UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
POSTGRADO EN MATEMÁTICA

EXTENSIÓN DE FAMILIAS MULTIPLICATIVAS DE ISOMETRÍAS PARCIALES CON SUBESPACIO GENERADOR Y PARÁMETRO REAL.

Autor: Lic. Angel Padilla.
Tutor: Dr. Ramón Bruzual.

Trabajo de Grado de Maestría presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela para optar al título de Magister Scientiarium, Mención Matemática.

Caracas, Venezuela
Julio 2008

Índice general

Resumen 1

Introducción 2

Capítulo 1. Preliminares. 4

1. Álgebras $\mathcal{C}^*$. 4
2. El álgebra $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$. 8
3. Transformada de Gelfand y el cálculo funcional para funciones continuas. 9
4. Aplicaciones completamente positivas. 11

Capítulo 2. Representaciones unitarias y familias multiplicativas de isometrías parciales. 24

1. Representaciones unitarias. 24
2. Familias multiplicativas de isometrías parciales. 26

Capítulo 3. Extensiones unitarias de familias multiplicativas de isometrías parciales. 31

Capítulo 4. Extensión de funciones definidas positivas en un intervalo. 36

Bibliografía 43

Resumen

Se demuestra que toda familia multiplicativa de isometrías parciales, con parámetro en un intervalo de los racionales y con subespacio generador, se puede extender a una representación unitaria con parámetro racional. Además se prueba que si la familia es fuertemente continua existe una extensión unitaria fuertemente continua.

Este resultado se usa para demostrar que toda familia multiplicativa de isometrías parciales, fuertemente continua, con parámetro en un intervalo de la recta real y con subespacio generador, se puede extender a una representación unitaria fuertemente continua con parámetro real. Como aplicación, se da una nueva prueba de la versión a valores operadores del teorema de extensión de Krein.

Introducción

Las familias multiplicativas de isometrías parciales aparecen de manera natural en diversos problemas de la teoría de interpolación en análisis funcional (ver por ejemplo las referencias [**2**],[**5**],[**6**],[**14**],[**16**]).

Usando el teorema de extensión de Arveson combinado con el teorema de representación de Stinespring ([**15, 3, 12**]) Se demuestra que toda familia multiplicativa de isometrías parciales, con parámetro en un intervalo de los racionales y con subespacio generador, se puede extender a una representación unitaria con parámetro racional. Además se prueba que si la familia es fuertemente continua existe una extensión unitaria fuertemente continua.

Un resultado más general para grupos abelianos ordenados fue dado por Bruzual y Domínguez en [**8**]. Para la prueba utilizaron un resultado de completación de matrices positivas dado por Arsene, Ceausescu y Constantinescu en [**1**]. En este trabajo el parámetro varia en una estructura menos general, pero no es necesario recurrir al resultado de completación de matrices positivas mencionado.

El Capítulo 1 presenta una breve introducción sobre álgebras $\mathcal{C}^*$, teoría espectral y aplicaciones completamente positivas ([**4, 7, 12**]).

El Capítulo 2 contiene propiedades y resultados básicos de representaciones unitarias y familias multiplicativas de isometrías.

El Capítulo 3 contiene detalladamente un esquema de la prueba del Teorema 3.1:

Se le asocia una aplicación completamente positiva, definida en un sistema operador a una familia multiplicativa de isometrías parciales, con subespacio generador y parámetro en un intervalo racional (Lema 2.9). A partir de este resultado se prueba que toda familia multiplicativa de isometrías parciales, con parámetro en un intervalo de los racionales y con subespacio generador, se puede extender a una representación unitaria con parámetro racional (Teorema 3.1).

Luego se prueba que si la familia es fuertemente continua existe una extensión unitaria fuertemente continua (Lema 3.3).

Finalmente usando este resultado se demuestra que toda familia multiplicativa de isometrías parciales, fuertemente continua, con parámetro en un intervalo de la recta real y con subespacio generador, se puede extender a una representación unitaria fuertemente continua con parámetro real.

Como aplicación, en el Capítulo 4, se da una nueva demostración de la versión a valores operadores del teorema de extensión de Krein [**11**].

CAPíTULO 1

Preliminares.

El objetivo de éste capítulo es presentar algunas definiciones,teoremas y proposiciones que servirán de herramienta para la lectura de los siguientes capítulos.

A continuación se fija algo de la notación que se utilizará en el desarrollo de éste trabajo.

Como es usual $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ representan el conjunto de los números naturales, enteros, racionales, reales y complejos, respectivamente. Además, usaremos la siguiente convención.

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

1. Álgebras $\mathcal{C}^*$.

Definición 1.1. Un *álgebra* $\mathcal{A}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ en el que está definido un producto $. : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ que es distributivo, asociativo y compatible con el producto por un escalar. Es decir, para todo $a, b, c \in \mathcal{A}$ y para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, se tiene que

(i) a.(b.c)=(a.b).c
(ii) $a.(b + c) = a.b + a.c$
(iii) $(b + c).a = b.a + c.a$
(iv) $\lambda\,(a.b) = (\lambda\,a).b = a.(\lambda\,b)$.

Si existe un elemento $e \in \mathcal{A}$ tal que $e.a = a.e = a$ para todo $a \in \mathcal{A}$, se dice que $\mathcal{A}$ tiene *unidad*. En este caso, se dice que $a \in \mathcal{A}$ es *invertible* en $\mathcal{A}$ si existe $b \in \mathcal{A}$ tal que $a.b = b.a = e$.

Denotaremos b por a^{-1}. Además, si $a.b = b.a$ para todo $a, b \in \mathcal{A}$, se dice que $\mathcal{A}$ es *conmutativa.*

Definición 1.2. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra. Una *involución* en $\mathcal{A}$ es una aplicación $a \longmapsto a^*$ de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}$, tal que para todo $a, b \in \mathcal{A}$ y para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ se cumple que:

(i) $(a + b)^* = a^* + b^*$
(ii) $(a.b)^* = b^*.a^*$
(iii) $(\lambda\,a)^* = \overline{\lambda}a^*$
(iv) $(a^*)^* = a$.

El elemento a^* es llamado el *adjunto* de a y se tiene que:

- $0^* = 0$
- Si $\mathcal{A}$ tiene unidad e, entonces $e^* = e$.

DEFINICIÓN 1.3. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra con involución y $\mathcal{B}$ un subconjunto de $\mathcal{A}$, se dice que $\mathcal{B}$ es una *subálgebra con involución* de $\mathcal{A}$ si $\mathcal{B}$ es una variedad lineal y $a.b, a^* \in \mathcal{B}$ para todo $a, b \in \mathcal{B}$.

DEFINICIÓN 1.4. Un *álgebra de Banach* $\mathcal{A}$ es un álgebra en la que está definida una norma $\|.\|_{\mathcal{A}}$, tal que $(\mathcal{A}, \|.\|_{\mathcal{A}})$ es un espacio de Banach y

$$\|a.b\|_{\mathcal{A}} \leq \|a\|_{\mathcal{A}}\|b\|_{\mathcal{A}},$$

para todo $a, b \in \mathcal{A}$.

Si el álgebra tiene unidad, se supondrá que $\|e\|_{\mathcal{A}} = 1$.

Además, si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach con involución y

$$\|a^*a\|_{\mathcal{A}} = \|a\|_{\mathcal{A}}^2$$

para todo $a \in \mathcal{A}$, se dice que $\mathcal{A}$ es un *álgebra* $\mathcal{C}^*$.

OBSERVACIÓN 1.5. Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach, la desigualdad

$$\|a.b\|_{\mathcal{A}} \leq \|a\|_{\mathcal{A}}\|b\|_{\mathcal{A}}$$

hace del producto una función continua en $\mathcal{A}$.

Para $a \in \mathcal{A}$ se tiene que

$$\|a\|_{\mathcal{A}} = \|a^*\|_{\mathcal{A}}.$$

Además, si $\mathcal{A}$ es un álgebra $\mathcal{C}^*$ con unidad entonces la norma en $\mathcal{A}$ es única (ver [**4**, Ejercicio 60,11, pag. 257]).

DEFINICIÓN 1.6. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra $\mathcal{C}^*$ con unidad e, diremos que $a \in \mathcal{A}$ es:

(i) *Normal* si $a.a^* = a^*.a$.
(ii) *Autoadjunto* si $a = a^*$.
(iii) *Unitario* si $a.a^* = a^*.a = e$.

A continuación se dan algunos ejemplos de álgebras $\mathcal{C}^*$ que serán usados a lo largo de este trabajo.

Ejemplos.

(1) $\mathbb{C}$ con el producto usual, con la norma dada por el módulo, con involución, $z^* = \overline{z}$ para $z \in \mathbb{C}$, es un álgebra $\mathcal{C}^*$ conmutativa con unidad.

(2) El conjunto

$$\mathcal{C}(\mathbb{T}) = \{f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } f \text{ es continua}\},$$

es un álgebra $\mathcal{C}^*$ conmutativa con unidad, haciendo las siguientes convenciones:

(a) Para $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, definimos el producto por

$$f.g(z) = f(z)g(z) \text{ para todo } z \in \mathbb{T}.$$

(b) El elemento unidad de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ es la función

$$e(z) = 1 \text{ para todo } z \in \mathbb{T}.$$

(c) El adjunto de $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, viene dado por

$$f^*(z) = \overline{f}(z) = \overline{f(z)} \text{ para todo } z \in \mathbb{T}.$$

(d) Para $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, la norma viene dada por

$$\|f\|_\infty = \sup_{|z|=1} |f(z)|$$

(3) El conjunto

$$\mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : f \text{ es continua y acotada}\},$$

es un álgebra $\mathcal{C}^*$ conmutativa con unidad, haciendo las siguientes convenciones:

(a) Para $f, g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, definimos el producto por

$$f.g(x) = f(x)g(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

(b) El elemento unidad de $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ es la función

$$e_0(x) = 1 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

(c) El adjunto de $f \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, viene dado por

$$f^*(x) = \overline{f}(x) = \overline{f(x)} \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

(d) Para $f \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, la norma viene dada por

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$$

(4) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo, entonces el conjunto

$$L(\mathcal{H}) = \{T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} : T \text{ es lineal y continuo}\}$$

es un álgebra $\mathcal{C}^*$ no conmutativa con unidad, haciendo las siguientes convenciones:

(a) Se define el producto como la composición de operadores.

(b) El elemento unidad es el operador, definido por

$$I(h) = h \text{ para todo } h \in \mathcal{H} \quad \text{(Operador Identidad)}.$$

(c) El adjunto de $T \in L(\mathcal{H})$, viene dado por el operador T^* que satisface:

$$\langle T(h), h' \rangle_{\mathcal{H}} = \langle h, T^*(h') \rangle_{\mathcal{H}} \text{ para todo } h, h' \in \mathcal{H}.$$

(d) Para $T \in L(\mathcal{H})$, la norma viene dada por

$$\|T\|_{L(\mathcal{H})} = \sup_{\|h\|=1} \|T(h)\|.$$

Definición 1.7. Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(\mathcal{H})$, decimos que T es:

(a) Una *contracción* si $\|Th\| \leq \|h\|$ para todo $h \in \mathcal{H}$..
(b) Una *isometría* si $\|Th\| = \|h\|$ para todo $h \in \mathcal{H}$.
(c) *Unitario* si es una isometría sobreyectiva.

Observación 1.8. Sea $T \in L(\mathcal{H})$.

(a) T es una contracción si y sólo si $\langle (I - T^*T)h, h \rangle \geq 0$ para todo $h \in \mathcal{H}$, es decir, si $I - T^*T$ es un operador positivo.
(b) T es una isometría si y sólo si $T^*T = I$.
(c) T es unitario si y sólo si $T^*T = TT^* = I$.

