UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Extensión de funciones definidas positivas en grupos ordenados

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. José Gregorio Di Campo Blanquez** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutor: Ramón Bruzual.

Caracas, Venezuela
Mayo, 2008

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado "**Extensión de funciones definidas positivas en grupos ordenados**", presentado por el **Br. José Di Campo**, titular de la Cédula de Identidad **N° 16.237.744**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Dr. Ramón Bruzual
Tutor

Dra. Marisela Domínguez
Jurado

Dra. Laura Galindo
Jurado

Dedicatoria

Primero que nada a mi Madre porque gracias a todo su esfuerzo, apoyo y trabajo pude realizar este sueño....

A mis dos padres, a Musiu porque ha sido un padre para mi y me ha ayudado y apoyado muchísimo durante todo este trayecto, mejor no te pudiste haber portado Constant, y a mi Padre por darme su apoyo y ayuda desde el Cielo; como me gustaría que estuvieras aquí para verme cumplir esta meta...

Agradecimiento

A esta Universidad por abrirme sus puertas...

A mi Madre, por apoyarme, por darme la posibilidad de haber estado aquí, solo Gracias a tus esfuerzos fue posible, GRACIAS POR TODO...

A mi Novia Yuslenny por todo su apoyo y por cambiar mi vida, por hacerme ser una mejor persona...

GRACIAS a todos mis amigos de la Universidad, por estos años de amistad sincera, mejor no pudo haber sido...

A todos los profesores de la Facultad de Ciencias por su paciencia, comprensión, y todo lo que me enseñaron...

A la Sra. Carmen y toda la Familia Camero por abrirme las puertas de su casa y hacerme sentir como en mi casa...

A mi Tutor el profesor Ramón Bruzual por aceptarme como su alumno y darme todo su apoyo....

A todas las personas que de una u otra manera me permitieron lograr esta meta..

Índice general

Introducción

Sea a un número real positivo. Una función $f : (-a, a) \to \mathbb{C}$ es *definida positiva* si dado un entero positivo n, una colección de puntos $x_1, \dots, x_n$ en $\mathbb{R}$ tales que $x_i - x_j \in (-a, a)$ para $i, j = 1, \dots, n$ y una colección de escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ en $\mathbb{C}$ se tiene que

$$\sum_{i,j=1}^{n} f(x_i - x_j)\, \lambda_i\, \overline{\lambda_j} \geq 0.$$

M. G. Kreĭn [**4**] demostró que toda función continua y definida positiva en un intervalo de la forma $(-a, a)$, puede ser extendida a una función continua y definida positiva en toda la recta.

El concepto de función definida positiva se puede extender de manera natural a un grupo abeliano, de la siguiente manera.

Definición 0.1. Sea $(\Omega, +)$ un grupo abeliano y sea Δ un subconjunto simétrico de Ω tal que $0 \in \Delta$. Se dice que una función $f : \Delta \to \mathbb{C}$ es *definida positiva* si dado un entero positivo n, una colección de puntos $\omega_1, \dots, \omega_n$ en Ω tales que $\omega_i - \omega_j \in \Delta$ para $i, j = 1, \dots, n$ y una colección de escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ en $\mathbb{C}$ se tiene que

$$\sum_{i,j=1}^{n} f(\omega_i - \omega_j)\, \lambda_i\, \overline{\lambda_j} \geq 0.$$

Resulta muy natural hacerse la siguiente pregunta: Sea Ω un grupo abeliano localmente compacto y sea f una función definida positiva y continua en un entorno simétrico de 0. ¿Existe una extensión continua y definida positiva de f a todo el grupo Ω?

La respuesta a esta pregunta es, en general, negativa. W. Rudin [**7**] mostró que existen funciones continuas y definidas positivas en un rectángulo que no tienen extensión continua y definida positiva a todo el plano.

El objetivo de este trabajo es exponer de una manera comprensible un resultado de Z. Sasvári ([**9**]), que establece que toda función definida positiva en un intervalo simétrico de un grupo ordenado, puede ser extendida a una función definida positiva en todo el grupo. Para obtener este resultado de extensión no es necesario suponer la continuidad de la función y además se prueba que si la función original es continua en 0, entonces toda extensión definida positiva es continua en todo el grupo.

El trabajo está organizado de la siguiente manera:

El primer capítulo esta dedicado a los preliminares de álgebra lineal necesarios en este trabajo. Se enuncian algunas definiciones y resultados básicos, se da una prueba de que el producto de Schur de matrices definidas positivas es definida positiva y se demuestra un resultado que establece una relación entre el determinante de una matriz y el determinante de algunas de sus submatrices.

En el segundo capítulo se exponen los resultados básicos de análisis armónico en grupos, necesarios para la comprensión del resultado principal y se demuestra un resultado de W. Rudin ([**7**]) que da una condición necesaria y suficiente para la extensión de una función definida positiva en términos de la posibilidad de extender de forma adecuada un funcional lineal.

Finalmente el tercer y último capítulo está dedicado a la demostración del resultado de extensión de Z. Sasvári ya mencionado.

CAPíTULO 1

Preliminares de álgebra lineal y matrices definidas positivas

1. Definiciones y propiedades básicas

A continuación se exponen algunas definiciones y resultados básicos (sin demostración) de álgebra lineal que se usarán a lo largo de este trabajo, la referencia fundamental para esta sección es el libro [**1**].

Sean n y m enteros positivos. Como es usual $\mathbb{C}^{m\times n}$ denotará al conjunto de las matrices complejas $m \times n$.

Si $B = (b_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times n}$ se define la *matriz adjunta* de B como la matriz B^* cuya entrada ij es $\overline{b_{ji}}$, es decir $B^* = (\overline{b_{ji}})$.

Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, se dice que A es

(1) *normal* si $A^*A = AA^*$,
(2) *autoadjunta* si $A^* = A$,
(3) *unitaria* si $A^*A = AA^* = I$.

Se tiene que toda matriz normal es diagonalizable, es decir, si A es una matriz normal existen una matriz unitaria U y una matriz diagonal D tal que

$$A = UDU^*.$$

Definición 1.1. Sea n un entero positivo y $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Se dice que A es *definida positiva* si

$$XAX^* \geq 0$$

para todo vector fila $X \in \mathbb{C}^{1\times n}$.

Se dice que A es *estrictamente definida positiva* si

$$XAX^* > 0$$

para todo vector fila no nulo $X \in \mathbb{C}^{1\times n}$.

Observación 1.2. Si $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ y $X = \Big(\lambda_1, \cdots, \lambda_n\Big)$ entonces

$$XAX^* = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\lambda_i\overline{\lambda_j}.$$

Por lo tanto A es definida positiva si y sólo si

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\lambda_i\overline{\lambda_j} \geq 0$$

para toda colección $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.

Se cumple que toda matriz definida positiva es autoadjunta, y por lo tanto normal.

Se tiene que la matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ es definida positiva (estrictamente definida positiva) si y sólo si $\det(a_{ij})_{i,j=1}^{k} \geq 0$ ($\det(a_{ij})_{i,j=1}^{k} > 0$) para $k = 1, \ldots, n$.

PROPOSICIÓN 1.3.

(1) *La suma de matrices definidas positivas es una matriz definida positiva.*
(2) *Si B es una matriz $n \times n$ y*

$$A = BB^*,$$

entonces A es definida positiva.

DEMOSTRACIÓN. (1) Sigue de la definición de matriz definida positiva y de las propiedades de la suma y del producto de matrices

(2) Sea $X \in \mathbb{C}^{1\times n}$, entonces

$$XBB^*X^* = XB(XB)^* \geq 0.$$

□

2. Una relación entre el determinante de una matriz y el determinante de algunas de sus submatrices

Supongamos que se tiene una matriz por bloques de la forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

donde A es una matriz $r \times r$, C es una matriz $s \times s$, B es una matriz $r \times s$ y 0 representa la matriz nula $s \times r$. Entonces se cumple que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A)\det(C).$$

Lo mismo ocurre si la matriz por bloques es triangular inferior. La demostración de esta fórmula se puede encontrar en [**1**, Capítulo 5].

Observación 1.4. Si A es una matriz $r \times r$, C es una matriz $s \times s$, B es una matriz $r \times s$ y 0 representa la matriz nula $s \times r$, entonces

$$\det \begin{pmatrix} B & A \\ C & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{rs} \det(A) \det(C).$$

Para justificar la fórmula anterior basta notar que para obtener la matriz

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

a partir de la matriz

$$\begin{pmatrix} B & A \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

intercambiando filas, es necesario hacer rs cambios de filas. Una fórmula análoga vale si la matriz por bloques es triangular inferior.

