UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
POSTGRADO EN MATEMÁTICA

EXTENSIÓN DE SEMIGRUPOS LOCALES MULTIPARAMÉTRICOS DE ISOMETRÍAS Y APLICACIONES

Autor: Msc. Andrés Pérez
Tutor: Dr. Ramón Bruzual

Tesis doctoral presentada ante la ilustre Universidad Central de Venezuela para optar al título de Doctor en Ciencias, Mención Matemática.

Caracas, Venezuela
Abril - 2014

CONTENIDO

Resumen

Se demuestra que si se cumplen ciertas condiciones de unicidad, un semigrupo local $\mathfrak{n}$-paramétrico fuertemente continuo de isometrías en un espacio de Hilbert, se puede extender a un grupo $\mathfrak{n}$-paramétrico fuertemente continuo de operadores unitarios, en un espacio de Hilbert más grande. Como aplicación de este resultado, se obtiene una nueva prueba de la versión $\mathfrak{n}$-paramétrica del teorema de extensión de M. G. Kreĭn que fue dada por G. I. Èskin.

Introducción

La noción de semigrupos locales uniparamétricos de operadores, aparece en varios problemas del análisis matemático. En particular, los semigrupos locales de isometrías se presentan en algunos problemas relacionados con la representación de Fourier de funciones definidas positivas de una variable real, donde las extensiones unitarias del semigrupo, proporcionan soluciones al dilema. El teorema clásico de M. G. Kreĭn [19], está muy relacionado con este tipos de cuestiones.

Sea $a \in \mathbb{R}^+$ y sea $f : (-a, a) \longrightarrow \mathbb{C}$ una función. Se dice que f es *definida positiva*, si dado $n \in \mathbb{Z}^+$ y una colección de valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en $\mathbb{R}$, tales que $x_i - x_j \in (-a, a)$, para $i, j = 1, \ldots, n$ y una colección de escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ en $\mathbb{C}$, se cumple que:

$$\sum_{i,j=1}^{n} f(x_i - x_j) c_i \overline{c_j} \geq 0.$$

En 1940, Kreĭn demostró que toda función definida positiva continua con dominio un intervalo $I = (-a, a) \subset \mathbb{R}$, puede ser extendida a una función definida positiva continua sobre $\mathbb{R}$.

La definición de función definida positiva que se acaba de dar, se puede extender de manera natural a un grupo. En detalle, sea $(\Omega, \cdot)$ un grupo y sea $\Delta \subset \Omega$ un subconjunto simétrico, tal que la unidad de Ω pertenece a Δ. Se dice que $f : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}$ es *definida positiva*, si dado $n \in \mathbb{Z}^+$ y una colección $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ en Ω, tales que $\omega_i \omega_j^{-1} \in \Delta$, para $i, j = 1, \ldots, n$ y una colección de escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ en $\mathbb{C}$, se cumple que:

$$\sum_{i,j=1}^{n} f(\omega_i \omega_j^{-1}) c_i \overline{c_j} \geq 0.$$

Resulta natural preguntarse: si Ω es un grupo localmente compacto y f un función definida positiva continua en un entorno simétrico de la unidad, entonces ¿existe una extensión continua y definida positiva de f a todo el grupo?

Es bien sabido, que el teorema de Kreĭn puede fallar en el caso de dos dimensiones (de hecho no se extiende a grupos en general), es decir, no toda función definida positiva continua cuyo dominio es un rectángulo, se puede extender a una función definida positiva continua en todo el plano. En 1963, W. Rudin en [25] dio un contraejemplo de este hecho. Sin embargo, A. Devinatz [12] ya había demostrado en 1959, que tal extensión existe siempre que la función definida positiva satisfaga algunas condiciones adicionales.

En efecto, la demostración de este resultado se puede reducir a encontrar extensiones autoadjuntas conmutativas de una pareja de operadores simétricos. Las condiciones dadas por Devinatz, luego fueron suavizadas en 1960 por G.I. Èskin [14], al demostrar que para que una función continua y definida positiva en un rectángulo tenga extensión definida positiva a todo el plano, es suficiente pedir que la restricción de la función a uno de sus ejes coordenados tenga una única extensión definida positiva a toda la recta. Èskin en su trabajo, también da una versión multiparamétrica del problema.

El estudio de los semigrupos locales uniparamétricos de isometrías en espacios de Pontrjagyn, fue iniciado por Grossman y Langer en [15], los cuales demostraron la existencia de extensiones unitarias de estos semigrupos, y derivaron de este resultado, una generalización del teorema de Kreĭn para funciones κ-indefinidas.

En el año 1987, R. Bruzual [5] desarrolló en forma independiente el caso de los espacios de Hilbert, para el caso más general de semigrupos locales de contracciones, dando así varias aplicaciones a los Núcleos de Toeplitz generalizados, además de una prueba simple del teorema de extensión de Kreĭn.

Una prueba importante de que el problema de encontrar extensiones autoadjuntas conmutativas de operadores simétricos no resulta una tarea sencilla de abordar, es justamente el contraejemplo dado por E. Nelson en [21], donde muestra la existencia de dos operadores simétricos A y B en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ con dominio invariante común $\mathcal{D}$, que satisfacen que para cada par de números reales a y b, el operador $aA + bB$ es esencialmente autoadjunto y además, se verifica que $ABx = BAx$, para todo $x \in \mathcal{D}$, pero sin embargo, las resoluciones espectrales de las clausuras de A y B no conmutan.

Los semigrupos locales n-paramétricos de isometrías, se pueden definir de forma natural simplemente considerando extensiones de las condiciones uniparamétricas, donde resulta claro que una n-tupla de generadores infinitesimales, se pueden asociar a la misma. Para el año 1991, F. Peláez [23] obtuvo una condición necesaria y suficiente para que un semigrupo local biparamétrico de isometrías en un espacio de Hilbert, tuviese extensión a un grupo unitario con dos parámetros y con este resultado y algunos resultados de A. Devinatz, obtuvo en consecuencia una nueva prueba del mencionado teorema de A. Devinatz.

En 1993, R. Bruzual estudió el caso biparamétrico [6], donde obtuvo un resultado de extensión para semigrupos locales biparamétricos de isometrías y como una aplicación de este resultado, una nueva prueba del caso $n = 2$ de los trabajos de extensión de Èskin, donde la demostración de éstos está intrínsecamente ligada al teorema de Stone y en su prueba, utiliza en forma importante la estructura diferenciable del grupo aditivo de los números reales, basándose fuertemente en un resultado sobre extensiones conmutativas autoadjuntas de una pareja de operadores simétricos, dadas por A. Koranyi [18] en 1961. Los principales resultados de R. Bruzual en [6], fueron generalizados en 2011 por él mismo y por M. Domínguez al caso κ-indefinido [8].

Cabe destacar también que P. Jorgensen [17], considera el problema de extensiones de funciones definidas positivas cuyo dominio es un entorno simétrico de la unidad en un grupo de Lie. Jorgensen, relaciona el problema de poder encontrar una extensión definida positiva de la función dada, con el problema de extender cierta representación isométrica local a una representación unitaria de todo el grupo y da una condición suficiente para garantizar la existencia de la extensión definida positiva de la función a todo el grupo. De los resultados generales de Jorgensen, se pueden obtener particularizando a la recta y al plano, algunos de los resultados obtenidos por Bruzual en [5] y [6].

Este trabajo gira en torno al problema de obtener condiciones suficientes, para que un semigrupo local n-paramétrico fuertemente continuo de isometrías en un espacio de Hilbert, pueda ser extendido a un grupo un grupo n-paramétrico fuertemente continuo de operadores unitarios, en un espacio de Hilbert más grande. Se da una condición suficiente sobre el semigrupo que garantiza la extensión unitaria.

Como aplicación de este resultado se obtiene una nueva prueba de la versión n-paramétrica del teorema de extensión de M. G. Kreĭn, que fue dada por G. I. Èskin, donde parte de los resultados aquí expuestos fueron publicados en [9].

Es importante destacar que aunque el tema es clásico todavía es objeto de estudio y de investigación, ver por ejemplo [22] donde trabajan la extensión de funciones definidas positivas cuyo dominio es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^n$ a todo el espacio $\mathbb{R}^n$.

Ahora bien, el trabajo está organizado de la siguiente manera: en el capítulo 1 se exponen algunas nociones básicas a ser usadas en el desarrollo del trabajo, en lo referente a operadores simétricos, Grupos unitarios uniparamétricos y multiparamétricos, la transformada de Cayley y los semigrupos locales uniparamétricos de isometrías. En el capítulo 2, se dan las condiciones bajo las cuales los operadores simétricos admiten extensiones autoadjuntas que conmutan y su aplicación a los semigrupos locales de isometrías.

En el capítulo 3, se construyen los semigrupos locales multiparamétricos y se extienden los resultados del capítulo 2, en cuanto a la conmutatividad de la extensión antiadjunta del generador infinitesimal del semigrupo con un grupo fuertemente continuo de operadores unitarios. En el capítulo 4, se estudia el problema de extensión de funciones definidas positivas en un rectángulo $\mathfrak{n}$-dimensional, se construye el núcleo reproductor asociado a una función definida positiva, para luego asociarle un semigrupo local multiparamétrico de isometrías y finalmente, obtener una nueva demostración del teorema de Éskin multiparamétrico.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo contiene los aspectos esenciales y necesarios referentes a la teoría de operadores, para la comprensión de los capítulos subsiguientes.

Como es usual, si $(\mathcal{H}, \langle\ ,\ \rangle_{\mathcal{H}})$ es un espacio de Hilbert, $\|\ \|_{\mathcal{H}}$ denotará la norma sobre $\mathcal{H}$ y $L(\mathcal{H})$ denotará el espacio de las transformaciones lineales y acotadas sobre $\mathcal{H}$. Si T es un operador lineal, $\mathcal{D}(T)$ y $\mathcal{R}(T)$ indicarán el dominio y el rango de T respectivamente y si T es cerrable, la clausura de T se denotará por $\overline{T}$. También por $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ se denotarán los conjuntos de números naturales, enteros, reales y complejos, respectivamente.

Definición 1.1. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, entonces un operador lineal $A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{H}$ se dice *hermitiano o hermítico*, si se cumple que:

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle \ ;\ x, y \in \mathcal{D}(A).$$

Si el operador A es hermítico y además, su dominio $\mathcal{D}(A)$ es una variedad lineal densa, se dirá que el operador es *simétrico.* Por lo tanto, los operadores simétricos son exactamente aquellos que satisfacen que A^* extiende a A y en el caso de que $A = A^*$, se dice que el operador es *autoadjunto.*

Siguiendo la terminología usual acerca de operadores no acotados, se da la siguiente definición. Para mas detalles ver [24, pag. 271].

Definición 1.2. Se dice que dos operadores autoadjuntos conmutan, si sus medidas espectrales conmutan.

Definición 1.3. Un operador A es llamado *antisimétrico*, si iA es simétrico y se llamará *antiadjunto*, si iA es autoadjunto.

Observación 1.4. Los operadores simétricos y antisimétricos son cerrables.

Definición 1.5. Un operador simétrico es llamado *esencialmente autoadjunto*, si su clausura es autoadjunta.

Definición 1.6. Un operador $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow \mathcal{H}$ se dirá *isométrico*, o simplemente *isometría*, si y sólo si cumple que:

$$||Tx|| = ||x|| \ , \quad \text{para todo } x \in \mathcal{D}(T).$$

Se tiene que, T es una isometría si y sólo si, preserva el producto interno. A saber,

$$\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle \ ; \ x, y \in \mathcal{D}(T).$$

Si $\mathcal{D}(T) \subsetneq \mathcal{H}$, entonces se dirá que la isometría es *parcial*.

Definición 1.7. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea $(\Omega, +)$ un grupo abeliano. Una *representación* de Ω en $L(\mathcal{H})$, es una aplicación $U : \Omega \longrightarrow L(\mathcal{H})$ que satisface:

(i) $U(\omega_1 + \omega_2) = U(\omega_1) \cdot U(\omega_2)$, para todo par $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$,

(ii) $U(0) = I_{\mathcal{H}}$.

Se dice que la representación es unitaria, si $U(\omega)$ es unitario para todo $\omega \in \Omega$. En este caso, se tiene que: $U^*(\omega) = U(-\omega)$.

Definición 1.8. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sean $(\Omega, +)$ un grupo abeliano y $\Delta \subset \Omega$ un subsemigrupo de Ω. Se dice que $\{T(\omega)\}_{\omega\in\Delta} \subset L(\mathcal{H})$ es un semigrupo de operadores si se satisface que:

(i) $T(\omega_1 + \omega_2) = T(\omega_1) \cdot T(\omega_2)$, para todo par $\omega_1, \omega_2 \in \Delta$,

(ii) $T(0) = I_{\mathcal{H}}$.