Definición 1.9. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos álgebras $\mathcal{C}^*$, con unidad $e_{\mathcal{A}}$ y $e_{\mathcal{B}}$ respectivamente. Sea $\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ una aplicación, diremos que ϕ es un *homomorfismo unital** si:

(i) ϕ es un homomorfismo de álgebras
(ii) ϕ es unital; es decir $\phi(e_{\mathcal{A}}) = e_{\mathcal{B}}$
(iii) ϕ es una aplicación*; es decir $\phi(a^*) = (\phi(a))^*$ para todo $a \in \mathcal{A}$.

Se dice que $\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es una *aplicación isométrica* si

$$\|\phi(a)\|_{\mathcal{B}} = \|a\|_{\mathcal{A}} \text{ para todo } a \in \mathcal{A}.$$

2. El álgebra $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$.

Sean $\mathcal{A}$ un álgebra $\mathcal{C}^*$ con unidad, $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ el conjunto de las matrices $n \times n$, cuyas entradas son elementos de $\mathcal{A}$. Para $[a_{ij}]_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ definimos la involución dada por

$$\left([a_{ij}]_{i,j=1}^n\right)^* = [a_{ji}^*]_{i,j=1}^n.$$

Con el producto usual de matrices y esta involución, obtenemos que $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ es un álgebra con involución.

A continuación veremos que es posible definir una norma en $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ con la cual adquiere estructura de álgebra $\mathcal{C}^*$. Por el teorema de Gelfand-Naimark-Segal (ver [**4**, Teorema 62.1]) existe un espacio de Hilbert complejo $\mathcal{H}$ tal que $\mathcal{A}$ es isométricamente isomorfa a una subálgebra con involución y cerrada $\mathcal{G}$ de $L(\mathcal{H})$. Entonces podemos identificar $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ con $\mathcal{M}_n(\mathcal{G}) \subset \mathcal{M}_n(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$.

Además $L\left(\bigoplus_{j=1}^n \mathcal{H}\right)$ se puede identificar, de manera natural, con el conjunto de las matrices $n \times n$ cuyas entradas son elementos de $L(\mathcal{H})$, esta identificación induce una norma en $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$. Con esta norma $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ es un álgebra $\mathcal{C}^*$ no conmutativa con unidad.

Ejemplo.

Sea $\mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Para $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, podemos escribir

$$Ax = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \ldots, a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n)$$

para $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Sean $\langle , \rangle$ el producto interno en $\mathbb{R}^n$, definido por

$$\langle\, x, y\rangle = x_1y_2 + \cdots + x_ny_n$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ y la norma

$$\|x\|_2 = (\langle\, x, x\rangle)^{1/2}.$$

Entonces, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es un álgebra $\mathcal{C}^*$, con la norma

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2.$$

3. Transformada de Gelfand y el cálculo funcional para funciones continuas.

En esta sección se da una breve introducción a la teoría espectral, lo cual servirá de base en la comprensión de la teoría de aplicaciones completamente positivas.

Definición 1.10. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad e, el *espectro* de $a \in \mathcal{A}$ es:

$$\sigma_{\mathcal{A}}(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda\, e \text{ no es invertible}\}.$$

Para la demostración del siguiente resultado ver [**9**, pag. 41].

Teorema 1.11. *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach con unidad e y $a \in \mathcal{A}$, entonces $\sigma_{\mathcal{A}}(a)$ es un espacio de Hausdorff compacto no vacío y*

$$\sigma_{\mathcal{A}}(a) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|a\|_{\mathcal{A}}\}.$$

Observación 1.12. Sean $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad e y $a \in \mathcal{A}$.

(1) a es autoadjunto si y sólo si $\sigma_{\mathcal{A}}(a) \subset \mathbb{R}$.
(2) a es unitario si y sólo si $\sigma_{\mathcal{A}}(a) \subset \mathbb{T}$.

Observación 1.13. Si $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad y $\mathcal{B}$ es una subálgebra de $\mathcal{A}$, entonces

- Puede ocurrir que $a \in \mathcal{B}$ no sea invertible en $\mathcal{B}$ pero si sea invertible en $\mathcal{A}$. Por lo tanto, el espectro de a depende del álgebra.
- Siempre se cumple que
$$\sigma_{\mathcal{A}}(a) \subset \sigma_{\mathcal{B}}(a).$$
- Si $\mathcal{A}$ es un álgebra $\mathcal{C}^*$ con unidad e y $\mathcal{B}$ es una subálgebra con involución y cerrada de $\mathcal{A}$, tal que $e \in \mathcal{B}$, entonces
$$\sigma_{\mathcal{A}}(a) = \sigma_{\mathcal{B}}(a).$$

Ejemplos.

(i) Para $\mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, sea $A \in \mathcal{A}$ entonces
$$\sigma_{\mathcal{A}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(A - \lambda\, I) = 0\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ es un autovalor de } A\}.$$
(ii) Sea X un espacio de Hausdorff compacto no vacío y $\mathcal{A} = \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$, entonces
$$\sigma_{\mathcal{A}}(f) = \{f(x) : x \in X\}$$
para toda $f \in \mathcal{A}$.

(iii) Para $\mathcal{A} = \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ y $f \in \mathcal{A}$, se tiene que

$$\sigma_{\mathcal{A}}(f) = \overline{\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}}.$$

(iv) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $\mathcal{A} = L(\mathcal{H})$. Para $T \in \mathcal{A}$ tenemos que

$$\sigma_{\mathcal{A}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ no es invertible}\}.$$

Observación 1.14. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad. Si $\mathcal{A}$ tiene dimensión infinita puede ocurrir que $\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(a)$ y sin embargo λ no sea un autovalor de a.

En efecto, sea

$$\mathcal{A} = \left\{ \{x_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}.$$

Sea $\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$, definido por $\phi(\{x_n\}_{n \geq 1}) = \{x_n/n\}_{n \geq 1}$.

Se tiene que, ϕ es un operador inyectivo, por lo tanto el vector $\overrightarrow{0}$ no es un autovalor de ϕ, pero por otro lado se puede probar que ϕ no es invertible, lo que implica que $\overrightarrow{0} \in \sigma_{\mathcal{A}}(\phi)$.

A diferencia de las álgebras de Banach complejas, puede ocurrir que un elemento de un álgebra de Banach real tenga espectro vacío.

En efecto, sean $\mathcal{A} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como A no tiene autovalores reales, entonces $\sigma_{\mathcal{A}}(A) = \emptyset$.

Notar que si se toma $\mathcal{A} = \mathcal{M}_2(\mathcal{C})$ entonces $\sigma_{\mathcal{A}}(A) = \{-i, i\}$.

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra $\mathcal{C}^*$ conmutativa con unidad, definimos

$$\mathcal{M}_{\mathcal{A}} = \{\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi \text{ es un homomorfismo unital}\}.$$

En [**13**, páginas 277 y 280] se prueba que $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ es un espacio de Hausdorff compacto no vacío.

Definición 1.15. Sea $\mathcal{A}$ es un álgebra $\mathcal{C}^*$ conmutativa con unidad. La *transformada de Gelfand*, es la aplicación

$$\Gamma : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{M}_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})$$

definida por

$$\Gamma(a)(\varphi) = \varphi(a),$$

para todo $a \in \mathcal{A}$ y $\varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$.

El teorema de Gelfand-Naimark (ver [**13**, pag. 289]) establece que la transformada de Gelfand es un isomorfismo isométrico*.

Para el caso particular en que $\mathcal{A} = L(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert complejo, esta transformada da origen a un cálculo funcional, para funciones continuas, de la siguiente manera: Si $T \in L(\mathcal{H})$ es normal y $f \in \mathcal{C}(\sigma(T), \mathbb{C})$, entonces

$$f(T) = \Gamma^{-1}(f \circ \Gamma(T)).$$

Ejemplo.

Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, definida por $f(z) = z^n$.

Si $T \in L(\mathcal{H})$ es normal, entonces

$$f(T) = T^n.$$

Para la demostración del siguiente resultado ver [**9**, pag. 93].

TEOREMA 1.16. *Sean $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(\mathcal{H})$ normal, entonces la aplicación $f \longmapsto f(T)$ de $\mathcal{C}(\sigma(T), \mathbb{C})$ en $L(\mathcal{H})$ es un homomorfismo isométrico*. Además se tiene que*

$$\sigma(f(T)) = f(\sigma(T)).$$

4. Aplicaciones completamente positivas.

DEFINICIÓN 1.17. Sean $\mathcal{A}$ un álgebra $\mathcal{C}^*$ y $a \in \mathcal{A}$, se dice que a es *positivo* si $a = a^*$ y $\sigma_{\mathcal{A}}(a) \subset [0, \infty)$.

Se puede probar que si $\mathcal{A}$ un álgebra $\mathcal{C}^*$ y $a \in \mathcal{A}$, entonces a es positivo si y sólo si existe $b \in \mathcal{A}$ tal que $a = b^*.b$. Si a es positivos esciribiremos $a \geq 0$, con esta notación diremos que $a \leq b$ si $b - a$ es positivo.

PROPOSICIÓN 1.18. *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra $\mathcal{C}^*$ con unidad e y $a \in \mathcal{A}$. Si a es un elemento autoadjunto, entonces*

$$-\|a\|e \leq a \leq \|a\|e.$$

DEMOSTRACIÓN.

Debemos probar que:

(1) $\|a\|e + a \geq 0$,
(2) $\|a\|e - a \geq 0$.

Sólo probaremos que $\|a\|e + a \geq 0$, la demostración de la otra parte es análoga.

Como $a = a^*$, tenemos que $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$. En virtud del Teorema 1.11 se deduce que

$$\sigma(a) \subset \{\lambda \in \mathbb{R} : |\lambda| \leq \|a\|\} = [-\|a\|, \|a\|],$$

sea $f : \sigma(a) \longrightarrow \mathbb{R}$, la función definida por

$$f(\lambda) = \|a\| + \lambda,$$

se tiene que

$$\sigma(\|a\|e + a) = \sigma(f(a)) = f(\sigma(a)) \subset f([-\|a\|, \|a\|]) = [0, 2\|a\|] \subset [0, \infty).$$

Por lo tato $\|a\|e + a \geq 0$. □

Corolario 1.19. *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra $\mathcal{C}^*$ con unidad e, entonces*

$$0 \leq a^*a \leq \|a\|^2 e,$$

para todo $a \in \mathcal{A}$.

Demostración.

Dado $a \in \mathcal{A}$, sea $b = a^*a$. Por definición tenemos que $b \geq 0$.

Por otro lado, como b es autoadjunto, de la proposición anterior sigue el resultado. □

Observación 1.20. Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathcal{H})$ entonces

(1) A es positiva si y sólo si $\langle A\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}\rangle_{\mathcal{H}^n} \geq 0$, para todo $\overrightarrow{x} \in \mathcal{H}^n$.

(2) $A \leq B$ si $B - A$ es positiva.

Definición 1.21. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos álgebras $\mathcal{C}^*$ y $\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ una aplicación. Para $n \in \mathbb{N}$ definimos $\phi_n : \mathcal{M}_n(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathcal{B})$ por

$$\phi_n\left((a_{ij})_{i,j=1}^n\right) = (\phi(a_{ij}))_{i,j=1}^n .$$

Definición 1.22. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos álgebras $\mathcal{C}^*$ y $\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ una aplicación. Se dice que ϕ es *positiva* si $\phi(a)$ es positivo para todo a en $\mathcal{A}$ positivo. Se dice que ϕ es *completamente positiva* si $\phi_n\left((a_{ij})_{i,j=1}^n\right)$ es positivo para todo $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ en $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ positivo.

Claramente toda aplicación completamente positiva es positiva.

A continuación veremos un ejemplo de una aplicación positiva que no es completamente positiva.

Ejemplos 1.23. Sea $\phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ definida por

$$\phi((a_{ij})_{i,j=1}^2) = (\overline{a_{ji}})_{i,j=1}^2,$$

es decir ϕ le asigna a cada matriz su transpuesta conjugada.

Se tiene que ϕ es positiva ya que una matriz es positiva si y sólo si su transpuesta conjugada lo es.