Lema 1.5. *Sea $A = (c_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz $n \times n$ y sean $A_1 = (c_{ij})_{i,j=1}^{n-1}$, $A_3 = (c_{ij})_{i,j=2}^{n}$, $A_5 = (c_{ij})_{i,j=2=2}^{n-1}$, A_2 la matriz que se obtiene al eliminar la primera columna y la última fila de A y A_4 la matriz que se obtiene al eliminar la última columna y la primera fila de A, entonces se tiene que*

$$\det(A_5) \det(A) = \det(A_1) \det(A_3) - \det(A_2) \det(A_4)$$

Demostración. Escribiendo las matrices con más detalle se tiene que

$$A_5 = (c_{ij})_{i,j=2}^{n-1} = \begin{pmatrix} c_{22} & \cdots & c_{2,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1,2} & \cdots & c_{n-1,n-1} \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1,n-1} & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2,n-1} & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-1,1} & c_{n-1,2} & \cdots & c_{n-1,n-1} & c_{n-1,n} \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{n,n-1} & c_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1,n-1} & c_{1n} \\ c_{21} & \lceil & & \rceil & c_{2n} \\ \vdots & & A_5 & & \vdots \\ c_{n-1,1} & \lfloor & & \rfloor & c_{n-1,n} \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{n,n-1} & c_{nn} \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1,n-1} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1,1} & c_{n-1,2} & \cdots & c_{n-1,n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1,n-1} \\ c_{21} & \lceil & & \rceil \\ \vdots & & A_5 & \\ c_{n-1,1} & \lfloor & & \rfloor \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} c_{12} & \cdots & c_{1,n-1} & c_{1n} \\ c_{22} & \cdots & c_{2,n-1} & c_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-1,2} & \cdots & c_{n-1,n-1} & c_{n-1,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{12} & \cdots & c_{1,n-1} & c_{1n} \\ \lceil & & \rceil & c_{2n} \\ & A_5 & & \vdots \\ \lfloor & & \rfloor & c_{n-1,n} \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} c_{22} & \cdots & c_{2,n-1} & c_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-1,2} & \cdots & c_{n-1,n-1} & c_{n-1,n} \\ c_{n2} & \ldots & c_{n,n-1} & c_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lceil & & \rceil & c_{2n} \\ & A_5 & & \vdots \\ \lfloor & & \rfloor & c_{n-1,n} \\ c_{n2} & \ldots & c_{n,n-1} & c_{nn} \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1,1} & c_{n-1,2} & \cdots & c_{n-1,n-1} \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{n,n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{21} & \lceil & & \rceil \\ \vdots & & A_5 & \\ c_{n-1,1} & \lfloor & & \rfloor \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{n,n-1} \end{pmatrix}.$$

El determinante de la matriz por bloques

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A_5 \end{pmatrix},$$

donde

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ c_{n2} & \ldots & c_{n,n-1} \end{pmatrix}$$

es

$$\det(A_5)\det(A).$$

En detalle

$$\det(A)\det(A_5) = \det\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1,n-1} & c_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2,n-1} & c_{2n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1,1} & c_{n-1,2} & \cdots & c_{n-1,n-1} & c_{n-1,n} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{n,n-1} & c_{nn} & c_{n2} & \dots & c_{n,n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{22} & \cdots & c_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{n-1,2} & \cdots & c_{n-1,n-1} \end{pmatrix}.$$

Intercambiando la fila n con la fila $n+1$, y después la fila $n+1$ con la fila $n+2$,..., hasta llegar a intercambiar la fila $2n-3$ con la fila $2n-2$ se obtiene que

$$\det(A)\det(A_5) = (-1)^n\det\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1,n-1} & c_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2,n-1} & c_{2n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1,1} & c_{n-1,2} & \cdots & c_{n-1,n-1} & c_{n-1,n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{22} & \cdots & c_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{n-1,2} & \cdots & c_{n-1,n-1} \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{n,n-1} & c_{nn} & c_{n2} & \dots & c_{n,n-1} \end{pmatrix}$$

Intercambiando la columna n con la columna $n+1$, y después la columna $n+1$ con la columna $n+2$,..., hasta llegar a intercambiar la columna $2n-3$ con la columna $2n-2$, se obtiene

$$\det(A)\det(A_5) = \det\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1,n-1} & 0 & \cdots & 0 & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2,n-1} & 0 & \cdots & 0 & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1,1} & c_{n-1,2} & \cdots & c_{n-1,n-1} & 0 & \cdots & 0 & c_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{22} & \cdots & c_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{n-1,2} & \cdots & c_{n-1,n-1} & 0 \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{n,n-1} & c_{n2} & \cdots & c_{n,n-1} & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Si a la fila n se le suma la segunda fila, a la fila $n+1$ se le suma la tercera fila, $\ldots$, a la fila $2n-3$ se le suma la fila $n-1$, se obtiene

$$\det(A)\det(A_5) = \det\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1,n-1} & 0 & \cdots & 0 & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2,n-1} & 0 & \cdots & 0 & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1,1} & c_{n-1,2} & \cdots & c_{n-1,n-1} & 0 & \cdots & 0 & c_{n-1,n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2,n-1} & c_{22} & \cdots & c_{2,n-1} & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1,1} & c_{n-1,2} & \cdots & c_{n-1,n-1} & c_{n-1,2} & \cdots & c_{n-1,n-1} & c_{n-1,n} \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{n,n-1} & c_{n2} & \cdots & c_{n,n-1} & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Utilizando la linealidad del determinante en la última columna se obtiene que este último determinante es la suma de los siguientes dos determinantes

$$\det\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1,n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2,n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1,1} & c_{n-1,2} & \cdots & c_{n-1,n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2,n-1} & c_{22} & \cdots & c_{2,n-1} & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1,1} & c_{n-1,2} & \cdots & c_{n-1,n-1} & c_{n-1,2} & \cdots & c_{n-1,n-1} & c_{n-1,n} \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{n,n-1} & c_{n2} & \cdots & c_{n,n-1} & c_{nn} \end{pmatrix},$$

y

$$\det\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1,n-1} & 0 & \cdots & 0 & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2,n-1} & 0 & \cdots & 0 & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1,1} & c_{n-1,2} & \cdots & c_{n-1,n-1} & 0 & \cdots & 0 & c_{n-1,n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2,n-1} & c_{22} & \cdots & c_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1,1} & c_{n-1,2} & \cdots & c_{n-1,n-1} & c_{n-1,2} & \cdots & c_{n-1,n-1} & 0 \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{n,n-1} & c_{n2} & \cdots & c_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz correspondiente al primer determinante es de la forma

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ C & A_3 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto el primer determinante es igual a

$$\det(A_1)\det(A_3).$$

Si en la segunda matriz se le resta la columna 2 a la columna n, se le resta la columna 3 a la columna $n+1$, ..., se le resta la columna $n-1$ a la columna $2n-3$, se obtiene que el segundo determinante es igual a

$$\det\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1,n-1} & -c_{12} & \cdots & -c_{1,n-1} & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2,n-1} & -c_{22} & \cdots & -c_{2,n-1} & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1,1} & c_{n-1,2} & \cdots & c_{n-1,n-1} & -c_{n-1,2} & \cdots & -c_{n-1,n-1} & c_{n-1,n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2,n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1,1} & c_{n-1,2} & \cdots & c_{n-1,n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{n,n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que es igual a

$$(-1)^n \det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1,n-1} & c_{12} & \cdots & c_{1,n-1} & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2,n-1} & c_{22} & \cdots & c_{2,n-1} & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1,1} & c_{n-1,2} & \cdots & c_{n-1,n-1} & c_{n-1,2} & \cdots & c_{n-1,n-1} & c_{n-1,n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2,n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1,1} & c_{n-1,2} & \cdots & c_{n-1,n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{n,n-1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta última matriz es de la forma

$$\begin{pmatrix} D & A_2 \\ A_4 & 0 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto su determinante es igual a

$$(-1)^{(n-1)^2} \det(A_2)\det(A_4) = (-1)^{n+1}\det(A_2)\det(A_4).$$

De esto último ya se deduce

$$\det(A_5)\det(A) = \det(A_1)\det(A_3) - \det(A_2)\det(A_4).$$

□

3. Producto de Schur

En esta subsección se da una demostración de que el producto de Schur de matrices definidas positivas es una matriz definida positiva, la demostración que se da fue tomada de la referencia [**2**].

