UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Una generalización del teorema de Müntz-Szász a dos dimensiones

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Ángel Padilla** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutor: Ramón Bruzual.

Caracas, Venezuela
Mayo 2005

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado "**Una generalización del teorema de Müntz-Szász a dos dimensiones**", presentado por el **Br. Ángel Padilla**, titular de la Cédula de Identidad **15.912.745**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Ramón Bruzual
Tutor

Marisela Domínguez
Jurado

María Margarita Olivares
Jurado

Dedicatoria

Dedico éste Trabajo Especial de Grado, a mi Madre en primer lugar. Hoy le doy uno de los regalos más preciados para ella, el orgullo de sentarse y ver la culminación de una carrera universitaria, en la mejor institución de Venezuela, la U.C.V, disfruta de tu regalo Madre.

También dedico éste trabajo, a mi Papá y a mi tía María. Espero que se sientan orgullosos de mí. En especial a mis sobrinos y primos que aún tienen una vida por delante que recorrer, espero servirles de ejemplo para que alcancen todas las metas que se propongan y me comprometo de antemano a ayudarlos en lo que en mi alcance esté.

A mis hermanos, primos, tíos, abuela, a todos mis amigos. A Dios que me irradió miles de veces ésta energía para llegar a ser lo que soy hoy.

Agradecimiento

Agradezco primero a Dios, porque durante toda mi vida y en especial éstos últimos cinco años ha sido para mí la fuerza y energía que me impulsa hacia delante. Agradezco a la vez a la Virgen María por su protección y amor hacia nosotros.

Mi sincero agradecimiento al Profesor Ramón Bruzual por haberme asesorado durante la ejecución de éste trabajo.

Agradezco a mis padres por ser constantes y siempre estar allí durante días y noches, para que yo lograrȧ llevar a feliz termino parte de mi aprendizaje y pido a Dios por ellos, para que ambos logren ver, el final de todo lo que me falta aprender.

Agradezco a mis hermanos por ser la fuerza y la unión. Gracias por hacerme reír en aquellos momentos en que más necesitaba de esa energía que ustedes sin saberlo me transmiten.

Agradezco al Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico de la Universidad Central de Venezuela, por haberme ayudado en las copias y encuadernaciones de éste Trabajo Especial de Grado.

Por último, agradezco a todos los que de una manera u otra me transmitieron durante todo éste tiempo buena energía y palabras de aliento.

Gracias a todos.

CONTENIDO

Introducción

El objetivo principal de éste Trabajo Especial de Grado es comprender y desarrollar el artículo "A Müntz-Szász theorem for $C(\overline{D})$" de Tavan Trent, en el cual se prueba una versión bidimensional del teorema de Müntz-Szász.

Para lograr el objetivo mencionado se hará un repaso de la parte correspondiente a los teoremas de Weierstrass y Stone-Weierstrass estudiados en la Licenciatura, así como también el estudio de la demostración (incluyendo sus requisitos previos) del teorema de Müntz-Szász que aparece en [**1**].

El teorema de aproximación de Weierstrass dice que toda función continua en el intervalo $[0,1]$ puede ser aproximada uniformemente por polinomios. Este teorema fue generalizado por Müntz en [**4**] y Szász en [**6**], quienes probaron que si n_k es una sucesión creciente de enteros positivos, entonces la variedad lineal generada por

$$\{1, t^{n_1}, t^{n_2}, \dots\}$$

es densa en $C[0,1]$ con la métrica uniforme, si y sólo si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} = \infty.$$

En el Capítulo 2 se demostrará, utilizando teoría de funciones de Hardy, que si n_k es una sucesión creciente de enteros positivos, entonces la variedad lineal generada por

$$\{t^{n_1}, t^{n_2}, \dots\}$$

es densa en $L^2[0,1]$ con la métrica $\| \|_2$, si y sólo si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} = \infty.$$

Este resultado será esencial en la demostración del teorema de Müntz-Szász que se puede encontrar en [**1**].

Sean

$$\overline{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\} \quad \text{y} \quad \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

En el Capítulo 1 se verá que una consecuencia de la versión compleja del teorema de Stone-Weierstrass, es que la variedad lineal generada por el conjunto

$$\{1, z^n \, \overline{z}^m : n, m \in \mathbb{N}\}$$

es densa en $C(\overline{D})$, con la métrica uniforme.

Tomando en cuenta el resultado de Müntz y Szász, resulta natural plantearse el siguiente problema: Sea M un subconjunto de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. ¿Qué condición debe cumplir M para que la variedad lineal generada por el conjunto

$$\{1, z^n \, \overline{z}^m : (n, m) \in M\}$$

sea densa en $C(\overline{D})$ con la métrica uniforme?

Esta pregunta fue respondida por Tavant T. Trent, en su artículo [**7**], quien dió una condición necesaria y suficiente para la densidad del conjunto mencionado anteriormente y que en el Capítulo 3 se estudiará detalladamente.

CAPíTULO 1

Preliminares.

El objetivo de éste capítulo es presentar algunas definiciones,teoremas y proposiciones que servirán de herramienta en la demostración del teorema de Müntz-Szász y del teorema de Trent que se estudiarán detalladamente es los capítulos siguientes.

A continuación se fija algo de la notación que se utilizará en el desarrollo de éste trabajo.

(1) $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$
(2) $\mathbb{R}^{2+} = \{w = a + i\, b : b > 0\}$
(3) $\overline{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$

DEFINICIÓN 1.1. Sea X un espacio vectorial complejo. Una seminorma en X es una función $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

(i) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ para cada $x, y \in X$
(ii) $p(\lambda\, x) = |\lambda| p(x)$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in X$

A continuación enunciamos la versión compleja del teorema de Hahn-Banach (ver [**5**]).

TEOREMA 1.2. *Sean X un espacio vectorial complejo y $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una seminorma. Sea S una variedad lineal propia de X y sea $f : S \longrightarrow \mathbb{C}$ una función lineal tal que $|f(x)| \leq p(x)$ para cada $x \in S$. Entonces existe un funcional lineal y continuo $F : X \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $F(x) = f(x)$ para cada $x \in S$.*

Como consecuencia del teorema anterior sigue el siguiente resultado, el cual será utilizado en la demostración del Teorema 2.3 y del Teorema 3.2.

TEOREMA 1.3. *Sean X un espacio normado sobre $\mathbb{C}$ y S un subespacio propio de X, entonces existe un funcional $F : X \longrightarrow \mathbb{C}$ lineal y continuo no nulo tal que $F(S) = \{0\}$.*

DEMOSTRACIÓN.
Sean $x_0 \in X \setminus S$ y $\widetilde{S} = \{s + \lambda\, x_0 : s \in S, \lambda \in \mathbb{C}\}$.

Definamos la función $f : \widetilde{S} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f(s + \lambda\, x_0) = \lambda.$$

Considerando $\lambda = 0$, se tiene que $f(s) = 0$ para cada $s \in S$.

Si $s = 0$ y $\lambda = 1$, entonces $f(x_0) = 1$ de donde

$$f(S) = 0 \qquad \text{y} \qquad f \neq 0. \tag{1.1}$$

Además tenemos que f es lineal; en efecto.

Sean $x, y \in \widetilde{S}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces existen $s_1, s_2 \in S$ y $\lambda_1, \lambda_2, \alpha \in \mathbb{C}$ tales que

$$x = s_1 + \lambda_1\, x_0 \qquad \text{y} \qquad y = s_2 + \lambda_2\, x_0.$$

Por lo tanto, por la definición de f,

$$\begin{aligned} f(\alpha\, x + y) &= f(\alpha[s_1 + \lambda_1\, x_0] + [s_2 + \lambda_2\, x_0]) \\ &= f([\alpha\, s_1 + s_2] + [\alpha\, \lambda_1 + \lambda_2] x_0) \\ &= \alpha\, \lambda_1 + \lambda_2 \\ &= \alpha\, f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Veamos que f es continua. Para esto definamos

$$d = \text{distancia}(x_0, S) = \inf_{s \in S} \|s + x_0\|,$$

como x_0 no está en S y S es cerrado, entonces $d > 0$.

Si $x = s + \lambda\, x_0$ con $s \in S$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, se tiene que $|f(x)| = |\lambda| = \dfrac{|\lambda|\, d}{d}$.

Por otro lado se tiene que $d \leq \|\frac{s}{\lambda} + x_0\|$, ya que $\frac{s}{\lambda} \in S$.

De donde

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \frac{|\lambda| \|\frac{s}{\lambda} + x_0\|}{d} \\ &= \frac{1}{d}\, \|s + \lambda\, x_0\| \\ &= \frac{1}{d}\, \|x\|. \end{aligned}$$

Luego f es un funcional lineal continuo.

