k\Big|_{\mathcal{H}\left(\frac{k}{2^m}\right)} = T\left(\omega, \tfrac{k}{2^m}\right).$$

Demostración.

La demostración es completamente análoga a la demostración del Lema 3.5. □

De manera análoga al Capítulo 3, para $m \in \mathbb{N}$ se define $V^{(m)} = \left(V^{(m)}(s)\right)_{s\in\Delta_m^+}$ por

$$V^{(m)}\left(\tfrac{k}{2^m}\right) = \left(V\left(\tfrac{1}{2^m}\right)\right)^k.$$

Se tiene que $\left(V^{(m)}(s)\right)_{s\in\Delta_m^+}$ es un semigrupo de contracciones.

Observación 4.8. De la Proposición 4.6 se tiene que si $\omega \in \Omega$ entonces $T(\omega, 0)$ conmuta con $V(s)$ para $s \in I_\Delta$. Por lo tanto $T(\omega, 0)$ conmuta con $V^{(m)}(s)$ para $s \geq 0$ y con $\left(V^{(m)}(-s)\right)^*$ para $s < 0$.

Proposición 4.9. *La función $G^{(m)} : \Omega \times \Delta_m \to L(\mathcal{H})$ definida por*

$$G^{(m)}(s) = \begin{cases} T(\omega, 0)V^{(m)}(s) & \text{si s} \geq 0, \\ T(\omega, 0)\left(V^{(m)}(-s)\right)^* & \text{si s} < 0, \end{cases}$$

es definida positiva

Demostración.

Sea $F^{(m)}$ la función definida en la Proposición 3.6. De la Observación 4.8 se tiene que $(T(\omega, 0))_{\omega\in\Omega}$ es un grupo de operadores unitarios que conmuta con $F^{(m)}(s)$ para todo $s \in \Delta_m$.

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $(\omega_1, s_1), (\omega_2, s_2), \ldots, (\omega_n, s_n) \in \Omega \times \Delta_m$.

Como $F^{(m)}$ es definida positiva se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} \left\langle G^{(m)}(w_i - w_j, s_i - s_j)h_i, h_j\right\rangle_{\mathcal{H}} &= \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle T(\omega_i - \omega_j, 0)F^{(m)}(s_i - s_j)h_i, h_j\right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle T(\omega_i, 0)F^{(m)}(s_i - s_j)h_i, T(\omega_j, 0)h_j\right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle F^{(m)}(s_i - s_j)T(\omega_i, 0)h_i, T(\omega_j, 0)h_j\right\rangle_{\mathcal{H}} \geq 0.
\end{aligned}$$

Luego, $G^{(m)}$ es una función definida positiva.

□

Teorema 4.10. *Existe un espacio de Hilbert $\mathcal{G}$ que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y un grupo de operadores unitarios $(W(\omega, s))_{(\omega,s)\in\Omega\times\Delta} \subset L(\mathcal{G})$ tales que*

$$T(\omega, s) = P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}} W(\omega, s)|_{\mathcal{H}(s)}, \text{ para todo } (\omega, s) \in \Omega \times I_\Delta.$$

Demostración.

Para $s \in \Delta^+$, sea $V^{(o)}(s)$ el operador lineal dado en la Observación 3.9.

Se tiene que

$$\left\langle V^{(o)}(s)\,h,g\right\rangle_{\mathcal{H}} = \lim_{j\longrightarrow\infty}\left\langle V^{(n_j)}(s)h,g\right\rangle_{\mathcal{H}},$$

para todo $h,g\in\mathcal{H}$, donde $\{V^{(n_j)}(s)\}_{j=1}^{\infty}$ es la sucesión del Lema 3.8.

Por lo tanto

$$\left\langle T(\omega,0)V^{(o)}(s)\,h,g\right\rangle_{\mathcal{H}} = \lim_{j\longrightarrow\infty}\left\langle T(\omega,0)V^{(n_j)}(s)h,g\right\rangle_{\mathcal{H}}, \tag{4.1}$$

para todo $(\omega,s)\in\Omega\times\Delta^{+}$ y $h,g\in\mathcal{H}$.