Veamos que ϕ no es completamente positiva, para esto basta ver que ϕ_2 no es positiva. Consideremos la siguiente matriz en $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

la cual es positiva, ya que coincide con su transpuesta conjugada y sus autovalores son $\lambda = 0$ y $\lambda = 2$. Sin embargo, usando la identificación natural entre $\mathcal{M}_2(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}))$ y $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ tenemos que

$$\phi_2\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

no es positiva, ya que uno de sus autovalores es $\lambda = -1$.

Proposición 1.24. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos álgebras $\mathcal{C}^*$. Si $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es un homomorfismo* entonces φ es completamente positiva.*

Demostración.

Sea $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ positivo, entonces existe una matriz $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ tal que $A = B^*B$, por lo tanto

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ki}^*.b_{kj},$$

como φ es un homomorfismo*, se tiene que

$$\begin{aligned}
\varphi_n(A) &= (\varphi(a_{ij}))_{i,j=1}^n \\
&= \left(\varphi\left(\sum_{k=1}^n b_{ki}^*.b_{kj}\right)\right)_{i,j=1}^n \\
&= \left(\sum_{k=1}^n \varphi(b_{ki}^*.b_{kj})\right)_{i,j=1}^n \\
&= \left(\sum_{k=1}^n \varphi(b_{ki}^*).\varphi(b_{kj})\right)_{i,j=1}^n \\
&= \left(\sum_{k=1}^n [\varphi(b_{ki})]^*.\varphi(b_{kj})\right)_{i,j=1}^n \\
&= ([\varphi(b_{ji})]^*)_{i,j=1}^n . (\varphi(b_{ij}))_{i,j=1}^n \\
&= \left[(\varphi(b_{ij}))_{i,j=1}^n\right]^* . (\varphi(b_{ij}))_{i,j=1}^n ,
\end{aligned}$$

de lo cual se deduce que $\varphi_n(A) = D^*.D$ donde $D = (\varphi(b_{ij}))_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n(\mathcal{B})$.

Luego φ es completamente positiva.

□

Como consecuencia del Teorema 1.16 y la Proposición 1.24 se tiene el siguiente resultado.

COROLARIO 1.25. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $U \in L(\mathcal{H})$ unitario. Entonces la aplicación lineal $\Phi : \mathcal{C}(\mathbb{T}) \longrightarrow L(\mathcal{H})$, dada por*

$$\Phi(f) = f(U) \quad \textit{para } f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}),$$

es completamente positiva.

PROPOSICIÓN 1.26. *Sean $\mathcal{A}$ un álgebra $\mathcal{C}^*$, $\mathcal{H}$ y $\mathcal{F}$ dos espacios de Hilbert, $J : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{F}$ un operador acotado y $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow L(\mathcal{F})$ un homomorfismo unital*. Entonces la aplicación $\phi : \mathcal{A} \longrightarrow L(\mathcal{H})$ definida por $\phi(a) = J^*\varphi(a)J$ es completamente positiva.*

DEMOSTRACIÓN.

Sea $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ positivo, por lo tanto existe $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ tal que $A = B^*B$, de manera que

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ki}^*.b_{kj},$$

como φ es un homomorfismo*, tenemos que

$$\begin{aligned}
\phi_n(A) &= (\phi(a_{ij}))_{i,j=1}^n \\
&= \left(\phi\left(\sum_{k=1}^n b_{ki}^*.b_{kj}\right)\right)_{i,j=1}^n \\
&= \left(J^*\varphi\left(\sum_{k=1}^n b_{ki}^*.b_{kj}\right)J\right)_{i,j=1}^n \\
&= \left(\sum_{k=1}^n J^*\varphi\left(b_{ki}^*.b_{kj}\right)J\right)_{i,j=1}^n \\
&= \left(\sum_{k=1}^n J^*\left[\varphi(b_{ki})\right]^*.\varphi(b_{kj})J\right)_{i,j=1}^n \\
&= \left(\sum_{k=1}^n \left[\varphi(b_{ki})J\right]^*.\varphi(b_{kj})J\right)_{i,j=1}^n \\
&= \left(\left[\varphi(b_{ji})J\right]^*\right)_{i,j=1}^n.\left(\varphi(b_{ij})J\right)_{i,j=1}^n \\
&= \left[\left(\varphi(b_{ij})J\right)_{i,j=1}^n\right]^*.\left(\varphi(b_{ij})J\right)_{i,j=1}^n,
\end{aligned}$$

de aqui se obtiene que $\phi_n(A) = D^*.D$ donde $D = (\varphi(b_{ij})J)_{i,j=1}^n$.

Falta ver que $D \in \mathcal{M}_n(L(\mathcal{H}))$. Para esto, basta probar que $\varphi(a)J \in L(\mathcal{H})$ para todo $a \in \mathcal{A}$. Como φ es un homomorfismo unital*, entonces $\|\varphi\| = \|\varphi(e_{\mathcal{A}})\| = 1$, lo que implica que

$$\|\varphi(a)Jh\| \leq \|J\|\|h\| \quad \text{para todo } h \in \mathcal{H}.$$

$\square$

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. En general un teorema de dilatación es un resultado que caracteriza alguna clase de aplicaciones en $L(\mathcal{H})$ como compresiones a $\mathcal{H}$ de aplicaciones en $L(\mathfrak{F})$ con mejores propiedades, donde $\mathfrak{F}$ es un espacio de Hilbert que contiene a $\mathcal{H}$.

Uno de los teoremas de dilatación más generales es el teorema de representación de Stinespring el cual caracteriza las aplicaciones completamente positivas de un álgebra $\mathcal{C}^*$ en $L(\mathcal{H})$ como compresiones de homomorfismos*.

Según el teorema de representación de Stinespring (ver [**15**],[**12**]) toda aplicación completamente positiva es de la forma señalada en la Proposición 1.26, más precisamente se tiene.

TEOREMA 1.27 (Stinespring [**15**]). *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $\mathcal{A}$ un álgebra $\mathcal{C}^*$ con unidad $e_{\mathcal{A}}$ y $\phi : \mathcal{A} \longrightarrow L(\mathcal{H})$ una aplicación completamente positiva. Entonces existe un espacio de Hilbert $\mathfrak{F}$, un homomorfismo unital* $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow L(\mathfrak{F})$ y un operador acotado $J : \mathcal{H} \longrightarrow \mathfrak{F}$ con $\|\phi(e_{\mathcal{A}})\| = \|J\|^2$ tal que $\phi(a) = J^*\varphi(a)J$ para todo $a \in \mathcal{A}$.*

DEMOSTRACIÓN.

Consideremos el producto tensorial $\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}$. Para $a, b \in \mathcal{A}$ y $x, y \in \mathcal{H}$ definamos la función simétrica bilineal $\langle \, , \rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}}$ en este espacio por

$$\langle\, a \otimes x, b \otimes y\rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}} = \langle\, \phi(b^*a)x, y\rangle_{\mathcal{H}},$$

donde $\langle \, , \rangle_{\mathcal{H}}$ es el producto interno en $\mathcal{H}$.

Veamos que la función $\langle \, , \rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}}$ es positiva. Si $n \in \mathbb{N}; x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{H}$ y $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left\langle \sum_{j=1}^{n} a_j \otimes x_j, \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i \right\rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}} &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle\, a_j \otimes x_j, a_i \otimes x_i\rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \langle\, \phi(a_i^* a_j)\, x_j, x_i\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \left\langle \phi_n \left[(a_i^* a_j)_{i,j=1}^{n}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}^n},
\end{aligned}$$

por otro lado, tenemos que la matriz $A = (a_i^* a_j)_{i,j=1}^{n} \in \mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ es positiva, ya que $A = B^*B$ donde

$$B = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix},$$

además, como ϕ es completamente positiva

$$\left\langle \phi_n \left[(a_i^* a_j)_{i,j=1}^{n}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}^n} \geq 0,$$

de aqui se sigue que

$$\left\langle \sum_{j=1}^{n} a_j \otimes x_j, \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i \right\rangle \geq 0,$$

sin embargo la forma bilineal definida anteriormente puede ser degenerada. Hagamos la completación para obtener un espacio con producto interno, sea

$$\mathcal{N} = \{u \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{H} : \langle u, u \rangle = 0\},$$

como

$$|\langle u, v \rangle|^2_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}} \leq \langle u, u \rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}} . \langle v, v \rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}} \quad \text{para todo} \quad u, v \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{H},$$

entonces

$$\mathcal{N} = \{u \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{H} : \langle u, v \rangle = 0 \text{ para todo } v \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{H}\},$$

de lo anterior se deduce que $\mathcal{N}$ es un subespacio de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{H}$. Por lo tanto $\langle\, , \rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}}$ induce un producto interno en el espacio $\mathcal{A} \otimes \mathcal{H}/\mathcal{N}$ de la siguiente manera,

$$\langle u + \mathcal{N}, v + \mathcal{N} \rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}/\mathcal{N}} = \langle u, v \rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}} \text{ para } u, v \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{H}.$$

Sea $\mathfrak{F}$ la completación a espacios de Hilbert del espacio con producto interno $\mathcal{A} \otimes \mathcal{H}/\mathcal{N}$.

Para $a \in \mathcal{A}$, sea $\varphi_1(a) : \mathcal{A} \otimes \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{H}$ el operador lineal definido por

$$\varphi_1(a) \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i \right) = \sum_{i=1}^{n} (a a_i) \otimes x_i,$$

donde $n \in \mathbb{N}; x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{H}$ y $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$. Veamos que $\varphi_1(a)$ deja invariante a $\mathcal{N}$, para esto veamos primero que si $n \in \mathbb{N}; x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{H}$ y $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$, entonces

$$(a_i^* a^* a a_j)_{i,j=1}^{n} = (aIB)^* aIB,$$

donde I es la matriz identidad en $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$ y $B = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$.

En efecto

$$\begin{aligned}
(aIB)^*(aIB) &= \frac{1}{n}\begin{pmatrix} a_1^*a^* & a_1^*a^* & \cdots & a_1^*a^* \\ a_2^*a^* & a_2^*a^* & \cdots & a_2^*a^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^*a^* & a_n^*a^* & \cdots & a_n^*a^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} aa_1 & aa_2 & \cdots & aa_n \\ aa_1 & aa_2 & \cdots & aa_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ aa_1 & aa_2 & \cdots & aa_n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{n}\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_1^*a^*aa_1 & \sum_{k=1}^n a_1^*a^*aa_2 & \cdots & \sum_{k=1}^n a_1^*a^*aa_n \\ \sum_{k=1}^n a_2^*a^*aa_1 & \sum_{k=1}^n a_2^*a^*aa_2 & \cdots & \sum_{k=1}^n a_2^*a^*aa_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_n^*a^*aa_1 & \sum_{k=1}^n a_n^*a^*aa_2 & \cdots & \sum_{k=1}^n a_n^*a^*aa_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1^*a^*aa_1 & a_1^*a^*aa_2 & \cdots & a_1^*a^*aa_n \\ a_2^*a^*aa_1 & a_2^*a^*aa_2 & \cdots & a_2^*a^*aa_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^*a^*aa_1 & a_n^*a^*aa_2 & \cdots & a_n^*a^*aa_n \end{pmatrix} \\
&= (a_i^*a^*aa_j)_{i,j=1}^n,
\end{aligned}$$

además, por el teorema de Gelfand-Naimark-Segal (ver [**4**, Teorema 62.1]) existe un espacio de Hilbert $\mathcal{G}$ tal que $\mathcal{A}$ se puede identificar con una subálgebra $\mathcal{C}^*$ de $L(\mathcal{G})$.