Consideremos la siguiente seminorma $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $p(x) = \|f\|\, \|x\|$.

Como f es continua, se tiene que $|f(x)| \leq \|f\|\,\|x\|$; luego del teorema anterior se concluye que existe un funcional lineal y continuo $F : X \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$F(x) = f(x) \quad \text{para cada } x \in \widetilde{S}.$$

Como $S \subset \widetilde{S}$, entonces de la ecuación (1.1) se tiene que

$$F \neq 0 \qquad \text{y} \qquad F(S) = \{0\}.$$

$\square$

1. Funciones de Hardy

La definición y el siguiente teorema que a continuación se presentan fueron extraídos de [**1**] y serán utilizados en la demostración del Teorema 2.3.

Si $h : \mathbb{R}^{2+} \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función, definimos

$$h_b(w) = h(w + i\,b), \text{ para } b > 0.$$

Definición 1.4. Si $h : \mathbb{R}^{2+} \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función analítica tal que

$$\sup_{b>0} \|h_b\|_2^2 = \sup_{b>0} \int_0^\infty |h(a + i\,b)|^2 da < \infty,$$

entonces h es llamada función de Hardy de clase H^{2+}.

Por H^{2+} denotemos la clase de las funciones anteriores.

Teorema 1.5. *Sea $h : \mathbb{R}^{2+} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica, entonces h es de clase H^{2+} si y sólo si*

$$h(w) = \int_0^\infty f(x)\, e^{iwx} dx,$$

para alguna función $f \in L^2[0, +\infty)$.

Idea de la demostración.
Supongamos que

$$h(\omega) = \int_0^\infty f(x) e^{i\,wx} dx,$$

donde $f \in L^2[0, \infty]$ y $Im(w) > 0$.
Supongamos $w_0 = a_0 + i\,b_0$ con $b_0 > 0$.

Entonces

$$\lim_{w \longrightarrow w_0} \frac{h(w)-h(w_0)}{w-w_0} = \lim_{w \longrightarrow w_0} \int_0^\infty f(x) \left(\frac{e^{iwx}-e^{iw_0x}}{w-w_0} \right) dx$$
$$= \lim_{w \longrightarrow w_0} \int_0^\infty f(x)\, e^{\frac{-b_0}{2}x}\, e^{\frac{b_0}{2}x} \left(\frac{e^{iwx}-e^{iw_0x}}{w-w_0} \right) dx.$$

Por otro lado se tiene que

$$\int_0^\infty |f(x)e^{\frac{-b_0}{2}x}|dx \leq \left(\int_0^\infty |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^\infty e^{-b_0x} \right)^{1/2} < \infty.$$

Además por el teorema del valor medio

$$e^{\frac{b_0}{2}x} \left(\frac{e^{iwx}-e^{iw_0x}}{w-w_0} \right) = e^{\frac{b_0}{2}x}\, e^{iw'x},$$

donde w' está en el segmento que une a w con w_0.

Para $w \approx w_0$ tenemos que si $w' = a' + ib'$ entonces $b' \geq \frac{b_0}{2}$.

Luego, como $x \geq 0$,

$$|e^{\frac{b_0}{2}x}\, e^{iw'x}| = |e^{\frac{b_0}{2}x}\, e^{ia'x}\, e^{-b'x}|$$
$$= e^{(\frac{b_0}{2}-b')x} \leq 1.$$

Sea

$$h_w(x) = f(x) \left(\frac{e^{iwx}-e^{iw_0x}}{w-w_0} \right).$$

Se ha probado que

$$|h_w(x)| \leq g(x),$$

donde g es no negativa e integrable en $[0, +\infty)$.

Además $\lim_{w \longrightarrow w_0} h_w(x) = i\, x\, f(x)\, e^{iw_0x}$ para todo $x \in [0, +\infty)$.

Del teorema de convergencia dominada se tiene que

$$\lim_{w \longrightarrow w_0} \int_0^\infty h_w(x)\, dx = \int_0^\infty i\, x\, f(x)\, e^{iw_0x}\, dx.$$

Por lo tanto h es analítica en $\mathbb{R}^{2+}$.

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned} h_b(a) &= h(a + i\, b) \\ &= \int_0^\infty f(x)\, e^{i\,(a+i\,b)x} dx \\ &= \int_0^\infty f(x)\, e^{-bx}\, e^{i\,ax} dx \end{aligned}$$

De donde $h_b(a)$ es la transformada de Fourier de $f(x)\, e^{-bx}$.

Como la transformada de Fourier es una isometría, se tiene que

$$\|h_b\|_2 = \|f(x)\, e^{-bx}\|_2.$$

De aquí sigue que

$$\sup_{b>0} \|h_b\|_2^2 < \infty,$$

lo que implica que h es una función de Hardy de clase H^{2+}.

La otra implicación requiere mucha más técnica y se usa el teorema de representación de Cauchy para obtener la función f a partir de h.

□

2. Productos Infinitos

DEFINICIÓN 1.6. Sea $\{u_k\}_{k=0}^\infty$ una sucesión de números, entonces el símbolo

$$\prod_{k=0}^\infty u_k = u_0.u_1.u_2...,$$

denota un producto infinito. Además $P_n = u_0.u_1...u_n$, representa el producto parcial del producto infinito.

Las siguientes proposiciones servirán de gran utilidad en la prueba del Lema 2.2 y se pueden encontrar en [**2**].

PROPOSICIÓN 1.7. *Sea $\{u_k\}_{k=0}^\infty$ una sucesión de números positivos, entonces*

$$(1 + u_0)(1 + u_1)...(1 + u_k) \leq \exp(u_0 + u_1 + ... + u_k)$$

Demostración.

Como
$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$
Entonces si $x \geq 0$ se tiene que $1 + x \leq e^x$.

Por lo tanto $1 + u_n \leq e^{u_n}$ para cada $1 \leq n \leq k$, de donde
$$\begin{aligned}(1+u_0)(1+u_1)...(1+u_k) &\leq \prod_{n=0}^{k} \exp(u_n) \\ &= \exp(u_0 + u_1 + \dots + u_k).\end{aligned}$$
□

Proposición 1.8. *Sea $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ una sucesión de números, entonces*
$$|(1+u_{k+1})(1+u_{k+2})...(1+u_{k+p}) - 1| \leq (1+|u_{k+1}|)(1+|u_{k+2}|)...(1+|u_{k+p}|) - 1 \tag{1.2}$$

Demostración.

Para demostrar la inecuación (1.2) se hará inducción sobre p.

Para $p = 1$ se cumple la desigualdad.

Supóngase cierta la desigualdad hasta p y demuéstrese para $p + 1$. En efecto
$$\begin{aligned}|(1+u_{k+1})...(1+u_{k+p+1}) - 1| &= |(1+u_{k+1})...(1+u_{k+p}) - 1 + (1+u_{k+1})...(1+u_{k+p})u_{k+p+1}| \\ &\leq |(1+u_{k+1})...(1+u_{k+p}) - 1| + |(1+u_{k+1})...(1+u_{k+p})u_{k+p+1}| \\ &\leq (1+|u_{k+1}|)...(1+|u_{k+p}|) - 1 + (1+|u_{k+1}|)...(1+|u_{k+p}|)|u_{k+p+1}| \\ &= (1+|u_{k+1}|)...(1+|u_{k+p}|)(1+|u_{k+p+1}|) - 1.\end{aligned}$$
□

3. Teoremas de Aproximación

A continuación se enuncia el teorema de Weierstrass.

Teorema 1.9 (Teorema de Weierstrass). *Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ y $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Dado $\varepsilon > 0$ existe un polinomio P tal que $\|f - P\|_\infty < \varepsilon$.*

Como consecuencia del teorema anterior se tiene el siguiente resultado.

Corolario 1.10. *Sea $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Dado $\varepsilon > 0$ existe un polinomio P tal que $f(0) = P(0)$ y $\|f - P\|_\infty < \varepsilon$.*

Demostración.

Sea $\varepsilon > 0$.

Por el teorema de Weierstrass tenemos que existe un polinomio q tal que

$$\|f - q\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por lo tanto

$$|f(0) - q(0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $p(x) = q(x) - q(0) + f(0)$, entonces $p(0) = f(0)$.

Falta probar que $\|f - p\|_\infty < \varepsilon$. Si $x \in [0,1]$, por la definición de p, tenemos que

$$\begin{aligned}|f(x) - p(x)| &= |f(x) - q(x) + q(x) - p(x)|\\ &\leq |f(x) - q(x)| + |q(x) - p(x)|\\ &= |f(x) - q(x)| + |f(0) - q(0)|\\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon;\end{aligned}$$

de donde

$$\|f - p\|_\infty < \varepsilon.$$

$\square$

Definición 1.11. Sea $\mathcal{A}$ una subálgebra de $C(X, \mathbb{C})$, se dice que $\mathcal{A}$ separa puntos de X si para cada $x, y \in X$, $x \neq y$ existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

A continuación se enuncia la versión compleja del teorema de Stone-Weierstrass, que generaliza al teorema de Weierstrass (ver [**5**]).