Sea $G:\Omega\times\Delta\to L(\mathcal{H})$ definida por

$$G(\omega,s)=\begin{cases} T(\omega,0)V^{(o)}(s) & \text{si s} \geq 0,\\ T(\omega,0)\left(V^{(o)}(-s)\right)^{*} & \text{si s} < 0,\end{cases}$$

De (4.1) se obtiene que

$$\langle G(\omega,s)h,g\rangle_{\mathcal{H}} = \lim_{j\to\infty}\left\langle G^{(n_j)}(\omega,s)h,g\right\rangle_{\mathcal{H}}$$

para todo $(\omega,s)\in\Omega\times\Delta$ y $h,g\in\mathcal{H}$, donde $G^{(n_j)}$ es la función definida en la Proposición 4.9, la cual es definida positiva. De la Proposición 2.10 se tiene que G es una función definida positiva.

Por el teorema de dilatación de Naimark existe un espacio de Hilbert $\mathcal{G}$ que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y un grupo de operadores unitarios $(W(\omega,s))_{(\omega,s)\in\Omega\times\Delta}\subset L(\mathcal{G})$ tales que

$$T(\omega,0)V^{(o)}(s) = P^{\mathcal{G}}_{\mathcal{H}}W(\omega,s)|_{\mathcal{H}}$$

para todo $(\omega,s)\in\Omega\times\Delta^{+}$.

Por el Lema 4.7 sigue que

$$T(\omega,0)V^{(o)}(s)|_{\mathcal{H}(s)} = T(\omega,s)$$

para todo $(\omega,s)\in\Omega\times I_{\Delta}$.

Finalmente, se obtiene que

$$T(\omega,s) = P^{\mathcal{G}}_{\mathcal{H}}W(\omega,s)|_{\mathcal{H}(s)}$$

para todo $(\omega,s)\in\Omega\times I_{\Delta}$.

□

Observación 4.11. Es importante notar que no fue necesario suponer que Ω es un grupo topológico ni la continuidad fuerte de la familia multiplicativa de contracciones $(T(0,s),\mathcal{H}(s))_{s\in I_\Gamma}$.

Observación 4.12. Note que si en el Teorema 4.10 se supone que $(T(\omega,s),\mathcal{H}(s))_{(\omega,s)\in\Omega\times I_\Delta}$ es una familia multiplicativa mixta de isometrías en $\mathcal{H}$, entonces la misma se puede extender a un grupo de operadores unitarios con parámetro en $\Omega\times\Delta$.

2. Dilatación unitaria de un semigrupo local mixto de contracciones

Lema 4.13. *Supóngase que Ω es un grupo topológico. Sean $\mathcal{F}$ un espacio de Hilbert y $(V(\omega,s))_{(\omega,s)\in\Omega\times\Delta}\subset L(\mathcal{F})$ un grupo de operadores unitarios fuertemente continuo. Entonces existe un grupo de operadores unitarios $(U(\omega,s))_{(\omega,s)\in\Omega\times\mathbb{R}}\subset L(\mathcal{F})$, fuertemente continuo que extiende a $(V(\omega,s))_{(\omega,s)\in\Omega\times\Delta}$.*

Demostración.

Por el Lema 3.14, existe un grupo de operadores unitarios $(\widetilde{V}(s))_{s\in\mathbb{R}}\subset L(\mathcal{F})$ fuertemente continuo que extiende a $(V(0,s))_{s\in\Delta}$.

Para $(\omega,s)\in\Omega\times\mathbb{R}$, sea

$$U(\omega,s)=V(\omega,0)\widetilde{V}(s).$$

Se tiene que $(U(\omega,s))_{(\omega,s)\in\Omega\times\mathbb{R}}$ es un grupo de operadores unitarios fuertemente continuo, que extiende a $(V(\omega,s))_{(\omega,s)\in\Omega\times\Delta}$.

□

Supóngase que $\Delta\subset\Gamma$ y que Ω es un grupo topológico.

