UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Acerca del producto de funciones uniformemente continuas en subconjuntos de la recta real

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Freider López** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutor: Ramón Bruzual.

Caracas, Venezuela
Mayo 2013

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado "**Acerca del producto de funciones uniformemente continuas en subconjuntos de la recta real**", presentado por el **Br. Freider López**, titular de la Cédula de Identidad **18.067.474**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Ramón Bruzual
Tutor

Marisela Domínguez
Jurado

Cristina Balderrama
Jurado

Agradecimiento

A Dios.

A mis padres por todo el apoyo que me han brindado.

Al personal de Laboratorio de Docencia de la Escuela de Matemática por su colaboración.

Al Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico de la Universidad Central de Venezuela por su apoyo en la realización de este trabajo.

Índice general

Introducción

Es muy bien conocido que el producto puntual de dos funciones continuas a valores reales es una función continua. Sin embargo el producto puntual de dos funciones uniformemente continuas a valores reales no necesariamente es una función uniformenente continua. Por ejemplo, la función identidad definida en la recta real es uniformemente continua, pero el producto puntual de ella consigo misma no lo es.

El problema de encontrar condiciones para que el producto de dos funciones uniformemente continuas sea una función uniformemente continua ha sido estudiado desde hace mucho tiempo, ver por ejemplo [**1, 2, 3, 4**]. En estos trabajos se dan varias condiciones suficientes para que el producto de un par de funciones uniformemente continuas sea una función uniformemente continua. En el artículo del año 2007 "Pointwise products of uniformly continuous functions on sets in the real line" de S. Nadler y D. Ziney ([**5**]) los autores señalan que las condiciones encontradas son muy técnicas y en las hipótesis aparecen condiciones sobre las funciones. Además afirman que, aunque resulta sorprendente, el siguiente problema no ha sido estudiado: "Caracterizar aquellos subconjuntos de la recta real en los que el producto puntual de dos funciones uniformemente continuas es una función uniformemente continua". En otras palabras: "Caracterizar aquellos subconjuntos $\mathfrak{D}$ de la recta real en los que el conjunto de las funciones a valores reales, con dominio $\mathfrak{D}$ y que son uniformemente continuas forman un anillo (con las operaciones de multiplicación y suma puntual)". Utilizando técnicas básicas de análisis y de topología de la recta S. Nadler y D. Ziney, en su trabajo ya mencionado, consiguen una caracterización de estos conjuntos. Además discuten la posibilidad de extender el resultado a contextos más generales, dando ejemplos de espacios métricos en los cuales no podría ser válida la extensión.

El objetivo fundamental que se planteó para este Trabajo Especial de Grado es la comprensión del artículo S. Nadler y D. Ziney y escribir una monografía lo más auto contenida posible basada en el mismo.

Está organizado de la siguiente manera:

El Capítulo 1 está dedicado a la revisión de algunos conceptos y ejemplos básicos referentes a topología de espacios métricos y a la continuidad de funciones en espacios métricos y en la recta real.

En el Capítulo 2 se enuncia el resultado de caracterización S. Nadler y D. Ziney, que aparece en su artículo ya mencionado, y se da su demostración. En este capítulo también se demuestra que un resultado dado por N. Levine en [**3**], se puede obtener como corolario de este resultado de caracterización.

Finalmente el Capítulo 3 está dedicado a la discusión de algunas posibles extensiones del resultado dado en el Capítulo 2.

Capítulo 1

Definiciones y resultados básicos

Este capítulo está dedicado a exponer las definiciones y resultados básicos referentes a espacios métricos, topología de la recta y continuidad que serán necesarios para comprender el resultado principal, que se expone en el siguiente capítulo.

En las primeras cuatro secciones de este capítulo se presentan resultados básicos y conocidos referentes a espacios métricos, que se pueden encontrar con su demostración en la bibliografía usual del tema, ver por ejemplo [**6, 7, 8**]. No se han incluido demostraciones en estas secciones.

La última sección está dedicada a resultados, también básicos, referentes a continuidad de funciones a valores reales definidas en un subconjunto de la recta real. Es usual que la mayoría de los resultados que se presentan en esta sección aparezcan como ejercicio en la mayoría de los textos del tema, se incluye la demostración de estos resultados y se detallan algunos ejemplos.

1. Nociones básicas de espacios métricos.

Definición 1.1.

Un *espacio métrico* es un par (X, d) donde X es un conjunto y $\mathrm{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ es una función tal que:

(i) $\mathrm{d}(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$,

(ii) $\mathrm{d}(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$,

(iii) $\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x)$ para todo $x, y \in X$,

(iv) $\mathrm{d}(x, z) \leq \mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(y, z)$ para todo $x, y, z \in X$.

La función d se suele llamar *métrica* (o *distancia*) y los elementos de X se suelen llamar puntos.

Cuando se trabaja con más de un espacio métrico es usual denotar la métrica del espacio X por d_X, para evitar confusiones.

Ejemplo 1.2.