Definición 1.9. Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{F}$ espacios de Hilbert y sean $\{T(\omega)\}_{\omega\in\Delta} \subset L(\mathcal{H})$ un semigrupo de operadores y $\{U(\omega)\}_{\omega\in\Omega} \subset L(\mathcal{F})$ una representación de Ω en $L(\mathcal{F})$. Se dice que $\{U(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ es una *dilatación* de $\{T(\omega)\}_{\omega\in\Delta}$, si $\mathcal{F}$ contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y además,

$$T(\omega) = P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}} U(\omega)|_{\mathcal{H}} \quad (\omega \in \Delta),$$

donde $P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}$ es el operador de proyección de $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{H}$. Se dirá que la dilatación es *unitaria*, si la representación $\{U(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ es unitaria. Además, si

$$\mathcal{F} = \bigvee_{\omega\in\Omega} U(\omega)\mathcal{H}$$

se dice que la dilatación es *minimal*.

1.1 Transformada de Cayley

Sea $A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{H}$ simétrico, entonces

$$\begin{aligned} \|Af + if\|^2 &= \|Af\|^2 + \|f\|^2 + \langle Af, if\rangle + \langle if, Af\rangle \\ &= \|Af\|^2 + \|f\|^2 - i\langle Af, f\rangle + i\langle f, Af\rangle \\ &= \|Af\|^2 + \|f\|^2 - i\langle Af, f\rangle + i\langle Af, f\rangle = \|Af\|^2 + \|f\|^2. \end{aligned}$$

De la misma manera se puede probar que $\|Af - if\|^2 = \|Af\|^2 + \|f\|^2$. Entonces, se obtiene que

$$\|Af + if\|^2 = \|Af - if\|^2. \tag{1.1}$$

Definición 1.10. El operador $T_A : \mathcal{D}(T_A) = \mathcal{R}(A + iI) \longrightarrow \mathcal{R}(T_A) = \mathcal{R}(A - iI)$, definido por

$$T_A(Af + if) = Af - if,$$

se denomina *transformada de Cayley* del operador A.

Claramente, de la relación (1.1) se obtiene que T_A está bien definido y es una isometría. Ahora bien, dada la transformada de Cayley de un operador A, existe la necesidad de reconstruir el operador a partir de la transformada y para ello, basta considerar a la fórmula de inversión

$$A = i(I + T_A)(I - T_A)^{-1}, \tag{1.2}$$

donde $\mathcal{D}(A) = \mathcal{R}(I - T_A)$. Luego, como A es simétrico se tiene que $\mathcal{R}(I - T_A)$ es denso en $\mathcal{H}$ (Si A fuese hermítico, entonces A^* no necesariamente es único). Esta condición de densidad, permite que la transformada de Cayley establezca una relación biunívoca, entre el conjunto de operadores simétricos y las isometrías que no poseen a 1 como autovalor.

Por otra parte, es claro que a partir de la buena definición de la transformada de Cayley, se tiene que la misma no tiene a 1 como autovalor, en virtud de la fórmula de inversión (1.2).

Si A es un operador simétrico cerrado, entonces, se puede establecer que los conjuntos

$$\mathcal{D}(T_A) = \mathcal{R}(A + iI) \qquad \text{y} \qquad \mathcal{R}(T_A) = \mathcal{R}(A - iI),$$

son cerrados.

Observación 1.11. Si A es un operador antisimétrico, de la Definición 1.10 se obtiene que la transformada de Cayley de iA, está dada por

$$T_{iA}(Af + f) = Af - f\ , \quad \text{para } f \in \mathcal{D}(A).$$

Proposición 1.12. *Si* $A : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{H}$ *es un operador simétrico y* $V \in L(\mathcal{H})$*, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $V\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A)$ *y* $VA = AV|_{\mathcal{D}(A)}$,

(b) $V\mathcal{R}(A + iI) \subset \mathcal{R}(A + iI)$ *y* $VT_A = T_A V|_{\mathcal{R}(A+iI)}$.

Demostración. Sea T_A la transformada de Cayley del operador simétrico A. Del hecho que: $T_A f = (A - iI)(A + iI)^{-1} f$, con $f \in \mathcal{D}(A)$, se tiene que el operador A se puede reconstruir por la fórmula (1.2), de donde $\mathcal{D}(A) = \mathcal{R}(I - T_A)$.

Supóngase que: $V\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A)$. Entonces, $V\mathcal{R}(I - T_A) \subset \mathcal{R}(I - T_A)$, por tanto si $p \in \mathcal{R}(I - T_A)$ se tiene que $p = (I - T_A)f$, con $f \in \mathcal{D}(T_A)$ y en consecuencia

$$Vp = V(I - T_A)f = Vf - VT_A f = Vf - T_A Vf = (I - T_A)Vf.$$

Entonces, se tiene que V deja invariante a $\mathcal{R}(I - T_A)$, si y sólo si, deja invariante a $\mathcal{D}(T_A) = \mathcal{R}(A + iI)$ y esto pasa siempre que V conmute con T_A, lo cual es cierto si conmuta con $A - iI$ y con $A + iI$, por tanto, este hecho va a ocurrir si se sabe que V conmuta con A. □

Definición 1.13. Sea A un operador simétrico y cerrado en $\mathcal{H}$ y sea T_A su transformada de Cayley. Entonces, los *índices de defecto* o *índices de deficiencia* del operador A, son las dimensiones de los complementos ortogonales de $\mathcal{D}(T_A)$ y $\mathcal{R}(T_A)$. A saber,

$$d_+(A) = \dim\ker(A^*+iI) = \dim(\mathcal{R}(A-iI))^{\perp} \quad \text{y} \quad d_-(A) = \dim\ker(A^*-iI) = \dim(\mathcal{R}(A+iI))^{\perp}.$$

En lo sucesivo, se usarán algunas propiedades de la transformada de Cayley, las cuales se dan sin demostración y para mas detalles ver [26, 13]

1. Sea A un operador simétrico, entonces:
   (a) T_A es cerrado, si y sólo si, A es cerrado.
   (b) T_A es unitario, si y sólo si, A es autoadjunto.
   (c) A es esencialmente autoadjunto, si y sólo si, $d_+(A) = d_-(A) = 0$.
2. Si T es un isometría parcial tal que 1 no es un autovalor de T, entonces T es la transformada de Cayley de un operador simétrico sobre $\mathcal{H}$.
3. Si A y B son operadores simétricos sobre $\mathcal{H}$, entonces $A \subset B$ si y sólo si $T_A \subset T_B$.

Observación 1.14. De las propiedades anteriores, se obtiene que los problemas de extensiones autoadjuntas de operadores simétricos, se reducen por consiguiente a problemas de extensiones unitarias de isometrías.

Observación 1.15. La siguiente versión n-paramétrica del teorema de Stone, será usada en capítulos subsiguientes (ver por ejemplo, teorema VIII.13 en [24]).

Supóngase que $A_1, \cdots, A_n$, son operadores autoadjuntos en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) Los operadores $A_1, \cdots, A_n$ conmutan.

(b) Las transformadas de Cayley $T_{A_1}, \cdots, T_{A_n}$, conmutan.

(c) La n-tupla $(A_1, \cdots, A_n)$ genera un grupo fuertemente continuo de operadores unitarios sobre $L(\mathcal{H})$. Este grupo está dado por:

$$U(x_1, \ldots, x_n) = e^{iA_1 x_1} \cdots e^{iA_n x_n}, \quad \text{para} \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

1.2 Semigrupos locales uniparamétricos de isometrías

De acuerdo con la definición dada en [5], si a es un número real positivo y $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, un *semigrupo local uniparamétrico de isometrías* es una familia $(S(x), \mathcal{H}(x))_{x\in[0,a)}$, tal que:

(i) Para cada $x \in [0, a)$, se tiene que $\mathcal{H}(x)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}(0) = \mathcal{H}$.

(ii) Para cada $x \in [0, a)$, $S(x) : \mathcal{H}(x) \to \mathcal{H}$ es una isometría lineal y $S(0) = I_{\mathcal{H}}$.

(iii) $\mathcal{H}(z) \subset \mathcal{H}(x)$, si $x, z \in [0, a)$ y $x \leq z$.

(iv) Si $x, z \in [0, a)$ y $x + z \in [0, a)$, entonces

$$S(z)\mathcal{H}(x + z) \subset \mathcal{H}(x) \quad \text{y} \quad S(x + z)h = S(x)S(z)h$$

para toda $h \in \mathcal{H}(x + z)$.

(v) $\bigcup_{\substack{z>x \\ z\in[0,a)}} \mathcal{H}(z)$, es denso en $\mathcal{H}(x)$ para cualquier $x \in [0, a)$.

El semigrupo local se dice *fuertemente continuo*, si para todo $r \in [0, a)$ y $f \in \mathcal{H}(r)$ la función $x \mapsto S(x)f$ de $[0, r]$ en $\mathcal{H}$, es continua.

El *generador infinitesimal* del semigrupo, está definido por

$$Ah = \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)h - h}{t}, \quad \text{para} \quad h \in \mathcal{D}(A)$$

donde

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ h \in \bigcup_{r \in (0,a)} \mathcal{H}(r) : \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)h - h}{t} \quad \text{existe} \right\}$$

Observación 1.16. Para el caso fuertemente continuo, se puede probar (ver [5] para más detalles) que $\mathcal{D}(A)$ es denso en $\mathcal{H}$. Si $A : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{H}$, es un operador antisimétrico y si $\tilde{A}$ es una extensión antiadjunta de A a un espacio de Hilbert mas grande, entonces

$$S(r) = e^{r\tilde{A}}\Big|_{\mathcal{H}(r)}, \text{ para todo } r \in [0, a).$$

También se cumple que el semigrupo local $(S(r), \mathcal{H}(r))_{r \in [0,a)}$, tiene una única extensión unitaria en el mismo espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, si y sólo si, A es esencialmente antiadjunto.

Capítulo 2

Algunos resultados sobre extensiones conmutativas

El problema de extender un semigrupo local biparamétrico fuertemente continuo de isometrías, a un grupo biparamétrico fuertemente continuo de operadores unitarios, se puede reducir al de encontrar extensiones autoadjuntas conmutativas de un par de operadores simétricos. Este problema no es nada sencillo, tal como lo muestra el siguiente contraejemplo clásico, dado por E. Nelson.

Observación 2.1 (Nelson, [21]). Existen dos operadores simétricos A y B, sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ que tienen en común al dominio $\mathcal{D}$ invariante, tal que para todo par de reales a y b, se cumple que $aA + bB$ es esencialmente autoadjunto y además $ABx = BAx$, para todo $x \in \mathcal{D}$, pero las resoluciones espectrales de $\overline{A}$ y $\overline{B}$ no conmutan.

El conjunto de todas los $i(aA + bB)$, es un Algebra de Lie [1] de operadores antisimétricos que tienen un dominio invariante común, tales que cada operador es esencialmente antiadjunto, pero no se pueden extender a un grupo de operadores unitarios.

En este capítulo se obtienen condiciones suficientes para poder conseguir extensiones unitarias conmutativas de un semigrupo local uniparamétrico de isometrías y un grupo de operadores unitarios, que satisfacen cierta relación de conmutación. A través de la transformada de Cayley, el problema se reduce a encontrar una extensión unitaria de una isometría que conmute con una extensión unitaria de un grupo de operadores unitarios. Estos resul-

[1] Un *álgebra de Lie* $\mathcal{A}$, es un espacio vectorial sobre un cierto cuerpo F junto con una operación binaria $[\cdot,\cdot] : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, llamada *corchete de Lie*, que satisface entre otras propiedades que es bilineal, es decir, $[ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z]$ y $[z, ax + by] = a[z, x] + b[z, y]$ para todo a, b en F y todo x, y, z en $\mathcal{A}$.

tados se aplicarán en el capítulo siguiente para dar condiciones suficientes para la extensión unitaria de un semigrupo local multiparamétrico de isometrías.

La demostración de la siguiente Proposición, está basada en la construcción hecha en el libro de Sz. Nagy - Foias (ver [28], capítulo 1, sección 5, pág.16), para la representación matricial de las dilataciones unitarias.

Proposición 2.2. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Entonces,*

(a) Si $C \in L(\mathcal{H})$ es una contracción, tal que 1 no es un autovalor de C, entonces 1 no es un autovalor de la dilatación unitaria minimal de C.

(b) Si $\mathcal{D}$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ y $T : \mathcal{D} \to \mathcal{H}$ es una isometría parcial, tal que 1 no es autovalor de T, entonces 1 no es un autovalor del operador de contracción $TP^{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}}$.