Definición 1.6. Dadas dos matrices $n \times m$, $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ se define el *producto de Schur* de A y B como la matriz $n \times m$ dada por

$$A \circ B = (a_{ij}b_{ij})$$

Teorema 1.7. *Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz definida positiva de rango k, entonces A puede ser escrita de la forma*

$$A = \phi_1\phi_1^* + \phi_2\phi_2^* + ... + \phi_k\phi_k^*$$

donde $\phi_1, \cdots, \phi_k \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ son vectores columna ortogonales.

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis la matriz A es definida positiva, por lo tanto A es una matriz normal, esto implica que existe una matriz unitaria U y números complejos $\eta_1, \cdots, \eta_k$ tales que

$$A = U \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \eta_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \eta_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} U^*$$

Además $\eta_1, \cdots, \eta_k$ es el conjunto de los autovalores de A, contados de acuerdo a su multiplicidad.

Luego

$$A = U \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} U^* + \cdots + U \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \eta_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} U^*$$

Si para $j = 1, \cdots, k$ se define A_j por

$$A_j = U \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \eta_j & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} U^*$$

Se tiene que

$$A_j = U \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \eta_j^{1/2} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \eta_j^{1/2} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} U^*$$

$$= U \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \eta_j^{1/2} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \left[U \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \eta_j^{1/2} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right]^*$$

Para $j = 1, \cdots, k$ se define ν_j por

$$\nu_j = U \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \eta_j^{1/2} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Si $U = (v_{i,j})_{i,j=1}^{n}$, entonces

$$\nu_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & v_{1j}\eta_j^{1/2} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & v_{2j}\eta_j^{1/2} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & v_{k,j}\eta_j^{1/2} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & v_{k+l,j}\eta_j^{1/2} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & v_{n,j}\eta_j^{1/2} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\nu_j^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{v_{1j}}\,\eta_j^{1/2} & \overline{v_{2j}}\eta_j^{1/2} & \cdots & \overline{v_{k,j}}\eta_j^{1/2} & \cdots & \overline{v_{k+l,j}}\,\eta_j^{1/2} & \cdots & \overline{v_{n,j}}\,\eta_j^{1/2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Además

$$A_j = \nu_j \nu_j^*$$

Para $1 \leq i, j \leq k$ se define $(\phi_{i,j})$ por $\phi_{i,j} = v_{i,j}\eta_j^{1/2}$ y para $1 \leq j \leq k$ sea

$$\phi_j = \begin{bmatrix} \phi_{1j} \\ \vdots \\ \phi_{nj} \end{bmatrix}.$$

Entonces $\phi_j \phi_j^* = \nu_j \nu_j^*$, por lo tanto sólo falta probar que los vectores $\phi_j = (\phi_{\mathrm{1j}}, \cdots, \phi_{\mathrm{kj}})$ $(j = 1, \ldots, k)$ son ortogonales.

Sean $i, j \in 1, \cdots, k$ entonces

$$\begin{aligned} < \phi_i, \phi_j > &= \phi_j^* \phi_i = \phi_{1j}\overline{\phi_{1j}} + \cdots + \phi_{kj}\overline{\phi_{kj}} \\ &= v_{1i}\eta_i^{1/2}\overline{v_{1j}}\eta_j^{1/2} + \cdots + v_{ni}\eta_i^{1/2}\overline{v_{kj}}\eta_j^{1/2} \\ &= \eta_i^{1/2}\eta_j^{1/2}(v_{1i}\overline{v_{1j}} + \cdots + v_{ki}\overline{v_{kj}}). \end{aligned}$$

Como la matriz U es unitaria se tiene que

$$UU^* = U^*U = I.$$

Por ser $U^* = (\overline{v_{ji}})_{i,j=1}^n$, se tiene que

$$< \phi_i, \phi_j >= \eta_i^{1/2}\eta_j^{1/2}\sum_{l=1}^n v_{li}\overline{v_{lj}} = \eta_i^{1/2}\eta_j^{1/2}\overline{\sum_{l=1}^n \overline{v_{li}}v_{lj}} = \eta_i^{1/2}\eta_j^{1/2}\delta_{ij}.$$

□

Proposición 1.8. *Sean φ y $\psi \in \mathbb{C}^{n\times 1}$, entonces*

$$(\varphi.\varphi^*) \circ (\psi.\psi^*) = (\varphi \circ \psi).(\varphi \circ \psi)^*$$

Demostración. Supóngase

$$\varphi = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \psi = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$((\varphi.\varphi^*) \circ (\psi.\psi^*))_{i,j} = (\varphi.\varphi^*)_{i,j}.(\psi.\psi^*)_{i,j} = a_i b_i \overline{a}_j \overline{b}_j = a_i \overline{a}_j b_i \overline{b}_j$$

$$(\,(\varphi \circ \psi).(\varphi \circ \psi)^*\,)_{i,j} = (\varphi \circ \psi)_i.\overline{(\varphi \circ \psi)}_j = a_i b_i \overline{a}_j \overline{b}_j = a_i \overline{a}_j b_i \overline{b}_j$$

Por lo tanto

$$(\varphi.\varphi)^* \circ (\psi.\psi^*) = (\varphi \circ \psi).(\varphi \circ \psi)^*$$

□

Teorema 1.9. *Si $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ son matrices definidas positivas, entonces $A \circ B$ también es definida positiva.*

Demostración. Por el Teorema 1.7 se tiene que

$$A = \nu_1\nu_1^* + \nu_2\nu_2^* + \cdots + \nu_k\nu_k^*,$$

$$B = \omega_1\omega_1^* + \omega_2\omega_2^* + \cdots + \omega_m\omega_m^*,$$

donde $k = \text{rango}(A)$ y $m = \text{rango}(B)$, $\nu_1, \ldots, \nu_k$, $\omega_1, \ldots, \omega_m$ son vectores columna.

Por lo tanto

$$A \circ B = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} \nu_i\nu_i^* \circ \omega_j\omega_j^*.$$

Por la Proposición 1.8 se tiene que

$$A \circ B = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} v_{i,j}v_{i,j}^*,$$

donde $v_{i,j} = \nu_i \circ \omega_j$.

Finalmente, de la Proposición 1.3 sigue que $A \circ B$ es definida positiva.

$\square$

CAPíTULO 2

Funciones definidas positivas en grupos abelianos localmente compactos

En este capítulo se exponen algunos resultados básicos correspondientes al análisis armónico en grupos que serán necesarios para la demostración del resultado principal. La referencia fundamental para lo aquí expuesto es el libro [**6**], ver también [**3**].

1. Grupos abelianos localmente compactos.

DEFINICIÓN 2.1. Un *grupo topológico* es un grupo $(\Omega, +)$, en el que está definida una topología de Hausdorff en la que las operaciones del grupo son continuas, es decir, las funciones

$$\begin{array}{ccc} \Omega \times \Omega \to \Omega & \qquad & \Omega \to \Omega \\ (x, y) \mapsto x + y & \qquad & x \mapsto -x \end{array}$$

son continuas.

Un *grupo abeliano localmente compacto* (usualmente abreviado grupo LCA) es un grupo abeliano topológico en el que todo punto posee un entorno cuya clausura es compacta.

Son ejemplos de grupos abelianos localmente compactos:

(1) El conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, con la topología usual.
(2) El conjunto de los números enteros, $\mathbb{Z}$, con la topología discreta.
(3) La circunferencia unitaria, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, con la topología usual.
(4) Cualquier grupo abeliano con la topología discreta.
(5) El producto cartesiano de dos grupos abelianos localmente compactos, con la topología producto.

Sea Ω un grupo abeliano localmente compacto. Una *medida de Haar* en Ω es una medida m de Borel, positiva y regular que tiene las siguientes propiedades:

(a) $m(E)$ es finita si $E \subset \Omega$ es compacto.
(b) $m(E+x) = m(E)$ para todo $x \in \Omega$ y $E \subset \Omega$, es decir m es invariante por traslaciones.

(c) $m(\Omega) > 0$.

Se puede demostrar, ver [**6**], que en todo grupo abeliano localmente compacto existe una medida de Haar, que es única, salvo multiplicación por una constante positiva. Debido a esto es usual hablar de la medida de Haar.

Además la medida de Haar es finita si y sólo si el grupo es compacto. Si el grupo es compacto es usual tomar la medida de Haar con masa total igual a 1.