(a) Sea $X = \mathbb{R}$, el conjunto de los números reales. La función $\mathrm{d}(x, y) = |x - y|$ define una métrica en $\mathbb{R}$. Esta es la métrica usual en $\mathbb{R}$ y la que se usará mayormente en este trabajo. Si no se especifica lo contrario, al referirse a $\mathbb{R}$ o a un subconjunto de $\mathbb{R}$ como espacio métrico, se supondrá que se está considerando esta métrica.

(b) Todo subconjunto de un espacio métrico también es un espacio métrico, tomando como métrica la restricción de la métrica del espacio original al subconjunto.

(c) Sea X cualquier conjunto. La función definida por

$$\mathrm{d}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y; \\ 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

es una métrica en X. Este métrica se conoce con el nombre de métrica discreta.

Supóngase que (X, d) es un espacio métrico.

Sea $a \in X$, $r \in (0, +\infty)$.

La *bola abierta con centro a y radio r* es el conjunto

$$B(a, r) = \{x \in X : \mathrm{d}(x, a) < r\}.$$

La *bola cerrada con centro a y radio r* es el conjunto

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in X : \mathrm{d}(x, a) \leq r\}.$$

Sea $B \subset X$.

Se dice que B es *acotado* cuando existen $a \in X$ y $r > 0$ tales que $B \subset B(a, r)$.

Si $x \in X$, la *distancia* de x a B se define como

$$\mathrm{d}(x, B) = \inf\{\mathrm{d}(x, y) : y \in B\}.$$

El *diámetro* de B es

$$\operatorname{diam}(B) = \sup\{\mathrm{d}(x, y) : x, y \in B\}.$$

Se tiene que un conjunto es acotado si y sólo si su diámetro es finito.

Sea $A \subset X$.

Se dice que A es *abierto* si para cada $a \in A$ existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset A$.

Se dice que A es *cerrado* si su complemento $A^c = X \setminus A$ es abierto.

Se tiene que si $x \in X$ y $r > 0$ entonces $B(x, r)$ es un conjunto abierto y $\overline{B}(x, r)$ es un conjunto cerrado.

Además se cumple el siguiente resultado.

Proposición 1.3.

(a) *La intersección de una familia finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*

(b) *La unión de una familia de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*

(c) *La intersección de una familia de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.*

(d) *La unión de una familia finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.*

2. Puntos de acumulación y clausura de un conjunto.

Nuevamente sea (X, d) un espacio métrico.

Sean $x \in X$, $A \subset X$. Se dice que x es un *punto de acumulación* de A o *un punto límite* de A si para cada $r > 0$ se tiene que

$$A \cap (B(x, r) \setminus \{x\}) \neq \emptyset.$$

Es usual denotar el conjunto de los puntos de acumulación de A por A', es decir

$$A' = \{x \in X : x \text{ es un punto de acumulación de } A\}.$$

Sea $A \subset X$, la *clausura* de A, que se suele denotar por $\overline{A}$ es la unión de A con el conjunto de todos sus puntos límites. Es decir, $\overline{A} = A \cup A'$.

Se cumplen los siguientes resultados.

Proposición 1.4.

Sea A un subconjunto de X.

(a) *A es cerrado si y sólo si todo punto límite de A pertenece a A.*

(b) *$A \subset \overline{A}$.*

(c) *$\overline{A}$ es cerrado.*

(d) *Si C es un cerrado y $A \subset C$ entonces $\overline{A} \subset C$.*

(e) *A es cerrado si y sólo si $A = \overline{A}$.*

Proposición 1.5.

Si A y B son subconjuntos de X entonces $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

3. Límites y continuidad en espacios métricos.

Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) dos espacios métricos.

Definición 1.6. Sean $D \subset X$, $a \in X$ un punto de acumulación de D, $f : D \to Y$ una función y $L \in Y$. Se dice que *el límite de f cuando x tiende al punto a es L* si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in D$ y si $0 < \mathrm{d}_X(x, a) < \delta$ entonces $\mathrm{d}_Y(f(x), L) < \varepsilon$. Abreviado:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Definición 1.7. Sean $D \subset X$, $a \in D$, $f : D \to Y$ una función. Se dice que f *es continua en* a si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in D$ y $\mathrm{d}_X(x, a) < \delta$ entonces $\mathrm{d}_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

Observación 1.8. Notar que si a es un punto de acumulación de D entonces f es continua en a si y sólo si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Si $D \subset X$ y $f : D \to Y$ es una función, se dice que f es *continua en D* cuando f es continua en a para todo $a \in D$.

Definición 1.9. Sean $D \subset X$ y $f : D \to Y$ una función. Se dice que f es uniformemente continua en D cuando para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x, x' \in D$ y $0 < \mathrm{d}_X(x, x') < \delta$ entonces $\mathrm{d}_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$.

Es claro que toda función uniformemente continua es continua.

4. Compacidad y continuidad uniforme.

Sea (X, d) un espacio métrico.

Sea $A \subset X$. Una *cobertura abierta de A* es una familia $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de subconjuntos abiertos de X tal que

$$A \subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha,$$

(Λ puede ser una familia cualquiera de índices).

Definición 1.10. Sea $K \subset X$, se dice que K es *compacto* si toda cobertura abierta de K posee una subcobertura finita.