Demostración.
(a) Sea $\mathcal{G} = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{H}$. La dilatación unitaria minimal de C es la restricción a un subespacio adecuado de $\mathcal{G}$, del siguiente operador unitario $U : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$, definido por:

$$\begin{aligned} (Ug)_{-1} &= D_C h_0 - C^* h_1 \,, \\ (Ug)_0 &= C h_0 + D_{C^*} h_1 \,, \\ (Ug)_j &= h_{j+1} \ \ , \ \ j \neq 0, -1 \end{aligned}$$

para $g = (h_n)_{n=-\infty}^{+\infty} \in \mathcal{G}$, donde

$$D_C = (I - C^*C)^{1/2} \quad \text{y} \quad D_{C^*} = (I - CC^*)^{1/2}.$$

Si $g = (h_n)_{n=-\infty}^{+\infty} \in \mathcal{G}$ y $Ug = g$, entonces se debe satisfacer que

$$\begin{aligned} h_{-1} &= D_C h_0 - C^* h_1 \,, \\ h_0 &= C h_0 + D_{C^*} h_1 \,, \\ h_j &= h_{j+1} \ \ , \ \ j \neq 0, -1. \end{aligned}$$

Del hecho que $h_j = h_{j+1}$ si $j \neq 0, -1$, se obtiene que $h_j = 0$ si $j \geq 1$, o si $j \leq -2$, así queda que $h_0 = Ch_0$. Como 1 no es un autovalor de C, se tiene que $h_0 = 0$ y finalmente

$$h_{-1} = D_C h_0 - C^* h_1 = 0.$$

Por consiguiente, $g = 0$. De donde, 1 no es un autovalor de U.
(b) Supóngase que $h \in \mathcal{H}$ y que $TP^{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}} h = h$, entonces

$$\|P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}} h\|^2_{\mathcal{H}} + \|P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}^{\perp}} h\|^2_{\mathcal{H}} = \|h\|^2_{\mathcal{H}} = \|TP^{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}} h\|^2_{\mathcal{H}} \leq \|P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}} h\|^2_{\mathcal{H}}.$$

Por tanto, $P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}^{\perp}} h = 0$. En consecuencia, $h \in \mathcal{D}$ y $Th = h$ de donde $h = 0$. □

Proposición 2.3. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow \mathcal{H}$ una isometría parcial (donde $\mathcal{D}(T)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$), Γ un grupo abeliano y sea $\{V(\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ una representación unitaria del grupo Γ sobre $L(\mathcal{H})$, tal que $V(\gamma)\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T)$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Entonces:*

(i) $V(\gamma)P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}(T)} = P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}(T)}V(\gamma)$, *para todo* $\gamma \in \Gamma$.

(ii) $V(\gamma)P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}(T)^{\perp}} = P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}(T)^{\perp}}V(\gamma)$, *para todo* $\gamma \in \Gamma$.

Demostración. Como Γ es un grupo, entonces si $\gamma \in \Gamma$, se tiene que $-\gamma \in \Gamma$ y además, $V(\gamma)$ es unitario para cada $\gamma \in \Gamma$, de donde se obtiene que $(V(\gamma))^{-1} = V(-\gamma)$. Luego, si $V(\gamma)\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T)$ para todo $\gamma \in \Gamma$, queda que $\mathcal{D}(T) \subset V(-\gamma)\mathcal{D}(T)$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Como $-\gamma$ recorre todo el grupo, se obtiene que: $V(\gamma)\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T)$ para todo $\gamma \in \Gamma$. De la misma forma, como $\{V(\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ es una representación unitaria, queda que

$$V(\gamma)\mathcal{D}(T)^{\perp} = (V(\gamma)\mathcal{D}(T))^{\perp} = \mathcal{D}(T)^{\perp}.$$

Ahora bien, si $h \in \mathcal{H}$, se tiene que $h = h_1 + h_2$, donde $h_1 \in \mathcal{D}(T)$ y $h_2 \in \mathcal{D}(T)^{\perp}$, de donde $V(\gamma)P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}(T)}h = V(\gamma)h_1$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}(T)}V(\gamma)h &= P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}(T)}V(\gamma)(h_1 + h_2) = P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}(T)}V(\gamma)(h_1) + P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}(T)}V(\gamma)(h_2) \\ &= V(\gamma)h_1 + P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}(T)}V(\gamma)(h_2) = V(\gamma)h_1, \end{aligned}$$

lo cual demuestra *(i)*, ya que $V(\gamma)h_2 \in \mathcal{D}(T)^{\perp}$ implica que $P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}(T)}V(\gamma)(h_2) = 0$. Usando un razonamiento análogo se demuestra *(ii)*. □

Observación 2.4. Bajo las mismas hipótesis de la Proposición 2.3, se tiene que

$$\left(TP^{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}(T)}\right)^{n} V(\gamma)h = V(\gamma)\left(TP^{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}(T)}\right)^{n} h$$

para todo $\gamma \in \Gamma$, $h \in \mathcal{H}$ y $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 2.5. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea Γun grupo abeliano. Supóngase que:*

(a) $\mathcal{D}(T)$ *es un subespacio cerrado de* $\mathcal{H}$ *y* $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ *es una isometría parcial.*

(b) $(V(\gamma))_{\gamma\in\Gamma} \subset L(\mathcal{H})$ *es una representación unitaria de* Γ *sobre* $L(\mathcal{H})$.

(c) $V(\gamma)\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T)$, *para todo* $\gamma \in \Gamma$.

(d) Para todo $\gamma \in \Gamma$ *y* $h \in \mathcal{D}(T)$*, se cumple que* $V(\gamma)Th = TV(\gamma)h$.

Si $\widetilde{T} \in L(\mathcal{F})$*, es la dilatación unitaria minimal de* $TP^{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}}$*, entonces*

$$\langle \widetilde{T}^j V(\gamma)h, \widetilde{T}^m V(\gamma)h\rangle_{\mathcal{F}} = \langle \widetilde{T}^j h, \widetilde{T}^m h\rangle_{\mathcal{F}}$$

para todo $j, m \in \mathbb{Z}$ *y* $\gamma \in \Gamma$.

Demostración. Del hecho de que $(V(\gamma))_{\gamma\in\Gamma}$ es un grupo unitario, se tiene que por la Proposición 2.3 los operadores $V(\gamma)$ y $P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}(T)}$ conmutan.

Además, para $h \in \mathcal{H}$ y $\gamma \in \Gamma$ por la Observación 2.4 se cumple que:

$$V(\gamma)\left(TP^{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}(T)}\right)^n h = \left(TP^{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}(T)}\right)^n V(\gamma)h,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sean $\gamma \in \Gamma$ y $j, m \in \mathbb{Z}$, tales que $j \geq m$. Entonces

$$\begin{aligned}
\langle \widetilde{T}^j V(\gamma)h, \widetilde{T}^m V(\gamma)h\rangle_{\mathcal{F}} &= \langle \widetilde{T}^{j-m} V(\gamma)h, V(\gamma)h\rangle_{\mathcal{F}} \\
&= \langle \left(TP^{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}(T)}\right)^{j-m} V(\gamma)h, V(\gamma)h\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \langle V(\gamma)\left(TP^{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}(T)}\right)^{j-m} h, V(\gamma)h\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \langle \left(TP^{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}(T)}\right)^{j-m} h, h\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \langle \widetilde{T}^{j-m} h, h\rangle_{\mathcal{F}} \\
&= \langle \widetilde{T}^j h, \widetilde{T}^m h\rangle_{\mathcal{F}}.
\end{aligned}$$

El caso $j < m$, es análogo. □

Teorema 2.6. *Sea* $\mathcal{H}$ *un espacio de Hilbert y sea* Γ *un grupo abeliano. Supóngase que:*

(a) $\mathcal{D}(T)$ *es un subespacio cerrado de* $\mathcal{H}$ *y* $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ *es una isometría parcial tal que* 1 *no es autovalor de* T.

(b) $\{V(\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma} \subset L(\mathcal{H})$*, es una representación unitaria de* Γ *sobre* $L(\mathcal{H})$.

(c) $V(\gamma)\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T)$*, para todo* $\gamma \in \Gamma$.

(d) Para todo $\gamma \in \Gamma$ *y* $h \in \mathcal{D}(T)$*, se cumple que* $V(\gamma)Th = TV(\gamma)h$.

Entonces, existen un espacio de Hilbert $\mathcal{F} \supset \mathcal{H}$ *como subespacio cerrado, un operador unitario* $\widetilde{T} \in L(\mathcal{F})$ *y una representación unitaria* $\{\widetilde{V}(\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma} \subset L(\mathcal{F})$*, tales que:*

(i) $\widetilde{V}(\gamma)\widetilde{T} = \widetilde{T}\widetilde{V}(\gamma)$, *para todo* $\gamma \in \Gamma$.

(ii) $\widetilde{T}|_{\mathcal{D}(T)} = T$.

(iii) 1 *no es autovalor de* $\widetilde{T}$.

(iv) $\widetilde{V}(\gamma)|_{\mathcal{H}} = V(\gamma)$, *para todo* $\gamma \in \Gamma$.

Si Γ *es un grupo topológico y* $\{V(\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ *es fuertemente continuo, entonces,* $\{\widetilde{V}(\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ *puede ser escogido fuertemente continuo.*

Demostración. El operador $TP^{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}(T)} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ es una contracción. Sea $\widetilde{T} \in L(\mathcal{F})$ su dilatación unitaria minimal (d.u.m), entonces se tiene que: $\widetilde{T} : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ es unitario y se cumple que

$$\left(TP^{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}(T)}\right)^n = P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}\widetilde{T}^n|_{\mathcal{H}} \quad , n = 0, 1, 2, \ldots$$

y además,

$$\mathcal{F} = \bigvee_{n=-\infty}^{\infty} \widetilde{T}^n\mathcal{H}, \tag{2.1}$$

es decir, $\mathcal{F}$ es el menor subespacio que contiene a todos los elementos de la forma $\widetilde{T}^n h$, con $h \in \mathcal{H}$. Si se toma el caso $n = 1$, se tiene que:

$$TP^{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}(T)} = P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}\widetilde{T}.$$

Ahora, si $h \in \mathcal{D}(T)$, se tiene que $Th = P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}\widetilde{T}h$. Entonces, para $h \in \mathcal{F}$ queda

$$\|\widetilde{T}h\|^2 = \|P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}\widetilde{T}h\|^2 + \|P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}^\perp}\widetilde{T}h\|^2.$$

Luego, si $h \in \mathcal{D}(T)$ queda que

$$\|\widetilde{T}h\|^2 = \|Th\|^2 + \|P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}^\perp}\widetilde{T}h\|^2 = \|Th\|^2,$$

ya que $\|P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}^\perp}\widetilde{T}h\|^2 = 0$. Por consiguiente, se obtiene que $Th = \widetilde{T}h$ para $h \in \mathcal{D}(T)$, de donde $\widetilde{T}$ es una extensión unitaria de T. Luego, por la Proposición 2.2 se obtiene que 1 no es autovalor de $\widetilde{T}$.

Ahora bien, si $f = \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} a_k\widetilde{T}^k h_k \in \mathcal{F}$, donde $a_k \in \mathbb{C}$ y $h_k \in \mathcal{H}$, por la Proposición 2.5, se tiene que

$$\left\|\sum_{k=-N}^{N} a_k\widetilde{T}^k V(\gamma)h_k\right\|_{\mathcal{F}} = \left\|\sum_{k=-N}^{N} a_k\widetilde{T}^k h_k\right\|_{\mathcal{F}}$$

Dado que el conjunto de las funciones de la forma $\sum_{k=-N}^{N} a_k\widetilde{T}^k h_k$ donde $a_k \in \mathbb{C}$ y $h_k \in \mathcal{H}$, es denso en $\mathcal{F}$, para cada $\gamma \in \Gamma$ se tiene un operador unitario $\widetilde{V}(\gamma) : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ definido por

$$\widetilde{V}(\gamma)\left(\sum_{k=-N}^{N} a_k\widetilde{T}^k h_k\right) = \sum_{k=-N}^{N} a_k\widetilde{T}^k V(\gamma)h_k.$$

Entonces, por la linealidad $\widetilde{V}(\gamma)f = V(\gamma)f$, si $f \in \mathcal{H}$ y si $\widetilde{V}(\gamma)$ está bien definido, necesariamente $\widetilde{V}(\gamma)$ conmuta con $\widetilde{T}$.