Teorema 1.12. *Sea X un espacio de Hausdorff compacto. Sea $\mathcal{A}$ una subálgebra de $C(X, \mathbb{C})$ tal que:*

(1) *$\mathcal{A}$ separa puntos de X*
(2) *$\mathcal{A}$ contiene las constantes*
(3) *Si $f \in \mathcal{A}$, entonces $\overline{f} \in \mathcal{A}$,*

entonces $\mathcal{A}$ es densa en $C(X, \mathbb{C})$.

COROLARIO 1.13. *Sea* $\overline{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, *entonces la variedad lineal generada por*

$$\{z^n \, \overline{z}^m : n, m = 0, 1, 2, \cdots\},$$

es densa en $C(\overline{D})$ *con la métrica uniforme.*

DEMOSTRACIÓN.
Sea $\mathcal{A}$ la variedad lineal generada por $\{1, z^n \, \overline{z}^m : n, m \in \mathbb{N}\}$.

Veamos que $\mathcal{A}$ separa puntos de $\overline{D}$, en efecto si se toma $n = 1$ y $m = 0$ se tiene que $f(z) = z \in \mathcal{A}$.
Por lo tanto si $z_1, z_2 \in \overline{D}$ con $z_1 \neq z_2$ entonces $f(z_1) \neq f(z_2)$.

Tomando a $n = m = 0$ se tiene que $1 \in \mathcal{A}$, de manera que $\mathcal{A}$ contiene las constantes.

Por otro lado, si $f(z) \in \mathcal{A}$ para cada $z \in \overline{D}$ existen constantes complejas a_{ij} tales que

$$f(z) = \sum_{i,j \geq 0} a_{ij} \, z^i \, \overline{z}^j,$$

lo que implica que

$$\overline{f}(z) = \sum_{i,j \geq 0} b_{ij} \, z^j \, \overline{z}^i \quad \text{donde} \quad b_{ij} = \overline{a_{ij}},$$

de donde $\overline{f} \in \mathcal{A}$.

Luego del teorema anterior se concluye que $\mathcal{A}$ es densa en $C(\overline{D})$. □

El siguiente teorema será utilizado en la demostración del teorema de Müntz-Szász.

TEOREMA 1.14. $C[0, 1]$ *es denso en* $L^2[0, 1]$, *con respecto a la norma* $\| \, \|_2$.

DEMOSTRACIÓN.
Como el conjunto de las combinaciones lineales de las funciones características de intervalos, es denso en $L^2[0, 1]$ con respecto a la norma $\| \, \|_2$, basta demostrar que las funciones características de los intervalos pueden ser aproximadas en $\| \, \|_2$ por funciones continuas.

Sean $\varepsilon > 0$ y $\delta = \frac{\varepsilon^2}{2}$.

Sea $0 \leq a \leq b \leq 1$.

Consideremos la siguiente función continua en $[0, 1]$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq x \leq b \\ \frac{x-a}{\delta} + 1 & \text{si } a - \delta \leq x \leq a \\ \frac{b-x}{\delta} + 1 & \text{si } b \leq x \leq b + \delta \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se puede observar que $0 \leq f(x) \leq 1$.
Por lo tanto

$$\begin{aligned} \|\mathcal{X}_{[a,b]} - f\|_2^2 &= \int_0^1 |(\mathcal{X}_{[a,b]} - f)(x)|^2 dx \\ &= \int_{a-\delta}^{a} |f(x)|^2 dx + \int_b^{b+\delta} |f(x)|^2 dx \\ &\leq \int_{a-\delta}^{a} dx + \int_b^{b+\delta} dx \\ &= \delta + \delta \\ &= 2\delta = \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Luego

$$\|\mathcal{X}_{[a,b]} - f\|_2 \leq \varepsilon.$$

□

4. Preliminares de Medida

En esta sesión se darán algunas definiciones y teoremas sobre medida que se pueden encontrar en [**5**].

DEFINICIÓN 1.15. Sean X un espacio de Hausdorff compacto y G un subespacio de $C(X)$, decimos que una medida compleja μ en X es ortogonal a G si

$$\int_X g\, d\mu = 0 \qquad \text{para cada } g \in G.$$

DEFINICIÓN 1.16. Sean $\mathcal{B}$ una σ-álgebra en un conjunto X y $E \in \mathcal{B}$. Una partición de E es una sucesión $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ en $\mathcal{B}$ tal que:

(i) $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$

(ii) $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$.

Definición 1.17. Una medida compleja en una σ-álgebra $\mathcal{B}$ es una función $\mu : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) Si $E \in \mathcal{B}$ entonces $\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$, para toda partición $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ de E.

Definición 1.18. Sea μ una medida compleja en una $\sigma-$álgebra $\mathcal{B}$ y $E \in \mathcal{B}$. La variación total de μ se define por

$$|\mu|(E) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)|,$$

donde el supremo es con respecto a todas las particiones $\{E_i\}$ de E.

En el siguiente teorema se usará que si $\{a_{ij}\}$ es una sucesión de números positivos, entonces

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.$$

Teorema 1.19. *Sean $\mathcal{B}$ una σ álgebra en un conjunto X y μ una medida compleja en $\mathcal{B}$. Entonces $|\mu|$ es una medida positiva.*

Demostración.

Por la Definición 1.18 se tiene que $|\mu|$ es positiva.

Como la única partición de $\emptyset$ es $\{\emptyset\}$, entonces $|\mu|(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$.

Para probar que $|\mu|$ es una medida falta ver que si $E \in \mathcal{B}$ y $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una partición de E, entonces

$$|\mu|(E) = \sum_{i=1}^{\infty} |\mu|(E_i).$$

Para esto, consideremos una sucesión de números reales $\{t_i\}$ tales que

$$t_i < |\mu|(E_i) \quad \text{para cada } i = 1, 2, 3, ...$$

Por la Definición 1.18 se tiene que cada E_i tiene una partición $\{A_{ij}\}_{j=1}^{\infty}$ tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(A_{ij})| > t_i \quad (i = 1, 2, 3, ...)$$

Además $\{A_{ij}\} \quad (i, j = 1, 2, 3, ...)$ es una partición de E.
Por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{\infty} t_i \leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(A_{ij})| \leq |\mu|(E).$$

Luego

$$\sum_{i=1}^{\infty} t_i \leq |\mu|(E).$$

Por otro lado se tiene que

$$\sup\left\{\sum_{i=1}^{\infty} t_i : t_i < |\mu|(E_i)\right\} = \sum_{i=1}^{\infty} |\mu|(E_i),$$

de donde

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\mu|(E_i) \leq |\mu|(E). \tag{1.3}$$

Para demostrar la desigualdad contraria, consideremos una partición $\{A_j\}$ de E. Entonces para cada j fijo, $\{A_j \cap E_i\}$ es una partición de A_j y para cada i fijo, $\{A_j \cap E_i\}$ es una partición de E_i.

Por lo tanto, por la Definición 1.18

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(A_j)| &= \sum_{j=1}^{\infty} \left|\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_j \cap E_i)\right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} |\mu(A_j \cap E_i)| \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(A_j \cap E_i)| \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} |\mu|(E_i).
\end{aligned}$$

De manera que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(A_j)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\mu|(E_i),$$

como $\{A_j\}$ es una partición de E se tiene que

$$|\mu|(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\mu|(E_i). \tag{1.4}$$

De las ecuaciones (1.3) y (1.4) se deduce que $|\mu|(E) = \sum_{i=1}^{\infty} |\mu|(E_i)$.

□

Observación 1.20. También se puede demostrar que si μ es una medida compleja en un conjunto X, entonces $|\mu|(X) < \infty$.

Definición 1.21. Sea μ una medida real en una $\sigma-$álgebra $\mathcal{B}$. Se define

$$\mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu) \quad \text{y} \quad \mu^- = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu)$$

como la variación positiva y negativa de μ respectivamente, donde μ^+ y μ^- son medidas positivas. Además $\mu = \mu^+ - \mu^-$.

A continuación se enuncia el teorema de Radon-Nikodym (ver [**5**]).