Si el grupo es discreto, la medida de Haar es la medida que cuenta. En este caso es usual asignarle masa 1 a cada elemento del grupo.

En los siguientes ejemplos es fácil identificar la medida de Haar

(1) Si $\Omega = \mathbb{R}$, la medida de Haar es la medida de Lebesgue.
(2) Si $\Omega = \mathbb{Z}$, la medida de Haar es la medida que cuenta.
(3) Si $\Omega = \mathbb{T}$, la medida de Haar es la medida de Lebesgue normalizada, en la circunferencia.
(4) Si Ω es un grupo abeliano con la topología discreta, la medida de Haar es la medida que cuenta.

2. Caracteres y grupo dual.

En lo que resta de este capítulo, salvo que se indique lo contrario, se supondrá que Ω es un grupo abeliano localmente compacto.

Definición 2.2. Un *caracter* en Ω es una función continua $\xi : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que

$$|\xi(x)| = 1 \qquad \text{y} \qquad \xi(x+y) = \xi(x)\,\xi(y)$$

para todo $x, y \in \Omega$.

El conjunto de los caracteres de Ω, con la operación de multiplicación puntual de funciones, es un grupo abeliano.

Proposición 2.3. *Si $0 = 0_\Omega$ es el elemento neutro de Ω y ξ es un caracter, entonces*

$$\xi(0) = 1 \quad y \quad \xi(-x) = \overline{\xi(x)}.$$

Demostración. Se tiene que

$$\xi(0_\Omega) = \xi(0_\Omega + 0_\Omega) = \xi(0_\Omega)\,\xi(0_\Omega) = (\xi(0_\Omega))^2.$$

Como $|\xi(0_{\Omega)}| = 1$, tiene que ser $\xi(0_\Omega) = 1$. □

Es usual denotar por $\widehat{\Omega}$ al grupo de los caracteres de Ω y también es usual escribir $\langle x, \xi \rangle$ en vez de $\xi(x)$ si ξ es un caracter.

El elemento neutro de $\widehat{\Omega}$ es la función constante igual a 1, a veces se usa el símbolo **1** para este elemento y otras veces también se le designa por $0_{\widehat{\Omega}}$ ó simplemente 0.

En el grupo $\widehat{\Omega}$ se puede introducir una topología de la siguiente manera: convergencia en $\widehat{\Omega}$ equivale a convergencia uniforme sobre subconjuntos compactos de Ω. Por lo tanto una base de entornos de $0_{\widehat{\Omega}}$ en $\widehat{\Omega}$ está dada por los conjuntos de la forma

$$\mathcal{N}(K, \varepsilon) = \{\xi \in \widehat{\Omega} : \ |\langle x, \xi \rangle - 1| < \varepsilon, \text{ para todo } x \in K\},$$

donde K es un subconjunto compacto de Ω y $\varepsilon > 0$. Los entornos de cualquier otro punto se obtienen trasladando los entornos de 0. En [**6**] se puede encontrar la demostración de que, con esta topología, $\widehat{\Omega}$ es un grupo abeliano localmente compacto.

Si $x \in \Omega$, la función $\xi \mapsto \langle x, \xi \rangle$ es un caracter en $\widehat{\Omega}$. El teorema de dualidad de Pontryagin establece que todo caracter en $\widehat{\Omega}$ es de esta forma y que la topología de la convergencia uniforme en subconjuntos compactos de $\widehat{\Omega}$ coincide con la topología original de Ω. En otras palabras, si $\widehat{\Omega}$ es el dual de Ω, entonces Ω es el dual de $\widehat{\Omega}$. Simbólicamente

$$\widehat{\widehat{\Omega}} = \Omega.$$

Ejemplo 2.4.

(1) Todo caracter ξ en $\mathbb{R}$ es de la forma

$$x \mapsto e^{i\lambda x}$$

para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Luego la correspondencia $\xi \longleftrightarrow \lambda$ es un homeomorfismo. Por lo tanto el dual de $\mathbb{R}$ es $\mathbb{R}$.

(2) Todo caracter en $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$ es de la forma

$$z \mapsto z^n$$

para algún entero n y la topología de la convergencia uniforme sobre $\mathbb{T}$ es la topología discreta en $\mathbb{Z}$, luego $\widehat{\mathbb{T}} = \mathbb{Z}$.

(3) Todo caracter en $\mathbb{Z}$ es de la forma

$$n \mapsto z^n$$

para algún $z \in \mathbb{T}$, luego $\widehat{\mathbb{Z}} = \mathbb{T}$.

Es usual denotar la medida de Haar en Ω con la letra m y la integral sobre Ω de una función f con respecto a la medida de Haar suele denotarse por

$$\int_{\Omega} f(x)\, dx.$$

PROPOSICIÓN 2.5.
Si Ω es compacto y la medida de Haar está normalizada, entonces

(1) *Si $\xi \in \widehat{\Omega}$,*

$$\int_{\Omega} \langle x, \xi \rangle \, dx = \begin{cases} 1 & si\ \xi = 0_{\hat{\Omega}}, \\ 0 & si\ \xi \neq 0_{\hat{\Omega}}. \end{cases}$$

(2) *Si $\xi_1, \xi_2 \in \widehat{\Omega}$,*

$$\int_{\Omega} \langle x, \xi_1 \rangle \, \overline{\langle x, \xi_2 \rangle} \, dx = \begin{cases} 1 & si\ \xi_1 = \xi_2, \\ 0 & si\ \xi_1 \neq \xi_2. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN.
(1) Como $\langle x, 0_{\hat{\Omega}} \rangle = 1$ para todo $x \in \Omega$ se tiene que

$$\int_{\Omega} \langle x, 0_{\hat{\Omega}} \rangle \, dx = 1.$$

Si $\xi \neq 0_{\hat{\Omega}}$ entonces existe $x_o \in \Omega$ tal que $\langle x_o, \xi \rangle \neq 1$. Como la medida de Haar es invariante pr traslaciones, se tiene que

$$\int_{\Omega} \langle x + x_o, \xi \rangle \, dx = \int_{\Omega} \langle x, \xi \rangle \, dx,$$

luego

$$\langle x_o, \xi \rangle \int_{\Omega} \langle x, \xi \rangle \, dx = \int_{\Omega} \langle x + x_o, \xi \rangle \, dx = \int_{\Omega} \langle x, \xi \rangle \, dx,$$

como $\langle x_o, \xi \rangle \neq 1$, tiene que ser

$$\int_{\Omega} \langle x, \xi \rangle \, dx = 0.$$

(2) Este resultado sigue del anterior y de que

$$\langle x, \xi_1 \rangle \, \overline{\langle x, \xi_2 \rangle} = \langle x, \xi_1 \rangle \, \langle x, -\xi_2 \rangle = \langle x, \xi_1 - \xi_2 \rangle.$$

$\square$

3. Transformada de Fourier.

Sea $L^1(\Omega)$ el espacio de las funciones integrables con respecto a la medida de Haar, es decir

$$L^1(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f \text{ es medible y } \int_\Omega |f(x)|\, dx < \infty \right\}.$$

Se tiene que $L^1(\Omega)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_1 = \int\limits_\Omega |f(x)|\, dx.$$

La noción de transformada de Fourier se generaliza al contexto de grupos abelianos localmente compactos de la siguiente manera.

Sea $f \in L^1(\Omega)$, *la transformada de Fourier de* f es la función $\hat{f} : \widehat{\Omega} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\hat{f}(\xi) = \int\limits_\Omega \overline{\langle x, \xi \rangle}\, f(x)\, dx.$$

Si μ es una medida de Borel finita en Ω, *la transformada de Fourier de* μ es la función $\hat{\mu} : \widehat{\Omega} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\hat{\mu}(\xi) = \int\limits_\Omega \overline{\langle x, \xi \rangle}\, d\mu(x).$$

Es importante destacar que si $f \in L^1(\Omega)$ y μ se define por $d\mu(x) = f(x)\, dx$, entonces

$$\hat{\mu} = \hat{f}.$$

Al igual que en el caso de la recta y la circunferencia, se puede demostrar que toda medida de Borel finita está unívocamente determinada por su transformada de Fourier.

Si ν es una medida de Borel finita en $\widehat{\Omega}$, la *transformada inversa de Fourier de* ν es la función $\check{\nu} : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por

$$\check{\nu}(x) = \int\limits_{\widehat{\Omega}} \langle x, \xi \rangle\, d\nu(\xi).$$

Tomando en cuenta el teorema de dualidad de Pontryagin, es usual utilizar el término "transformada de Fourier" tanto para la transformada de Fourier como para la transformada inversa de Fourier. Del contexto debe quedar claro cual es la transformada a que se hace referencia.