Si $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathcal{G}$ entonces

$$\begin{aligned}
\left\langle (aIB)^*aIB\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}\right\rangle_{\mathcal{G}^n} &= \left\langle aIB\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, aIB\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}\right\rangle_{\mathcal{G}^n} \\
&= \left\langle a^*aB\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, B\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}\right\rangle_{\mathcal{G}^n}.
\end{aligned}$$

En virtud del Corolario 1.19 se tiene que $a^*a \leq \|a\|^2_{\mathcal{A}} e_{\mathcal{A}}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\left\langle a^*aB \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, B \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{G}^n} &\leq \|a\|^2_{\mathcal{A}} \left\langle B^*B \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{G}^n} \\
&= \|a\|^2_{\mathcal{A}} \left\langle (a_i^* a_j)_{i,j=1}^n \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{G}^n} .
\end{aligned}$$

De lo anterior se obtiene que $(a_i^* a^* a a_j)_{i,j=1}^n \leq \|a\|^2_{\mathcal{A}} (a_i^* a_j)_{i,j=1}^n$. Además ϕ es completamente positiva, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\left\langle \varphi_1(a) \left(\sum_{j=1}^n a_j \otimes x_j \right), \varphi_1(a) \left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes x_i \right) \right\rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}} &= \sum_{i,j}^n \langle (aa_j) \otimes x_j, (aa_i) \otimes x_i \rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}} \\
&= \sum_{i,j=1}^n \langle \phi(a_i^* a^* a a_j)\, x_j, x_i \rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \left\langle \phi_n \left[(a_i^* a^* a a_j)_{i,j=1}^n \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}^n} \\
&\leq \|a\|^2_{\mathcal{A}} \left\langle \phi_n \left[(a_i^* a_j)_{i,j=1}^n \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}^n} \\
&= \|a\|^2_{\mathcal{A}} \sum_{i,j=1}^n \langle \phi(a_i^* a_j) x_j, x_i \rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \|a\|^2_{\mathcal{A}} \sum_{i,j=1}^n \langle a_j \otimes x_j, a_i \otimes x_i \rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}} \\
&= \|a\|^2_{\mathcal{A}} \left\langle \sum_{j=1}^n a_j \otimes x_j, \sum_{i=1}^n a_i \otimes x_i \right\rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}} .
\end{aligned}$$

De lo cual obtenemos que

(1.1)
$$\left\langle \varphi_1(a)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j \otimes x_j\right), \varphi_1(a)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i\right)\right\rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}} \leq \|a\|_{\mathcal{A}}^2 \left\langle \sum_{j=1}^{n} a_j \otimes x_j, \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i \right\rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}}.$$

De la inecuación anterior se obtiene qe si $b\otimes y \in \mathcal{N}$ entonces

$$\langle \varphi_1(a)(b\otimes y), \varphi_1(a)(b\otimes y)\rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}} \leq \|a\|_{\mathcal{A}}^2\langle b\otimes y, b\otimes y\rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}} = 0,$$

lo que implica que $\varphi_1(a)(b\otimes y) \in \mathcal{N}$, de aqui se sigue que $\varphi_1(a)$ deja invariante a $\mathcal{N}$. Por lo tanto $\varphi_1(a)$ permite definir un operador lineal $\varphi(a)$ en $\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}/\mathcal{N}$ de la siguiente manera, $\varphi(a) : \mathcal{A}\otimes\mathcal{H}/\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{A}\otimes\mathcal{H}/\mathcal{N}$ lo definimos por

$$\varphi(a)\,(b\otimes x + c\otimes y) = \varphi_1(a)\,(b\otimes x) + \varphi_1(a)\,(c\otimes y)$$

donde $b\otimes x \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{H}$ y $c\otimes y \in \mathcal{N}$. De la ecuación (1.1) se tiene que $\varphi(a)$ es acotado y $\|\varphi(a)\| \leq \|a\|$. Por lo tanto, $\varphi(a)$ se puede extender a $\overline{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}/\mathcal{N}} = \mathfrak{F}$, dicha extensión la seguiremos llamando $\varphi(a)$.

Sea $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow L(\mathfrak{F})$, la aplicación definida por

$$\varphi(a)\,(c\otimes x + d\otimes y) = (ac)\otimes x + (ad)\otimes y,$$

donde $a \in \mathcal{A}$, $c\otimes x \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{H}$ y $d\otimes y \in \mathcal{N}$. φ es un homomorfismo unital*, es decir, si $a, b \in \mathcal{A}$ entonces

(1) $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$
(2) $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$
(3) $\varphi(e_{\mathcal{A}}) = I_{L(\mathfrak{F})}$ (operador identidad)
(4) $[\varphi(a)]^* = \varphi(a^*)$.

Sólo probaremos (3) y (4). Sean $c\otimes x \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{H}$ y $d\otimes y \in \mathcal{N}$, entonces

$$\varphi(e_{\mathcal{A}})(c\otimes x + d\otimes y) = (e_{\mathcal{A}}c)\otimes x + (e_{\mathcal{A}}d)\otimes y = c\otimes x + d\otimes y,$$

lo que implica que $\varphi(e_{\mathcal{A}}) = I_{L(\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}/\mathcal{N})} = I_{L(\mathfrak{F})}$. Por otro lado, si $c_1 \otimes x_1, c_2 \otimes x_2 \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{H}$ y $d_1 \otimes y_1, d_2 \otimes y_2 \in \mathcal{N}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
&\langle \varphi(a)(c_1 \otimes x_1 + d_1 \otimes y_1), c_2 \otimes x_2 + d_2 \otimes y_2\rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}/\mathcal{N}} \\
&= \langle (ac_1) \otimes x_1 + (ad_1) \otimes y_1, c_2 \otimes x_2 + d_2 \otimes y_2\rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}/\mathcal{N}} \\
&= \langle (ac_1) \otimes x_1, c_2 \otimes x_2\rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}} \\
&= \langle \phi(c_2^* ac_1)x_1, x_2\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \langle \phi[(a^*c_2)^* c_1]x_1, x_2\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \langle c_1 \otimes x_1, (a^*c_2) \otimes x_2\rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}} \\
&= \langle c_1 \otimes x_1 + d_1 \otimes y_1, (a^*c_2) \otimes x_2 + (a^*d_2) \otimes y_2\rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}/\mathcal{N}} \\
&= \langle c_1 \otimes x_1 + d_1 \otimes y_1, \varphi(a^*)(c_2 \otimes x_2 + d_2 \otimes y_2)\rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}/\mathcal{N}},
\end{aligned}$$

de lo cual obtenemos que

$$[\varphi(a)]^*(c_2 \otimes x_2 + d_2 \otimes y_2) = \varphi(a^*)(c_2 \otimes x_2 + d_2 \otimes y_2)$$

y como el espacio $\mathcal{A} \otimes \mathcal{H}/\mathcal{N}$ es denso en $\mathfrak{F}$ se sigue que $[\varphi(a)]^* = \varphi(a^*)$.

Sea $J : \mathcal{H} \longrightarrow \mathfrak{F}$ el operador definido por

$$Jx = e_{\mathcal{A}} \otimes x + \mathcal{N}$$

Veamos que J es acotado y que $\|J\|^2 = \|\phi(e_{\mathcal{A}})\|$. En efecto

$$\begin{aligned}
\|J\|^2 &= \sup_{\|x\|=1} \|Jx\|^2_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}/\mathcal{N}} \\
&= \sup_{\|x\|=1} \langle e_{\mathcal{A}} \otimes x + \mathcal{N}, e_{\mathcal{A}} \otimes x + \mathcal{N}\rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}/\mathcal{N}} \\
&= \sup_{\|x\|=1} \langle e_{\mathcal{A}} \otimes x, e_{\mathcal{A}} \otimes x\rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}} \\
&= \sup_{\|x\|=1} \langle \phi(e_{\mathcal{A}}^* e_{\mathcal{A}})x, x\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \sup_{\|x\|=1} \langle \phi(e_{\mathcal{A}})x, x\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \|\phi(e_{\mathcal{A}})\|.
\end{aligned}$$

Para finalizar, dado $a \in \mathcal{A}$ se tiene que si $x, y \in \mathcal{H}$ entonces

$$\begin{aligned}
\langle J^*\varphi(a)Jx, y\rangle_{\mathcal{H}} &= \langle \varphi(a)Jx, Jy\rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}/\mathcal{N}} \\
&= \langle \varphi(a)(e_{\mathcal{A}} \otimes x + \mathcal{N}), e_{\mathcal{A}} \otimes y + \mathcal{N}\rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}/\mathcal{N}} \\
&= \langle \varphi_1(a)(e_{\mathcal{A}} \otimes x) + \varphi_1(\mathcal{N}), e_{\mathcal{A}} \otimes y + \mathcal{N}\rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}/\mathcal{N}} \\
&= \langle a \otimes x + \mathcal{N}, e_{\mathcal{A}} \otimes y + \mathcal{N}\rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}/\mathcal{N}} \\
&= \langle a \otimes x, e_{\mathcal{A}} \otimes y\rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}} \\
&= \langle \phi({e_{\mathcal{A}}}^* a)x, y\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \langle \phi(a)x, y\rangle_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

De lo cual se deduce que

$$\phi(a) = J^*\varphi(a)J \quad \text{para todo} \quad a \in \mathcal{A}.$$

$\square$

Observación 1.28. En el teorema anterior como φ es un homomorfismo unital, entonces $\phi(e_{\mathcal{A}}) = J^*J$.

Luego, si ϕ es unital se obtiene que J es una isometría y por lo tanto, $J : \mathcal{H} \longrightarrow J(\mathcal{H})$ es un isomorfismo isométrico y como $J(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{F}$, podemos identificar $\mathcal{H}$ con el subespacio cerrado $J(\mathcal{H})$. Con esta identificación, tenemos que

$$J^* = P^{\mathfrak{F}}_{\mathcal{H}},$$

de donde,

$$\phi(a) = P^{\mathfrak{F}}_{\mathcal{H}}\varphi(a)|_{\mathcal{H}}$$

para todo $a \in \mathcal{A}$.

Definición 1.29. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra $\mathcal{C}^*$ y S un subconjunto de $\mathcal{A}$, se define

$$S^* = \{a \in \mathcal{A} : a^* \in S\}.$$

Se dice que S es *autoadjunto* si $S = S^*$.

Si además $\mathcal{A}$ tiene unidad, se dice que $S \subset \mathcal{A}$ es un *sistema operador*, si S es autoadjunto y contiene la unidad de $\mathcal{A}$.

El teorema de extensión de Arveson (ver [**3**],[**12**]) se enunciará en detalle y establece que, bajo ciertas condiciones, una aplicación completamente positiva definida en un sistema operador, se puede extender a una aplicación completamente positiva en toda el álgebra.

TEOREMA 1.30 (Arveson [**3**]). *Sean $\mathcal{A}$ un álgebras $\mathcal{C}^*$ con unidad, $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $S \subset \mathcal{A}$ un sistema operador. Si $\phi : S \longrightarrow L(\mathcal{H})$ es una aplicación completamente positiva, entonces existe una aplicación completamente positiva*

$$\widetilde{\phi} : \mathcal{A} \longrightarrow L(\mathcal{H})$$

que extiende a ϕ.

CAPíTULO 2

Representaciones unitarias y familias multiplicativas de isometrías parciales.

En este capítulo introduciremos los conceptos de representaciones unitarias y familias multiplicativas de isometrías. También daremos algunos lemas que servirán de ayuda para poder probar el resultado principal de este trabajo, el cual se encuentra plasmado en el Capítulo 3.

En lo que sigue supondremos que $\Omega = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{Q}$.

1. Representaciones unitarias.

Definición 2.1. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Una *representación* de Ω en $L(\mathcal{H})$ es una aplicación $U : \Omega \longrightarrow L(\mathcal{H})$, que satisface:

(a) $U_{\omega_1+\omega_2} = U_{\omega_1}U_{\omega_2}$ para todo $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$.
(b) $U_0 = I_{\mathcal{H}}$.

Se dice que la *representación es unitaria* si U_ω es un operador unitario para todo $\omega \in \Omega$. En este caso,

$$U_\omega^* = U_{-\omega} \text{ para todo } \omega \in \Omega.$$

Proposición 2.2. *Sea $\varphi : \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \longrightarrow L(\mathcal{H})$ un homomorfismo unital*. Para $t \in \Omega$, sea e_t el elemento de $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ definido por $e_t(x) = e^{itx}$ y sea $U_t \in L(\mathcal{H})$ definido por*

$$U_t = \varphi(e_t),$$

entonces $(U_t)_{t\in\Omega}$ es una representación unitaria.