Además, resulta sencillo ver que $\{\widetilde{V}(\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ es una representación unitaria. Observe que:

1. Se debe ver que $\widetilde{V}(e) = I_{\mathcal{F}}$, donde $e \in \Gamma$ es el elemento neutro.

$$\widetilde{V}(e)\left(\sum_{k=-N}^{N} a_k\widetilde{T}^k h_k\right) = \sum_{k=-N}^{N} a_k\widetilde{T}^k V(e)h_k = \sum_{k=-N}^{N} a_k\widetilde{T}^k h_k \Longrightarrow \widetilde{V}(e) = I_{\mathcal{F}}$$

ya que, $\{V(\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ es una representación unitaria.

2. Sean $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, entonces se debe observar que: $\widetilde{V}(\gamma_1+\gamma_2) = \widetilde{V}(\gamma_1)\cdot\widetilde{V}(\gamma_2)$. A saber,

$$\begin{aligned}
\widetilde{V}(\gamma_1+\gamma_2)\left(\sum_{k=-N}^{N} a_k\widetilde{T}^k h_k\right) &= \sum_{k=-N}^{N} a_k\widetilde{T}^k V(\gamma_1+\gamma_2)h_k = \sum_{k=-N}^{N} a_k\widetilde{T}^k V(\gamma_1)V(\gamma_2)h_k \\
&= \widetilde{V}(\gamma_1)\left(\sum_{k} a_k\widetilde{T}^k V(\gamma_2)h_k\right) \\
&= \widetilde{V}(\gamma_1)\cdot\widetilde{V}(\gamma_2)\left(\sum_{k=-N}^{N} a_k\widetilde{T}^k h_k\right)
\end{aligned}$$

Ahora bien, es suficiente probar que

$$\lim_{\gamma\to 0}\|\widetilde{V}(\gamma)h - h\| = 0\ , \quad \text{para toda } h = \sum_{k=-N}^{N} a_k\widetilde{T}^k h_k \in \mathcal{F},$$

o equivalentemente

$$\left\|\widetilde{V}(\gamma)\left(\sum_{k=-N}^{N} a_k\widetilde{T}^k h_k\right) - \sum_{k=-N}^{N} a_k\widetilde{T}^k h_k\right\| \to 0$$

cuando $\gamma \to 0$. De donde se tiene que

$$\left\|\sum_{k=-N}^{N} a_k\widetilde{T}^k V(\gamma)h_k - \sum_{k=-N}^{N} a_k\widetilde{T}^k h_k\right\| \to 0 \Rightarrow \|V(\gamma)h_k - h_k\| \to 0$$

lo cual es cierto, ya que $\{V(\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ es fuertemente continuo sobre $\mathcal{H}$. $\square$

Observaciones 2.7.

(a) *Este teorema, también se puede obtener del lema 2 en [18], pero la parte que hace referencia a los autovalores se obtiene fácilmente mediante la construcción dada aquí. Se puede obtener otra prueba, siguiendo la idea de la demostración de la parte (iii) del teorema 1 en [1, pág. 330].*

(b) *El Corolario 2.9, se puede deducir a partir de un resultado ligeramente distinto al Teorema 2.6, pero en el contexto de los espacios de métrica indefinida, (teorema 3.6 de [10]). Esta demostración usa una transformada de Cayley modificada, en su mayoría considerada en espacios con métrica indefinida. También, para el caso particular* $\Gamma = \mathbb{R}$ *ver teorema 2.5 de [20].*

Corolario 2.8. *Sea* $\mathcal{H}$ *un espacio de Hilbert y* Γ *un grupo abeliano. Supóngase que:*

(a) $\mathcal{D}(A)$ *es una variedad lineal densa de* $\mathcal{H}$ *y* $A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{H}$, *es un operador simétrico.*

(b) $\{V(\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma} \subset L(\mathcal{H})$, *es una representación unitaria de* Γ *sobre* $L(\mathcal{H})$.

(c) $V(\gamma)\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A)$, *para todo* $\gamma \in \Gamma$.

(d) *Para todo* $\gamma \in \Gamma$ *y* $h \in \mathcal{D}(A)$, *se cumple que:* $V(\gamma)Ah = AV(\gamma)h$.

Entonces, existen un espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ *que contiene a* $\mathcal{H}$ *como subespacio cerrado, un operador autoadjunto* $\widetilde{A}$, *definido sobre una variedad lineal densa* $\mathcal{D}(\widetilde{A})$ *de* $\mathcal{F}$ *y una representación unitaria* $\{\widetilde{V}(\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma} \subset L(\mathcal{F})$, *tales que:*

(i) $\widetilde{V}(\gamma)\mathcal{D}(\widetilde{A}) \subset \mathcal{D}(\widetilde{A})$, *para todo* $\gamma \in \Gamma$.

(ii) $\widetilde{V}(\gamma)\widetilde{A}h = \widetilde{A}\widetilde{V}(\gamma)h$, *para todo* $h \in \mathcal{D}(\widetilde{A})$ *y* $\gamma \in \Gamma$.

(iii) $\widetilde{A}|_{\mathcal{D}(A)} = A$.

(iv) $\widetilde{V}(\gamma)|_{\mathcal{H}} = V(\gamma)$, *para todo* $\gamma \in \Gamma$.

Si A *es esencialmente autoadjunto, entonces, el dominio de las extensiones pueden ser el mismo espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$, *es decir, se puede tomar* $\mathcal{F} = \mathcal{H}$.
Si Γ *es un grupo topológico y* $\{V(\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ *es fuertemente continuo, entonces,* $\{\widetilde{V}(\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ *puede ser escogido fuertemente continuo.*

Demostración. Como A es simétrico y con dominio $\mathcal{D}(A)$ denso en $\mathcal{H}$, entonces, es clausurable. De donde se obtiene que $A \subset \overline{A}$ y de allí se sigue que, para todo $\gamma \in \Gamma$ se cumple que $V(\gamma)\mathcal{D}(\overline{A}) \subset \mathcal{D}(\overline{A})$ y además,

$$V(\gamma)\overline{A}h = \overline{A}V(\gamma)h \ , \quad \text{siempre que } h \in \mathcal{D}(\overline{A}).$$

Así se tiene que la transformada de Cayley $T_{\overline{A}}$, de $\overline{A}$, y $(\widetilde{V}(\gamma))_{\gamma\in\Gamma}$ satisfacen las condiciones del Teorema 2.6. Por lo tanto, existen un espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado, un operador unitario $\widetilde{T} \in L(\mathcal{F})$ y una representación unitaria $(\widetilde{V}(\gamma))_{\gamma\in\Gamma} \subset L(\mathcal{F})$, tales que $\widetilde{V}(\gamma)\widetilde{T} = \widetilde{T}\widetilde{V}(\gamma)$ para toda $\gamma \in \Gamma$, $\widetilde{T}|_{\mathcal{D}(T_{\overline{A}})} = T_{\overline{A}}$, 1 no es un autovalor de $\widetilde{T}$ y $\widetilde{V}(\gamma)|_{\mathcal{H}} = V(\gamma)$, para toda $\gamma \in \Gamma$.

Tomando $\widetilde{A}$, como la inversa de la transformada de Cayley de $\widetilde{T}$, se obtiene *(i)*, *(ii)*, *(iii)* y *(iv)*. Si A es esencialmente autoadjunto, se puede tomar $\widetilde{T} = T_{\overline{A}}$ y $\widetilde{V} = V$.

La última parte de la continuidad, se desprende de la última parte del Teorema 2.6. □

Corolario 2.9. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y Γ un grupo abeliano. Supóngase que:*

(a) $(W(t), \mathcal{H}(t))_{t\in[0,a)}$, *es un semigrupo local de isometrías uniparamétrico y fuertemente continuo en $\mathcal{H}$.*

(b) $\{V(\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma} \subset L(\mathcal{H})$, *es una representación unitaria de Γ sobre $L(\mathcal{H})$.*

(c) $V(\gamma)\mathcal{H}(t) \subset \mathcal{H}(t)$, *para todo $\gamma \in \Gamma$ y $t \in [0, a)$.*

(d) Para todo $\gamma \in \Gamma$, $t \in [0, a)$ y $h \in \mathcal{H}(t)$, se cumple que: $V(\gamma)W(t)h = W(t)V(\gamma)h$.

Entonces existe un espacio de Hilbert $\mathcal{F} \supset \mathcal{H}$ como subespacio cerrado, un grupo de operadores unitarios fuertemente continuo $\{\widetilde{W}(t)\}_{t\in\mathbb{R}} \subset L(\mathcal{F})$ y una representación unitaria $\{\widetilde{V}(\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma} \subset L(\mathcal{F})$, tales que:

(i) $\widetilde{V}(\gamma)\widetilde{W}(t)f = \widetilde{W}(t)\widetilde{V}(\gamma)f$, *para todo $\gamma \in \Gamma$, $t \in \mathbb{R}$ y $f \in \mathcal{F}$.*

(ii) $\widetilde{W}(t)|_{\mathcal{H}(t)} = W(t)$, *para todo $t \in [0, a)$.*

(iii) $\widetilde{V}(\gamma)|_{\mathcal{H}} = V(\gamma)$, *para todo $\gamma \in \Gamma$.*

Si el semigrupo local $(W(t), \mathcal{H}(t))_{t\in[0,a)}$ tiene una única extensión unitaria sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, entonces, el dominio de las extensiones unitarias pueden ser el mismo espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, es decir, se puede tomar $\mathcal{F} = \mathcal{H}$.

Si Γ es un grupo topológico y $\{V(\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ es fuertemente continuo, entonces, $\{\widetilde{V}(\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ puede ser escogido fuertemente continuo.

Demostración. Sea $A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{H}$ el generador infinitesimal del semigrupo local uniparamétrico $(W(t), \mathcal{H}(t))_{t\in[0,a)}$. Entonces,

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ h \in \bigcup_{r\in(0,a)} \mathcal{H}(r) : \lim_{t\to 0^+} \frac{W(t)h - h}{t} \quad \text{existe} \right\}$$

donde

$$Ah = \lim_{t\to 0^+} \frac{W(t)h - h}{t} \tag{2.2}$$

Ahora bien, A es un operador antisimétrico, es decir, iA es simétrico. Además, se tiene que la representación unitaria $\{V(\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ conmuta con $W(t)$, para cada $t \in [0, a)$ y para cada $\gamma \in \Gamma$. Por tanto, si $h \in \mathcal{D}(A)$ se obtiene que $h \in \mathcal{H}(r)$, para algún $r \in (0, a)$ y

$$V(\gamma)\left[\frac{W(t) - I}{t}\right] h = V(\gamma)\left[\frac{W(t)h - h}{t}\right] = \frac{W(t)V(\gamma)h - V(\gamma)h}{t} = \left[\frac{W(t) - I}{t}\right] V(\gamma)h$$

para $0 < t < r$. Luego, tomando límite cuando $t \to 0^+$ y considerando que este límite siempre existe, se obtiene que $V(\gamma)h \in \mathcal{D}(A)$ y por tanto, se cumple que $V(\gamma)\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A)$ y

$$V(\gamma)Ah = AV(\gamma)h\ , \qquad \text{para toda } \gamma \in \Gamma \text{ y } h \in \mathcal{D}(A). \tag{2.3}$$

Entonces por el Corolario 2.8, existe un espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado, un operador antiadjunto $\widetilde{A}$, definido sobre una variedad lineal densa $\mathcal{D}(\widetilde{A})$ de $\mathcal{F}$ y una representación unitaria $\{\widetilde{V}(\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma} \subset L(\mathcal{F})$, tales que:

(i) $\widetilde{V}(\gamma)\widetilde{A}h = \widetilde{A}\widetilde{V}(\gamma)h$, para todo $h \in \mathcal{D}(\widetilde{A})$, $\gamma \in \Gamma$.

(ii) $\widetilde{A}\Big|_{\mathcal{D}(A)} = A$, con $t \in [0, a)$.

(iii) $\widetilde{V}(\gamma)|_{\mathcal{H}} = V(\gamma)$, para todo $\gamma \in \Gamma$.

Si se toma $\widetilde{W}(t) = e^{\widetilde{A}t}$, se obtienen *(i)*, *(ii)* y *(iii)*. La última parte, sigue de la última parte del Corolario 2.8. $\square$

Capítulo 3

Semigrupos locales multiparamétricos de isometrías

En este Capítulo, se dan condiciones suficientes para poder extender un semigrupo local multiparamétrico, a un grupo de operadores unitarios fuertemente continuo en $\mathbb{R}^n$, basándose en la versión extendida del teorema de Stone. Se fijará notación y una definición de orden, para poder trabajar en el espacio $\mathbb{R}^n$.

3.1 Definiciones y nociones básicas

Sea n un entero positivo y sean $\overrightarrow{x} = (x_1, \dots, x_n)$ y $\overrightarrow{z} = (z_1, \dots, z_n)$ puntos de $\mathbb{R}^n$. Se dirá que $\overrightarrow{x} < \overrightarrow{z}$, siempre que $x_j < z_j$ para $j = 1, \dots, n$.