Se tiene el siguiente resultado fundamental.

Teorema 1.11.

Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) dos espacios métricos. Si $K \subset X$ es compacto y $f : K \to Y$ es una función continua, entonces f es uniformemente continua y la imagen de f, $f(K)$, es un subconjunto compacto de Y.

Los subconjuntos compactos de la recta real, con la topología usual, admiten diferentes caracterizaciones y se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.12.

Sea K un subconjunto de $\mathbb{R}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) *K es compacto.*

(b) *K es cerrado y acotado.*

(c) *Todo subconjunto infinito de K tiene un punto de acumulación en K.*

Es importante destacar que un subconjunto A de $\mathbb{R}$ es acotado si y sólo si existe $M > 0$ tal que $|x| \leq M$ para todo $x \in A$.

5. Continuidad uniforme de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Tal como se dijo anteriormente, esta sección está dedicada a algunos resultados básicos referentes a continuidad de funciones a valores reales definidas en un subconjunto de la recta real. Algunos de ellos se generalizan, en forma natural, a espacios métricos. Por simplicidad y ya que solamente hacen falta en $\mathbb{R}$, se escogió presentarlos en el contexto de los números reales.

Es bien conocido que la suma y el producto de dos funciones continuas es una función continua, también el cociente de una función continua y otra función continua que no se anula es una función continua. Más precisamente, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.13. *Sean $D \subset \mathbb{R}$ y sean f y g funciones continuas en D. Entonces*

(a) *$f + g$ es continua en D.*

(b) fg *es continua en* D.

(c) *Si* g *nunca se anula,* $\dfrac{f}{g}$ *es continua en* D.

La suma de dos funciones uniformemente continuas también es uniformemente continua. Esta situación no se repite para el producto ni para el cociente. Puede ocurrir que el producto de dos funciones uniformemente continuas, o el cociente de una función uniformemente continua y una función uniformemente continua que no se anula, no resulte ser una función uniformemente continua, ver Ejemplo 1.15 y Ejemplo 1.16 respectivamente.

Del Teorema 1.11 sigue el siguiente resultado.

Teorema 1.14. *Sea* $K \subset \mathbb{R}$ *un conjunto compacto y sea* $f : K \to \mathbb{R}$ *una función continua. Entonces*

(a) f *es uniformemente continua.*

(b) f *es acotada.*

Por lo tanto, toda función continua a valores reales, definida en un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}$, es uniformemente continua. Los ejemplos que se dan a continuación sirven para mostrar entre otras cosas que, ambas hipótesis (cerrado y acotado) son esenciales en el resultado anterior.

Es importante destacar que la función identidad, es decir la función definida por $f(x) = x$, es uniformemente continua en todo $\mathbb{R}$ y por lo tanto su restricción a cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$ también es uniformemente continua.

Ejemplo 1.15. Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$.

Esta función es el producto de dos funciones uniformemente continuas (la función identidad consigo misma), por lo tanto es continua.

Su dominio es cerrado, pero no es acotado.

A continuación se mostrará que f no es uniformemente continua.

Sea $\varepsilon > 0$ y supóngase que $x, x' \in [0, +\infty)$ son tales que

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon,$$

entonces se tendría que

$$|x + x'||x - x'| = |x^2 - x'^2| < \varepsilon.$$

Sea $N > 0$ y supóngase que $x, x' \in (N, +\infty)$, entonces se tiene que

$$|x + x'| = x + x' > 2N$$

y por lo tanto se debe cumplir

$$2N\,|x - x'| < \varepsilon,$$

es decir

$$|x - x'| < \frac{\varepsilon}{2N}.$$

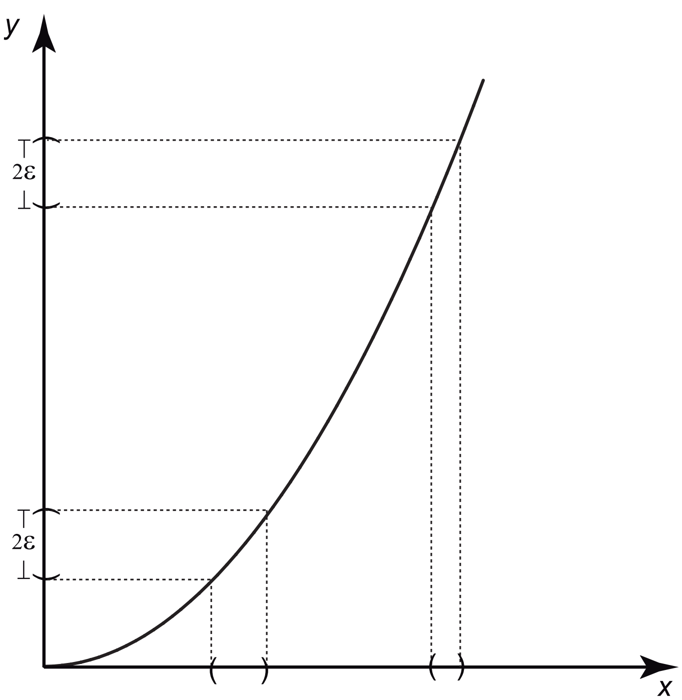
Esta última desigualdad implica que el valor de δ, que aparece en la definición de continuidad, que correspondería con un número $\varepsilon > 0$ para esta función debe satisfacer

$$0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2N}$$

si $x, x' \in (N, +\infty)$.