Teorema 1.22. *Sean $\mathcal{B}$ una σálgebra en un conjunto X y μ una medida compleja en $\mathcal{B}$. Entonces existe una función $h : X \longrightarrow \mathbb{C}$ medible tal que $|h(x)| = 1$ para cada $x \in X$ y $d\mu = h\, d|\mu|$.*

El teorema anterior será utilizado en la prueba del teorema de descomposición de Hahn que a continuación se presenta (ver [**5**])

Teorema 1.23. *Sea μ una medida real en una $\sigma-$álgebra $\mathcal{B}$ de un conjunto X. Entonces existen conjuntos disjuntos $A_1, A_2 \in \mathcal{B}$ tales que $A_1 \cup A_2 = X$, y tales que para todo $E \in \mathcal{B}$ se tiene que*

$$\mu^+(E) = \mu(A_1 \cap E) \quad y \quad \mu^-(E) = -\mu(A_2 \cap E).$$

Demostración.

Por el teorema anterior se tiene que existe una función $h : X \longrightarrow \mathbb{C}$ medible tal que $|h(x)| = 1$ para cada $x \in X$ y $d\mu = h\, d|\mu|$.

Como μ es real entonces h es real, de modo que $h =^{+}_{-} 1$.
Sean

$$A_1 = \{x : h(x) = 1\} \quad \text{y} \quad A_2 = \{x : h(x) = -1\}$$

Por la definición de los conjuntos anteriores se tiene que $X = A_1 \cup A_2$ y

$$\frac{1}{2}(1+h) = \begin{cases} h & \text{en } A_1 \\ 0 & \text{en } A_2 \end{cases}$$

Además

$$\mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu).$$

Sea $E \in \mathcal{B}$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \mu^+(E) &= \frac{1}{2}\int_E (1+h)d|\mu| \\ &= \int_{E\cap A_1} hd|\mu| \\ &= \int_{E\cap A_1} d\mu = \mu(E\cap A_1). \end{aligned}$$

Luego $\mu^+(E) = \mu(E \cap A_1)$.
De igual manera

$$\frac{1}{2}(1-h) = \begin{cases} 0 & \text{en } A_1 \\ -h & \text{en } A_2 \end{cases}$$

Como

$$\mu^- = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mu^-(E) &= \frac{1}{2}\int_E (1-h)d|\mu| \\ &= -\int_{E\cap A_2} hd|\mu| \\ &= -\int_{E\cap A_2} d\mu = -\mu(E\cap A_2). \end{aligned}$$

De donde $\mu^-(E) = -\mu(E \cap A_2)$. $\square$

A continuación se enuncia el teorema de representación de Riesz (ver [**5**]).

TEOREMA 1.24 (Teorema de Representación de Riesz). *Sea X un espacio de Hausdorff compacto, entonces para cada funcional lineal y continuo Φ en $C(X)$, existe una única medida compleja μ tal que*

$$\Phi(f) = \int_X f d\mu \quad \textit{para cada} \quad f \in C(X).$$

CAPíTULO 2

Teorema de Müntz-Szász.

El objetivo principal de éste capítulo es dar una demostración del teorema de Müntz-Szász. Previamente se estudiarán algunos lemas y teoremas que servirán de ayuda en la demostración del mismo.

LEMA 2.1. *Sean $h : \mathbb{R}^{2+} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función analítica y $f \in L^2[0,1]$ tales que para cada $\gamma \in \mathbb{R}^{2+}$ se tiene que $|h_{1/2}(\gamma)| \leq \|f\|_2$. Supóngase que existe una sucesión creciente de números enteros $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $\gamma = i\, n_k$ es raíz de $h_{1/2}$ para cada $k \geq 1$ y*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} = \infty,$$

entonces $h_{1/2} = 0$, donde $h_{1/2}(\gamma) = h(\gamma + i\,\frac{1}{2})$.

DEMOSTRACIÓN.

Consideremos la función

$$J(\gamma) = h_{1/2}(\gamma) \prod_{k \leq m} \frac{\gamma + in_k}{\gamma - in_k}.$$

Como $\gamma = i\, n_k$ es raíz de $h_{1/2}$ para cada $k \geq 1$, y éstos también representan todos los polos de

$$\prod_{k \leq m} \frac{\gamma + in_k}{\gamma - in_k},$$

entonces $J(\gamma)$ está bien definida.

Veamos que J está acotada por $\|f\|_2$; en efecto,

$$\begin{aligned} |J(\gamma)| &= \left| h_{1/2}(\gamma) \prod_{k \leq m} \frac{\gamma + in_k}{\gamma - in_k} \right| \\ &\leq \|f\|_2 \prod_{k \leq m} \left| \frac{\gamma + in_k}{\gamma - in_k} \right|; \end{aligned}$$

además dado $\varepsilon > 0$ existe γ_0 tal que si $|\gamma| \geq |\gamma_0|$ entonces

$$\prod_{k \leq m} \left| \frac{1 + i\,\frac{n_k}{\gamma}}{1 - i\,\frac{n_k}{\gamma}} \right| \leq 1 + \varepsilon,$$

por lo tanto $|J(\gamma)| \leq \|f\|_2(1+\varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$; lo que implica que

$$|J(\gamma)| \leq \|f\|_2, \text{ para todo } \gamma \in \mathbb{R}^{2+}.$$

En particular si $\gamma = i\,b$, con $b > 0$; se tiene que

$$\left|h_{1/2}(i\,b)\right| \left| \prod_{k \leq m} \frac{i\,b + in_k}{i\,b - in_k} \right| \leq \|f\|_2.$$

De donde

$$\begin{aligned} |h_{1/2}(i\,b)| &\leq \|f\|_2 \prod_{k \leq m} \left| \frac{i\,b - in_k}{i\,b + in_k} \right| \\ &= \|f\|_2 \prod_{k \leq m} \left(\frac{n_k + b - 2b}{n_k + b} \right) \\ &= \|f\|_2 \prod_{k \leq m} \left(1 - \frac{2b}{n_k + b} \right); \end{aligned}$$

como $1 - x \leq e^{-x}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} |h_{1/2}(i\,b)| &\leq \|f\|_2 \prod_{k \leq m} \exp\left(\frac{-2b}{n_k + b} \right) \\ &= \|f\|_2 \exp\left(\sum_{k \leq m} \frac{-2b}{n_k + b} \right) \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos

$$\exp\left(\sum_{k \leq m} \frac{-2b}{n_k + b} \right) \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad m \longrightarrow \infty, \text{ ya que}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} = \infty \quad \text{y} \quad b > 0;$$

Por lo tanto $h_{1/2}(i\,b) = 0$ y como $h_{1/2}$ es analítica se tiene que $h_{1/2} = 0$. $\square$

LEMA 2.2. *Sean $R \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $g_k : R \longrightarrow \mathbb{C}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, una sucesión de funciones analíticas. Supóngase que existe una sucesión de números reales no negativos $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} M_k < \infty$ y $|g_k(\gamma)| \leq M_k$ para cada $\gamma \in R$. Si existe una constante c_0 tal que $|\prod_{k=1}^{n}(1 + g_k(\gamma))| \leq c_0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty}(1 + g_k(\gamma))$ es analítico en R.*

DEMOSTRACIÓN.

Para demostrar que $H(\gamma) = \displaystyle\prod_{k=1}^{\infty}(1+g_k(\gamma))$ es analítico en R, probaremos que el producto converge uniformemente.

Para esto consideremos
$m > n$, y $f_k(\gamma) = 1 + g_k(\gamma)$, entonces

$$\begin{aligned}\left|\prod_{k=1}^{m} f_k(\gamma) - \prod_{k=1}^{n} f_k(\gamma)\right| &= \left|\prod_{k=1}^{n} f_k(\gamma)\right| \left|\prod_{k=n+1}^{m} f_k(\gamma) - 1\right| \\ &\leq c_0 \left|\prod_{k=n+1}^{m} f_k(\gamma) - 1\right|.\end{aligned}$$

Por otro lado, por las Proposiciones 1.8 y 1.7, tenemos que

$$\begin{aligned}\left|\prod_{k=n+1}^{m} f_k(\gamma) - 1\right| &= \left|\prod_{k=n+1}^{m} (1 + g_k(\gamma)) - 1\right| \\ &\leq \prod_{k=n+1}^{m} (1 + |g_k(\gamma)|) - 1 \\ &\leq \exp\left(\sum_{k=n+1}^{m} |g_k(\gamma)|\right) - 1 \\ &\leq \exp\left(\sum_{k=n+1}^{m} M_k\right) - 1,\end{aligned}$$

ya que $|g_k(\gamma)| \leq M_k$.