Supóngase que $\overrightarrow{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ y $a_j > 0$, para $j = 1, \dots, n$ y finalmente, sea $Q = [0, a_1) \times \cdots \times [0, a_n)$. Se denotará por $\overrightarrow{e_j}$ al vector $(0, \dots, 0, 1, 0 \dots, 0)$, donde el número 1, se encuentra en la posición j-ésima.

Definición 3.1. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Un semigrupo local n-paramétrico de isometrías, es una familia $\big(S(\overrightarrow{x}), \mathcal{H}(\overrightarrow{x})\big)_{\overrightarrow{x} \in Q}$, tal que:

(i) Para cada $\overrightarrow{x} \in Q$, se tiene que $\mathcal{H}(\overrightarrow{x})$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ y además, $\mathcal{H}(\overrightarrow{0}) = \mathcal{H}$.

(ii) Para cada $\overrightarrow{x} \in Q$, $S(\overrightarrow{x}) : \mathcal{H}(\overrightarrow{x}) \to \mathcal{H}$ es una isometría lineal y $S(\overrightarrow{0}) = I_{\mathcal{H}}$.

(iii) $\mathcal{H}(\overrightarrow{z}) \subset \mathcal{H}(\overrightarrow{x})$, si $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{z} \in Q$ y además, $\overrightarrow{x} \leq \overrightarrow{z}$.

(iv) Si $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{z} \in Q$ y $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{z} \in Q$, entonces

$$S(\overrightarrow{z})\mathcal{H}(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{z}) \subset \mathcal{H}(\overrightarrow{x}) \quad \text{y} \quad S(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{z})h = S(\overrightarrow{x})S(\overrightarrow{z})h$$

para todo, $h \in \mathcal{H}(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{z})$.

(v) $\bigcup_{\substack{\overrightarrow{z} > \overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{z} \in Q}} \mathcal{H}(\overrightarrow{z})$ es denso en $\mathcal{H}(\overrightarrow{x})$, para cualquier $\overrightarrow{x} \in Q$.

El semigrupo local se dice *fuertemente continuo*, si para todo $\overrightarrow{r} = (r_1, \ldots, r_n) \in Q$ y $f \in \mathcal{H}(\overrightarrow{r})$, la función $\overrightarrow{x} \mapsto S(\overrightarrow{x})f$, de $[0, r_1] \times \cdots \times [0, r_n]$ a $\mathcal{H}$ es continua.

Observación 3.2. Note que si $\left(S(\overrightarrow{x}), \mathcal{H}(\overrightarrow{x})\right)_{\overrightarrow{x} \in Q}$ es un semigrupo local n-paramétrico de isometrías fuertemente continuo, entonces para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ la familia $\left(S(t\overrightarrow{e_j}), \mathcal{H}(t\overrightarrow{e_j})\right)_{t \in [0, a_j)}$ es un semigrupo local uniparamétrico de isometrías fuertemente continuo. Así, denotando por $A^{(j)}$ el generador infinitesimal de este semigrupo, se tiene que el semigrupo local n-paramétrico puede ser extendido a un grupo unitario fuertemente continuo, con parámetro en $\mathbb{R}^n$, sobre un espacio de Hilbert mas grande, si y sólo si, los operadores $iA^{(1)}, \ldots, iA^{(n)}$ tienen extensiones autoadjuntas que conmutan en un espacio de Hilbert mas grande.

También se tiene que para $j, m \in \{1, \ldots, n\}$, $j \neq m$ y $x_m \in [0, a_m)$ la familia

$$\left(S(t\,\overrightarrow{e_j})|_{\mathcal{H}(t\,\overrightarrow{e_j} + x_m\,\overrightarrow{e_m})}, \mathcal{H}(t\,\overrightarrow{e_j} + x_m\,\overrightarrow{e_m})\right)_{t \in [0, a_j)},$$

es un semigrupo local uniparamétrico de isometrías sobre $\mathcal{H}(x_m\,\overrightarrow{e_m})$. Por simplicidad, cuando se haga referencia a este semigrupo local, se usará $S(t\,\overrightarrow{e_j})$ en vez de $S(t\,\overrightarrow{e_j})|_{\mathcal{H}(t\,\overrightarrow{e_j} + x_m\,\overrightarrow{e_m})}$.

3.2 Caso biparamétrico

Supóngase que $(S(x, y), \mathcal{H}(x, y))_{(x,y) \in [0,a) \times [0,b)}$ es un semigrupo local biparamétrico fuertemente continuo de isometrías sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

Para $x \in [0, a)$, se denotará por B_x al generador infinitesimal del semigrupo local uniparamétrico de isometrías dado por $(S(0, y), \mathcal{H}(x, y))_{y \in [0,b)} \subset L(\mathcal{H}(x, 0))$, y para $y \in [0, b)$, A_y denotará el generador infinitesimal del semigrupo local uniparamétrico de isometrías $(S(x, 0), \mathcal{H}(x, y))_{x \in [0,a)} \subset L(\mathcal{H}(0, y))$.

Proposición 3.3. *Con la misma notación de antes, se sigue que*

$$S(0,y)\mathcal{D}(A_y) \subset \mathcal{D}(A_0)$$

y

$$S(0,y)A_y f = S(0,y)A_0 f = A_0 S(0,y) f \quad \textit{para toda } f \in \mathcal{D}(A_y).$$

Demostración. Sea $f \in \mathcal{D}(A_y)$, entonces $f \in \bigcup_{x\in[0,a)} \mathcal{H}(x,y)$ y

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{S(t,0)f - f}{t}$$

existe. Por tanto, se tiene que $S(0,y)f \in \bigcup_{x\in[0,a)} \mathcal{H}(x,0)$ y

$$S(0,y)\left(\frac{S(t,0)f - f}{t}\right) = \frac{S(t,y)f - S(0,y)f}{t} = \frac{S(t,0)S(0,y)f - S(0,y)f}{t},$$

para t positiva y suficientemente pequeña. Tomando límite cuando $t \to 0^+$, se obtiene el resultado. $\square$

En forma totalmente análoga, se puede probar la siguiente Proposición.

Proposición 3.4. *Con la misma notación de antes, se sigue que*

$$S(x,0)\mathcal{D}(B_x) \subset \mathcal{D}(B_0)$$

y

$$S(x,0)B_x f = S(x,0)B_0 f = B_0 S(x,0) f \quad \textit{para toda } f \in \mathcal{D}(B_x).$$

Teorema 3.5. *Sea $(S(x,y),\mathcal{H}(x,y))_{(x,y)\in[0,a)\times[0,b)}$ un semigrupo local biparamétrico fuertemente continuo de isometrías sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Supóngase que para cualquier $y \in [0,b)$, el semigrupo local uniparamétrico de isometrías $(S(x,0),\mathcal{H}(x,y))_{x\in[0,a)}$, tiene una única extensión a un grupo fuertemente continuo de operadores unitarios sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}(0,y)$.*

Entonces,

(i) Para cada $y \in [0,b)$, se tiene que $T_{\overline{iA_0}}\mathcal{H}(0,y) \subset \mathcal{H}(0,y)$ y

$$T_{\overline{iA_0}}\, S(0,y) = S(0,y)\, T_{\overline{iA_0}}|_{\mathcal{H}(0,y)}.$$

(ii) El semigrupo local $(S(x,y),\mathcal{H}(x,y))_{(x,y)\in[0,a)\times[0,b)}$ puede ser extendido a un grupo fuertemente continuo de operadores unitarios $(U(x,y))_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}$ sobre un espacio de Hilbert mas grande.

(iii) Si también se supone que para cualquier $x \in [0, a)$*, el semigrupo local uniparamétrico de isometrías* $(S(0, y), \mathcal{H}(x, y))_{y\in[0,b)}$*, tiene una única extensión a un grupo fuertemente continuo de operadores unitarios sobre el espacio de Hilbert* $\mathcal{H}(x, 0)$*, entonces*

(1) El semigrupo local $(S(x, y), \mathcal{H}(x, y))_{(x,y)\in[0,a)\times[0,b)}$ *tiene una única extensión a un grupo fuertemente continuo de operadores unitarios* $(U(x, y))_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}$ *sobre* $L(\mathcal{H})$*.*

(2) Los operadores unitarios $T_{\overline{iA_0}}$ *y* $T_{\overline{iB_0}}$ *conmutan. A saber*

$$T_{\overline{iA_0}}\, T_{\overline{iB_0}} = T_{\overline{iB_0}}\, T_{\overline{iA_0}}.$$

Demostración.
(i) Se cumple que el operador A_0, extiende al operador A_y y de las hipótesis, se sigue que iA_0 y iA_y son operadores esencialmente autoadjuntos sobre los espacios de Hilbert $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}(0, y)$ respectivamente. Además, se tiene que $T_{\overline{iA_0}}$ es un operador unitario sobre $\mathcal{H}$, el cual extiende al operador unitario $T_{\overline{iA_y}}$ sobre $\mathcal{H}(0, y)$. Por tanto, $T_{\overline{iA_0}}\mathcal{H}(0, y) \subset \mathcal{H}(0, y)$.

Como $\mathcal{R}(I + A_y)$ es denso en $\mathcal{H}(0, y)$, sólo es necesario demostrar que

$$T_{\overline{iA_0}}\, S(0, y)f = S(0, y)\, T_{\overline{iA_0}} f,$$

para $f \in \mathcal{R}(I + A_y)$.

Sea $f \in \mathcal{R}(I + A_y)$, entonces existe $g \in \mathcal{D}(A_y)$, tal que $f = (I + A_y)g$.

De la Proposición 3.3, se sigue que $S(0, y)(I + A_y)g = (I + A_0)S(0, y)g$, así que se tiene que

$$\begin{aligned} T_{\overline{iA_0}}\, S(0, y)f &= (\overline{A_0} - I)(I + \overline{A_0})^{-1} S(0, y)(I + A_y)g \\ &= (\overline{A_0} - I)S(0, y)g \\ &= S(0, y)(\overline{A_0} - I)g \\ &= S(0, y)T_{\overline{iA_0}} f \end{aligned}$$

(ii) Para $x \in \mathbb{R}$, sea $V(x)$ el operador unitario definido por $V(x) = e^{\overline{A_0}x}$, entonces $(V(x))_{x\in\mathbb{R}}$ es un grupo fuertemente continuo de operadores unitarios. De *(i)* se sigue que, $V(x)\,\mathcal{H}(0, y) \subset \mathcal{H}(0, y)$ y

$$V(x)S(0, y) = S(0, y)V(x)|_{\mathcal{H}(0,y)},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ y $y \in [0, b)$.

Así, del Corolario 2.9 se obtiene que existe un espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado, un grupo fuertemente continuo de operadores unitarios $(\widetilde{W}(y))_{y\in\mathbb{R}} \subset L(\mathcal{F})$ y una representación unitaria $(\widetilde{V}(x))_{x\in\mathbb{R}} \subset L(\mathcal{F})$, tal que

$\widetilde{V}(x)\widetilde{W}(y)f = \widetilde{W}(y)\widetilde{V}(x)f$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$ y $h \in \mathcal{F}$.

$\widetilde{W}(y)|_{\mathcal{H}(0,y)} = S(0, y)$, para toda $y \in [0, b)$.

$\widetilde{V}(x)|_{\mathcal{H}} = V(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Tomando $U(x, y) = \widetilde{V}(x)\widetilde{W}(y)$, se obtiene el resultado requerido.
(iii) De *(i)* y del Corolario 2.9, se sigue que se puede considerar $\mathcal{F} = \mathcal{H}$ en la última construcción, así se prueba *(1)*. Para demostrar la unicidad, se puede notar que si se tiene que $U(x, y) = e^{Ax}e^{By}$, donde iA y iB son operadores autoadjuntos sobre $\mathcal{H}$, entonces estos operadores deben ser extensiones autoadjuntas de iA_0 y iB_0 respectivamente. Del hecho que iA_0 y iB_0 son operadores esencialmente autoadjuntos, resulta la unicidad.

Finalmente como $U(x, y) = e^{\overline{A_0}x}e^{\overline{B_0}y}$ es un grupo unitario, se tiene que $T_{\overline{A_0}}$ y $T_{\overline{B_0}}$ conmutan. □

Observación 3.6. Otra demostración de *(ii)*, se puede encontrar en [6].