Como $\dfrac{\varepsilon}{2N} \to 0$ si $N \to +\infty$ no puede existir un valor de $\delta > 0$ que garantice que $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ si $|x - x'| < \delta$ para cualquier par $x, x' \in [0, +\infty)$ y por lo tanto f no es uniformemente continua.

La siguiente gráfica, que corresponde con la función f, ilustra la situación anterior, ya que se observa que para un mismo valor de ε, el correspondiente valor de δ se va haciendo cada vez más pequeño, a medida que los puntos del dominio se alejan del origen.



Ejemplo 1.16. Sea $g : (0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \frac{1}{x}.$$

Esta función es el cociente de una función uniformemente continua y una función uniformemente continua que no se anula, por lo tanto es continua.

Su dominio es acotado, pero no es cerrado.

A continuación se mostrará que g no es uniformemente continua.

Sea $\varepsilon > 0$ y supóngase que $x, x' \in (0,1]$ son tales que

$$|g(x) - g(x')| < \varepsilon,$$

entonces se tendría que

$$\left|\frac{x' - x}{x\,x'}\right| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x'}\right| < \varepsilon.$$

Sea $N > 0$ y supóngase que $x, x' \in (0, \frac{1}{N})$, entonces se tiene que

$$\left|\frac{1}{x\,x'}\right| = \frac{1}{x\,x'} > N^2$$

y por lo tanto se debe cumplir

$$N^2\,|x - x'| < \varepsilon,$$

es decir

$$|x - x'| < \frac{\varepsilon}{N^2}.$$

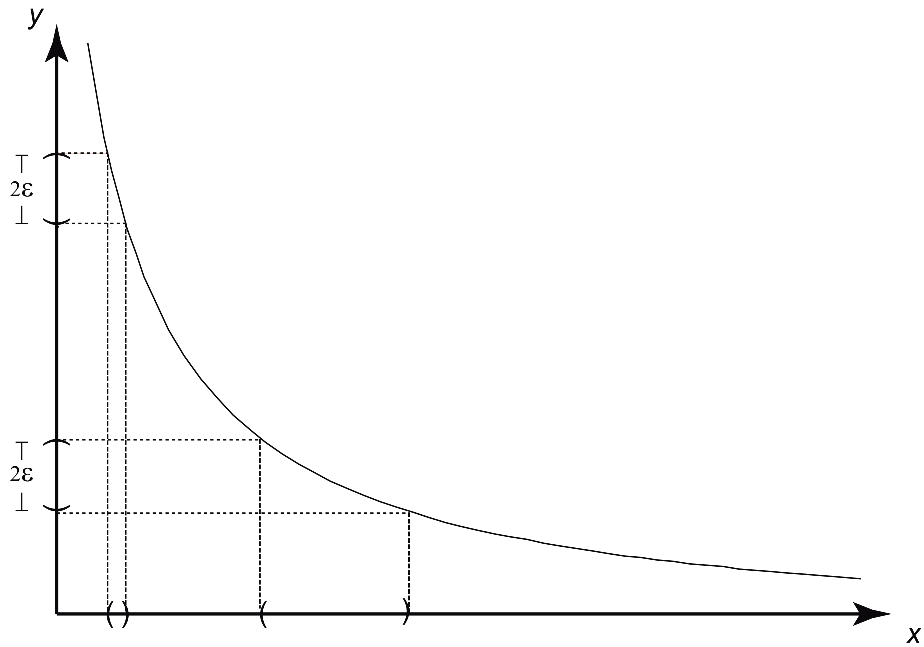
Esta última desigualdad implica que el valor de δ, que aparece en la definición de continuidad, que correspondería con un número $\varepsilon > 0$ para esta función debe satisfacer

$$0 < \delta < \frac{\varepsilon}{N^2}$$

si $x, x' \in (0, \frac{1}{N})$.

Como $\dfrac{\varepsilon}{N^2} \to 0$ si $N \to +\infty$ no puede existir un valor de $\delta > 0$ que garantice que $|g(x) - g(x')| < \varepsilon$ si $|x - x'| < \delta$ para cualquier par $x, x' \in (0,1]$ y por lo tanto f no es uniformemente continua.

La siguiente gráfica, que corresponde con la función g, ilustra la situación anterior, ya que se observa que para un mismo valor de ε, el correspondiente valor de δ se va haciendo cada vez más pequeño a medida que los puntos del dominio se aproximan al origen.



Los siguientes resultados serán de utilidad en el próximo capítulo.

Proposición 1.17.

Si $B \subset \mathbb{R}$ es un conjunto acotado y $f : B \to \mathbb{R}$ es una función uniformemente continua, entonces f es acotada.

Demostración.

Tomando $\varepsilon = 1$ en la definición de continuidad uniforme se obtiene que existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x')| < 1$ si $x, x' \in B$ y $|x - x'| < \delta$.