Como es natural, dada una función integrable $f : \widehat{\Omega} \to \mathbb{C}$ la *transformada inversa de Fourier de* f es la función $\check{f} : \Omega \to \mathbb{C}$, definida por

$$\check{f}(x) = \int\limits_{\widehat{\Omega}} \langle x, \xi \rangle\, f(\xi)\, d\xi,$$

es decir, la transformada inversa de la medida $d\nu(\xi) = f(\xi)\, d\xi$.

4. Funciones definidas positivas en grupos abelianos localmente compactos.

Definición 2.6. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función, se dice que f es *definida positiva* si

$$\sum_{i,j=1}^{n} f(x_i - x_j)\, \lambda_i\, \overline{\lambda_j} \geq 0$$

para todo número natural n , $x_1, \ldots, x_n \in \Omega$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.

Proposición 2.7. *Todo caracter de un grupo abeliano localmente compacto es una función definida positiva.*

Demostración. Sea ξ un caracter de Ω y sean $x_1, \ldots, x_n \in \Omega$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, entonces

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n} \xi(x_i - x_j)\, \lambda_i\, \overline{\lambda_j} &= \sum_{i,j=1}^{n} \xi(x_i)\xi(-x_j)\, \lambda_i\, \overline{\lambda_j} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \xi(x_i)\overline{\xi(x_j)}\, \lambda_i\, \overline{\lambda_j} \\ &= \left| \sum_{i=1}^{n} \xi(x_i)\, \lambda_i \right|^2 \geq 0.\end{aligned}$$

□

Proposición 2.8. *Si ν es una medida de Borel no negativa y finita en $\widehat{\Omega}$, entonces $\check{\nu}$ es una función definida positiva en Ω.*

Demostración. Sea n un número natural y sean $x_1, \ldots, x_n \in \Omega$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, entonces

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n} f(x_i - x_j)\, \lambda_i\, \overline{\lambda_j} &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\widehat{\Omega}} \langle x_i - x_j, \xi \rangle\, \lambda_i\, \overline{\lambda_j}\, d\nu(\xi) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\widehat{\Omega}} \lambda_i\, \langle x_i, \xi \rangle\, \overline{\lambda_j\, \langle x_j, \xi \rangle}\, d\nu(\xi) \\ &= \int_{\widehat{\Omega}} \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, \langle x_i, \xi \rangle \right|^2 d\nu(\xi) \geq 0.\end{aligned}$$

□

De la misma manera se demuestra que si μ es una medida de Borel no negativa y finita en Ω, entonces $\hat{\mu}$ es una función definida positiva en $\widehat{\Omega}$.

PROPOSICIÓN 2.9. *Si $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ son funciones definidas positivas, entonces $f\,g$ es definida positiva.*

DEMOSTRACIÓN. Lo primero es notar que una función ψ es definida positiva si y sólo si para cada $N \in \mathbb{N}$ y $x_1, \ldots x_N \in \Omega$ se tiene que la matriz

$$(\psi(x_i - x_j))_{i,j=1}^{N}$$

es una matriz definida positiva.

Supóngase que f y g son definidas positivas y sean $N \in \mathbb{N}$ y $x_1, \ldots x_N \in \Omega$, entonces las matrices

$$(f(x_i - x_j))_{i,j=1}^{N} \quad \text{y} \quad (g(x_i - x_j))_{i,j=1}^{N}$$

son definidas positivas.

Por el Teorema 1.9 la matriz

$$(f(x_i - x_j)\, g(x_i - x_j))_{i,j=1}^{N}$$

es definida positiva, es decir, $f\,g$ es definida positiva.

$\square$

PROPOSICIÓN 2.10. *Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es una función definida positiva, entonces*

(1) $f(0) \geq 0$,
(2) *f es hermitiana, es decir*

$$f(-x) = \overline{f(x)}$$

para todo $x \in \Omega$.

DEMOSTRACIÓN. Considerando $n = 1$, $x_1 = 0$, y $\lambda_1 = 1$ en la definición de función definida positiva se obtiene

$$f(0) \geq 0.$$

Tomando $n = 2$, $x_1 = 0$, $x_2 = x$, $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = c$ en la definición de función definida positiva se obtiene

$$f(0)\,(1 + |c|^2) + f(-x)\,\bar{c} + f(x)\,c \geq 0,$$

por lo tanto $f(-x)\,\bar{c} + f(x)\,c$ es un número real para todo $c \in \mathbb{C}$, $x \in \Omega$, luego tanto $f(x) + f(-x)$ como $if(x) - if(-x)$ son números reales. Esto último sólo puede ocurrir si $f(-x) = \overline{f(x)}$.

$\square$

TEOREMA 2.11. *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función definida positiva, entonces*

(a) $|f(x)| \leq f(0)$ *para todo* $x \in \Omega$.

(b) $|f(x) - f(y)|^2 \leq 2\, f(0)\, (f(0) - \mathrm{Re} f(y - x)\,)$ *para todo* $x, y \in \Omega$.

(c) $\displaystyle \left|\sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i)\right|^2 \leq f(0) \sum_{i,j=1}^{n} f(x_i - x_j)\, a_i \overline{a_j}$ *para todo* $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \Omega$ *y* $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{C}$.

(d) $\displaystyle \left|\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(x_i - y_j)\, a_i \overline{b_j}\right|^2 \leq \left(\sum_{i,j=1}^{n} f(x_i - x_j)\, a_i \overline{a_j}\right) \left(\sum_{i,j=1}^{m} f(y_i - y_j)\, b_i \overline{b_j}\right)$ *para todo* $\{x_1, \ldots, x_n\}, \{y_1, \ldots, y_m\} \subset \Omega$ *y* $\{a_1, \ldots, a_n\}, \{b_1, \ldots, b_m\} \subset \mathbb{C}$.

DEMOSTRACIÓN. Primero se probará (d).
Sea $\mathcal{S} = \{a : \Omega \to \mathbb{C} \mid a(x) = 0$ salvo para una cantidad finita de elementos $x \in \Omega\}$.
Se tiene que $\mathcal{S}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Para $a, b \in \mathcal{S}$, sea

$$\langle a, b\rangle = \sum_{x\in\Omega}\sum_{y\in\Omega} f(x - y)\, a(x)\overline{b(y)},$$

la suma indicada es finita por la definición de $\mathcal{S}$. Además $\langle\ ,\ \rangle$ es una forma sesquilineal no negativa en $\mathcal{S}$. Por lo tanto satisface la desigualdad de Cauchy-Schwarz, es decir

$$|\langle a, b\rangle|^2 \leq \langle a, a\rangle\, \langle b, b\rangle.$$

Si se aplica esta desigualdad a las funciones a y b definidas por

$$a(x) = \begin{cases} a_n & \text{si } x = x_n, \\ 0 & \text{otro caso,} \end{cases}$$

$$b(y) = \begin{cases} b_m & \text{si } y = y_m, \\ 0 & \text{otro caso,} \end{cases}$$

se obtiene (d).

(c) Si $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \Omega$ y $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{C}$, tomar $m = 1$, $y_1 = 0$, $b_1 = 1$ y aplicar la desigualdad (d).

(b) Aplicar (c) para $n = 2$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $a_1 = 1$, $a_2 = -1$.

(a) Aplicar (c) para $n = 1$, $x_1 = x$, $a_1 = 1$.

□

De la parte (b) de este teorema se obtiene el siguiente resultado.

COROLARIO 2.12. *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función definida positiva. Si f es continua en* 0*, entonces f es uniformemente continua en Ω.*

5. Teorema de Herglotz-Bochner-Weil.

El siguiente resultado, que caracteriza a las funciones definidas positivas en un grupo abeliano localmente compacto, fue demostrado primero para $\Omega = \mathbb{Z}$ por Herglotz en el año 1991, los casos $\Omega = \mathbb{R}$ y $\Omega = \mathbb{R}^n$ se deben a Bochner (1932-1933). Su generalización a grupos abelianos localmente compacto se debe a Weil (1941). Su demostración y más detalles se pueden encontrar en las referencias [**6, 9**].