3.3 Caso multiparamétrico

Teorema 3.7. *Sean* $a_1, \ldots, a_n, b$ *números reales positivos,* $Q = [0, a_1) \times \cdots \times [0, a_n)$ *y sea* $(S(\overrightarrow{x}, y), \mathcal{H}(\overrightarrow{x}, y))_{(\overrightarrow{x},y)\in Q\times[0,b)}$ *un semigrupo local* $(n+1)$*-paramétrico fuertemente continuo de isometrías sobre el espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$*.*

Supóngase que:

(a) Para cada par $j, m \in \{1, \ldots, n\}$*, tales que* $j \neq m$ *y* $x_m \in [0, a_m)$*, cada uno de los semigrupos locales de isometrías*

$$\left(S(t\,\overrightarrow{e_j}, 0), \mathcal{H}(t\,\overrightarrow{e_j} + x_m\,\overrightarrow{e_m}, 0)\right)_{t\in[0,a_j)},$$

tiene una única extensión a un grupo de operadores unitarios fuertemente continuo sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}(x_m\,\overrightarrow{e_m}, 0)$*.*

(b) Para cada $y \in [0, b)$ *y* $j \in \{1, \ldots, n\}$*, cada uno de los semigrupos locales de isometrías*

$$\left(S(t\,\overrightarrow{e_j}, 0), \mathcal{H}(t\,\overrightarrow{e_j}, y)\right)_{t\in[0,a_j)},$$

tiene una única extensión a un grupo de operadores unitarios fuertemente continuo sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}(\overrightarrow{0}, y)$*.*

Entonces, existe un espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ *que contiene a* $\mathcal{H}$ *como subespacio cerrado y un grupo fuertemente continuo de operadores unitarios* $(U(\overrightarrow{x}, y))_{(\overrightarrow{x},y)\in\mathbb{R}^{n+1}}$ *sobre* $L(\mathcal{F})$*, tal que*

$$U(\overrightarrow{x}, y)|_{\mathcal{H}(\overrightarrow{x},y)} = S(\overrightarrow{x}, y).$$

Demostración. Para $j \in \{1, \dots, n\}$, sea $A_0^{(j)}$ el generador infinitesimal del semigrupo local uniparamétrico $\big(S(t\overrightarrow{e_j}, 0), \mathcal{H}(t\overrightarrow{e_j}, 0)\big)_{t\in[0,a_j)}$, entonces los operadores $iA_0^{(j)}$ son esencialmente autoadjuntos.

De la parte *(iii)* del Teorema 3.5, considerando el semigrupo local biparamétrico de isometrías $(S(t\overrightarrow{e_j} + r\overrightarrow{e_m}, 0), \mathcal{H}(t\overrightarrow{e_j} + r\overrightarrow{e_m}, 0))_{(t,r)\in[0,a_j)\times[0,a_m)}$, se obtiene que para $j, m \in \{1, \dots, n\}$, los operadores unitarios $T_{\overline{iA_0^{(j)}}}$ y $T_{\overline{iA_0^{(m)}}}$ conmutan. Así $(i\overline{A_1}, \cdots, i\overline{A_n})$, genera un grupo fuertemente continuo de operadores unitarios sobre $L(\mathcal{H})$.

También de la parte *(i)* del Teorema 3.5, considerando el semigrupo local biparamétrico de operadores isométricos $(S(t\overrightarrow{e_j}, y), \mathcal{H}(t\overrightarrow{e_j}, y))_{(t,y)\in[0,a_j)\times[0,b)}$, se obtiene que para $j \in \{1, \dots, n\}$ y $y \in [0, b)$, $T_{\overline{iA_0^{(j)}}}\mathcal{H}(0, y) \subset \mathcal{H}(0, y)$ y

$$T_{\overline{iA_0^{(j)}}}\, S(0, y) = S(0, y)\, T_{\overline{iA_0^{(j)}}}\, |_{\mathcal{H}(0,y)}$$

Por tanto, si se considera el grupo fuertemente continuo de operadores unitarios sobre $L(\mathcal{H})$, con parámetros sobre $\mathbb{R}^n$ definidos por

$$V(\overrightarrow{x}) = e^{\overline{A_0^{(1)}}x_1} \cdots e^{\overline{A_0^{(n)}}x_n},$$

se obtiene que, para $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ y $y \in [0, b)$, $V(\overrightarrow{x})\,\mathcal{H}(0, y) \subset \mathcal{H}(0, y)$ y

$$V(\overrightarrow{x})\, S(0, y) = S(0, y)\, V(\overrightarrow{x})\, |_{\mathcal{H}(0,y)},$$

por lo que el resultado se sigue del Corolario 2.9. $\square$

Capítulo 4

Extensión de funciones definidas positivas en un rectángulo n-dimensional

En este capítulo se establece que el problema de extender una función continua definida positiva en un rectángulo n-dimensional, a una función definida positiva en $\mathbb{R}^n$, es equivalente al problema de encontrar un extensión unitaria de un semigrupo local n-paramétrico fuertemente continuo de isometrías.

Para establecer esta equivalencia se le asocia, de manera natural, un semigrupo local de isometrías a una función definida positiva. Usando esta asociación y resultados obtenidos en el capítulo anterior, se da una nueva demostración de un resultado de G. I. Èskin.

Algunos de los resultados y definiciones para los casos uniparamétricos y biparamétricos dados en [5, 6], se extienden al caso multiparamétrico. Ver también [12].

Sean $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, tales que $a_j > 0$, para $j = 1, \dots, n$. Sea $Q = [0, a_1) \times \cdots \times [0, a_n)$ y sea $R = (-a_1, a_1) \times \cdots \times (-a_n, a_n)$, donde $R - R = 2R = (-2a_1, 2a_1) \times \cdots \times (-2a_n, 2a_n)$.

Definición 4.1. Una función $k : R - R \to \mathbb{C}$, se dice *definida positiva* si para cada $N \in \mathbb{N}$, $\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_N} \in R$ y $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{C}$, se cumple que

$$\sum_{p,q=1}^{N} c_p \, \overline{c_q} \, k \left(\overrightarrow{x_p} - \overrightarrow{x_q} \right) \geq 0$$

A lo largo de este capítulo, Q y R serán como antes y $k : R - R \to \mathbb{C}$, será una función definida positiva.

4.1 El núcleo reproductor en el espacio de Hilbert asociado a una función definida positiva

Sea $\mathsf{K} : \mathsf{R} \times \mathsf{R} \to \mathbb{C}$, el núcleo definido por

$$\mathsf{K}\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{z}\right) = k\left(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{z}\right)$$

Entonces, K es un núcleo definido positivo y continuo. El núcleo reproductor en el espacio de Hilbert asociado a K (ver [2]), se construye como sigue.

Para $\overrightarrow{z} \in \mathsf{R}$, sea $\mathsf{K}_{\overrightarrow{z}} : \mathsf{R} \to \mathbb{C}$ la función definida por

$$\mathsf{K}_{\overrightarrow{z}}(\overrightarrow{x}) = \mathsf{K}\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{z}\right)$$

y sea $\mathcal{E}$ el espacio lineal definido por

$$\mathcal{E} = \left\{ u : \mathsf{R} \to \mathbb{C} \,:\, u = \sum_{p=1}^{N} \alpha_p \mathsf{K}_{\overrightarrow{z_p}},\ N \in \mathbb{N},\ \alpha_p \in \mathbb{C},\ \overrightarrow{z_p} \in \mathsf{R} \right\}.$$

Los elementos de $\mathcal{E}$, son funciones continuas. Si $u, v \in \mathcal{E}$, son de la forma

$$u = \sum_{p=1}^{N} \alpha_p \mathsf{K}_{\overrightarrow{z_p}} \quad \text{y} \quad v = \sum_{q=1}^{M} \beta_q \mathsf{K}_{\overrightarrow{x_q}},$$

se define el producto en $\mathcal{E}$, mediante la fórmula

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{E}} = \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=1}^{M} \alpha_p\, \overline{\beta_q}\, \mathsf{K}(\overrightarrow{x_q}, \overrightarrow{z_p}).$$

Entonces, $\langle\ ,\ \rangle_{\mathcal{E}}$ es una forma sesquilineal semidefinida positiva sobre $\mathcal{E}$ y

$$u\left(\overrightarrow{x}\right) = \langle u, \mathsf{K}_{\overrightarrow{x}} \rangle_{\mathcal{E}}\ ; \quad \text{para } u \in \mathcal{E} \text{ y } \overrightarrow{x} \in \mathsf{R}.$$

Así, se tiene que

$$|u(\overrightarrow{x})| \leq \|u\|_{\mathcal{E}}\, \|\mathsf{K}_{\overrightarrow{x}}\|_{\mathcal{E}} = \|u\|_{\mathcal{E}} \left(\mathsf{K}(\overrightarrow{0}, \overrightarrow{0})\right)^{1/2},$$

para todo $u \in \mathcal{E}$ y $\overrightarrow{x} \in \mathsf{R}$. Sea $\mathcal{H}$ la completación de $\mathcal{E}$, entonces los elementos de $\mathcal{H}$ son funciones continuas y la convergencia en $\mathcal{H}$, implica convergencia uniforme y también se tiene que

$$\varphi(\overrightarrow{x}) = \langle \varphi, \mathsf{K}_{\overrightarrow{x}} \rangle_{\mathcal{H}}\ ; \quad \text{para } \varphi \in \mathcal{H} \text{ y } \overrightarrow{x} \in \mathsf{R}.$$

4.2 El semigrupo local n-paramétrico asociado a una función definida positiva

Para $\overrightarrow{x} \in Q$, sea $\mathcal{E}(\overrightarrow{x})$ el espacio lineal definido por

$$\mathcal{E}(\overrightarrow{x}) = \left\{ u : R \to \mathbb{C} \,:\, u = \sum_{p=1}^{N} \alpha_p K_{\overrightarrow{z_p}},\ N \in \mathbb{N},\ \alpha_p \in \mathbb{C},\ \overrightarrow{z_p}, \overrightarrow{z_p} + \overrightarrow{x} \in R \right\}.$$

Si $\overrightarrow{x} \in Q$ y $u = \sum_{p=1}^{N} \alpha_p K_{\overrightarrow{z_p}} \in \mathcal{E}(\overrightarrow{x})$, se define $S(\overrightarrow{x}) : \mathcal{E}(\overrightarrow{x}) \to \mathcal{E}$ por

$$S(\overrightarrow{x})u = \sum_{p=1}^{N} \alpha_p K_{\overrightarrow{z_p}+\overrightarrow{x}}.$$

Resulta importante hacer notar que: $S(\overrightarrow{x})\varphi(\overrightarrow{\omega}) = \varphi(\overrightarrow{\omega} - \overrightarrow{x})$.

Ahora se tiene que, $S(\overrightarrow{x})$ es un operador lineal y para $u, v \in \mathcal{E}(\overrightarrow{x})$ se cumple que

$$\langle S(\overrightarrow{x})u\ , S(\overrightarrow{x})v\rangle_{\mathcal{E}} = \langle u\ , v\rangle_{\mathcal{E}}.$$

Si $\mathcal{H}(\overrightarrow{x})$ es la clausura de $\mathcal{E}(\overrightarrow{x})$ en $\mathcal{H}$, entonces $S(\overrightarrow{x})$ puede ser extendida a una isometría lineal de $\mathcal{H}(\overrightarrow{x})$ en $\mathcal{H}$. Si esta extensión se denota por $S(\overrightarrow{x})$ también, resulta sencillo verificar que $(S(\overrightarrow{x}), \mathcal{H}(\overrightarrow{x}))_{\overrightarrow{x} \in Q}$ es un semigrupo local n-paramétrico de isometrías sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Además, de la continuidad de f sigue la continuidad fuerte del semigrupo local.

Proposición 4.2. *La función k puede ser extendida a una función definida positiva continua sobre $\mathbb{R}^n$, si y sólo si, el semigrupo local $\left(S(\overrightarrow{x}), \mathcal{H}(\overrightarrow{x})\right)_{\overrightarrow{x} \in Q}$ puede ser extendido a un grupo fuertemente continuo de operadores unitarios sobre un espacio de Hilbert mas grande.*

Demostración.
($\Rightarrow$) Si la función k puede ser extendida a una función definida positiva continua $\widetilde{k}$ sobre $\mathbb{R}^n$, se puede seguir la construcción previa con $\widetilde{k}$, en lugar de k y se obtiene un grupo fuertemente continuo de operadores unitarios que se extiende a $\left(S(\overrightarrow{x}), \mathcal{H}(\overrightarrow{x})\right)_{\overrightarrow{x} \in Q}$.
($\Leftarrow$) Supóngase que $\left(S(\overrightarrow{x}), \mathcal{H}(\overrightarrow{x})\right)_{\overrightarrow{x} \in Q}$, puede ser extendido a un grupo fuertemente continuo de operadores unitarios $\left(U(\overrightarrow{x})\right)_{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n}$ sobre un espacio de Hilbert mas grande que se denotará por $\mathcal{F}$.