Como el conjunto B es acotado, es posible encontrar una cantidad finita de puntos $a_1, \dots, a_n \in B$ tales que

$$B \subset \bigcup_{k=1}^{n} (a_k - \delta, a_k + \delta)$$

Sea $x \in B$, entonces existe $k_o \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x \in (a_{k_o} - \delta, a_{k_o} + \delta)$, es decir $|x - a_{k_o}| < \delta$ y por lo tanto

$$|f(x) - f(a_{k_o})| < 1,$$

de donde se deduce que

$$|f(x)| < 1 + |f(a_{k_o})|.$$

Por lo tanto se tiene que

$$|f(x)| < 1 + \max_{1\leq k\leq n} |f(a_k)| \quad \text{para todo } x \in B,$$

lo que implica que f es acotada.

□

La siguiente proposición da una condición suficiente para que el producto de funciones uniformemente continuas sea uniformemente continua.

Proposición 1.18.

Sea $B \subset \mathbb{R}$. Si $f : B \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ son funciones uniformemente continuas y acotadas entonces la función $fg : B \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua.

Demostración.

Como f y g son acotadas existen $M, N > 0$ tales que $|f(x)| < M$ y $|g(x)| < N$ para todo $x \in B$.

Sea $\varepsilon > 0$.

Por ser g uniformemente continua existe $\delta_1 > 0$ tal que si $x, x' \in B$ y $|x - x'| < \delta_1$ entonces

$$|g(x) - g(x')| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Por ser f uniformemente continua existe $\delta_2 > 0$ tal que si $x, x' \in B$ y $|x - x'| < \delta_2$ entonces

$$|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2N}.$$

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, si $x, x' \in B$ y $|x - x'| < \delta$ se tiene que

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - f(x')g(x')| &= |f(x)g(x) - f(x)g(x') + f(x)g(x') - f(x')g(x')| \\
&\leq |f(x)g(x) - f(x)g(x')| + |f(x)g(x') - f(x')g(x')| \\
&\leq |f(x)||g(x) - g(x')| + |g(x')||f(x) - f(x')| \\
&< \frac{M\varepsilon}{2M} + \frac{N\varepsilon}{2N} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

Así fg es uniformemente continua

□

Proposición 1.19. *Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función continua y*

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0,$$

entonces f es uniformemente continua.

Demostración.

Sea $\varepsilon > 0$.

Como $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$ existe $N > 0$ tal que

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ si } |x| \geq N.$$

Como el intervalo $[-N-1, N+1]$ es compacto, se tiene que $f|_{[-N-1,N+1]}$ es uniformemente continua y por lo tanto existe $\delta_1 > 0$ tal que si $x, x' \in [-N-1, N+1]$ y $|x - x'| < \delta_1$, entonces $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Sea $\delta = \min\{1, \delta_1\}$ y sean $x, x' \in \mathbb{R}$ tales que $|x - x'| < \delta$.

Se deben considerar dos casos.

Caso 1: Si $|x| \geq N$.

Si también se tiene que $|x'| \geq N$ entonces se tiene que

$$|f(x) - f(x')| \leq |f(x)| + |f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Si $|x'| < N$ entonces, por ser $\delta < 1$ se debe cumplir que $|x| \leq N+1$, por lo tanto $x, x' \in [-N-1, N+1]$. Por la continuidad uniforme en $[-N-1, N+1]$ se tiene que

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Caso 2: Si $|x| < N$.

Por ser $\delta < 1$ se debe cumplir que $|x'| \leq N+1$, es decir se vuelve a tener que $x, x' \in [-N-1, N+1]$ y por lo tanto

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

$\square$

Capítulo 2

Resultado principal

1. Definiciones y resultados preliminares

Las siguientes dos definiciones, que aparecen en [**5**], serán necesarias en este capítulo.

Definición 2.1.

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Se dice que A es *uniformemente continuo* si toda función continua a valores reales con dominio A es uniformemente continua.

Definición 2.2.

Sea $A \subset \mathbb{R}$, se dice que A es un conjunto *uniformemente aislado* si existe un número real $r > 0$ tal que $|x - y| > r$, para todo par de puntos diferentes $x, y \in A$.

Proposición 2.3. *Si A es un conjunto uniformemente aislado y $f : A \to \mathbb{R}$ es una función, entonces f es uniformemente continua.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$.

Como A es uniformemente aislado existe $r > 0$ tal que $|x - y| > r$, para todo par de puntos diferentes $x, y \in A$.

Sea $\delta = r$ y sean $x, x' \in A$ tales que $|x - x'| < \delta$, entonces tiene que ocurrir que $x = x'$ y, por lo tanto

$$|f(x) - f(x')| = 0 < \varepsilon.$$

$\square$

Es importante hacer notar que todo conjunto uniformemente aislado es cerrado.

N. Levine en el año 1955, en su trabajo [**3**] dio una caracterización de los subconjuntos uniformemente continuos de $\mathbb{R}$, demostrando el siguiente resultado.

Teorema 2.4 (N. Levine, [**3**]).

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Entonces A es un conjunto uniformemente continuo si y sólo si A es la unión de un conjunto compacto con un conjunto uniformemente aislado.