TEOREMA 2.13 (A. Weil [**5**]). *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua, entonces f es definida positiva si y sólo si existe una medida de Borel no negativa ν en $\widehat{\Omega}$ tal que $f = \check{\nu}$.*

OBSERVACIÓN 2.14. Una de las implicaciones del teorema anterior ya ha sido establecida parcialmente. Si $f = \check{\nu}$ donde ν es una medida de Borel no negativa entonces, por la Proposición 2.8 f es definida positiva. Demostrar la continuidad de la transformada de Fourier de una medida finita no ofrece mucha dificultad.

OBSERVACIÓN 2.15. Por el teorema de Weil, en los casos correspondientes a los grupos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{T}$ se tiene lo siguiente.

(i) Si $\Omega = \mathbb{Z}$, una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ es definida positiva si y sólo si existe una medida μ de Borel finita no negativa en la circunferencia tal que
$$a_n = \int_{\mathbb{T}} e^{int}\, d\mu(t).$$

(ii) Si $\Omega = \mathbb{R}$ se tiene que una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es definida positiva si y sólo si existe una medida μ de Borel finita no negativa en la recta tal que
$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\, d\mu(t).$$

(iii) Si $\Omega = \mathbb{T}$ una función continua $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ es definida positiva si y sólo si existe una medida μ de Borel finita no negativa en los enteros tal que
$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu(n)\, e^{inx}.$$

6. Polinomios trigonométricos.

Definición 2.16. Un *polinomio trigonométrico* en Ω es una función de la forma

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle x, \xi_i \rangle,$$

donde n es un entero positivo, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \widehat{\Omega}$

Es importante notar que un polinomio trigonométrico es la transformada inversa de Fourier $\check{\nu}$ de una medida ν en $\widehat{\Omega}$ con soporte finito.

Tomando en cuenta el teorema de dualidad de Pontryagin, un polinomio trigonométrico en $\widehat{\Omega}$ es la transformada de Fourier $\widehat{\mu}$ de una medida μ con soporte finito en Ω.

Observación 2.17.

(1) Si $\Omega = \mathbb{T}$, un polinomio trigonométrico es una función de $\mathbb{T}$ en $\mathbb{C}$ de la forma

$$p(z) = \sum_{k=-N}^{N} a_k z^k,$$

donde $a_{-N}, \ldots, a_N \in \mathbb{C}$.

(2) Si $\Omega = \mathbb{R}$, un polinomio trigonométrico es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ de la forma

$$p(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k e^{i\alpha_k x},$$

donde $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{C}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}$.

(3) Si $\Omega = \mathbb{Z}$, un polinomio trigonométrico es una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{C}$ de la forma

$$p(n) = \sum_{k=1}^{N} a_k z_k^n,$$

donde $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{C}$, $z_1, \ldots, z_N \in \mathbb{T}$.

Se puede demostrar (ver [**6**]) que si Ω es discreto, entonces $\widehat{\Omega}$ es compacto y que si Ω es compacto, entonces $\widehat{\Omega}$ es discreto.

Proposición 2.18. *Sea Ω un grupo abeliano con la topología discreta y sea μ una medida con soporte finito en Ω. Entonces*

$$\check{\hat{\mu}}(x) = \mu\{x\}$$

para todo $x \in \Omega$.

DEMOSTRACIÓN.

$$\widehat{\mu}(\xi) = \sum_{x\in\Omega} \overline{\langle x, \xi\rangle}\, \mu\{x\}.$$

Por ser Ω discreto, $\widehat{\Omega}$ es compacto. Con la convención usual de que la medida de $\widehat{\Omega}$ es igual a 1, por la Proposición 2.5 se tiene que

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}\check{}(x) = \check{q}(x) &= \int\limits_{\widehat{\Omega}} \left(\sum_{t\in\Omega} \overline{\langle t, \xi\rangle}\, \mu\{t\} \right) \langle x, \xi\rangle \, d\xi \\
&= \sum_{t\in\Omega} \mu\{t\} \int\limits_{\widehat{\Omega}} \overline{\langle t, \xi\rangle}\, \langle x, \xi\rangle \, d\xi \\
&= \mu\{x\}.
\end{aligned}$$

□

7. Extensión de funciones definidas positivas en un conjunto simétrico.

La definición de función definida positiva se puede extender, de manera natural, a funciones cuyo dominio es un subconjunto simétrico que contiene al elemento neutro, en detalle.

DEFINICIÓN 2.19. Sea $(\Omega, +)$ un grupo abeliano y sea Δ un subconjunto simétrico de Ω tal que $0 \in \Delta$. Se dice que una función $f : \Delta \to \mathbb{C}$ es *definida positiva* si dado un entero positivo n, una colección de puntos $\omega_1, \ldots, \omega_n$ en Ω tales que $\omega_i - \omega_j \in \Delta$ para $i, j = 1, \ldots, n$ y una colección de escalares $c_1, \ldots, c_n$ en $\mathbb{C}$ se tiene que

$$\sum_{i,j=1}^{n} f(\omega_i - \omega_j)\, c_i\, \overline{c_j} \geq 0.$$

En lo que queda de esta sección se supondrá que Ω es un grupo abeliano con la topología discreta y $\Delta \subset \Omega$ es un conjunto simétrico tal que $0 \in \Delta$.

Se usará la siguiente notación:

$\mathfrak{F}(\Delta)$ denotará al conjunto formado por las transformadas de Fourier $\hat{\mu}$ de la medidas μ, definidas en Ω cuyo soporte es finito y está contenido en Δ.

$$\mathfrak{F}^r(\Delta) = \{q \in \mathfrak{F}(\Delta) : q \text{ toma valores reales } \},$$

$$\mathfrak{F}^+(\Delta) = \{q \in \mathfrak{F}^r(\Delta) : q \geq 0\}$$

.

Es importante destacar que un elemento de $\mathfrak{F}(\Delta)$ es de la forma

$$\widehat{\mu}(\xi) = \sum_{x\in\Delta} \mu\{x\}\overline{\langle x, \xi\rangle},$$

por lo tanto, $\mathfrak{F}(\Delta)$ es el conjunto de los polinomios trigonométricos q en $\widehat{\Omega}$ tales que el soporte de su antitransformada de Fourier está contenido en Δ.

Definición 2.20. Sea $f : \Delta \to \mathbb{C}$ una función tal que $f(-x) = \overline{f(x)}$. Para $q = \hat{\mu} \in \mathfrak{F}^r(\Delta)$ se define

$$L_f(q) = \sum_{x\in\Delta} f(x)\,\check{q}(x).$$

Por la Proposición 2.18 se tiene que, si $q = \hat{\mu}$, entones $\check{q}(x) = \check{\hat{\mu}}(x) = \mu\{x\}$, por lo tanto se tiene que

$$L_f(q) = \int_\Omega f\,d\mu$$

y además $L_f(\cdot)$ es un funcional lineal real definido en $\mathfrak{F}^r(\Delta)$.

El siguiente resultado fue probado en [**7**] y da una condición necesaria y suficiente para que una función definida positiva pueda ser extendida a todo el grupo.

Lema 2.21. *Sea $f : \Delta \to \mathbb{C}$ una función definida positiva. Entonces f se puede extender a una función definida positiva en todo Ω si y sólo si*

$$L_f(q) \geq 0$$

para todo $q \in \mathfrak{F}^+(\Delta)$.

Demostración. Supóngase que f se puede extender a una función F, definida positiva en todo el grupo.

Sea $q \in \mathfrak{F}^+(\Delta)$, entonces $\check{q}$ es una función definida positiva en Ω, con soporte contenido en Δ. Por la Proposición 2.9 se tiene que $F\,\check{q}$ es una función definida positiva en Ω y por lo tanto, su transformada de Fourier es positiva, luego

$$L_f(q) = \sum_{x\in\Delta} f(x)\,\check{q}(x) = \widehat{(F\,\check{q})}(0) \geq 0.$$

Supóngase que $L_f(q) \geq 0$ para todo $q \in \mathfrak{F}^+(\Delta)$.

Sea $\|\ \|$ la norma uniforme en el espacio lineal real $\mathfrak{F}^r(\Delta)$.

Se tiene que

$$L_f(1) = \sum_{x\in\Delta} f(x)\,\check{1}(x) = f(0) \geq 0.$$

Si $q \in \mathfrak{F}^r(\Delta)$ entonces

$$-\|q\| \leq q \leq \|q\|$$

y por lo tanto

$$|L_f(q)| \leq \|q\|\, L_f(1) = \|q\| f(0).$$

Por lo tanto se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que $f(0) = 1$.

Se ha llegado así a que L_f es un funcional lineal de norma 1 en $\mathfrak{F}^r(\Delta)$.