Teorema 4.14. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y $(T(\omega,s),\mathcal{H}(s))_{(\omega,s)\in\Omega\times I_\Gamma}$ un semigrupo local mixto de contracciones en $\mathcal{H}$ fuertemente continuo, entonces existe un espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y un grupo de operadores unitarios $(U(\omega,s))_{(\omega,s)\in\Omega\times\mathbb{R}}\subset L(\mathcal{F})$, fuertemente continuo tal que*

$$T(\omega,s)=P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}U(\omega,s)|_{\mathcal{H}(s)},\ \text{para todo } (\omega,s)\in\Omega\times I_\Gamma.$$

Demostración.

Del Teorema 4.10 existe un espacio de Hilbert $\mathcal{G}$ que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y un grupo de operadores unitarios $(W(\omega,s))_{(\omega,s)\in\Omega\times\Delta}\subset L(\mathcal{G})$ tales que

$$T(\omega,s)=P^{\mathcal{G}}_{\mathcal{H}}W(\omega,s)|_{\mathcal{H}(s)} \text{ para todo } (\omega,s)\in\Omega\times I_\Delta.$$

Sea $\mathcal{F}$ el subespacio cerrado de $\mathcal{G}$ generado por $\{W(\omega,s)h\ :\ (\omega,s)\in\Omega\times\Delta,\ h\in\mathcal{H}\}$ y sea $V(\omega,s)$ la restricción de $W(\omega,s)$ a $\mathcal{F}$, entonces $(V(\omega,s))_{(\omega,s)\in\Omega\times\Delta}\subset L(\mathcal{F})$ es un grupo de operadores unitarios tal que

$$T(\omega,s)=P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}V(\omega,s)|_{\mathcal{H}(s)} \text{ para todo } (\omega,s)\in\Omega\times I_\Delta.$$

Se probará que $(V(\omega,s))_{(\omega,s)\in\Omega\times\Delta}$ es fuertemente continuo.

Se tiene que el conjunto

$$\mathcal{F}_o=\left\{V(\omega,s)h\ :\ (\omega,s)\in\Omega\times\Delta,\ h\in\bigcup_{n=1}^{+\infty}\mathcal{H}\left(\tfrac{1}{2^n}\right)\right\}$$

es denso en $\mathcal{F}$, ya que $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty}\mathcal{H}\left(\tfrac{1}{2^n}\right)$ es denso en $\mathcal{H}$.

Sea $g\in\mathcal{F}_o$, entonces existen $(\omega_o,s_o)\in\Omega\times\Delta$, un número natural n_o y $h_o\in\mathcal{H}\left(\frac{1}{2^{n_o}}\right)$ tales que $g=V(\omega_o,s_o)h_o$.

Sean $\omega\in\Omega$ y $s\in I_\Delta$ tal que $s<\frac{1}{2^{n_o}}$, entonces

$$\begin{aligned}\|V(\omega,s)V(\omega_o,s_o)h_o-V(\omega_o,s_o)h_o\|^2_{\mathcal{F}}&=\|V(\omega,s)h_o-h_o\|^2_{\mathcal{F}}\\&=\langle\, V(\omega,s)h_o-h_o,V(\omega,s)h_o-h_o\rangle_{\mathcal{F}}\\&=2\langle\, h_o,h_o\rangle_{\mathcal{H}}-2Re\left(\langle\, P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}V(\omega,s)h_o,h_o\rangle_{\mathcal{H}}\right)\\&=2\langle\, h_o,h_o\rangle_{\mathcal{H}}-2Re\left(\langle\, T(\omega,s)h_o,h_o\rangle_{\mathcal{H}}\right)\end{aligned}$$

De esta última igualdad, de la continuidad fuerte del semigrupo local mixto y de la densidad de $\mathcal{F}_o$ en $\mathcal{F}$ sigue la continuidad fuerte del grupo $(V(\omega,s))_{(\omega,s)\in\Omega\times\Delta}$ en $(0,0)$. Como el grupo es unitario, entonces es fuertemente continuo.