Al momento de escribir este trabajo no fue posible encontrar el trabajo original de Levine. Sin embargo se va a probar que, a partir del resultado de S. Nadler y D. Zitney que se va a exponer en la próxima sección, se puede obtener el resultado de N. Levine.

2. Teorema de Nadler y Zitney

Teorema 2.5 (S. Nadler y D. Zitney, [**5**])**.**

Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}$. Entonces el producto puntual de cualquier par de funciones uniformemente continuas de X en $\mathbb{R}$ es uniformemente continuo si y sólo si X es la unión de un conjunto acotado con un conjunto uniformemente aislado.

Demostración.

($\Rightarrow$) Supóngase que X no es la unión de un conjunto acotado y un conjunto uniformemente aislado.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$X = (X \cap [-n, n]) \cup (X \cap [-n, n]^c).$$

Como el conjunto $X \cap [-n, n]$ es acotado, se tiene que el conjunto $X \cap [-n, n]^c$ no puede ser uniformemente aislado, por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $r > 0$ existen puntos diferentes $a, b \in X$ tales que $|a| > n$, $|b| > n$, $|a| < |b|$ y $|a - b| < r$.

Procediendo inductivamente de acuerdo al siguiente esquema:

Tomando $n = 1$, $r = 1$, se obtienen a_1 y b_1 tales que $|a_1| > 1$, $|b_1| > 1$, $|a_1| < |b_1|$ y $|a_1 - b_1| < 1$.

Tomando $n = \max\{2, [|b_1|]+1\}$, $r = 1/2$, se obtienen a_2 y b_2 tales que $|a_2| > \max\{2, [|b_1|]+1\}$, $|b_2| > \max\{2, [|b_1|] + 1\}$, $|a_2| < |b_2|$ y $|a_2 - b_2| < 1/2$, etc.

Se obtienen un par de sucesiones $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ contenidas en X tales que

$$n < |a_n| < |b_n| < |a_{n+1}|$$

y

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0.$$

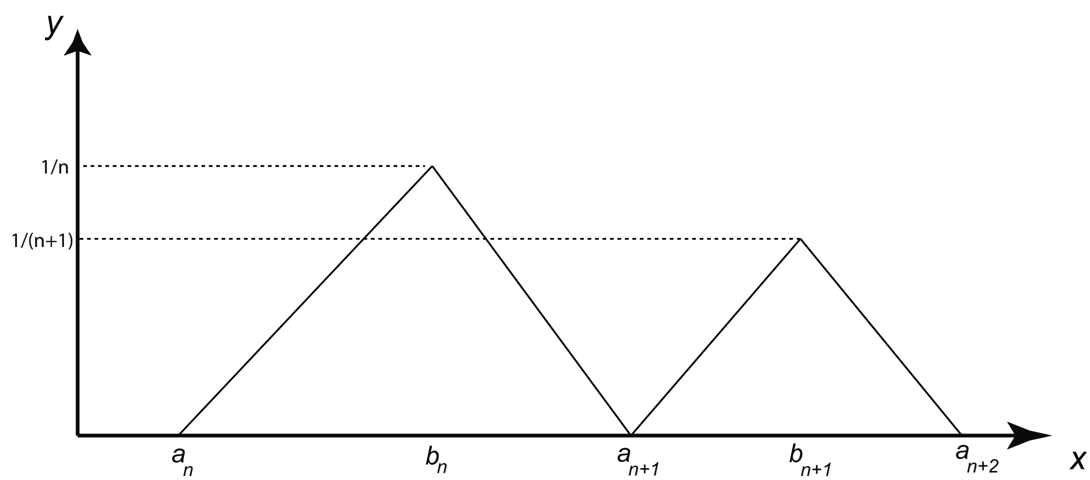
La sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ debe tener infinitos términos positivos o infinitos términos negativos. En caso de que tenga infinitos términos positivos podemos suponer que

$$n < a_n < b_n < a_{n+1}$$

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - a_n}{n(b_n - a_n)} & \text{si } a_n \le x \le b_n, \quad n = 1, 2 \ldots, \\ \dfrac{x - a_{n+1}}{n(b_n - a_{n+1})} & \text{si } b_n \le x \le a_{n+1}, \quad n = 1, 2 \ldots, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El gráfico de f en el intervalo $[a_n, a_{n+2}]$ luce de la siguiente manera



Además $f(x) = 0$ si $x \le a_1$, por lo tanto f es una función continua tal que

$$\lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0.$$

Por la Proposición 1.19 se tiene que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

Considérense las funciones $h = f|_X$, y g la función identidad en X. Entonces h y g son funciones uniformemente continuas, sin embargo hg no es una función uniformemente continua ya que $\lim_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$ y

$$|h(b_n)g(b_n) - h(a_n)\, g(a_n)| = \left| \frac{b_n}{n} - 0 \right| = \frac{b_n}{n} > 1.$$

La demostración para el caso en que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ solamente tiene infinitos términos negativos se obtiene a partir de este mismo caso, cambiando primero X por $-X = \{-x : x \in X\}$ y aplicando después el cambio de variable natural x por $-x$.