Sea $\overrightarrow{x} \in R$. Si $\overrightarrow{x} \in Q$ y $\overrightarrow{\omega} \in R$ y son tales que, $\overrightarrow{\omega} + \overrightarrow{x} \in R$, entonces

$$U(\overrightarrow{x})K_{\overrightarrow{\omega}} = S(\overrightarrow{x})K_{\overrightarrow{\omega}} = K_{\overrightarrow{\omega}+\overrightarrow{x}}.$$

Si $-\overrightarrow{x} \in Q$, entonces $U(-\overrightarrow{x})K_{\overrightarrow{x}} = S(-\overrightarrow{x})K_{\overrightarrow{x}} = K_0$, así

$$U(\overrightarrow{x})K_0 = K_{\overrightarrow{x}}.$$

En el caso general $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2}$, donde $\overrightarrow{x_1}, -\overrightarrow{x_2} \in Q$, se tiene que

$$U(\overrightarrow{x})K_{\overrightarrow{0}} = U(\overrightarrow{x_1})\,U(\overrightarrow{x_2})\,K_{\overrightarrow{0}} = U(\overrightarrow{x_1})\,K_{\overrightarrow{x_2}} = K_{\overrightarrow{x_1}+\overrightarrow{x_2}} = K_{\overrightarrow{x}}.$$

Si $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{z} \in R$, entonces

$$k(\overrightarrow{z} - \overrightarrow{x}) = \langle K_{\overrightarrow{z}}, K_{\overrightarrow{x}} \rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle U(\overrightarrow{z})\,K_{\overrightarrow{0}}, U(\overrightarrow{x})\,K_{\overrightarrow{0}} \right\rangle_{\mathcal{F}} = \left\langle U(\overrightarrow{z} - \overrightarrow{x})\,K_{\overrightarrow{0}}, K_{\overrightarrow{0}} \right\rangle_{\mathcal{F}},$$

por consiguiente, $k(\overrightarrow{\omega}) = \left\langle U(\overrightarrow{\omega})\,K_{\overrightarrow{0}}, K_{\overrightarrow{0}} \right\rangle_{\mathcal{F}}$ para $\overrightarrow{\omega} \in R - R$.

Tomando

$$\widetilde{k}(\overrightarrow{\omega}) = \left\langle U(\overrightarrow{\omega})\,K_{\overrightarrow{0}}, K_{\overrightarrow{0}} \right\rangle_{\mathcal{F}}$$

para $\overrightarrow{\omega} \in \mathbb{R}^n$, se obtiene una extensión definida positiva y fuertemente continua de k. $\square$

Resulta necesario, dar una caracterización de los generadores infinitesimales de los semigrupos locales uniparamétricos asociados a $\left(S(\overrightarrow{x}), \mathcal{H}(\overrightarrow{x})\right)_{\overrightarrow{x}\in Q}$. Para ello, se consideran $j, m \in \{1, \dots, n\}$, $j \neq m$ y $\zeta_m \in [0, a_m)$. Sean $A^{(j)}_{\zeta_m}$ el generador infinitesimal del semigrupo local uniparamétrico $\left(S(t\overrightarrow{e_j}), \mathcal{H}(t\overrightarrow{e_j} + \zeta_m\overrightarrow{e_m})\right)_{t\in[0,a_j)} \subset L(\mathcal{H}(\zeta_m\overrightarrow{e_m}))$ y $D^{(j)}_{\zeta_m}$ el operador lineal con dominio

$$\mathcal{D}\left(D^{(j)}_{\zeta_m}\right) = \left\{\varphi \in \mathcal{H}(\zeta_m\overrightarrow{e_m}) \,:\, \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \text{ existe y } \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} = \psi \text{ para algún } \psi \in \mathcal{H}(\zeta_m\overrightarrow{e_m})\right\},$$

definido por

$$D^{(j)}_{\zeta_m}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$$

La convergencia en $\mathcal{H}$, implica convergencia uniforme. Por tanto, se tiene que $D^{(j)}_{\zeta_m}$ es un operador cerrado.

Proposición 4.3. *Sea $\overrightarrow{x} \in R$, tal que $x_m < a_m - \zeta_m$ y sea $r_o > 0$, tal que $\overrightarrow{x} + r\overrightarrow{e_j} \in R$ para $|r| < r_o$. Para $r \in (-r_o, r_o)$, se considera el elemento $\varphi^{(j)}_{r,\overrightarrow{x}} \in \mathcal{H}(\zeta_m\overrightarrow{e_m})$ definido por la integral de Riemann*

$$\varphi^{(j)}_{r,\overrightarrow{x}} = \frac{1}{r}\int_0^r K_{\lambda\overrightarrow{e_j}+\overrightarrow{x}}\,d\lambda.$$

Entonces, $\varphi^{(j)}_{r,\overrightarrow{x}} \in \mathcal{D}\left(A^{(j)}_{\zeta_m}\right)$ y

$$A^{(j)}_{\zeta_m}\varphi^{(j)}_{r,\overrightarrow{x}} = \frac{1}{r}\left(K_{r\overrightarrow{e_j}+\overrightarrow{x}} - K_{\overrightarrow{x}}\right).$$

Demostración. Para $t \in (0,\infty)$ y pequeño, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{S(t\overrightarrow{e_j})\varphi^{(j)}_{r,\overrightarrow{x}}-\varphi^{(j)}_{r,\overrightarrow{x}}}{t} &= \frac{1}{tr}\left(\int_0^r K_{\lambda\overrightarrow{e_j}+\overrightarrow{x}+t\overrightarrow{e_j}}\,d\lambda-\int_0^r K_{\lambda\overrightarrow{e_j}+\overrightarrow{x}}\,d\lambda\right)\\ &= \frac{1}{tr}\left(\int_t^{r+t} K_{\lambda\overrightarrow{e_j}+\overrightarrow{x}}\,d\lambda-\int_0^r K_{\lambda\overrightarrow{e_j}+\overrightarrow{x}}\,d\lambda\right)\\ &= \frac{1}{tr}\left(\int_r^{r+t} K_{\lambda\overrightarrow{e_j}+\overrightarrow{x}}\,d\lambda-\int_0^t K_{\lambda\overrightarrow{e_j}+\overrightarrow{x}}\,d\lambda\right).\end{aligned}$$

Tomando límite cuando $t \to 0^+$, se obtiene el resultado. □

Proposición 4.4. *Sea* $r_o \in (0,a_j)$*, para* $\varphi \in \mathcal{H}(r_o\overrightarrow{e_j}+\zeta_m\overrightarrow{e_m})$ *y* $r \in (0,r_o)$ *sea*

$$M_r^{(j)}\varphi = \frac{1}{r}\int_0^r S(\lambda\overrightarrow{e_j})\varphi\,d\lambda.$$

Entonces, $M_r^{(j)}\varphi \in \mathcal{D}\left(D^{(j)}_{\zeta_m}\right)^*$ *y*

$$\left(D^{(j)}_{\zeta_m}\right)^* M_r^{(j)}\varphi = \frac{1}{r}\left(S(r\overrightarrow{e_j})\varphi-\varphi\right) \quad \textit{para } 0<r<r_o.$$

Demostración. Sea $\psi \in \mathcal{D}\left(D^{(j)}_{\zeta_m}\right)$ y sea $\overrightarrow{z} \in Q$, tal que $z_j \in [0,a_j-r_o)$ y $z_m \in [0,a_m-\zeta_m)$. Entonces,

$$\begin{aligned}\left\langle D^{(j)}_{\zeta_m}\psi, M_r^{(j)}K_{\overrightarrow{z}}\right\rangle_{\mathcal{H}(\zeta_m\overrightarrow{e_m})} &= \frac{1}{r}\int_0^r \left\langle D^{(j)}_{\zeta_m}\psi, K_{\overrightarrow{z}+\lambda\overrightarrow{e_j}}\right\rangle_{\mathcal{H}(\zeta_m\overrightarrow{e_m})}d\lambda\\ &= \frac{1}{r}\int_0^r \frac{\partial\psi}{\partial x_j}\left(\overrightarrow{z}+\lambda\overrightarrow{e_j}\right)d\lambda\\ &= \frac{1}{r}\left(\psi(\overrightarrow{z}+r\overrightarrow{e_j})-\psi(\overrightarrow{z})\right).\end{aligned}$$

Por consiguiente, $M_r^{(j)}K_{\overrightarrow{z}} \in \mathcal{D}\left(D^{(j)}_{\zeta_m}\right)^*$ y

$$\left(D^{(j)}_{\zeta_m}\right)^* M_r^{(j)}K_{\overrightarrow{z}} = \frac{1}{r}(K_{\overrightarrow{z}+r\overrightarrow{e_j}}-K_{\overrightarrow{z}}) = \frac{1}{r}\left(S(r\overrightarrow{e_j})K_{\overrightarrow{z}}-K_{\overrightarrow{z}}\right).$$

De esta última igualdad, se sigue que

$$\left(D^{(j)}_{\zeta_m}\right)^* M_r^{(j)}u = \frac{1}{r}\left(S(r\overrightarrow{e_j})u-u\right) \text{ para } 0<r<r_o \text{ y } u \in \mathcal{E}(r_o\overrightarrow{e_j}+\zeta_m\overrightarrow{e_m}).$$

Como $\left(D^{(j)}_{\zeta_m}\right)^*$ es un operador cerrado y la función $u \mapsto M_r^{(j)}u$ es continua, se obtiene que para $\varphi \in \mathcal{H}(r_o\overrightarrow{e_j}+\zeta_m\overrightarrow{e_m})$ y $r \in (0,r_o)$, $M_r^{(j)}\varphi \in \mathcal{D}\left(D^{(j)}_{\zeta_m}\right)^*$ y se cumple que

$$\left(D^{(j)}_{\zeta_m}\right)^* M_r^{(j)}\varphi = \frac{1}{r}\left(S(r\overrightarrow{e_j})\varphi-\varphi\right),$$

para $0<r<r_o$. □

Lema 4.5. *Se cumple que*
$$\left(A^{(j)}_{\zeta_m}\right)^* = D^{(j)}_{\zeta_m}.$$

Demostración. La prueba se llevará a cabo en tres pasos.
Paso 1: $\left(A^{(j)}_{\zeta_m}\right)^* \subset D^{(j)}_{\zeta_m}$.

Supóngase que $\varphi \in \mathcal{D}\left(\left(A^{(j)}_{\zeta_m}\right)^*\right)$. Sea $\overrightarrow{x} \in R$, tal que $x_m < a_m - \zeta_m$ y sea $\varphi^{(j)}_{r,\overrightarrow{x}}$ como en la Proposición 4.3, entonces

$$\begin{aligned}\left\langle \left(A^{(j)}_{\zeta_m}\right)^* \varphi, \varphi_{r,\overrightarrow{x}}\right\rangle_{\mathcal{H}} &= \left\langle \varphi, A^{(j)}_{\zeta_m}\varphi_{r,\overrightarrow{x}}\right\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \left\langle \varphi, \tfrac{1}{r}\left(K_{r\overrightarrow{e_j}+\overrightarrow{x}} - K_{\overrightarrow{x}}\right)\right\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \tfrac{1}{r}\left(\varphi(r\overrightarrow{e_j} + \overrightarrow{x}) - \varphi(\overrightarrow{x})\right)\end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{r\to 0} \varphi_{r,\overrightarrow{x}} = K_{\overrightarrow{x}}$, se obtiene que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\overrightarrow{x})$ existe y

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\overrightarrow{x}) = \left(\left(A^{(j)}_{\zeta_m}\right)^* \varphi\right)(\overrightarrow{x})$$

Paso 2: $A^{(j)}_{\zeta_m} \subset \left(D^{(j)}_{\zeta_m}\right)^*$.

Sea $\varphi \in \mathcal{D}(A^{(j)}_{\zeta_m})$. Entonces, $\varphi \in \mathcal{H}(r_o\overrightarrow{e_j} + \zeta_m\overrightarrow{e_m})$ para algún $r_o > 0$ y

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{S(t\overrightarrow{e_j})\varphi - \varphi}{t} \text{ existe.}$$

Sea $r_n \subset (0, r_o)$, tal que $r_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

De la Proposición 4.4, se sigue que

$$\left(D^{(j)}_{\zeta_m}\right)^* M_{r_n}\varphi = \frac{S(r_n\overrightarrow{e_j})\varphi - \varphi}{r_n} \to A^{(j)}_{\zeta_m}\varphi\,, \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

También,

$$M_{r_n}\varphi \to \varphi\,, \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

Como $\left(D^{(j)}_{\zeta_m}\right)^*$ es cerrado, se obtiene

$$A^{(j)}_{\zeta_m}\varphi = \left(D^{(j)}_{\zeta_m}\right)^* \varphi.$$

Paso 3: $\left(A^{(j)}_{\zeta_m}\right)^* = D^{(j)}_{\zeta_m}$.