Demostración.
Como φ es un homomorfismo unital*, se tiene que

(i) $U_0 = \varphi(e_0) = I_{\mathcal{H}}$

(ii) Si $s, t \in \Omega$ tenemos que

$$\begin{aligned} U_{t+s} &= \varphi\left(e_{t+s}\right) \\ &= \varphi\left(e_t e_s\right) \\ &= \varphi\left(e_t\right)\varphi\left(e_s\right) \\ &= U_t U_s \end{aligned}$$

(iii) Si $t \in \Omega$, entonces

$$U_t^* = [\varphi(e_t)]^* = \varphi({e_t}^*) = \varphi(e_{-t}) = U_{-t}$$

De (i),(ii) y (iii) obtenemos que $(U_t)_{t\in\Omega}$ es una representación unitaria. □

Definición 2.3. Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $(U_\omega)_{\omega\in\Omega}$ una representación de Ω en $L(\mathcal{H})$, se dice que $(U_\omega)_{\omega\in\Omega}$ es:

(a) *Fuertemente continua* si, para cada $h \in \mathcal{H}$, la aplicación $\omega \longmapsto U_\omega h$ de Ω en $\mathcal{H}$ es continua.
(b) *Débilmente continua* si, para cada $h, h' \in \mathcal{H}$, la aplicación $\omega \longmapsto \langle U_\omega h, h'\rangle_{\mathcal{H}}$ de Ω en $\mathbb{C}$ es continua.
(c) *Uniformemente fuertemente continua* si, para cada $h \in \mathcal{H}$, la aplicación $\omega \longmapsto U_\omega h$ de Ω en $\mathcal{H}$ uniformemente continua.

Ejemplo.
Sea $A \in L(\mathcal{H})$ autoadjunto.
Para $t \in \mathbb{R}$ sea $U_t = e^{itA}$. Entonces $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ es una representación unitaria de $\mathbb{R}$ en $L(\mathcal{H})$, fuertemente continua en 0.

Si la representación es unitaria, las definiciones anteriores son equivalentes, tal como lo indica el siguiente resultado.

Proposición 2.4. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $(U_\omega)_{\omega\in\Omega}$ una representación unitaria de Ω en $L(\mathcal{H})$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $(U_\omega)_{\omega\in\Omega}$ *es débilmente continua en* 0.
(b) $(U_\omega)_{\omega\in\Omega}$ *es fuertemente continua en* 0.
(c) $(U_\omega)_{\omega\in\Omega}$ *es fuertemente continua.*
(d) $(U_\omega)_{\omega\in\Omega}$ *es uniformemente fuertemente continua.*

Demostración.
Como la representación $(U_\omega)_{\omega\in\Omega}$ es unitaria se tiene que $\|U_\omega\| = 1$ para todo $\omega \in \Omega$.

$(a) \Longrightarrow (b)$

El resultado es consecuencia de la siguiente desigualdad,

$$\|U_\omega h - h\|_{\mathcal{H}}^2 \leq 2\|h\|_{\mathcal{H}}^2 - 2Re(\langle U_\omega h, h\rangle_{\mathcal{H}}) \quad (h \in \mathcal{H}, \omega \in \Omega),$$

$(b) \Longrightarrow (c)$

Sean $\varepsilon > 0$, $\omega_0 \in \Omega$ y $h \in \mathcal{H}$.

Por (b), existe $\delta > 0$ tal que si $\gamma \in \Omega$ y $|\gamma| < \delta$, se tiene que

$$\|U_\gamma h - h\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon.$$

Luego, si $\omega \in \Omega$ es tal que $|\omega - \omega_0| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned}
\|U_\omega h - U_{\omega_0} h\|_{\mathcal{H}} &= \|U_{\omega_0}(U_{\omega-\omega_0} h - h)\|_{\mathcal{H}} \\
&\leq \|U_{\omega_0}\| \|U_{\omega-\omega_0} h - h\|_{\mathcal{H}} \\
&= \|U_{\omega-\omega_0} h - h\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

(c)$\Longrightarrow$(d)

Sean $\varepsilon > 0$ y $h \in \mathcal{H}$.

Por (c), existe $\delta > 0$ tal que si $\gamma \in \Omega$ y $|\gamma| < \delta$, entonces

$$\|U_\gamma h - h\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon.$$

Luego si $\omega, \omega' \in \Omega$ son tales que $|\omega - \omega'| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned}
\|U_\omega h - U_{\omega'} h\|_{\mathcal{H}} &= \|U_{\omega'}(U_{\omega-\omega'} h - h)\|_{\mathcal{H}} \\
&\leq \|U_{\omega'}\| \|U_{\omega-\omega'} h - h\|_{\mathcal{H}} \\
&= \|U_{\omega-\omega'} h - h\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

(d)$\Longrightarrow$(a)

Dados $h, h' \in \mathcal{H}$, la aplicación $\omega \longmapsto U_\omega h$ es uniformemente continua en Ω, por lo tanto es continua en 0.

Luego, de la desigualdad de Cauchy-Schwartz, se deduce que la aplicación $\omega \longmapsto \langle U_\omega h, h'\rangle_{\mathcal{H}}$ es continua en 0. □

2. Familias multiplicativas de isometrías parciales.

En lo que sigue, supondremos que $a > 0$ y $\Delta = [0, a) \cap \Omega$.

Definición 2.5. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Una *familia multiplicativa de isometrías parciales* en $\mathcal{H}$ es una familia $(T_t, \mathcal{H}_t)_{t\in\Delta}$, tal que:

(a) Para cada $t \in \Delta$, $\mathcal{H}_t$ es un subespacio de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$.
(b) Para cada $t \in \Delta$, $T_t : \mathcal{H}_t \longrightarrow \mathcal{H}$ es una isometría lineal y $T_0 = I_{\mathcal{H}}$.
(c) $\mathcal{H}_t \subset \mathcal{H}_s$ si $t, s \in \Delta$ y $s < t$.
(d) Si $t, s \in \Delta$ y $s + t \in \Delta$, entonces

$$T_t \mathcal{H}_{s+t} \subset \mathcal{H}_s \quad \text{y} \quad T_{s+t}h = T_s T_t h \quad \text{para todo } h \in \mathcal{H}_{s+t}.$$

La familia $(T_t, \mathcal{H}_t)_{t\in\Delta}$ es *fuertemente continua,* si para cada $s \in \Delta$ y $h \in \mathcal{H}_s$, la aplicación $t \longmapsto T_t h$, de $[0, s]$ a $\mathcal{H}$ es continua.

Observación 2.6. La familia $(T_t, \mathcal{H}_t)_{t\in\Delta}$, se puede extender a una familia de isometrías parciales $(T_t, \mathcal{H}_t)_{t\in\Delta-\Delta}$, de la siguiente manera:

$$T_t = T^*_{-t} \quad \text{si } -t \in \Delta.$$

Definición 2.7. Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $(T_t, \mathcal{H}_t)_{t\in\Delta}$ una familia de isometrías parciales en $\mathcal{H}$. Un *subespacio generador* de la familia $(T_t, \mathcal{H}_t)_{t\in\Delta}$ es un subespacio $\mathcal{N}$ de $\mathcal{H}$ tal que:

(a)

$$\mathcal{N} \subset \bigcap_{t\in\Delta} \mathcal{H}_t.$$

(b)

$$\mathcal{H}_s = \bigvee_{t\in\Delta\cap(\Delta-s)} T_t \mathcal{N} \quad \text{para todo } s \in \Delta.$$

Proposición 2.8. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $(T_t, \mathcal{H}_t)_{t\in\mathbb{Q}\cap[0,a)}$ una familia multiplicativa de isometrías parciales en $\mathcal{H}$ con subespacio generador $\mathcal{N}$.*

Sea

$$\mathcal{K} : \mathbb{Q} \cap (-a, a) \longrightarrow L(\mathcal{N}),$$

definida por

$$\mathcal{K}(t) = P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{N}} T_t|_{\mathcal{N}}, \ \text{si } \ t \in \mathbb{Q} \cap [0, a)$$

y

$$\mathcal{K}(t) = (\mathcal{K}(-t))^*, \ \text{si } \ t \in \mathbb{Q} \cap (-a, 0].$$

Si $s, t \in \mathbb{Q} \cap [0, a)$ y $x, y \in \mathcal{N}$ entonces

$$\langle \mathcal{K}(s - t)x, y\rangle_{\mathcal{N}} = \langle T_s x, T_t y\rangle_{\mathcal{H}}.$$

Demostración.

Sean $s,t \in \mathbb{Q} \cap [0,a)$.

Si $s \geq t$, entonces

$$\langle \mathcal{K}(s-t)x, y\rangle_{\mathcal{N}} = \left\langle P_{\mathcal{N}}^{\mathcal{H}} T_{s-t}x, y\right\rangle_{\mathcal{N}} = \langle T_s x, T_t y\rangle_{\mathcal{H}} .$$

Si $s \leq t$, entonces

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{K}(s-t)x, y\rangle_{\mathcal{N}} &= \langle [\mathcal{K}(t-s)]^* x, y\rangle_{\mathcal{N}} \\ &= \langle x, \mathcal{K}(t-s)y\rangle_{\mathcal{N}} \\ &= \overline{\langle \mathcal{K}(t-s)y, x\rangle_{\mathcal{N}}} \\ &= \overline{\langle T_t y, T_s x\rangle_{\mathcal{H}}} \\ &= \langle T_s x, T_t y\rangle_{\mathcal{H}} . \end{aligned}$$

□

Lema 2.9. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $(T_t, \mathcal{H}_t)_{t\in\mathbb{Q}\cap[0,a)}$ una familia multiplicativa de isometrías parciales en $\mathcal{H}$ con subespacio generador $\mathcal{N}$. Sea S el sistema operador en $\mathcal{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{C})$ dado por los elementos de la forma:*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{N} b_k e^{i\alpha_k x} \qquad (N \in \mathbb{N}, b_k \in \mathbb{C}, \alpha_k \in \mathbb{Q} \cap (-a,a)) .$$

Entonces, la aplicación $\mathcal{L} : S \longrightarrow L(\mathcal{N})$, definida por

$$\mathcal{L}(p) = \sum_{k=0}^{N} b_k \mathcal{K}(\alpha_k)$$

es completamente positiva.

Demostración.

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $[p_{sj}]_{s,j=1}^n \in \mathcal{M}_n(S)$ una matriz positiva.

Para cada $s,j = 1,\ldots,n$, se tiene que

$$p_{sj}(x) = \sum_{k=0}^{N} b_k^{(sj)} e^{i\alpha_k^{(sj)} x},$$

donde $N \in \mathbb{N}, b_k^{(sj)} \in \mathbb{C}, \alpha_k^{(sj)} \in \mathbb{Q} \cap (-a,a)$.