($\Leftarrow$) Supóngase que $X = B \cup I$, donde B es un conjunto acotado e I es un conjunto uniformemente aislado. Sean $f, g : X \to \mathbb{R}$ funciones uniformemente continuas.

Como I es un conjunto uniformemente aislado, existe $\delta_1 > 0$ tal que $|x - y| > \delta_1$, si x e y son puntos distintos de I.

Como B es un conjunto acotado y las funciones f y g son uniformemente continuas, por la Proposión 1.17 las restricciones $f|_B$ y $g|_B$ son acotadas, es decir existe $M > 0$ tal que

$$|f(x)| < M, \quad |g(x)| < M \quad \text{si } x \in B.$$

Por la continuidad uniforme de las funciones f y g, existe $\delta_2 > 0$ tal que si x y x' son elementos de X que satisfacen $|x - x'| < \delta_2$, entonces se tiene que

$$|f(x) - f(x')| < 1 \quad \text{y} \quad |g(x) - g(x')| < 1.$$

Por lo tanto, si $x' \in X \cap (x - \delta_2, x + \delta_2)$ para algún $x \in B$, entonces se cumple que

$$|f(x')| < M + 1 \quad \text{y} \quad |\mathrm{g(x')}| < \mathrm{M + 1}.$$

Sea $\varepsilon > 0$.

Como f y g son uniformemente continuas en X, existe $\delta_3 > 0$ tal que si $x, x' \in X$ y $|x - x'| < \delta_3$ entonces

$$|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2(M+1)}, \quad \text{y} \quad |\mathrm{g(x) - g(x')}| < \frac{\varepsilon}{\mathrm{2(M+1)}}.$$

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ y sean $x, x' \in X$ tales que $0 < |x - x'| < \delta$.

Como $\delta \leq \delta_1$, se tiene que x y x' no pueden pertenecer simultáneamente a I, por lo que se puede asumir, sin pérdida de generalidad, que $x \in B$. Luego $|f(x)| < M$ y como $x' \in (x - \delta_2, x + \delta_2)$ se tiene que $|g(x')| < M + 1$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(x')g(x')| &= |f(x)g(x) - f(x)g(x') + f(x)g(x') - f(x')g(x')| \\ &\leq |f(x)||g(x) - g(x')| + |g(x')||f(x) - f(x')| \\ &< M\frac{\varepsilon}{2(M+1)} + (M+1)\frac{\varepsilon}{2(M+1)} < \varepsilon, \end{aligned}$$

lo que prueba la continuidad uniforme de la función fg en X.

$\square$

3. Algunas consecuencias del Teorema de Nadler y Zitney

Se va a demostrar que el teorema probado por N. Levine en el año 1955 (Teorema 2.4) se puede obtener a partir del Teorema 2.5.

Será necesario el siguiente resultado.

Proposición 2.6. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$ que es la unión de un conjunto acotado y un conjunto uniformemente aislado. Entonces $\overline{A}$, la clausura de A, es la unión de un conjunto compacto y un conjunto uniformemente aislado*

Demostración.

Supóngase que $A = B \cup I$, donde B es acotado e I es uniformemente aislado.

Entonces, por la Proposición 1.5 se tiene que

$$\overline{A} = \overline{B} \cup \overline{I}.$$

Como B es acotado se tiene que $\overline{B}$ es compacto y como I es uniformemente aislado se tiene que I es cerrado y por lo tanto $\overline{I} = I$.

□

Demostración del Teorema 2.4.

($\Rightarrow$) Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto uniformemente continuo.

El conjunto A debe ser cerrado, ya que si se supone que x_o es un punto de acumulación de A, que no está en A, se tendría que la función $h : A \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \frac{1}{x - x_o},$$

sería continua y no uniformemente continua.

Si $f, g : A \to \mathbb{R}$ son funciones uniformemente continuas, entonces su producto

$$fg : A \to \mathbb{R}$$

es una función continua. Por ser A un conjunto uniformemente continuo esta función, fg debe ser uniformemente continua. Por el Teorema 2.4 se tiene que

$$A = B_o \cup I_o,$$

donde el conjunto B_o es acotado y el conjunto I_o es uniformemente aislado.

Por ser $\overline{A} = A$, de la Proposición 2.6 sigue el resultado.

($\Leftarrow$) Supóngase que $A = K \cup I$, donde K es compacto e I es uniformemente aislado. Cambiando I por $I \setminus K$ si es necesario, podemos suponer que $K \cap I = \emptyset$.

Como K es cerrado e I es uniformemente aislado se tiene que $\delta_1 = \mathrm{dist}(K, I) > 0$.

Por ser I uniformemente aislado se tiene que existe $\delta_2 > 0$ tal que $|x - y| > \delta_2$ si $x, y \in I$ y $x \neq y$.

Sea $f : K \to \mathbb{R}$ continua y sea $\varepsilon > 0$.

Por ser K compacto, la restricción de f a K es uniformemente continua y por lo tanto existe $\delta_3 > 0$ tal que si $x, x' \in K$ y $|x - x'| < \delta_3$, entonces $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$.