Como $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} M_k < \infty$, entonces

$$\sum_{k=n+1}^{m} M_k \longrightarrow 0, \quad \text{cuando} \quad n \longrightarrow \infty;$$

es decir

$$\exp(\sum_{k=n+1}^{m} M_k) \longrightarrow 1, \quad \text{cuando} \quad n \longrightarrow \infty,$$

luego

$$\left|\prod_{k=1}^{m} f_k(\gamma) - \prod_{k=1}^{n} f_k(\gamma)\right| \longrightarrow 0, \quad \text{cuando} \quad n \longrightarrow \infty.$$

De donde H converge uniformemente. □

El siguiente teorema será esencial en la prueba del teorema de Müntz-Szász que más adelante se estudiará detalladamente. La demostración del mismo fue tomada de [**1**]

TEOREMA 2.3. *Sea* $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$, *una sucesión de números enteros . Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *La variedad lineal generada por* $\mathcal{M} = \{x^{n_k} : k = 1, 2, 3, ...\}$ *es densa en* $L^2[0, 1]$

(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} = \infty$

DEMOSTRACIÓN.

(i)$\Longrightarrow$(ii)

Supongamos que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} < +\infty$.

La idea de la demostración es encontrar una función $f \in L^2[0, 1]$ no nula tal que $f \perp \mathcal{M}$.

Para esto consideremos la función

$$J(\gamma) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{w_k - \gamma}{w_k + \gamma},$$

donde $w_k = i(n_k + \frac{1}{2})$.

Si $\gamma = a + ib$, con $b > 0$; se tiene que

$$\left|\frac{w_k - \gamma}{w_k + \gamma}\right| = \left|\frac{i(n_k + \frac{1}{2}) - a - ib}{i(n_k + \frac{1}{2}) + a + ib}\right| = \frac{\sqrt{a^2 + (n_k + \frac{1}{2} - b)^2}}{\sqrt{a^2 + (n_k + \frac{1}{2} + b)^2}}$$

como $b > 0$, entonces $a^2 + (n_k + \frac{1}{2} + b)^2 > a^2 + (n_k + \frac{1}{2} - b)^2$; de donde

$$\frac{1}{a^2 + (n_k + \frac{1}{2} + b)^2} < \frac{1}{a^2 + (n_k + \frac{1}{2} - b)^2};$$

de manera que

$$\frac{\sqrt{a^2 + (n_k + \frac{1}{2} - b)^2}}{\sqrt{a^2 + (n_k + \frac{1}{2} + b)^2}} < \frac{\sqrt{a^2 + (n_k + \frac{1}{2} - b)^2}}{\sqrt{a^2 + (n_k + \frac{1}{2} - b)^2}} = 1;$$

por lo tanto

$$\left|\frac{w_k-\gamma}{w_k+\gamma}\right| < 1 \, \text{para todo} \, k \geq 1;$$

luego $|J(\gamma)| < 1$ para todo $\gamma \in \mathbb{R}^{2+}$, además tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{w_k-\gamma}{w_k+\gamma} &= \frac{w_k-\gamma}{w_k+\gamma} - 1 + 1\\ &= 1 - \frac{2\gamma}{w_k+\gamma}\,.\end{aligned}$$

De donde

$$J(\gamma) = \prod_{k=1}^{\infty}(1+g_k(\gamma));$$

donde $g_k(\gamma) = -\dfrac{2\gamma}{w_k+\gamma}$ es analítica en $\mathbb{R}^{2+}$ para todo $k \geq 1$.

Sean $\gamma \in \mathbb{R}^{2+}$ y $M > 0$ tales que $|\gamma| \leq M$ y sea $M_k = \dfrac{2M}{n_k}$, entonces

$$\begin{aligned}|g_k(\gamma)| &= \left|\frac{2\gamma}{w_k+\gamma}\right|\\ &\leq \frac{2M}{\sqrt{a^2+(n_k+\frac{1}{2}+b)^2}}\\ &\leq \frac{2M}{n_k} = M_k.\end{aligned}$$

También se tiene que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} M_k = 2M\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n_k} < +\infty.$

Luego por el Lema 2.2 se obtiene que $\prod_{k=1}^{\infty}(1+g_k(\gamma))$ converge uniformemente en $\mathbb{R}^{2+}$ y por lo tanto es analítico.

Ahora consideremos, la función $h(\gamma) = \dfrac{J(\gamma)}{1-i\gamma}$, la cual es analítica en $\mathbb{R}^{2+}$, ya que $J(\gamma)$ y $(1-i\gamma)$ son analíticas en $\mathbb{R}^{2+}$.

Si $\gamma = a + ib$, con $b > 0$

$$\begin{aligned}
\|h_b\|_2^2 &= \int_0^\infty |h(a+ib)|^2 \, da \\
&= \int_0^\infty \frac{|J(a+ib)|^2}{|1 - i(a+ib)|^2} \, da \\
&\leq \int_0^\infty \frac{1}{(1+b)^2 + a^2} \, da \\
&= \frac{1}{1+b} \left[\arctan\left(\frac{a}{1+b} \right) \right]_{a=0}^{a=\infty} \\
&= \frac{1}{1+b} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) \\
&< \frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

entonces h es una función de Hardy de clase $\mathbb{H}^{2+}$. Por lo tanto del Teorema 1.5 se tiene que

$$h(\gamma) = \int_0^\infty f(e^{-y})\, e^{-y/2}\, e^{i\,\gamma\, y}\, dy;$$

donde $f(e^{-y})\, e^{-y/2}$ es una función en $L^2[0, \infty)$.

Si $f(e^{-y})\, e^{-y/2} = 0$ para todo $y \in [0, \infty)$, tenemos que $h(\gamma) = 0$ para todo $\gamma \in \mathbb{R}^{2+}$, por ende $J(\gamma) = 0$ para todo $\gamma \in \mathbb{R}^{2+}$; lo cual es una contradicción, ya que $J(\gamma) \neq 0$ para $\gamma \neq w_k$.

De donde $f(e^{-y})\, e^{-y/2} \neq 0$ para algún $y \in [0, \infty)$, lo que implica que $f(e^{-y}) \neq 0$ para algún $y \in [0, \infty)$; luego si $x = e^{-y}$ se tiene que $f(x) \neq 0$ para algún $x \in [0, 1]$.

Además se tiene que $\|h\|_2^2 = \displaystyle\int_0^\infty |f(e^{-y})|^2\, e^{-y}\, dy < \infty$, haciendo el cambio $x = e^{-y}$; obtenemos que $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|^2\, dx < \infty$, de manera que $f \in L^2[0, 1]$.

Por otro lado se tiene que

$$\begin{aligned}
0 &= h(w_k) \\
&= \int_0^\infty f(e^{-y})\, e^{-y/2}\, e^{i\, w_k\, y}\, dy \\
&= \int_0^1 f(x)\, x^{-i\, w_k - \frac{1}{2}}\, dx \\
&= \int_0^1 f(x)\, x^{n_k}\, dx.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $f \perp \mathcal{M}$ y como $f \neq 0$ en $[0,1]$, entonces la variedad lineal generada por M no es densa en $L^2[0,1]$, lo cual es una contradicción que viene de suponer que la suma de la serie es finita, luego

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} = +\infty.$$

(ii)$\Longrightarrow$ (i)

Sea $f \in L^2[0,1]$ tal que $f \perp \mathcal{M}$; es decir

$$\int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx = 0 \text{ para todo } g \in \mathcal{M}.$$

Para demostrar que la variedad lineal generada por $\mathcal{M}$ es densa en $L^2[0,1]$, basta demostrar que $f = 0$; para esto definamos

$$h(\gamma) = \int_0^1 f(x)\, x^{(-i\gamma - \frac{1}{2})}\, dx,$$

si hacemos el cambio $x = e^{-y}$; se tiene que $dx = -\, e^{-y} dy$. Luego

$$\begin{aligned} h(\gamma) &= -\int_{\infty}^{0} f(e^{-y})\, e^{-y(-i\gamma - \frac{1}{2})}\, e^{-y}\, dy \\ &= \int_0^{\infty} f(e^{-y})\, e^{-y/2}\, e^{i\gamma y}\, dy. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \|f(e^{-y}) e^{-y/2}\|_2^2 &= \int_0^{\infty} |f(e^{-y})|^2 e^{-y}\, dy \\ &= \int_0^1 |f(x)|^2\, dx \\ &= \|f\|_2^2 < \infty; \end{aligned}$$

por lo tanto $f(e^{-y})e^{-y/2} \in L^2[0,\infty]$; de manera que h es una función de Hardy.