Por el Lema 4.13 existe un grupo de operadores unitarios $(U(\omega,s))_{(\omega,s)\in\Omega\times\mathbb{R}}\subset L(\mathcal{F})$, fuertemente continuo tal que

$$U(\omega,s)=V(\omega,s) \text{ para todo } (\omega,s)\in\Omega\times\Delta.$$

Falta probar que $T(\omega,s)=P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}U(\omega,s)|_{\mathcal{H}(s)}$ para todo $(\omega,s)\in\Omega\times I_\Gamma$.

Sean $(\omega,s)\in\Omega\times I_\Gamma$ y $h\in\mathcal{H}(s)$. Como Δ es denso en $\mathbb{R}$ existe una sucesión creciente $\{s_n\}_{n\geq 1}$ en I_Δ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=s$. Se tiene que $\mathcal{H}(s)\subset\mathcal{H}(s_n)$ para todo n.

Por lo tanto, se tiene que

$$\begin{aligned}
T(\omega,s)h &= T(\omega,0)T(0,s)h\\
&= T(\omega,0)\left(\lim_{n\longrightarrow\infty} T(0,s_n)h\right)\\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} T(\omega,s_n)h\\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}V(\omega,s_n)h\\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}U(\omega,s_n)h\\
&= P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}U(\omega,s)h.
\end{aligned}$$

□

3. Extensión de funciones definidas positivas

Definición 4.15. Sea $(\mathcal{E},\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{E}})$ un espacio de Hilbert. La función $f:\Omega\times(\Gamma\cap(-a,a))\to L(\mathcal{E})$ es *definida positiva* si

$$\sum_{x,y\in\Omega\times([0,a)\cap\Gamma)} \langle f(x-y)h(x),h(y)\rangle_{\mathcal{E}}\geq 0$$

para toda función $h:\Omega\times([0,a)\cap\Gamma)\to\mathcal{E}$ de soporte finito.

Observación 4.16. La definición dada anteriormente generaliza la definición 3.17 dada en el Capítulo 3.

Análogamente a lo realizado en el Capítulo 3, a una función definida positiva se le puede asociar, de forma natural, una familia multiplicativa mixta de operadores isométricos con parámetro en $\Omega\times I_\Gamma$ y a valores en $L(\mathcal{E})$, donde $\mathcal{E}$ es un espacio de Hilbert.

Al igual que en el caso de una sola variable considerado en el capítulo anterior, se demuestra el siguiente resultado.

Proposición 4.17.

Sea $(\mathcal{E},\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{E}})$ un espacio de Hilbert separable.

(a) *Si* Ω *es numerable y* $f : \Omega \times (\Delta \cap (-1,1)) \to L(\mathcal{E})$ *es una función definida positiva, entonces el correspondiente espacio* $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$ *asociado a* f*, también es separable.*

(b) *Si* Ω *es un grupo topológico separable,* $\Delta \subset \Gamma$ *y* $f : \Omega \times (\Gamma \cap (-a,a)) \to L(\mathcal{E})$ *es una función definida positiva y fuertemente continua, entonces el correspondiente espacio* $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$ *asociado a* f*, también es separable.*

Por lo tanto, a partir de los Teoremas 4.10 y 4.14 se obtienen los siguientes resultados.

Teorema 4.18. *Supóngase que* Ω *es numerable. Sean* $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{E}})$ *un espacio de Hilbert separable y* $f : \Omega \times (\Delta \cap (-1,1)) \to L(\mathcal{E})$ *una función definida positiva tal que* $f(0,0) = I_{\mathcal{E}}$*, entonces* f *puede ser extendida a una función definida positiva* $F : \Omega \times \Delta \to L(\mathcal{E})$*.*

Teorema 4.19. *Supóngase que* Ω *es un grupo topológico separable y que* $\Delta \subset \Gamma$*. Sean* $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{E}})$ *un espacio de Hilbert separable y* $f : \Omega \times (\Gamma \cap (-1,1)) \to L(\mathcal{E})$ *una función fuertemente continua definida positiva tal que* $f(0,0) = I_{\mathcal{E}}$*, entonces* f *puede ser extendida a una función definida positiva fuertemente continua* $F : \Omega \times \mathbb{R} \to L(\mathcal{E})$*.*

Observación 4.20. Note que no es necesario asumir la continuidad fuerte de la función en el Teorema 4.18.