Sea

$$d = \text{mín}\{q : q > \frac{1}{a} \text{ y } q \text{ es un múltiplo común de los denominadores de } \alpha_0^{(sj)}, \ldots, \alpha_N^{(sj)}\}.$$

Para cada $s, j = 1, \dots, n$ existen enteros no negativos $\gamma_0^{(sj)}, ..., \gamma_N^{(sj)}$ tales que

$$\alpha_k^{(sj)} = \frac{\gamma_k^{(sj)}}{d}, \qquad \text{para } k = 0, \dots, N.$$

Sean

$$\widetilde{p_{sj}} : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C} \quad (s, j = 1, \dots, n, k = 0, \dots, N.),$$

definidos por

$$\widetilde{p_{sj}}(z) = \sum_{k=0}^{N} b_k^{(sj)} z^{\gamma_k^{(sj)}}.$$

Tenemos que

$$\widetilde{p_{sj}}(e^{i\frac{x}{d}}) = p_{sj}(x),$$

por lo tanto $[\widetilde{p_{sj}}]_{s,j=1}^{n}$ es una matriz positiva en $\mathcal{M}_n(\mathcal{C}(\mathbb{T}))$, ya que $[p_{sj}]_{s,j=1}^{n}$ es una matriz positiva en $\mathcal{M}_n(S)$. Por otro lado

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(p_{sj}) &= \sum_{k=0}^{N} b_k^{(sj)} \mathcal{K}(\alpha_k^{(sj)}) \\
&= P_{\mathcal{N}}^{\mathcal{H}} \sum_{k=0}^{N} b_k^{(sj)} T_{\alpha_k^{(sj)}}|_{\mathcal{N}} \\
&= P_{\mathcal{N}}^{\mathcal{H}} \sum_{k=0}^{N} b_k^{(sj)} T_{\frac{1}{d}}^{\gamma_k^{(sj)}}|_{\mathcal{N}}.
\end{aligned}$$

Sean $\mathfrak{F}$ un espacio de Hilbert que contiene a $\mathcal{H}$ y $U : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{F}$ una extensión unitaria de $T_{\frac{1}{d}}|_{\mathcal{N}}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(p_{sj}) &= P_{\mathcal{N}}^{\mathcal{H}} \sum_{k=0}^{N} b_k^{(sj)} U^{\gamma_k^{(sj)}}|_{\mathcal{N}} \\
&= P_{\mathcal{N}}^{\mathcal{H}} P_{\mathcal{N}}^{\mathfrak{F}} \sum_{k=0}^{N} b_k^{(sj)} U^{\gamma_k^{(sj)}} \\
&= P_{\mathcal{N}}^{\mathfrak{F}} \widetilde{p_{sj}}(U) \\
&= P_{\mathcal{N}}^{\mathfrak{F}} \Phi(\widetilde{p_{sj}}),
\end{aligned}$$

donde Φ es la función definida en el Corolario 1.25. Como Φ es completamente positiva y $[\widetilde{p_{sj}}]_{s,j=1}^{n}$ es una matriz positiva en $\mathcal{M}_n(\mathcal{C}(\mathbb{T}))$ obtenemos que

$$\Phi_n \left([\widetilde{p_{sj}}]_{s,j=1}^{n} \right) = \left[\Phi\left(\widetilde{p}_{sj} \right) \right]_{s,j=1}^{n}$$

es una matriz positiva en $\mathcal{M}_n(L(\mathfrak{F}))$. Además,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_n\left([p_{sj}]_{s,j=1}^n\right) &= [\mathcal{L}(p_{sj})]_{s,j=1}^n \\ &= \left[P_{\mathcal{N}}^{\mathfrak{F}}\Phi(\widetilde{p}_{sj})\right]_{s,j=1}^n \\ &= R\left[\Phi(\widetilde{p}_{sj})\right]_{s,j=1}^n,\end{aligned}$$

donde

$$R = \begin{pmatrix} P_{\mathcal{N}}^{\mathfrak{F}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_{\mathcal{N}}^{\mathfrak{F}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_{\mathcal{N}}^{\mathfrak{F}} \end{pmatrix},$$

luego

$$\mathcal{L}_n\left((p_{sj})_{s,j=1}^n\right)$$

es una matriz positiva en $\mathcal{M}_n(L(\mathcal{N}))$.

De donde $\mathcal{L}$ es completamente positiva. □

DEFINICIÓN 2.10. Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $(T_t, \mathcal{H}_t)_{t\in\Delta}$ una familia multiplicativa de isometrías parciales en $\mathcal{H}$ con subespacio generador $\mathcal{N}$. Una *extensión unitaria* de la familia $(T_t, \mathcal{H}_t)_{t\in\Delta}$ es una representación unitaria $(U_t)_{t\in\Omega} \subset L(\mathfrak{F})$, tal que $\mathfrak{F}$ contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y

$$T_t = U_t|_{\mathcal{H}_t} \quad \text{para todo } t \in \Delta.$$

Si se pide la condición

$$\mathfrak{F} = \bigvee_{t\in\Omega} U_t\mathcal{N},$$

entonces se dice que la extensión unitaria es *minimal.*

CAPíTULO 3

Extensiones unitarias de familias multiplicativas de isometrías parciales.

A continuación se prueba que toda familia multiplicativa de isometrías parciales, con subespacio generador y parámetro en $\mathbb{Q} \cap [0, a)$, posee una extensión unitaria.

TEOREMA 3.1. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $(T_t, \mathcal{H}_t)_{t\in\mathbb{Q}\cap[0,a)}$ una familia multiplicativa de isometrías parciales en $\mathcal{H}$ con subespacio generador $\mathcal{N}$. Entonces existe un espacio de Hilbert $\mathfrak{F}$ que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y una representación unitaria $(U_t)_{t\in\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$ en $L(\mathfrak{F})$ tal que*

$$T_t = U_t|_{\mathcal{H}_t} \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Q} \cap [0, a).$$

DEMOSTRACIÓN.

Sea $\mathcal{L}$ la aplicación del Lema 2.9.

Por el teorema de extensión de Arveson existe una aplicación completamente positiva

$$\widetilde{\mathcal{L}} : \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \longrightarrow L(\mathcal{N})$$

que extiende a $\mathcal{L}$.

Por el teorema de representación de Stinespring existen un espacio de Hilbert $\mathfrak{F}$, un homomorfismo unital* $\varphi : \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \longrightarrow L(\mathfrak{F})$ y un operador acotado $J : \mathcal{N} \longrightarrow \mathfrak{F}$ tal que

$$\widetilde{\mathcal{L}}(f) = J^*\varphi(f)J \quad \text{para toda } f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

Para $t \in \mathbb{Q}$, sea e_t el elemento de $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ definido por

$$e_t(x) = e^{itx}.$$

La función e_0, es el elemento neutro de $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Por lo tanto

$$J^*J = J^*\varphi(e_0)J = \widetilde{\mathcal{L}}(e_0) = \mathcal{K}(0) = P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{N}} I_{\mathcal{H}}|_{\mathcal{N}} = I_{\mathcal{N}}.$$

De manera que, J es una isometría y en virtud de la observación 1.28, se tiene que

$$\widetilde{\mathcal{L}}(f) = P^{\mathfrak{F}}_{\mathcal{N}}\varphi(f)|_{\mathcal{N}}$$

para toda $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Sea $(U_t)_{t\in\mathbb{Q}}$, la familia de operadores definida por

$$U_t = \varphi(e_t).$$

Por la Proposición 2.2, se tiene que $(U_t)_{t\in\mathbb{Q}}$ es una representación unitaria. Además, para $t \in \mathbb{Q} \cap (-a, a)$ tenemos que

$$\mathcal{K}(t) = \mathcal{L}(e_t) = P^{\mathfrak{F}}_{\mathcal{N}} U_t|_{\mathcal{N}}.$$

Si $t \in \mathbb{Q} \cap [0, a)$, se tiene que

$$P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{N}} T_t|_{\mathcal{N}} = P^{\mathfrak{F}}_{\mathcal{N}} U_t|_{\mathcal{N}}. \tag{3.1}$$

Sea

$$\psi : \bigvee_{\gamma\in\mathbb{Q}\cap[0,a)} T_\gamma \mathcal{N} \longrightarrow \mathfrak{F},$$

la aplicación definida por

$$\psi(T_{\gamma_1} h_1 + \cdots + T_{\gamma_n} h_n) = U_{\gamma_1} J h_1 + \cdots + U_{\gamma_n} J h_n,$$

donde $\gamma_1, ..., \gamma_n \in \mathbb{Q} \cap [0, a)$ y $h_1, ..., h_n \in \mathcal{N}$.

De la Proposición 2.8 y de la ecuación 3.1, para $\gamma_1, ..., \gamma_n \in \mathbb{Q} \cap [0, a)$ y $h_1, ..., h_n \in \mathcal{N}$, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\|\psi(T_{\gamma_1} h_1 + \cdots + T_{\gamma_n} h_n)\|^2_{\mathfrak{F}} &= \|U_{\gamma_1} J h_1 + \cdots + U_{\gamma_n} J h_n\|^2_{\mathfrak{F}} \\
&= \left\langle \sum_{s=1}^{n} U_{\gamma_s} J h_s, \sum_{j=1}^{n} U_{\gamma_j} J h_j \right\rangle_{\mathfrak{F}} \\
&= \sum_{s,j=1}^{n} \left\langle U_{\gamma_s} J h_s, U_{\gamma_j} J h_j \right\rangle_{\mathfrak{F}} \\
&= \sum_{s,j=1}^{n} \left\langle J^* U_{\gamma_s - \gamma_j} J h_s, h_j \right\rangle_{\mathcal{N}} \\
&= \sum_{s,j=1}^{n} \left\langle \mathcal{K}(\gamma_s - \gamma_j) h_s, h_j \right\rangle_{\mathcal{N}} \\
&= \sum_{s,j=1}^{n} \left\langle T_{\gamma_s} h_s, T_{\gamma_j} h_j \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \|T_{\gamma_1} h_1 + \cdots + T_{\gamma_n} h_n\|^2_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{H}$ puede ser identificado con un subespacio de $\mathfrak{F}$, ya que

$$\mathcal{H} = \bigvee_{\gamma\in\mathbb{Q}\cap[0,a)} T_\gamma \mathcal{N}.$$

De la ecuación 3.1 se deduce que

$$T_\gamma h = U_\gamma h \quad \text{para todo } \gamma \in \mathbb{Q} \cap [0,a) \text{ y } h \in \mathcal{N}. \tag{3.2}$$

Veamos que

$$T_t = U_t|_{\mathcal{H}_t} \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Q} \cap [0,a).$$

Sean $t \in \mathbb{Q} \cap [0,a)$ y $h \in \mathcal{H}_t$.

Como

$$\mathcal{H}_t = \bigvee_{\gamma \in \mathbb{Q} \cap [0,a-t)} T_\gamma \mathcal{N},$$

existen $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \mathbb{Q} \cap [0, a-t)$ y $h_1, \ldots, h_n \in \mathcal{N}$, tales que

$$h = T_{\gamma_1} h_1 + \cdots + T_{\gamma_n} h_n.$$

De la ecuación 3.2 se obtiene que

$$\begin{aligned} T_t h &= T_t(T_{\gamma_1} h_1 + \cdots + T_{\gamma_n} h_n) \\ &= T_{t+\gamma_1} h_1 + \cdots + T_{t+\gamma_n} h_n \\ &= U_{t+\gamma_1} h_1 + \cdots + U_{t+\gamma_n} h_n \\ &= U_t(U_{\gamma_1} h_1 + \cdots + U_{\gamma_n} h_n) \\ &= U_t(T_{\gamma_1} h_1 + \cdots + T_{\gamma_n} h_n) \\ &= U_t h. \end{aligned}$$

□

Observación 3.2. Es importante destacar que en el Teorema 3.1 no es necesario suponer la continuidad fuerte de la familia multiplicativa de isometrías parciales.

Lema 3.3. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $(T_t, \mathcal{H}_t)_{t \in \mathbb{Q} \cap [0,a)}$ una familia multiplicativa de isometrías parciales fuertemente continua, con subespacio generador $\mathcal{N}$, que posee extensión unitaria.*

Si $(U_t)_{t \in \mathbb{Q}} \subset L(\mathfrak{F})$ es una extensión unitaria minimal de $(T_t, \mathcal{H}_t)_{t \in \mathbb{Q} \cap [0,a)}$, entonces $(U_t)_{t \in \mathbb{Q}}$ es fuertemente continua.

Demostración.

La prueba se hará en tres pasos.

Paso 1: Para cada $h \in \mathcal{N}$ la aplicación $t \longrightarrow U_t h$ es continua en $\mathcal{Q} \cap [0,a)$.

El resultado sigue de que la familia $(T_t, \mathcal{H}_t)_{t \in \mathbb{Q} \cap [0,a)}$ es fuertemente continua y $(U_t)_{t \in \mathbb{Q}}$ es una extensión unitaria de la misma.

Paso 2: Para cada $h \in \mathcal{N}$ la aplicación $t \longrightarrow U_t h$ es continua en $\mathbb{Q}$.