Sea $\omega_k = i(n_k + \frac{1}{2})$, entonces

$$\begin{aligned} h(\omega_k) &= \int_0^1 f(x)\, x^{(-i\omega_k - \frac{1}{2})}\, dx \\ &= \int_0^1 f(x)\, x^{(-i\,[i\,(n_k + \frac{1}{2})] - \frac{1}{2})}\, dx \\ &= \int_0^1 f(x)\, x^{n_k}\, dx = 0\,, \quad \text{ya que} \quad f \perp \mathcal{M}. \end{aligned}$$

Luego ω_k es raíz de h para cada $k \geq 1$. Además

$$\begin{aligned} h_{1/2}(\gamma) &= h(\gamma + i\,\frac{1}{2}) \\ &= \int_0^\infty f(e^{-y})\, e^{-y/2}\, e^{i(\gamma + i\,\frac{1}{2})y}\, dy \\ &= \int_0^\infty f(e^{-y})\, e^{-y}\, e^{i\gamma y}\, dy, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} |h_{1/2}(\gamma)| &\leq \int_0^\infty |f(e^{-y})| e^{-y}\, dy \\ &= \int_0^1 |f(x)|\, dx. \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz

$$\int_0^1 |f(x)|\, dx \leq \left(\int_0^1 |f(x)|^2\, dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 dx \right)^{1/2} = \|f\|_2;$$

por lo tanto $|h_{1/2}(\gamma)| \leq \|f\|_2$.

Por el Lema 2.1 se concluye que $h_{1/2} = 0$.

Como $h_{1/2}$ representa la transformada de Fourier de $f(e^{-y})\, e^{-y}$ en $[0, \infty]$, se tiene que

$$f(e^{-y})\, e^{-y} = 0 \text{ para todo } y \in [0, \infty).$$

Es decir

$$f(x) = 0 \text{ para todo } x \in [0, 1].$$

Luego la variedad lineal generada por $\mathcal{M}$ es densa en $L^2[0,1]$. □

Proposición 2.4. *Sea* $f \in C[0,1]$ *tal que* $f(0) = 0$, *entonces* $\|f\|_\infty \leq \|f'\|_2$

Demostración.

Por el teorema fundamental del cálculo tenemos que

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\, dt\,.$$

Como $f(0) = 0$, entonces

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\, dt\,.$$

Por lo tanto

$$|f(x)| \leq \int_0^x |f'(t)|\, dt\,.$$

De donde

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} \left(\int_0^x |f'(t)|\, dt\right) = \int_0^1 |f'(t)|\, dt,$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwartz

$$\int_0^1 |f'(t)|\, dt \leq \left(\int_0^1 |f'(t)|^2\, dt\right)^{1/2} \left(\int_0^1 dt\right)^{1/2} = \|f'\|_2;$$

luego

$$\|f\|_\infty \leq \|f'\|_2.$$

$\square$

El siguiente corolario es una consecuencia del Teorema 2.3. De ahora en adelante la densidad de los conjuntos es con respecto a la métrica uniforme.

Corolario 2.5. *Sea $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$, una sucesión de números enteros tal que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} = \infty$, entonces la variedad lineal generada por $\{x^{n_k} : k = 1, 2, 3, ...\}$ es densa en $\mathcal{P}_0 = \{q : q \text{ es un polinomio y } q(0) = 0\}$.*

Demostración.

Sea $q \in \mathcal{P}_0$, entonces $q(0) = 0$.

Como $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} = \infty$, tenemos que

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n_k - 1} = \infty.$$

Por lo tanto, del Teorema 2.3 se concluye que la variedad lineal generada por el conjunto $\{x^{n_k-1} : k = 2, 3, ...\}$ es densa en $L^2[0,1]$.

Además $q' \in L^2[0,1]$; de manera que dado $\varepsilon > 0$ existen enteros $c_2, c_3, ..., c_N$, tales que

$$\left\| q'(x) - \sum_{k=2}^{N} c_k\, x^{n_k-1} \right\|_2 < \varepsilon.$$

Por otro lado tenemos que

$$q'(x) - \sum_{k=2}^{N} c_k\, x^{n_k-1} = \left(q(x) - \sum_{k=2}^{N} \frac{c_k}{n_k}\, x^{n_k}\right)'$$

De donde

$$\left\| \left(q(x) - \sum_{k=2}^{N} \frac{c_k}{n_k}\, x^{n_k} \right)' \right\|_2 < \varepsilon.$$

Sea $g(x) = q(x) - \sum_{k=2}^{N} \frac{c_k}{n_k}\, x^{n_k}$, entonces $g(0) = 0$. Por la Proposición 2.4 se tiene que $\|g\|_\infty \leq \|g'\|_2$.

Luego

$$\left\| q(x) - \sum_{k=2}^{N} \frac{c_k}{n_k}\, x^{n_k} \infty \right\|_\infty < \varepsilon;$$

lo que implica que la variedad lineal generada por $\{x^{n_k} : k = 1, 2, 3, ...\}$ es densa en $\mathcal{P}_0$ □

A continuación se presenta el teorema de Müntz-Zsász, el cual es una generalización del teorema de Stone-Weierstrass y que será esencial en la demostración del teorema de Tavan Trent (ver [**1**]).

Teorema 2.6 (Müntz-Zsász). *Sea $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$, una sucesión de números enteros . Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *La variedad lineal generada por el conjunto $\mathcal{M} = \{1,\, x^{n_k} : k = 1, 2, 3, ...\}$ es densa en $C[0,1]$*

(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} = \infty.$

Demostración.

(i)$\Longrightarrow$(ii)

Sean $g \in L^2[0,1]$ y $\varepsilon > 0$.

Por el teorema 1.14 existe $f \in C[0,1]$ tal que $f(0) = 0$ y $\|g - f\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$.

Como la variedad lineal generada por $\mathcal{M}$ es densa en $C[0,1]$, existen constantes $c_0, c_1, ..., c_N$ tales que

$$\left\| f - c_0 - \sum_{k=1}^{N} c_k\, x^{n_k} \right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2},$$

entonces $|c_0| < \frac{\varepsilon}{2}$, ya que $f(0) = 0$.

Lo que implica que

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{N} c_k\, x^{n_k} \right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Además si $h \in L^2[0,1]$, se tiene que

$$\begin{aligned}\|h\|_2 &= \left(\int_0^1 |h(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \left(\int_0^1 \|h\|_\infty^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \|h\|_\infty.\end{aligned}$$

De manera que

$$\left\|f - \sum_{k=1}^{N} c_k\,x^{n_k}\right\|_2 \leq \left\|f - \sum_{k=1}^{N} c_k\,x^{n_k}\right\|_\infty.$$

Luego

$$\begin{aligned}\left\|g - \sum_{k=1}^{N} c_k\,x^{n_k}\right\|_2 &\leq \|g-f\|_2 + \left\|f - \sum_{k=1}^{N} c_k\,x^{n_k}\right\|_2\\ &\leq \|g-f\|_2 + \left\|f - \sum_{k=1}^{N} c_k\,x^{n_k}\right\|_\infty\\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$

de donde la variedad lineal generada por $\mathcal{M}$ es densa en $L^2[0,1]$.

Por lo tanto del teorema 2.3 se concluye que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} = \infty.$$

(ii)$\Longrightarrow$(i)

Sean $f \in C[0,1]$ y $\varepsilon > 0$.

Por el Corolario 1.10 existe un polinomio p tal que

$$f(0) = p(0) \text{ y } \|f-p\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Además

$$f(x) - p(x) = f(x) - f(0) - (p(x) - f(0)).$$

Sea $q(x) = p(x) - f(0)$, entonces $q(0) = 0$.

Como

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} = \infty,$$

del corolario 2.5 sigue que existen constantes $c_1, c_2, ..., c_N$ tales que

$$\left\| q - \sum_{k=1}^{N} c_k\, x^{n_k} \right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otro lado, por la definición de q, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left\| f - f(0) - \sum_{k=1}^{N} c_k\, x^{n_k} \right\|_\infty &= \left\| f - f(0) - q + q - \sum_{k=1}^{N} c_k\, x^{n_k} \right\|_\infty \\
&\leq \| f - f(0) - q \|_\infty + \left\| q - \sum_{k=1}^{N} c_k\, x^{n_k} \right\|_\infty \\
&= \| f - p \|_\infty + \left\| q - \sum_{k=1}^{N} c_k\, x^{n_k} \right\|_\infty \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

de donde la variedad lineal generada por $\mathcal{M}$ es densa en $C[0,1]$. □

CAPíTULO 3

Extensión del teorema de Müntz-Szász a $C(\overline{D})$.

El objetivo principal de éste capítulo es dar una demostración del teorema de Müntz-Szász extendido a dos dimensiones. Antes de realizar dicha prueba presentaremos un lema previo.

LEMA 3.1. *Sea $\mu : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ una medida de Borel tal que*

$$\int_A |z|^2 \, d\mu = 0,$$

para todo conjunto de Borel A. Entonces $\mu(A) = 0$ para todo $A \subset \overline{D} \setminus \{0\}$ de Borel.

DEMOSTRACIÓN.