Observación 4.21. Para el caso $\Gamma = \mathbb{R}$, trabajar en el intervalo $(-1,1)$ no es ninguna restricción. Procediendo como en la Observación 3.16 se puede mostrar que el resultado es válido para una función definida positiva $f : \Omega \times (\Gamma \cap (-a,a)) \to L(\mathcal{E})$.

Bibliografía

[1] R. Bruzual, Local semigroups of contrations and some applications to Fourier representation theorems. Int. Eq. and Op. Theory, **10** (1987), 780-801. Citado en la(s) página(s): 23, 29, 33

[2] R. Bruzual and M. Domínguez, Extensions of operator valued positive definite functions and commutant lifting on ordered groups.Journal of Functional Analysis. **185**, No. 2 (2001), 456-473. Citado en la(s) página(s): 33

[3] R. Bruzual and M. Domínguez, Dilation of generalized Toeplitz kernels on ordered groups. Journal of Functional Analysis. **238**, N 2, 2006, 405-426.

[4] R. Bruzual, M. Domínguez, Dilatación, Extensión y Representación de Formas Definidas Positivas, 30 Aniversario del Postgrado en Matemática de la Ucv, Caracas, 2006.

[5] R. Bruzual, M. Domínguez, On unitary extensions of multiplicative families of partial isometries with a generating subspace. Semigroup Forum, **75** (2007), 634-647.

[6] R. Bruzual, M. Domínguez and M. Montilla, On unitary dilations of two-parameter semigroups of contractions and continuous commutant lifting. Acta Sci. Math. **77**, No. 3-4 (2011), 607-620. Citado en la(s) página(s):

[7] R. Bruzual, M. Domínguez y A. Padilla, Dilatación unitaria de semigrupos locales de contracciones. Acta Científica Venezolana. **62**, No. 1-2 (2011), 42-44.

[8] R. Bruzual, M. Domínguez and A. Padilla, On Dilation of Local Semigroups of Contractions and some Applications. Extracta Mathematicae. **27**, No. 2 (2012), 163-173.

[9] R.G. Douglas, Banach algebra techiques in operator theory, Academic Press, New York, 1972.

[10] M.L. Gorbachuck, Representation of positive definite operator functions. Ukrainian Math. J. **17** (1965), 29-46. 33

[11] M. Grossman and H. Langer, Über indexerhaltende Erweiterungen eines hermiteschen operators in Pontrjaginraum, Math. Nachrichten **64** (1974) 289-317. Citado en la(s) página(s): 33

[12] M. G. Kreĭn, Sur le problème du prolongement des fonctions hermitiennes positives et continues. Dokl. Akad. Nauk. SSSR **26** (1940), 17-22. 33

[13] M. A. Neumark. *Spectral functions of a symmetric operator,* Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. math. 4 (1940), 277–318.

[14] V. Paulsen, Completely bounded maps and dilations. Pitman Research Notes in Mathematics Series, 146. (1986).

[15] M.Ptak, Unitary dilations of multi-parameter semi-groups of operators, Ann. Polon. Math. 45 (1985), 237-243. Citado en la(s) página(s):

[16] W. Rudin, Functional analysis, 2d ed., McGraw-Hill, Boston, 1991.

[17] D. Sarason, Generalized interpolation in $\mathbf{H}^{\infty}$. Trans. Amer. Math. Soc. **127** (1967), 179-203.

[18] Z. Sasvári, Positive definite and definitizable functions, Akademie Verlag, 1994. Citado en la(s) página(s): 33

[19] M. Slocínski, Unitary dilation of two-parameter semi-groups of contractions II, Zezs. Nauk. Uniw.Jagiellon. Pr. Mat. 23. (1982), 191-194.

[20] B. Sz.-Nagy, C. Foias, Harmonic analysis of operators on Hilbert space, North Holland Publishing Co. 1970. Citado en la(s) página(s): 14, 18, 20

[21] B. Sz.-Nagy, Sur les contractions de l'space de Hilbert. Acta Sci. Math. **15** (1953), 87-92. Citado en la(s) página(s): 18