Sean $x, x' \in A$ tales que $|x - x'| < \delta$. Por la forma en que fueron escogidos δ_1, δ_2 y δ_3 se debe tener que $x, x' \in K$ y $|x - x'| < \delta_3$, de donde

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

$\square$

También se tiene, a partir del Teorema 2.5 y la Proposición 2.6, el siguiente resultado.

Corolario 2.7.

Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}$.

Entonces el producto puntual de cualquier par de funciones uniformemente continuas de X en $\mathbb{R}$ es uniformemente continuo, si y sólo si la clausura de X es un conjunto uniformemente continuo.

Capítulo 3

Ejemplos y preguntas abiertas

Según Nadler y Zitney ([**5**]) el siguiente problema de caracterización permanece abierto:

Determinar condiciones intrínsecas descriptivas que caracterizan aquellos espacios métricos X, en los cuales el producto puntual de cualquier par de funciones definidas en X, a valores reales y uniformemente continuas, es una función uniformemente continua.

En el mencionado trabajo [**5**] aparece el siguiente comentario: S. Nadler probó que el Teorema 2.5 se puede extender al espacio $\mathbb{R}^n$ (con la métrica usual) y, más generalmente, a subconjuntos de espacios métricos en los que todo subconjunto cerrado y acotado es compacto.

También dan el ejemplo que se detalla a continuación, que muestra que el Teorema 2.5 no se extiende a espacios métricos en general.

Antes de dar el ejemplo será necesario demostrar el siguiente resultado.

Proposición 3.1.

La función $\mathrm{d} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$\mathrm{d}(x, y) = \min\{1, |x - y|\}$$

es una métrica.

Demostración.

De las propiedades que aparecen en la Definición 1.1, la única que ofrece alguna dificultad para su verificación es la (iv).

Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$, se debe probar que

$$d(x, z) \leq \mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(y, z).$$

Se considerarán dos casos.

Caso 1: Si $|x - y| \geq 1$ ó $|y - z| \geq 1$.

Supóngase primero que $|x-y| \geq 1$. Entonces $\mathrm{d}(x,y)=1$ y por lo tanto

$$\mathrm{d}(x,z) \leq 1 \leq 1+\mathrm{d}(y,z) \leq \mathrm{d}(x,y)+\mathrm{d}(y,z).$$

El caso $|y-z| \geq 1$ es completamente análogo.

Caso 2: Si $|x-y|<1$ y $|y-z|<1$.

Entonces $\mathrm{d}(x,y)=|x-y|$ y $\mathrm{d}(y,z)=|y-z|$

Como

$$|x-z| \leq |x-y|+|y-z|,$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(x,z) &= \mathrm{mín}\{1,|x-z|\} \\ &\leq |x-z| \\ &\leq |x-y|+|y-z| \\ &= \mathrm{d}(x,y)+\mathrm{d}(y,z). \end{aligned}$$

□

Observación 3.2.

Se tiene que $(\mathbb{R},\mathrm{d})$ es un espacio métrico acotado.

Ejemplo 3.3.

Sea (X,d) el espacio métrico donde X es el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, y d es la métrica definida en la Proposición anterior. Sea $\mathbb{R}^1$ el conjunto de los números reales con la métrica usual.

Se considera la función $f: X \to \mathbb{R}^1$ definida por

$$f(x)=x^2.$$

El dominio de f, el espacio (X,d) es un conjunto acotado y por lo tanto es la unión de un conjunto acotado con un conjunto uniformemente aislado.

La función f es el producto de dos funciones uniformemente continuas (la función identidad consigo misma).

Sin embargo f no es uniformemente continua. La verificación de que f no es uniformemente continua es completamente análoga a la que se hizo en el Ejemplo 1.15, ya que, en lo que se refiere a distancia menores que 1, el comportamiento de la métrica d es completamente análogo al comportamiento de la métrica usual de $\mathbb{R}$.

Bibliografía

[1] M. Atsuji. Uniform continuity of continuous functions of metric spaces. Pacific Journal of Mathematics 8, 11-16 (1958). Citado en la página(s): 1

[2] E. Elyash, G. Laush, N. Levine, On the product of two uniformly continuous functions on the line. American Mathematical Monthly, 67, 265-267 (1960). Citado en la página(s): 1

[3] N. Levine. Uniformly continuous sets. American Mathematical Monthly, 62, 579-580 (1955). Citado en la página(s): 1, 2, 14

[4] N. Levine, N. Saber. On the product of real valued uniformly continuous functions in metric spaces. American Mathematical Monthly, 72, 20-28 (1965). Citado en la página(s): 1

[5] S. Nadler, D. Ziney. Pointwise products of uniformly continuous functions on sets in the real line. American Mathematical Monthly, 114, No. 2, 160-163 (2007). Citado en la página(s): 1, 14, 15, 20

[6] W. Rudin. Principios de Análisis Matemático. McGraw Hill 1980. Citado en la página(s): 3

[7] G. Simmons. Introduction to topology and modern analysis. McGraw Hill 1963. Citado en la página(s): 3

[8] M. Spivack. Calculus Vol 1 y Vol 2. Reverté 1992. Citado en la página(s): 3