Por el Teorema 1.23, existen conjuntos de Borel disjuntos D_1 y D_2 tales que $\overline{D} = D_1 \cup D_2$, y tales que para todo conjunto de Borel E se tiene que

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap D_1) \tag{3.1}$$

y

$$\mu^-(E) = -\mu(E \cap D_2); \tag{3.2}$$

donde μ^+ y μ^- son como en la Definición 1.21

De las ecuaciones (3.1) y (3.2) se deduce que $\mu^+(D_2) = \mu^-(D_1) = 0, \quad \mu^+(D_1) = \mu(D_1)$ y $\mu^-(D_2) = -\mu(D_2)$.

Sean

$$D_1^n = \left\{ z \in D_1 : |z| \geq \frac{1}{n} \right\} \qquad y \qquad D_2^n = \left\{ z \in D_2 : |z| \geq \frac{1}{n} \right\},$$

por lo tanto

$$D_1 \setminus \{0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_1^n \qquad y \qquad D_2 \setminus \{0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_2^n.$$

Por otro lado, como $\mu^-(D_1) = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{D_1} |z|^2 d\mu \\
&= \int_{D_1} |z|^2 d\mu^+ - \int_{D_1} |z|^2 d\mu^- \\
&= \int_{D_1} |z|^2 d\mu^+, \\
&\geq \int_{D_1^n} |z|^2 d\mu^+ \\
&\geq \frac{1}{n^2} \int_{D_1^n} d\mu^+ \\
&= \frac{1}{n^2}\, \mu^+(D_1^n).
\end{aligned}$$

Luego $\mu^+(D_1^n) = 0$, lo que implica que $\mu^+(D_1 \setminus \{0\}) = 0$.

Sea B un conjunto de Borel tal que $B \subset D_1 \setminus \{0\}$, entonces

$$0 \leq \mu^+(B) \leq \mu^+(D_1 \setminus \{0\}),$$

de manera que

$$\mu^+(B) = 0. \tag{3.3}$$

También, como $\mu^+(D_2) = 0$, se tiene que

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{D_2} |z|^2 d\mu \\
&= \int_{D_2} |z|^2 d\mu^+ - \int_{D_2} |z|^2 d\mu^- \\
&= -\int_{D_2} |z|^2 d\mu^- \\
&\leq -\int_{D_2^n} |z|^2 d\mu^- \\
&\leq -\frac{1}{n^2} \int_{D_2^n} d\mu^- \\
&= -\frac{1}{n^2}\, \mu^-(D_2^n).
\end{aligned}$$

Lo que implica que $\mu^-(D_2^n) = 0$, y en consecuencia $\mu^-(D_2 \setminus \{0\}) = 0$.

Sea C un conjunto de Borel tal que $C \subset D_2 \setminus \{0\}$, por lo tanto

$$0 \leq \mu^-(C) \leq \mu^-(D_2 \setminus \{0\}),$$

luego

$$\mu^-(C) = 0. \tag{3.4}$$

Como $\mu = \mu^+ - \mu^-$, de las ecuaciones (3.3) y (3.4) se concluye que si A es un conjunto de Borel tal que $A \subset \overline{D} \setminus \{0\}$ entonces $\mu(A) = 0$.

□

El siguiente teorema es una generalización del teorema de Müntz-Szász a dos dimensiones; el mismo representa el centro de éste Trabajo Especial de Grado y fue dado por Tavan Trent en su artículo [**7**].

TEOREMA 3.2 (Tavan Trent). *Sean M un subconjunto de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, j un número entero y $M_j = \{m : (m, m+j) \in M\}$. Si consideramos el conjunto $\mathcal{M} = \{1, z^n\, \bar{z}^m : (n, m) \in M\}$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *La variedad lineal generada por $\mathcal{M}$ es densa en $C(\overline{D})$*

(ii) *Para cada j, $\displaystyle\sum_{m \in M_j} \frac{1}{m} = \infty$*

DEMOSTRACIÓN.

(i)$\Longrightarrow$(ii)

Supongamos que $\displaystyle\sum_{m \in M_j} \frac{1}{m} < \infty$, para algún $j \in \mathbb{N}$, entonces

$$\sum_{m \in M_j} \frac{1}{2m + j} < \infty. \tag{3.5}$$

La idea de la demostración es construir, a partir del teorema de Müntz-Szász una medida compleja $\gamma \neq 0$ en $\overline{D}$ tal que $\gamma \perp \mathcal{M}$.

De la ecuación (3.5) y del teorema de Müntz-Szász se deduce que la variedad lineal generada por $\{1, t^{2m+j} : m \in M_j\}$ no es densa en $C[0, 1]$; por lo tanto, existe una medida $\gamma_0(t) \neq 0$ en [0,1] tal que

$$\int_0^1 d\gamma_0 = 0 \qquad y \qquad \int_0^1 t^{2m+j} d\gamma_0 = 0, \text{ para cada}\, m \in M_j.$$

Definamos la siguiente medida producto,

$$d\gamma = d\gamma_0 \times e^{ij\theta} d\theta, \text{ donde } d\theta \text{ denota la medida de Lebesgue en } [0, 2\pi]$$

Por el teorema de Fubini tenemos que

$$\int_{\overline{D}} f(z)d\gamma = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 f(t\, e^{i\theta}) d\gamma_0 \right) e^{ij\theta} d\theta, \text{ para cada } f \in C(\overline{D}).$$

Luego si $k \geq 0$

$$\begin{aligned}
\int_{\overline{D}} z^n\, \overline{z}^{n+k} d\gamma &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (t\, e^{i\theta})^n\, (t\, e^{-i\theta})^{n+k} d\gamma_0 \right) e^{ij\theta} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 t^n\, e^{in\theta}\, t^{n+k}\, e^{-i(n+k)\theta} d\gamma_0 \right) e^{ij\theta} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 t^{2n+k} d\gamma_0 \right) e^{i(j-k)\theta} d\theta \\
&= \left(\int_0^1 t^{2n+k} d\gamma_0 \right) \left(\int_0^{2\pi} e^{i(j-k)\theta} d\theta \right).
\end{aligned}$$

Por otro lado tenemos que si $n \in M_j$ y $k = j$

$$\int_0^1 t^{2n+k} d\gamma_0 = 0,$$

por otra parte, si $k \neq j$

$$\int_0^{2\pi} e^{i(j-k)\theta} d\theta = 0,$$

de manera que

$$\int_{\overline{D}} z^n\, \overline{z}^{n+k} d\gamma = 0, \text{ para cada } k \geq 0. \tag{3.6}$$

Análogamente si $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
\int_{\overline{D}} z^{n+k}\, \overline{z}^n d\gamma &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (t\, e^{i\theta})^{n+k}\, (t\, e^{-i\theta})^n d\gamma_0 \right) e^{ij\theta} d\theta \\
&= \left(\int_0^1 t^{2n+k} d\gamma_0 \right) \left(\int_0^{2\pi} e^{i(j+k)\theta} d\theta \right).
\end{aligned}$$

Como $j \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{2\pi} e^{i(j+k)\theta} d\theta = 0, \text{ para cada}\, k \geq 1,$$

luego

$$\int_{\overline{D}} z^{n+k}\, \overline{z}^n d\gamma = 0, \text{ para } k \geq 1. \tag{3.7}$$

De las ecuaciones (3.6)y (3.7) se concluye que

$$\int_{\overline{D}} z^n\, \overline{z}^m d\gamma = 0, \text{ para cada}\, (n, m) \in M.$$

Es decir, hallamos una medida $\gamma \neq 0$ en $\overline{D}$ tal que $\gamma \perp \mathcal{M}$, lo cual contradice que la variedad lineal generada por $\mathcal{M}$ es densa en $C(\overline{D})$.

Para el caso $-j \in \mathbb{N}$ se procede de manera análoga, usando

$$\sum_{m \in M_j} \frac{1}{2m-j} < \infty. \tag{3.8}$$

De donde

$$\sum_{m \in M_j} \frac{1}{m} = \infty,$$

para cada número entero j.

(ii)$\Longrightarrow$ (i)

Sea $F : C(\overline{D}) \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $F(\mathcal{M}) = 0$.