Sea $t \in \mathbb{Q}$.

Supongamos que $t \geq 0$, entonces existe un entero no negativo k tal que

$$t \in \mathbb{Q} \cap [ka, (k+1)a),$$

por lo tanto

$$U_t h = U_{ka} U_{t-ka} h.$$

El resultado sigue del Paso 1.

El caso $t < 0$ es análogo.

Paso 3: Para cada $h \in \mathfrak{F}$ la aplicación $t \longrightarrow U_t h$ es continua en $\mathbb{Q}$.

Como la representación $(U_t)_{t \in \mathbb{Q}}$ es minimal, entonces

$$\mathfrak{F} = \bigvee_{t \in \mathbb{Q}} U_t \mathcal{N}.$$

Dados $h \in \mathfrak{F}$ y $t \in \mathbb{Q}$, existen $h_1, \ldots, h_n \in \mathcal{N}$ y $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{Q}$, tales que

$$h = U_{t_1} h_1 + \cdots + U_{t_n} h_n,$$

por lo tanto

$$U_t h = U_{t+t_1} h_1 + \cdots + U_{t+t_n} h_n.$$

El resultado sigue del Paso 2. □

COROLARIO 3.4. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $(T_t, \mathcal{H}_t)_{t \in [0,a)}$ una familia multiplicativa de isometrías parciales fuertemente continua, con subespacio generador $\mathcal{N}$. Si $(T_t, \mathcal{H}_t)_{t \in \mathbb{Q} \cap [0,a)}$ posee una extensión unitaria, entonces $(T_t, \mathcal{H}_t)_{t \in [0,a)}$ posee una extensión unitaria, fuertemente continua.*

DEMOSTRACIÓN.

En virtud del Lema anterior, sea $(V_t)_{t \in \mathbb{Q}} \subset L(\mathfrak{F})$ una representación unitaria fuertemente continua que extiende a $(T_t, \mathcal{H}_t)_{t \in \mathbb{Q} \cap [0,a)}$.

Como $(V_t)_{t \in \mathbb{Q}}$ es una representación unitaria fuertemente continua, entonces es uniformemente fuertemente continua.

Luego, para cada $h \in \mathfrak{F}$, la aplicación $t \longmapsto V_t h$ de $\mathbb{Q}$ en $\mathfrak{F}$ es uniformemente continua.

Por lo tanto, existe una única aplicación continua $t \longmapsto U_t h$ de $\mathbb{R}$ en $\mathfrak{F}$, tal que

$$U_t h = V_t h$$

para todo $t \in \mathbb{Q}$ y $h \in \mathfrak{F}$.

Por otro lado, si $t \in \mathbb{R}$, existe una sucesión $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{Q}$, tal que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} t_n = t.$$

De donde,

$$U_t h = \lim_{n\longrightarrow\infty} V_{t_n} h, \tag{3.3}$$

para todo $h \in \mathfrak{F}$.

Se puede probar que $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ es una representación unitaria de $\mathbb{R}$ en $L(\mathfrak{F})$, fuertemente continua.

Veamos que $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ extiende a $(T_t, \mathcal{H}_t)_{t\in[0,a)}$.

En efecto, si $t \in [0, a)$ existe una sucesión $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{Q} \cap [0, a)$ tal que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} t_n = t.$$

Dado $h \in \mathcal{H}_t$, se tiene que

$$V_{t_n} h = T_{t_n} h.$$

Además, como $(T_t, \mathcal{H}_t)_{t\in\mathbb{Q}\cap[0,a)}$ es fuertemente continua, tenemos que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} T_{t_n} h = T_t h.$$

Luego, de la ecuación 3.3, se tiene que

$$T_t h = U_t h$$

□

El siguiente teorema es una extensión a $\mathbb{R}$ del Teorema 3.1.

TEOREMA 3.5. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $(T_t, \mathcal{H}_t)_{t\in[0,a)}$ una familia multiplicativa de isometrías parciales en $\mathcal{H}$ fuertemente continua, con subespacio generador $\mathcal{N}$. Entonces existe un espacio de Hilbert $\mathfrak{F}$ que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y una representación unitaria $(U_t)_{t\in\mathbb{R}} \subset L(\mathcal{F})$, fuertemente continua, tal que*

$$T_t = U_t|_{\mathcal{H}_t} \quad \textit{para todo } t \in [0, a).$$

DEMOSTRACIÓN.

Por el Teorema 3.1, la familia $(T_t, \mathcal{H}_t)_{t\in\mathbb{Q}\cap[0,a)}$, posee una extensión unitaria.

Luego el resultado sigue del Corolario 3.4.

□

CAPíTULO 4

Extensión de funciones definidas positivas en un intervalo.

En este capítulo como aplicación del Teorema 3.1, se dará una prueba de la versión a valores operadores del teorema de extensión de Krein [**11**], dada por Gorbachuck [**10**].

En lo que sigue supondremos que $a > 0$ y $\Upsilon = \Omega \cap (-a, a)$.

Definición 4.1. Sean $D \subset \Omega$ y $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Se dice que una función $\mathcal{K} : D \longrightarrow L(\mathcal{H})$ es *definida positiva* si:

$$\sum_{x,y \in \Omega} \langle \mathcal{K}(x-y)h(x), h(y) \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0,$$

para toda función $h : D \longrightarrow \mathcal{H}$ con soporte finito y tal que

$$\text{soporte}(h) - \text{soporte}(h) \subset D.$$

Proposición 4.2. *Sean $\mathcal{H}$ y $\mathfrak{F}$ dos espacios de Hilbert y sea $J : \mathcal{H} \longrightarrow \mathfrak{F}$ un operador acotado. Supóngase $(U_t)_{t \in \Omega} \subset L(\mathfrak{F})$ es una representación unitaria, entonces la función $F : \Omega \to L(\mathcal{H})$, definida por*

$$F(t) = J^* U_t J$$

es definida positiva.

Demostración.

Sea $h : \Omega \longrightarrow \mathcal{H}$ una función con soporte finito. Supongamos que

$$\text{soporte}(h) = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\},$$

tenemos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{x,y\in\Omega} \langle\, F(x-y)h(x), h(y)\rangle_{\mathcal{H}} &= \sum_{x,y\in\{t_1,t_2,\ldots,t_n\}} \langle\, F(x-y)h(x), h(y)\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \sum_{s,j=1}^{n} \langle\, F(t_s-t_j)h(t_s), h(t_j)\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \sum_{s,j=1}^{n} \left\langle\, J^* U_{t_s-t_j} Jh(t_s), h(t_j)\right\rangle_{\mathfrak{F}} \\
&= \sum_{s,j=1}^{n} \left\langle\, U_{t_s} Jh(t_s), U_{t_j} Jh(t_j)\right\rangle_{\mathfrak{F}} \\
&= \left\| \sum_{j=1}^{n} U_{t_j} Jh(t_j) \right\|_{\mathfrak{F}}^2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

□

DEFINICIÓN 4.3. Sea $f:\Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función, se dice que f es *definida positiva* si:

$$\sum_{i,j=1}^{n} f(x_i-x_j)c_i\overline{c_j} \geq 0$$

para todo número natural n, $x_1,\ldots,x_n \in \Omega$, $c_1,\ldots,c_n \in \mathbb{C}$.

LEMA 4.4. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Si la función $F:\Upsilon \longrightarrow L(\mathcal{H})$ es definida positiva y $h \in \mathcal{H}$, entonces la función $F_h:\Upsilon \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por*

$$F_h(t) = \langle\, F(t)h, h\rangle_{\mathcal{H}}$$

es definida positiva.

DEMOSTRACIÓN.

Sean n un entero positivo, $c_1,\ldots,c_n \in \mathbb{C}$ y $t_1,\ldots,t_n \in \Omega$ tales que

$$t_i - t_j \in \Upsilon \quad \text{para} \quad i,j = 1,\ldots,n.$$

Sea $\rho:\Omega \longrightarrow \mathcal{H}$, la función definida por

$$\rho(t) = \begin{cases} c_i h & \text{si } t = t_i \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Claramente soporte(ρ) es finito y soporte(ρ) − soporte$(\rho) \subset \Upsilon$.

Luego, como F es definida positiva, tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n} F_h(t_i - t_j)c_i\overline{c_j} &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle\, F(t_i - t_j)h, h\rangle_{\mathcal{H}} c_i\overline{c_j} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle\, F(t_i - t_j)\rho(t_i), \rho(t_j)\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{x,y\in\Omega} \langle\, F(x-y)\rho(x), \rho(y)\rangle_{\mathcal{H}} \geq 0.\end{aligned}$$

□

Para la demostración del siguiente lema ver ([**7**],Teorema 1.30 y Corolario 1.31.)

LEMA 4.5. *Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathcal{C}$ una función definida positiva. Si f es continua en* 0, *entonces f es continua en Ω.*

COROLARIO 4.6. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $F : \Upsilon \longrightarrow L(\mathcal{H})$ una función definida positiva. Si F es débilmente continua en* 0, *entonces F es débilmente continua en Ω.*

DEMOSTRACIÓN.

Por el Lema 4.4, tenemos que para cada $h \in \mathcal{H}$ la función $F_h : \Upsilon \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$F_h(t) = \langle\, F(t)h, h\rangle_{\mathcal{H}}$$

es definida positiva.

Como F es débilmente continua en 0, entonces F_h es continua en 0, para cada $h \in \mathcal{H}$.

Luego, por el Lema 4.5 se tiene que F_h es continua en Ω, para cada $h \in \mathcal{H}$.

De la fórmula de polarización se obtiene la continuidad débil de F en todo Ω. □

El siguiente resultado es una aplicación del Teorema 3.1.

TEOREMA 4.7. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Si $\mathcal{K} : \mathbb{Q} \cap (-a, a) \longrightarrow L(\mathcal{H})$ es una función definida positiva entonces*

(a) *$\mathcal{K}$ tiene una extensión definida positiva a todo $\mathbb{Q}$*

(b) *Si $\mathcal{K}$ es débilmente continua, entonces toda extensión a $\mathbb{Q}$ definida positiva de $\mathcal{K}$ es débilmente continua.*

DEMOSTRACIÓN.

(a) Sea $\mathcal{M}$ el espacio vectorial definido por

$$\mathcal{M} = \{f : \mathbb{Q} \cap [0, a) \longrightarrow \mathcal{H} : \text{soporte de } f \text{ es finito}\}.$$

Para $f, g \in \mathcal{M}$ se define

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{M}} = \sum_{x,y\in\mathbb{Q}\cap\,[0,a)} \langle \mathcal{K}(x-y)f(x), g(y)\rangle_{\mathcal{H}}.$$

Como $\mathcal{K}$ es definida positiva, entonces $\langle\,,\rangle_{\mathcal{M}}$ es una forma sesquilineal no-negativa en $\mathcal{M}$.

Sea $\mathcal{E}$ el espacio de Hilbert obtenido completando $\mathcal{M}$ después de tomar el cociente natural.

Para $t \in \mathbb{Q}\cap\,[0,a)$, sea

$$\mathcal{M}_t = \{f \in \mathcal{M} : \text{soporte}(f) \subset \mathbb{Q}\cap\,[0, a-t)\}$$

y para $f \in \mathcal{M}_t$ sea

$$(T_t f)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q}\cap\,[0,t) \\ f(x-t) & \text{si } x \in \mathbb{Q}\cap\,[t,a). \end{cases}$$

Luego,

$$\|T_t f\|_{\mathcal{M}} = \sup_{x\in\mathbb{Q}\cap\,[0,a)} \|(T_t f)(x)\|_{\mathcal{H}} = \sup_{x\in\mathbb{Q}\cap\,[t,a)} \|f(x-t)\|_{\mathcal{H}} = \sup_{y\in\mathbb{Q}\cap\,[0,a)} \|(f(y)\|_{\mathcal{H}} = \|f\|_{\mathcal{M}}.$$

De donde, $T_t : \mathcal{M}_t \longrightarrow \mathcal{M}$ es un operador isométrico.