Del teorema de Hahn-Banach sigue que L_f se puede extender a un funcional lineal de norma 1, definido en el espacio de las funciones continuas en $\widehat{\Omega}$.

Por el teorema de representación de Riesz ([**8**]), que establece que todo funcional lineal acotado Φ, en el espacio de las funciones continuas en un espacio de Hausdorff localmente compacto $\mathfrak{X}$, está dado por única medida regular de Borel compleja tal que

$$\Phi(f) = \int_{\mathfrak{X}} f d\mu, \tag{2.1}$$

y

$$||\Phi|| = |\mu|(X),$$

se puede asegurar que existe una medida finita compleja ν en $\widehat{\Omega}$, de variación total igual a 1, tal que

$$L_f(q) = \int\limits_{\widehat{\Omega}} q(\xi)\, d\nu(\xi), \tag{2.2}$$

para $q \in \mathfrak{F}^r(\Delta)$.

Sea $\omega \in \Delta$. Si se considera $q(\xi) = \xi(\omega) + \xi(-\omega)$ en la ecuación (2.2) se obtiene

$$f(\omega) + f(-\omega) = \check{\nu}(\omega) + \check{\nu}(-\omega),$$

y si se considera $q(\xi) = i(\xi(\omega) - \xi(-\omega))$ en la ecuación (2.2) se obtiene

$$f(\omega) - f(-\omega) = \check{\nu}(\omega) - \check{\nu}(-\omega),$$

por lo tanto

$$f(\omega) = \check{\nu}(\omega) \quad \text{para todo} \quad \omega \in \Delta.$$

Como

$$1 = L_f(\mathbf{1}) = \nu(\widehat{\Omega}) \leq \|\nu\| = 1,$$

se tiene que ν es una medida positiva.

Del teorema de Herglotz-Bochner-Weil (ver Teorema 2.13), sigue que $F = \check{\nu}$ es una extensión definida positiva de f. $\square$

CAPíTULO 3

Extensión de funciones definidas positivas en un intervalo de un grupo ordenado.

1. Grupos ordenados

Sea $(\Gamma, +)$ un grupo abeliano con elemento neutro 0_Γ. Se dice que Γ es un *grupo ordenado* si existe un conjunto $\Gamma_+ \subset \Gamma$ tal que:

$$\Gamma_+ + \Gamma_+ = \Gamma_+, \qquad \Gamma_+ \bigcap (-\Gamma_+) = \{0_\Gamma\}, \qquad \Gamma_+ \bigcup (-\Gamma_+) = \Gamma.$$

En este caso, si $x, y \in \Gamma$ se escribe $x \leq y$ si $\mathrm{y - x} \in \Gamma_+$, también $x < y$ si $x \leq y$ y $x \neq y$, luego

$$\Gamma_+ = \{\gamma \in \Gamma : \gamma \geq 0_\Gamma\}.$$

En el caso en que Γ es un grupo abeliano localmente compacto, es usual suponer que Γ_+ es un conjunto cerrado.

Son ejemplos de grupos ordenados:

(1) $\mathbb{Z}$ con la topología y el orden usual.
(2) $\mathbb{R}$ con la topología y el orden usual.
(3) El producto cartesiano de dos grupos ordenados, con el orden lexicográfico es un grupo ordenado. Si Γ y Δ son grupos ordenados el orden lexicográfico en $\Gamma \times \Delta$ se define de la siguiente manera:

$$(\gamma_1, \lambda_1) < (\gamma_2, \lambda_2) \ \text{ si y sólo } \ \lambda_1 < \lambda_2 \ \text{ o } \ \lambda_1 = \lambda_2 \ \text{ y } \ \gamma_1 < \gamma_2.$$

Si Γ y Δ son grupos topológicos para poder garantizar que el conjunto de los elementos no negativos en $\Gamma \times \Delta$ sea cerrado es necesario pedir que Δ esté equipado con la topología discreta.

Si $a, b \in \Gamma$ y $a < b$, es usual la siguiente notación

$$(a, b) = \{x \in \Gamma : a < x < b\}, \qquad [a, b] = \{x \in \Gamma : a \leq x \leq b\}, \qquad \text{etc.}$$

2. Completación de matrices definidas positivas parcialmente determinadas

En esta sección se expone un resultado de completación de matrices que será importante en la demostración del resultado principal.

TEOREMA 3.1. *Sea n un entero positivo y sea Q un subconjunto del cuadrado*

$$S_n = \left\{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 : 1 \leq i, j \leq n\right\}$$

tal que

(i) *Si* $1 \leq i \leq n$ *entonces* $(i,i) \in Q$,
(ii) *Si* $(l,k) \in Q$ *entonces* $\{(i,j) : \text{mín}(l,k) \leq i, j \leq \text{máx}(l,k)\} \subset Q$.

Supóngase que a cada $(i,j) \in Q$ *se le hace corresponder un número complejo* c_{ij} *tal que para cada* $(l,k) \in Q$ *con* $l \leq k$ *la matriz* $(c_{i,j})_{i,j=l}^{k}$ *es definida positiva*

Entonces existe una matriz definida positiva

$$A = (a_{i,j})_{i,j}^{n}$$

tal que

$$a_{i,j} = c_{i,j} \quad \text{para } (i,j) \in Q$$

DEMOSTRACIÓN. Como el caso $n = 1$ es inmediato, se puede suponer $n > 1$. Se considerarán tres casos.

Primer caso: $Q = S_n \setminus \{(1,n),(n,1)\}$ y todas las matrices de la forma $(c_{i,j})_{i,j=l}^{k}$ con $(l,k) \in Q$ $(l \leq k)$ son estrictamente definidas positivas.

Se debe probar que existe $x \in \mathbb{C}$ tal que la matriz hermitiana

$$A(x) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1,n-1} & x \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2,n-1} & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-1,1} & c_{n-1,2} & \cdots & c_{n-1,n-1} & c_{n-1,n} \\ \overline{x} & c_{n2} & \cdots & c_{n,n-1} & c_{nn} \end{pmatrix}$$

es definida positiva.

Como todas las matrices de la forma $(c_{i,j})_{i,j=l}^{k}$ con $0 < k \leq n-1$ son definidas positivas, para probar que $A(x)$ es definida positiva basta demostrar que

$$\det A(x) > 0.$$

Aplicando el Lema 1.5 a la matriz de entradas c_{ij} para $(i,j) \in Q$ y $c_{1n} = x$, $c_{n1} = \overline{x}$, utilizando la misma notación que en el Lema y notando que, en este caso las matrices A_2 y A_4 dependen de x, se obtiene que

$$\det(A_5)\det(A(x)) = \det(A_1)\det(A_3) - \det(A_2(x))\det(A_4(x)).$$

Como todas las matrices de la forma $(c_{i,j})_{i,j=l}^{k}$ con $(l,k) \in Q$ $(l \leq k)$ son estrictamente definidas positivas se tiene que las matrices A_1, A_3 y A_5 son estrictamente definidas positivas y por lo tanto su determinante es positivo. Por otra parte, como $A(x)$ es una matriz hermitiana se tiene que $A_2(x) = A_4(x)^*$ y por lo tanto $\det(A_2(x)) = \overline{\det(A_4(x))}$. Luego la condición $\det(A(x)) > 0$ equivale a

$$|\det(A_2(x))|^2 < \det(A_1)\det(A_3). \tag{3.1}$$

Desarrollando $\det(A_2(x))$ por la última columna se obtiene que existe $c \in \mathbb{C}$ tal que

$$\det(A_2(x)) = \det(A_5)x + c.$$

Como $\det(A_1)$, $\det(A_3)$ y $\det(A_5)$ son positivos, es claro que se puede encontrar $x \in \mathbb{C}$ que satisface la desigualdad (3.1).

Segundo caso: $Q = S_n \setminus \{(1,n),(n,1)\}$ (y no se supone que las submatrices son estrictamente definidas positivas).

Al igual que en el primer caso se debe probar que existe $x \in \mathbb{C}$ tal que $A(x)$ es definida positiva.

Para $k = 1, 2, \ldots$ sea

$$A^{(k)}(x) = A(x) + \frac{1}{k}I,$$

donde I es la matriz identidad $n \times n$.

Entonces todas las submatrices que corresponden con $A^{(k)}(x)$ son estrictamente definidas positivas, por lo probado en el primer caso, para cada k existe $x_k \in \mathbb{C}$ tal que $A^{(k)}(x_k)$ es definida positiva.