Para demostrar que la variedad lineal generada por $\mathcal{M}$ es densa en $C(\overline{D})$ basta probar que $F \equiv 0$. (ver Teorema 1.3)

Por el teorema de representación de Riesz tenemos que existe una única medida compleja μ en $\overline{D}$ tal que

$$F(f) = \int_{\overline{D}} f\, d\mu, \text{ para cada } f \in C(\overline{D}).$$

Por lo tanto

$$\int_{\overline{D}} 1\, d\mu = 0 \qquad y \qquad \int_{\overline{D}} z^n\, \overline{z}^m\, d\mu = 0, \text{para cada } (n,m) \in M.$$

Luego si j es un entero positivo, se tiene que

$$\int_{\overline{D}} z^m\, \overline{z}^{m+j}\, d\mu = 0, \text{ para cada } m \in M_j.$$

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned} z^m\, \overline{z}^{m+j} &= z^m\, \overline{z}^m\, \overline{z}^j \\ &= |z|^{2m}\, \overline{z}^j, \end{aligned}$$

de donde

$$\int_{\overline{D}} |z|^{2m} \overline{z}^j\, d\mu = 0, \text{ para cada } m \in M_j. \tag{3.9}$$

Como

$$\sum_{m \in M_j} \frac{1}{m} = \infty.$$

Entonces del teorema de Müntz-Szász se concluye que la variedad lineal generada por $\{1, t^{2m} : m \in M_j\}$ es densa en $C[0,1]$.

Por lo tanto para cada $n \in \mathbb{N}$, t^{2n} se puede aproximar uniformemente en $[0,1]$ por combinaciones lineales de t^{2m} con $m \in M_j$.

De igual manera, se tiene que $|z|^{2n}$ se puede aproximar uniformemente en $\overline{D}$ por combinaciones lineales de $|z|^{2m}$, luego de (3.9) se obtiene

$$\int_{\overline{D}} |z|^{2n}\, \overline{z}^j \, d\mu = 0, \; n = 1, 2, 3, ... \tag{3.10}$$

Sean $i \in \mathbb{Z}$ y $m \in M_i$, con $i < 0$, entonces $F(z^m\, \overline{z}^{m+i}) = 0$ y

$$\begin{aligned} z^m\, \overline{z}^{m+i} &= z^{m+i}\, \overline{z}^{m+i}\, z^{-i} \\ &= |z|^{2(m+i)}\, z^{-i} \\ &= |z|^{2(m-j)}\, z^j, \text{ con } j = -i \end{aligned}$$

lo que implica

$$\int_{\overline{D}} |z|^{2(m-j)}\, z^j \, d\mu = 0$$

De donde

$$\int_{\overline{D}} |z|^{2n}\, z^j \, d\mu = 0, \; n = 1, 2, 3, ..., \tag{3.11}$$

además

$$\begin{aligned} |z|^{2n}\, z^j &= |z|^2\, |z|^{2n-2}\, z^j \\ &= |z|^2\, |z|^{2(n-1)}\, z^j \\ &= |z|^2\, z^{n-1}\, \overline{z}^{n-1}\, z^j \\ &= |z|^2\, z^{n-1+j}\, \overline{z}^{n-1}, \end{aligned}$$

si hacemos el cambio $k = n - 1 + j$ y $k' = n - 1$, entonces, de la ecuación (3.11) se obtiene

$$\int_{\overline{D}} |z|^2\, z^k\, \overline{z}^{k'} \, d\mu = 0, \text{ para cada } k, k' = 0, 1, 2, ... \text{ con } k \geq k'. \tag{3.12}$$

También se tiene que

$$\begin{aligned} |z|^{2n}\, \overline{z}^j &= |z|^2\, |z|^{2n-2}\, \overline{z}^j \\ &= |z|^2\, z^{n-1}\, \overline{z}^{n-1}\, \overline{z}^j \\ &= |z|^2\, z^{n-1}\, \overline{z}^{n-1+j}, \end{aligned}$$

por lo tanto, de la ecuación (3.10) se obtiene

$$\int_{\overline{D}} |z|^2\, z^k\, \overline{z}^{k'}\, d\mu = 0 \text{ para cada } k, k' = 0, 1, 2, ... \text{con } k' \geq k. \tag{3.13}$$

Luego de las ecuaciones (3.12) y (3.13) se deduce que

$$\int_{\overline{D}} |z|^2\, z^k\, \overline{z}^{k'}\, d\mu = 0 \text{ para cada } k, k' = 0, 1, 2, 3, ...$$

de donde

$$\int_{\overline{D}} P(z, \overline{z})\, |z|^2\, d\mu = 0, \text{ para todo polinomio } P, \text{ en dos variables.}$$

Por el teorema de Stone-Weierstrass se tiene que los polinomios en dos variables son densos en $C(\overline{D})$, lo que implica que

$$\int_{\overline{D}} f(z)\, |z|^2\, d\mu = 0, \text{ para toda } f \in C(\overline{D}),$$

como las funciones características se pueden aproximar por funciones continuas, se tiene que

$$\int_A |z|^2 d\mu = 0, \text{ para todo conjunto } A \text{ de Borel.}$$

Como μ es una medida compleja entonces $\mu = \mu_1 + i\,\mu_2$, donde μ_1, μ_2 son medidas reales, por lo tanto si A es un conjunto de Borel se tiene que

$$\int_A |z|^2 d\mu_1 = 0 \quad y \quad \int_A |z|^2 d\mu_2 = 0.$$

Luego del Lema 3.1 sigue que

$$\mu_1(\overline{D} \setminus \{0\}) = 0 \quad \text{y} \quad \mu_2(\overline{D} \setminus \{0\}) = 0$$

Además

$$\int_{\overline{D}} d\mu = 0,$$

de donde

$$\mu_1(\overline{D}) = \int_{\overline{D}} d\mu_1 = 0 \quad y \quad \mu_2(\overline{D}) = \int_{\overline{D}} d\mu_2 = 0,$$

Por lo tanto

$$\mu_1(\{0\}) = 0 \quad \text{y} \quad \mu_2(\{0\}) = 0.$$

Luego $\mu = 0$, lo que implica que $F \equiv 0$.

□

Como consecuencia del teorema anterior se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.3 (Minsker, [**3**]). *Si n y m son enteros positivos tales que su máximo común divisor es 1, entonces el álgebra generada por $\{1, z^n, \overline{z}^m\}$ es $C(\overline{D})$.*

Demostración.
Sean $\mathcal{A}$ el álgebra generada por $\{1, z^n, \overline{z}^m\}$ y $M = \{(n_0, m_0) : z^{n_0}\,\overline{z}^{m_0} \in \mathcal{A}\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Se tiene que $\mathcal{A}$ es la variedad lineal generada por el conjunto

$$\{1, z^{n_0}\,\overline{z}^{m_0} : (n_0, m_0) \in M\}.$$

Como el máximo común divisor entre n y m es 1, existen enteros positivos k y l tales que $kn - lm = -1$, entonces para cada número entero positivo t se tiene que

$$kn + tmn - tmn - lm = -1;$$

es decir

$$(k + tm)n - (l + tn)m = -1.$$

Por lo tanto

$$j(k + tm)n - j(l + tn)m = -j,$$

para cada número entero j.

De manera que

$$j(k + tm)n + j = j(l + tn)m \tag{3.14}$$

y

$$-j(l + tn)m + j = -j(k + tm)n \tag{3.15}$$

Si $j > 0$, tenemos que $(z^n)^{j(k+tm)}\,(\overline{z}^m)^{j(l+tn)} \in \mathcal{A}$; lo que implica que

$$(j(k + tm)n, j(l + tn)m) \in M,$$

luego de la ecuación (3.14) se deduce que $j(k + tm)n \in M_j$.

Si $j \leq 0$, se tiene que $(z^m)^{-j(k+tn)}\,(\overline{z}^n)^{-j(l+tm)} \in \mathcal{A}$; de manera que

$$(-j(l + tn)m, -j(k + tm)n) \in M,$$

entonces de la ecuación (3.15) se concluye que $-j(l + tn)m \in M_j$.

Como

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{j(k+tm)n} = \infty \qquad \text{y} \qquad \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{-j(l+tn)m} = \infty,$$

del Teorema 3.2 se concluye que $\mathcal{A}$ es densa en $C(\overline{D})$. $\square$

Bibliografía

[1] Dym, H. and Mc Kean, H. P. Fourier series and integral. Academic Press. 1, 5, 20, 26

[2] Knopp, K. Infinite sequences and series. Editorial Dober. 7

[3] Minsker,S. Some aplications of the Stone-Weierstrass theorem to planar rational approximation. Proceedings of the American Mathematical Society. Vol. 58, 94- 96 (1976). 36

[4] Müntz,C. Über den Approximationsatz von Weiertrass. H.A. Schwartz Festschrift, Berlin, (1914). 1

[5] Rudin,W. Real and Complex Analysis. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics. (1987). 3, 9, 11, 14, 15

[6] Szasz, O. Über die Approximation steliger Funktionen durch lineare Aggregate von Potenzen, Math. Ann. 77 (1916), 482-496. 1

[7] Trent, T. A Müntz-Szasz theorem for $C(\overline{D})$. Proceedings of the American Mathematical Society. Vol. 83, N2, 296-298 (1981). 2, 31