Sea $\mathcal{E}_t$ la clausura de $\mathcal{M}_t$ en $\mathcal{E}$.

Por lo tanto T_t puede extenderse a un operador isométrico de $\mathcal{E}_t$ a $\mathcal{E}$, que también denotaremos por T_t.

Por otro lado, se tiene que $(T_t, \mathcal{E}_t)_{t\in\mathbb{Q}\cap[o,a)}$ es una familia multiplicativa de isometrías parciales en $\mathcal{E}$.

En efecto,

(1) Si $t \in \mathbb{Q}\cap[o,a)$, es claro que $\mathcal{E}_t$ es un subespacio de $\mathcal{E}$ y

$$\mathcal{E}_0 = \overline{\mathcal{M}_0} = \overline{\mathcal{M}} = \mathcal{E}.$$

(2) Es claro que $T_t : \mathcal{E}_t \longrightarrow \mathcal{E}$ es una isometría lineal y $T_0 = I_{\mathcal{E}}$.

(3) Si $t, s \in \mathbb{Q}\cap[0,a)$ y $s < t$, entonces

$$\mathbb{Q}\cap[0, a-t) \subset \mathbb{Q}\cap[0, a-s).$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{E}_t = \overline{\mathcal{M}_t} \subset \overline{\mathcal{M}_s} = \mathcal{E}_s.$$

(4) Si $t, s, t+s \in \mathbb{Q}\cap[0,a)$, entonces si $f \in \mathcal{E}_{t+s}$, tenemos que

$$\text{soporte}(f) \subset \mathbb{Q}\cap[0, a-t-s).$$

Es decir, $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{Q}\cap[0, a-t-s)$.

De donde, $f(x-t) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{Q} \cap [t, a-s)$.
Luego,

$$\text{soporte}(T_t f) \subset \mathbb{Q} \cap \ [0, a-s).$$

Por otro lado,

$$(T_t T_s f)(x) = (T_t f)(x-s) = f(x-s-t) = (T_{s+t})(x).$$

Para $t_0 \in \mathbb{Q}$, sea δ_{t_0} la función definida por

$$\delta_{t_0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ t = t_0 \\ o & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sean $h \in \mathcal{H}$ y $t \in \mathbb{Q} \cap [0, a)$, se tiene que $h\delta_t$ es un elemento de $\mathcal{M}$.

Además, si $[h\delta_t]$ denota la clase de equivalencia de $h\delta_t$ en $\mathcal{E}$, entonces $[h\delta_0] \in \mathcal{E}_t$ para todo $t \in \mathbb{Q} \cap [0, a)$ y

$$T_t[h\delta_0] = [h\delta_t].$$

Sea $\mathcal{N}$ la clausura de la variedad lineal $\{[h\delta_0] : h \in \mathcal{H}\}$.

Veamos que $\mathcal{N}$ es un subespacio generador para la familia $(T_t, \mathcal{E}_t)_{t \in \mathbb{Q} \cap [o,a)}$.

En efecto,

(1) Como $[h\delta_0] \in \mathcal{E}_t$ para todo $t \in \mathbb{Q} \cap [0, a)$, entonces

$$\mathcal{N} \subset \bigvee_{t \in \mathbb{Q} \cap [0,a)} \mathcal{E}_t.$$

(2) Sea $s \in \mathbb{Q} \cap [0, a)$.

$$\begin{aligned} f \in \bigvee_{t \in \mathbb{Q} \cap [o, a-s)} T_t \mathcal{N} &\iff f = T_{t_1}[h_1\delta_0] + \cdots + T_{t_n}[h_n\delta_0] \text{ donde } t_k \in \mathbb{Q} \cap \ [o, a-s) \, y \, h_k \in \mathcal{N} \\ &\iff f = [h_1\delta_{t_1}] + \cdots + [h_n\delta_{t_n}] \text{ donde } t_k \in \mathbb{Q} \cap \ [o, a-s) \, y \, h_k \in \mathcal{N} \\ &\iff f \in \overline{\mathcal{M}_s} = \mathcal{E}_s. \end{aligned}$$

Por el Teorema 3.1, existe un espacio de Hilbert $\mathfrak{F}$ que contiene a $\mathcal{E}$ como subespacio cerrado y una representación unitaria $(U_t)_{t \in \mathbb{Q}} \subset L(\mathcal{F})$, tal que

$$T_t = U_t|_{\mathcal{E}_t} \quad \text{ para todo } \ t \in \mathbb{Q} \cap \ [o, a).$$

Sean $t, t' \in \mathbb{Q} \cap \ (-a, a)$ y $h, h' \in \mathcal{H}$, entonces

$$\begin{aligned}\langle\, \mathcal{K}(t-t')h, h'\rangle_{\mathcal{H}} &= \langle\, [h\delta_t], [h'\delta_{t'}]\rangle_{\mathcal{E}} \\ &= \langle\, T_t[h\delta_0], T_{t'}[h'\delta_0]\rangle_{\mathcal{E}} \\ &= \langle\, U_t[h\delta_0], U_{t'}[h'\delta_0]\rangle_{\mathfrak{F}} \\ &= \langle\, U_{t-t'}[h\delta_0], [h'\delta_0]\rangle_{\mathfrak{F}}\,.\end{aligned}$$

Sea $J : \mathcal{H} \longrightarrow \mathfrak{F}$, el operador lineal definido por $Jh = [h\delta_0]$, por lo tanto

$$\|Jh\|^2_{\mathfrak{F}} = \langle\, [h\delta_0], [h'\delta_0]\rangle_{\mathfrak{F}} = \langle \mathcal{K}(0)h, h\rangle_{\mathcal{H}} \leq \ \|\mathcal{K}(0)\|_{L(\mathcal{H})}\|h\|^2_{\mathcal{H}}.$$

Por lo tanto, J es un operador lineal acotado y para $t \in \mathbb{Q} \cap \, (-a, a)$

$$\mathcal{K}(t) = J^* U_t J.$$

Sea $F : \mathbb{Q} \longrightarrow L(\mathcal{H})$ la función definida por

$$F(t) = J^* U_t J.$$

El resultado sigue de la Proposición 4.2.

(b) Sea $F : \mathbb{Q} \longrightarrow L(\mathcal{H})$ una extensión de $\mathcal{K}$ definida positiva.
Como $\mathcal{K}$ es débilmente continua, entonces F es débilmente continua en 0.
Luego, por el Corolario 4.6, F es débilmente continua. □

A continuación vamos a dar una demostración de un resultado de Gorbachuck (ver [**10**]), que establece que toda función definida positiva y débilmente continua en un intervalo simétrico, puede ser extendida a una función definida positiva y débilmente continua en el conjunto de los números reales.

Teorema 4.8. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Si $\mathcal{K} : (-a, a) \longrightarrow L(\mathcal{H})$ es una función definida positiva y débilmente continua entonces existe una función, $F : \mathbb{R} \longrightarrow L(\mathcal{H})$ definida positiva y débilmente continua que extiende a $\mathcal{K}$.*

Demostración.
Sea $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}|_{\mathbb{Q}\cap\,(-a,a)}$.
Por Teorema 4.7, tenemos que existe una función $F_1 : \mathbb{Q} \longrightarrow L(\mathcal{H})$ definida positiva y débilmente continua, tal que

$$\mathcal{K}_1 = F_1|_{\mathbb{Q}\cap\,(-a,a)}.$$

Como F_1 es débilmente continua, entonces es uniformemente débilmente continua.

Por lo tanto, para cada $h, h' \in \mathcal{H}$, la aplicación

$$t \longmapsto \langle\, F_1(t)h, h'\rangle_{\mathcal{H}} \;\text{ de }\; \mathbb{Q} \;\text{ en }\; \mathbb{C}$$

es uniformemente continua.

Para cada $h, h' \in \mathcal{H}$, existe una única aplicación continua $t \longmapsto \langle\, F(t)h, h'\rangle_{\mathcal{H}}$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$, tal que

$$F(t) = F_1(t)$$

para todo $t \in \mathbb{Q}$.

Por definición, se tiene que F es débilmente continua.

Además si $t \in \mathbb{R}$, existe una sucesión $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{Q}$, tal que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} t_n = t.$$

De donde,

$$F(t)h = \lim_{n\longrightarrow\infty} F_1(t_n)h,$$

para todo $h \in \mathcal{H}$.

Por lo tanto F es definida positiva.

Veamos que F extiende a $\mathcal{K}$.

En efecto, Sea $t \in\ (-a, a)$ entonces existe una sucesión $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{Q} \cap (-a, a)$ tal que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} t_n = t.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\langle\, F(t)h, h'\rangle_{\mathcal{H}} &= \left\langle \lim_{n\longrightarrow\infty} F_1(t_n)h, h' \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \left\langle \lim_{n\longrightarrow\infty} \mathcal{K}_1(t_n)h, h' \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \langle\, \mathcal{K}(t)h, h\rangle_{\mathcal{H}}\,.
\end{aligned}$$

Lo que implica que,

$$F|_{(-a,a)} = \mathcal{K}.$$

$\square$

Observación 4.9. La demostración del Teorema 4.8 se puede obtener directamente del Teorema 3.5, procediendo de manera análoga a la demostración del Teorema 4.7.

Bibliografía

[1] Gr. Arsene, Zoia Ceausescu, T. Constantinescu, Schur analysis of some completion problems. Linear Algebra Appl, **109** (1988), 1-35. Citado en la(s) página(s): 2

[2] R. Arocena, On the extension problem for a class of translation invariant positive forms. J. Operator theory **21** (1989), 323-35-47. Citado en la(s) página(s): 2

[3] W. Arveson, Subalgebras of C^* algebras. Acta Math. **123** (1969), 141-224. Citado en la(s) página(s): 2, 23

[4] S. Berberian, Lectures in Functional Analysis and Operator Theory, Springer Velag, 1974, (GTM 15). Citado en la(s) página(s): 2, 5, 8, 18

[5] R. Bruzual, Local semigroups of contrations and some applications to Fourier representation theorems. Int. Eq. and Op. Theory, **10** (1987), 780-801. Citado en la(s) página(s): 2

[6] R. Bruzual, M. Domínguez, Extensions of operator valued positive definite functions and commutant lifting on ordered groups. J. Funct. Anal. **185** (2001), 456-473. Citado en la(s) página(s): 2

[7] R. Bruzual, M. Domínguez, Dilatación, Extensión y Representación de Formas Definidas Positivas, 30 Aniversario del Postgrado en Matemática de la Ucv, Caracas, 2006. Citado en la(s) página(s): 2, 38

[8] R. Bruzual, M. Domínguez, On unitary extensions of multiplicative families of partial isometries with a generating subspace. Semigroup Forum, **75** (2007), 634-647. Citado en la(s) página(s): 2

[9] R.G. Douglas, Banach algebra techiques in operator theory, Academic Press, New York, 1972. Citado en la(s) página(s): 9, 11

[10] M.L. Gorbachuck, Representation of positive definite operator functions. Ukrainian Math. J. **17** (1965), 29-46. Citado en la(s) página(s): 36, 41

[11] M. G. Kreĭn, Sur le problème du prolongement des fonctions hermitiennes positives et continues. Dokl. Akad. Nauk. SSSR **26** (1940), 17-22. Citado en la(s) página(s): 3, 36

[12] V. Paulsen, Completely bounded maps and dilations. Pitman Research Notes in Mathematics Series, 146. (1986). Citado en la(s) página(s): 2, 15, 23

[13] W. Rudin, Functional analysis, 2d ed., McGraw-Hill, Boston, 1991. Citado en la(s) página(s): 10, 11

[14] D. Sarason, Generalized interpolation in $\mathbf{H}^\infty$. Trans. Amer. Math. Soc. **127** (1967), 179-203. Citado en la(s) página(s): 2

[15] W. F. Stinespring, Positive functions on C^*-algebras, Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 211-216. Citado en la(s) página(s): 2, 15, 16

[16] B. Sz.-Nagy, C. Foias, Harmonic analysis of operators on Hilbert space, North Holland Publishing Co. 1970. Citado en la(s) página(s): 2