Como $A^{(k)}(x_k)$ es definida positiva, la matriz

$$\begin{pmatrix} c_{11} + \frac{1}{k} & x_k \\ \overline{x_k} & c_{nn} + \frac{1}{k} \end{pmatrix}$$

también es definida positiva y por lo tanto

$$\left(c_{11} + \frac{1}{k}\right)\left(c_{nn} + \frac{1}{k}\right) - |x_k|^2 = \det\begin{pmatrix} c_{11} + \frac{1}{k} & x_k \\ \overline{x_k} & c_{nn} + \frac{1}{k} \end{pmatrix} \geq 0.$$

De esto último se deduce que la sucesión $\{x_k\}$ es acotada y por lo tanto contiene una subsucesión convergente $\{x_{k_j}\}$. Si $x_o = \lim x_{k_j}$ entonces $A(x_o)$ es definida positiva.

Tercer caso: Caso general.

Se puede suponer que $Q \neq S_n$.

Sea k el mayor entero tal que

$$(1,1),\ldots,(1,k-1)\in Q$$

y sea l el mayor entero tal que

$$(1,k),\ldots,(l,k)\notin Q.$$

Por (i) y (ii) se tiene que $1\leq l<k\leq n$ y

$$Q\cap\{(i,j):l\leq i,j\leq k\}=\{(i,j):l\leq i,j\leq k\}\backslash\{(l,k),(k,l)\}.$$

Lo probado en el segundo caso muestra que existe un número complejo x tal que si se definen $c_{kl}=x, c_{lk}=\overline{x}$, entonces la matriz

$$(c_{i,j})_{i,j=l}^{k}$$

es definida positiva.

Reemplazando Q por $Q\cup\{(l,k),(k,l)\}$ se tiene que este nuevo conjunto y los correspondientes numeros complejos $c_{i,j}$ también satisfacen las condiciones del teorema.

Luego, repitiendo los argumentos anteriores se llega a la matriz buscada A.

□

3. Teorema de extensión

A continuación el enunciado y la demostración de la extensión del teorema de Kreĭn a grupos ordenados. Este resultado se debe a Z. Sasvári [**9**].

TEOREMA 3.2. *Sean Γ un grupo ordenado, $a\in\Gamma$, $a>0$ y $f:(-a,a)\to\mathbb{C}$ una función definida positiva. Entonces*

(a) *Existe $F:\Gamma\to\mathbb{C}$ definida positiva tal que $F|_{(-a,a)}=f$.*
(b) *Si Γ es un grupo abeliano localmente compacto y f es continua en 0, entonces cualquier extensión definida positiva de f es continua.*

Para la demostración del teorema serán necesarios ciertos resultados previos, que se dan a continuación.

PROPOSICIÓN 3.3. *Sean Γ y f como en el teorema anterior y sean $\gamma_1,\ldots,\gamma_n\in\Gamma$ tales que $\gamma_1\leq\gamma_2\leq\cdots\leq\gamma_n$.*

Entonces existe una matriz positiva

$$A=(a_{ij})_{i,j=1}^{n}\in\mathbb{C}^{n\times n}$$

tal que

$$a_{ij} = f(\gamma_i - \gamma_j) \quad si \quad \gamma_i - \gamma_j \in (-a, a).$$

DEMOSTRACIÓN. Como se supone que f es definida positiva, por el Teorema 3.1 basta demostrar que el conjunto

$$Q = \{(i, j) : \ \gamma_i - \gamma_j \in (-a, a)\}$$

satisface

(i) Si $1 \leq i \leq n$ entonces $(i, i) \in Q$,
(ii) Si $(l, k) \in Q$ entonces $\{(i, j) : \text{mín}(l, k) \leq i, j \leq \text{máx}(l, k)\} \subset Q$.

Como $0 \in (-a, a)$, se tiene que $(i, i) \in Q$ para $1 \leq i \leq n$.

Sea $(l, k) \in Q$, entonces $\gamma_l - \gamma_k \in (-a, a)$. Si $k \geq l$ y i, j son tales que $l \leq i, j \leq k$, entonces

$$-a < \gamma_l - \gamma_k \leq \gamma_i - \gamma_j \leq \gamma_k - \gamma_l < a$$

y por lo tanto $(i, j \in Q)$. De igual manera se ve que si $k \leq l$ y si i, j son tales que $k \leq i, j \leq l$, entonces $(i, j \in Q)$.

$\square$

LEMA 3.4. *Sean Γ un grupo ordenado, $a \in \Gamma$, $a > 0$ y $f : (-a, a) \to \mathbb{C}$ una función definida positiva. Si $g : \Gamma \to \mathbb{C}$ es definida positiva y el soporte de g es un subconjunto finito de $(-a, a)$, entonces la función $\varphi : \Gamma \to \mathbb{C}$ definida por*

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x)\, g(x) & si\ x \in (-a, a), \\ 0 & si\ x \notin (-a, a), \end{cases}$$

es definida positiva en Γ.

DEMOSTRACIÓN. Se debe probar que si $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ y $\gamma_i - \gamma_j \in (-a, a)$, entonces la matriz

$$(\varphi(\gamma_l - \gamma_k))_{k,l=1}^n$$

es positiva.

Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \cdots \leq \gamma_n$.

De la Proposición 3.3 sigue que existe una matriz positiva

$$A = (a_{kl})_{i,j=1}^n \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

tal que

$$a_{ij} = f(\gamma_i - \gamma_j) \quad \text{si} \quad \gamma_i - \gamma_j \in (-a, a).$$

El producto de Schur $(a_{ij}\, g(\gamma_i - \gamma_j))_{i,j=1}^n$ de la matriz A y la matriz $(g(\gamma_i - \gamma_j))_{i,j=1}^n$ es definida positiva. Como el soporte de g está contenido en $(-a, a)$, se tiene que este producto es igual a $(\varphi(\gamma_l - \gamma_k))_{k,l=1}^n$, de donde sigue que φ es definida positiva.

□

Demostración del Teorema 3.2.

(a) Para esta parte se aplicará el Lema 2.21 al caso particular $\Omega = \Gamma$, con la topología discreta y $\Delta = (-a, a)$.

Siguiendo la misma notación que en el Lema 2.21, sea $q \in \mathfrak{F}^+(-a, a)$, entonces $g = \check{q}$ es una función definida positiva con soporte contenido en $(-a, a)$.

Por el Lema 3.4, la función $\varphi : \Gamma \to \mathbb{C}$ definida por

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x)\, \check{q}(x) & \text{si } x \in (-a, a), \\ 0 & \text{si } x \notin (-a, a), \end{cases}$$

es definida positiva en Γ, luego

$$L_f(q) = \sum_{x \in (-a,a)} f(x)\, \check{q}(x) = \sum_{x \in (-a,a)} \varphi(x) = \widehat{\varphi}(0_{\widehat{\Omega}}) \geq 0$$

Del Lema 2.21 sigue que f tiene una extensión definida positiva a todo el grupo.

(b) Esta parte sigue del Corolario 2.12.

□

Bibliografía

[1] K. Hoffman, Ray Kunze, *Álgebra Lineal*. Citado en la(s) página(s): 3, 4

[2] R. Horn, C. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*. Citado en la(s) página(s): 10

[3] R. Bruzual, M. Dominguez, *Dilatacion, extension y representacion de formas definidas positivas.* Libro elaborado para el 30 Aniversario del Postgrado de Matemática de la Universidad Central de Venezuela 2006. Citado en la(s) página(s): 16

[4] M. G. Kreĭn, *Sur le problème du prolongement des fonctions hermitiennes positives et continues.* Dokl. Akad. Nauk. SSSR 26 (1940) 17-22. Citado en la(s) página(s): 1

[5] A. Weil, *L'intégration dans le groupes topologiques et ses applications.* Actualités Sci. et Ind. 869, 1145. Paris: Hermann & Cie. 1941 y 1951. Citado en la(s) página(s): 24

[6] W. Rudin, *Fourier analysis on groups,* Interscience 1962. Citado en la(s) página(s): 16, 17, 18, 24, 25

[7] W. Rudin, *The extension problem for positive definite functions,* Illinois J. Math. **7**. Citado en la(s) página(s): (1963) 532–539. 1, 2, 27

[8] W. Rudin, *Real and Complex Analysis,* McGraw - Hill 1970. Citado en la(s) página(s): 28

[9] Z. Sasvári, *Positive definite and definitizable functions.* Akademie Verlag 1994. Citado en la(s) página(s): 1, 24, 32