Del Paso 1, se tiene que $\left(A^{(j)}_{\zeta_m}\right)^* \subset D^{(j)}_{\zeta_m}$ y del Paso 2, queda que $A^{(j)}_{\zeta_m} \subset \left(D^{(j)}_{\zeta_m}\right)^*$.

Como $D_{\zeta_m}^{(j)}$ es un operador cerrado, se tiene que $D_{\zeta_m}^{(j)} = \overline{D_{\zeta_m}^{(j)}} = \left(D_{\zeta_m}^{(j)}\right)^{**}$, por consiguiente

$$D_{\zeta_m}^{(j)} = \left(D_{\zeta_m}^{(j)}\right)^{**} \subset \left(A_{\zeta_m}^{(j)}\right)^{*} \subset D_{\zeta_m}^{(j)}.$$

□

De este Lema, se sigue que $\left(iA_{\zeta_m}^{(j)}\right)^{*} = -iD_{\zeta_m}^{(j)}$, por lo que los índices de deficiencia del operador $iA_{\zeta_m}^{(j)}$ son

$$d_+\left(iA_{\zeta_m}^{(j)}\right) = \dim\ker\left(D_{\zeta_m}^{(j)} + I\right) \quad \text{y} \quad d_-\left(iA_{\zeta_m}^{(j)}\right) = \dim\ker\left(D_{\zeta_m}^{(j)} - I\right).$$

Para $j = 1, \ldots, m$ sea $k^{(j)} : (-2a_j, 2a_j) \to \mathbb{C}$ la función definida por

$$k^{(j)}(t) = k(t\overrightarrow{e_j}).$$

Entonces, $k^{(j)}$ es una función definida positiva, también a $k^{(j)}$ le corresponde un semigrupo local uniparamétrico de isometrías $\left(S^{(j)}(t), \mathcal{H}^{(j)}(t)\right)_{t\in[0,a_j)}$ sobre el espacio de Hilbert del núcleo reproductor $\mathcal{H}^{(j)}$ correspondiente a $k^{(j)}$.

Observación 4.6. Del Lema 4.5, se sigue que el adjunto del generador infinitesimal $A^{(j)}$, de $\left(S^{(j)}(t), \mathcal{H}^{(j)}(t)\right)_{t\in[0,a_j)}$, es el operador derivada. Este resultado corresponde con un caso particular del teorema 6 de [5]. De las proposiciones 2 y 3 de [5] se obtiene el siguiente resultado:

(i) Los índices de deficiencia de $A^{(j)}$ son iguales, y sus posibles valores son 0 y 1.

(ii) Si la función $k^{(j)}$, tiene sólo una extensión definida positiva continua a toda la recta real, entonces la funciones ξ_1 y ξ_2 definidas por $\xi_1(t) = e^t$ y $\xi_2(t) = e^{-t}$ no son elementos de $\mathcal{H}^{(j)}$.

Lema 4.7. *Si la función $k^{(j)}$, tiene sólo una extensión definida positiva continua a toda la recta real, entonces para cada $m \in \{1, \ldots, n\}$, tales que $j \neq m$ y $\zeta_m \in [0, a_m)$, cada uno de los semigrupos locales uniparamétricos de isometrías*

$$\left(S(t\,\overrightarrow{e_j}, 0), \mathcal{H}(t\,\overrightarrow{e_j} + \zeta_m\,\overrightarrow{e_m}, 0)\right)_{t\in[0,a_j)}$$

tiene una única extensión unitaria, a un grupo fuertemente continuo de operadores unitarios sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}(\zeta_m\,\overrightarrow{e_m}, 0)$

Demostración. Es suficiente demostrar que el operador $iA^{(j)}_{\zeta_m}$, tiene índices de deficiencia iguales a 0.

Sea $K^{(j)} : (-a_j, a_j) \times (-a_j, a_j) \to \mathbb{C}$ el núcleo definido por

$$K^{(j)}(r,t) = k^{(j)}(r-t)$$

Para un punto $(x^o_1, \ldots, x^o_{j-1}, x^o_{j+1}, \ldots, x^o_n)$, tal que $x^o_m \in (-a_m, a_m)$ se considera el conjunto R_o de los puntos $\overrightarrow{x} \in R$, tales que $x_1 = x^o_1, \ldots, x_{j-1} = x^o_{j-1}, x_{j+1} = x^o_{j+1}, \ldots, x_n = x^o_n$. Entonces, $K^{(j)}$ es la restricción de K a $R_o \times R_o$. Así, de acuerdo al teorema en la página 351 de [2], los elementos de $\mathcal{H}^{(j)}$, son la restricción a cualquier conjunto R_o de funciones de $\mathcal{H}$.

Supóngase que $d_+\left(iA^{(j)}_{\zeta_m}\right) = \dim\ker\left(D^{(j)}_{\zeta_m} + I\right)$ no es 0, entonces una función no trivial de la forma

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \gamma(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)\, e^{-x_j},$$

debe ser un elemento de $\mathcal{H}(\zeta_m \overrightarrow{e_m}, 0)$.

Considerando $(x^o_1, \ldots, x^o_{j-1}, x^o_{j+1}, \ldots, x^o_n)$, tal que $c_o = \gamma(x^o_1, \ldots, x^o_{j-1}, x^o_{j+1}, \ldots, x^o_n) \neq 0$, entonces la restricción de φ al conjunto R_o es la función $\xi(x_j) = c_o e^{-x_j}$, por lo que se debería tener de que la función $\xi_2(t) = e^{-t}$ es un elemento de $\mathcal{H}^{(j)}$, lo cual contradice la afirmación *(ii)* en la Observación 4.6.

De la misma manera, se demuestra que $d_-\left(iA^{(j)}_{\zeta_m}\right) = 0$. □

4.3 Una nueva demostración de un resultado de Èskin

Como una aplicación del Teorema 3.7, se da una nueva demostración de la siguiente resultado de extensión debido a G. I. Èskin [14].

Supóngase que $a_1, \ldots, a_n$ y b son números reales positivos. Para el siguiente resultado, se considera

$$R = (-a_1, a_1) \times \cdots \times (-a_n, a_n) \times (-b, b).$$

Teorema 4.8. *Sea* $k : R - R \to \mathbb{C}$ *una función definida positiva y continua. Supóngase que, para* $j = 1, \ldots, n$ *cada una de las funciones* $k^{(j)} : (-2a_j, 2a_j) \to \mathbb{C}$ *definidas por* $k^{(j)} = k(t\overrightarrow{e_j})$, *tienen una única extensión definida positiva continua a la recta real. Entonces,* k *puede ser extendida a una función definida positiva y continua sobre* $\mathbb{R}^{n+1}$.

Demostración. Sea $Q = [0, a_1) \times \cdots \times [0, a_n) \times [0, b)$ y sea $(S(\overrightarrow{x}, y), \mathcal{H}(\overrightarrow{x}, y))_{(\overrightarrow{x}, y) \in Q \times [0,b)}$ el semigrupo local $(n+1)$-paramétrico fuertemente continuo de isometrías asociadas a k.

Del Lema 4.7, se sigue que $(S(\overrightarrow{x}, y), \mathcal{H}(\overrightarrow{x}, y))_{(\overrightarrow{x}, y) \in Q \times [0,b)}$ satisface las condiciones del Teorema 3.7. Por tanto, el semigrupo local puede ser extendido a un grupo fuertemente continuo sobre un espacio de Hilbert mas grande. De la Proposición 4.2, se obtiene el resultado requerido.

$\square$

Bibliografía

[1] R. Arocena, *On the extension problem for a class of translation invariant positive forms,* J. Oper. Theory **21**, No.2, (1989) 323–347. Citado en la página: 18

[2] N. Aronszajn, *Theory of reproducing kernels.* Trans. Am. Math. Soc. **68** (1950), 337–404. Citado en las páginas: 28, 34

[3] M. Bakonyi, *The extension of positive definite operator-valued functions defined on a symmetric interval of an ordered group.* Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), 1401–1406.

[4] Iu. Berezanski, *Expansions in eigenfunctions of selfadjoint operators* (Russian) Kiev: Naukova Dumka 1965, English translation: Transl. Math. Monogr. **17**, Amer. Math. Soc. 1968.

[5] R. Bruzual, *Local semigroups of contrations and some applications to Fourier representation theorems.* Int. Eq. and Op. Theory, **10** (1987), 780–801. Citado en las páginas: 3, 4, 10, 11, 27, 33

[6] R. Bruzual, *Unitary extensions of two parameter local semigroups of isometric operators and the Kreĭn extension theorem.* Int. Eq. and Op. Theory, **17** (1993), 301–322. Citado en las páginas: 4, 25, 27

[7] R. Bruzual, M. Domínguez, *On unitary extensions of multiplicative families of partial isometries with a generating subspace.* Semigroup Forum **75**, No. 3, (2007) 635–648.

[8] R. Bruzual, M. Domínguez, *On extensions of indefinite functions defined on a rectangle.* Complex Anal. Oper. Theory, **5**, (2011), 985–1001. Citado en la página: 4

[9] R. Bruzual, M. Domínguez y A. Pérez, *On extensions of multi-parametric local semigroups of isometric operators and some applications*. Extracta Mathematicae, **28**, No. 2 (2013), 169–195. Citado en la página: 4

[10] R. Bruzual, S. Marcantognini, *The Kreĭn-Langer problem for Hilbert space operators valued functions on the band*. Integral Equations Operators Theory, **34**, (1999), 396–413. Citado en la página: 18

[11] J. Cooper, *One parameter semi-groups of isometric operators in Hilbert space.* Ann. Math., 48 (1947), 827–842.

[12] A. Devinatz, *On the extensions of positive definite functions*. Acta Math. **102**, No 1 -2 (1959), 109–134. Citado en las páginas: 3, 27

[13] N. Dunford, J. Schwartz, *Linear Operators Part II: spectral Theory, Self Adjoint Operators in Hilbert Spaces* (With assistance of William G. Bade and Robert G. Bartle). Interscience Publishers John Wiley & Sons, New York - London, 1963. Citado en la página: 9

[14] G. I. Èskin, *A sufficient condition for the solvability of the moment problem in several dimensions*. Dokl. Akad. Nauk. SSSR **113** (1960), 540–543. Citado en las páginas: 3, 34

[15] M. Grossmann, H. Langer, *Ober indexerhaltende Erweiterungen eines hermiteschen Operators im Pontrjaginraum*, Math. Nachrichten **64** (1974) 289–317. Citado en la página: 3

[16] V. I. Gorbachuk (V. I. Plyushčeva), *On the integral representation of hermitian indefinite kernels with a finite number of negative squares.* Dokl. Akad. Nauk. SSRR **145**, No. 3 (1962), 534–537.

[17] P.Jorgensen, *Integral representations for locally defined positive definite functions on Lie Groups*, International Journal of Mathematics. **2**, No. 3, (1991) 257–286. Citado en la página: 4

[18] A. Korányi, *On some classes of analytic functions of several variables.* Trans. Am. Math. Soc. **101**, (1961) 520–554. Citado en las páginas: 4, 18

[19] M. G. Kreĭn, *Sur le problème du prolongement des fonctions hermitiennes positives et continues,* Dokl. Akad. Nauk. SSSR **26** (1940) 17–22. Citado en la página: 2

[20] S. Marcantognini, M. Morán, *Commuting unitary Hilbert space extensions of a pair of Kreĭn space isometries and the Kreĭn-Langer problem in the band,* J. Funct. Anal. **138** (1996) 379–409. Citado en la página: 18

[21] E. Nelson, *Analytic vectors,* Ann. Mayh. **70** (1940) 572–615. Citado en las páginas: 3, 12

[22] R. Niedzialomski, *Extension of positive definite functions,* Tesis doctoral, dirigida por Palle Jorgensen. (2013) . Citado en la página: 4

[23] F. Peláez, *Semigrupos locales biparamétricos de isometrías, extensiones autoadjuntas de parejas de operadores simétricos y aplicaciones.* Publicaciones Matemáticas del Uruguay. 1991. Citado en la página: 3

[24] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics. I. Functional Analysis.* Second edition. Academis Press, Inc., New York, 1980. Citado en las páginas: 6, 10

[25] W. Rudin, *The extension problem for positive definite functions.* Illinois J. Math. **7** (1963) 532–539. Citado en la página: 3

[26] W. Rudin, *Functional Analysis. Second Edition.* Mc. Graw-Hill, Inc., New York, 1991. Citado en la página: 9

[27] Z.Sasvári, *Positive definite and definitizable functions,* Akademie Verlag, 1994.

[28] B. Sz. Nagy, C. Foias, *Harmonic Analysis of operators on Hilbert Spaces.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1970. Citado en la página: 13