



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE HUMANIDADES Y EDUCACIÓN
ESCUELA DE EDUCACIÓN

Propuesta Didáctica para la Estimación del Error en el Método de los Trapecios

Autora: Br. Karen González G.
c.i. 15.223.507

Tutor: Dr. Ramón Bruzual

Caracas, Noviembre de 2006

Propuesta Didáctica para la Estimación del Error en el Método de los Trapecios

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por la **Br. Karen Aylene González González** para optar al título de Licenciada en Educación Mención Matemática.

Tutor: Dr. Ramón Bruzual

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE HUMANIDADES Y EDUCACIÓN

Caracas, Venezuela

Noviembre 2006

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado “**Propuesta Didáctica para la Estimación del Error en el Método de los Trapecios**”, presentado por la **Br. Karen Aylén González González.**, titular de la Cédula de Identidad **15.223.507**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Educación Mención Matemática**.

Profesor Ramón Bruzual
Tutor

Profesora Adelfa Hernández
Jurado

Profesor Juan Guevara
Jurado

Dedicatoria.

Este trabajo especial de grado, se lo dedico con especial cariño a todos los estudiantes que hoy en día se inician en el proceso de búsqueda investigativa, a ellos les digo que la perseverancia, la constancia y la dedicación son las armas idóneas para vencer los mas difíciles obstáculos; y en los momentos en los que sienten que sus miedos se vuelven sombras oscuras, no desesperen porque siempre habrá alguien que les guíe e indique el camino de luz. Por otra parte, nunca olviden que la Universidad Central de Venezuela es y siempre será la casa donde viven y crecen nuestras esperanzas.

Agradecimiento.

A Dios todo poderoso, por protegerme día a día y por haberme dado la fuerza y voluntad para permitirme concluir con esta meta.

A la Universidad Central de Venezuela, “Alma mater” , principal fuente de sabiduría y conocimiento, por haberme dado la oportunidad de pertenecer y de concluir mis estudios en esta casa de formación.

A toda mi familia por no desampararse en este largo camino y por la ayuda y el apoyo brindado.

Al Dr. Ramón Bruzual por ser el mejor guía que he podido tener, quien con su capacidad, esfuerzo y compromiso, contribuyo de manera favorable al logro de este Trabajo Especial de Grado.

A la profesora Adelfa Hernández, por darme la bienvenida a su maravilloso Club de Trabajo, quien con su gran paciencia y confianza demostrada contribuyo al logro de este Trabajo Especial de Grado.

A Cesar E. González R., por estar siempre presente en cada instante de mi vida; y por ser el mejor estímulo que he podido tener. Quien su constante apoyo, dedicación, paciencia y amor fue la acción tenaz en el desempeño y culminación de este Trabajo Especial de Grado.

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE HUMANIDADES Y EDUCACIÓN
ESCUELA DE EDUCACIÓN

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ESTIMACIÓN
DEL ERROR EN EL MÉTODO DE LOS TRAPECIOS.

Autora: Karen Gonzalez G.

Tutor: Dr. Ramón Bruzual.

Fecha: Noviembre 2006.

RESUMEN.

El propósito del presente trabajo de investigación fue elaborar una propuesta didáctica, basada en el desarrollo de un material impreso referido a la estimación del error en el Método de los Trapecios; a fin de promover en los estudiantes el aprendizaje significativo de este contenido curricular y de contribuir a la inducción de una nueva perspectiva en cuanto al presente tópico; todo ello, con el objeto de proporcionar una alternativa de estudio en los cursos básicos de la asignatura Matemáticas II de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela.

Con la finalidad de lograr tal propósito, se procedió a utilizar en la metodología el tipo de investigación-acción, la cual se orienta *al cambio y a la toma de decisiones*; cuyo objeto fundamental es el de transformar, mejorar y/o innovar la *práctica educativa*, es de carácter descriptivo y se fundamenta en la investigación cualitativa, ya que esta abarca básicamente aquellas metodologías que se centran en el desarrollo de los objetivos de *comprensión* de los fenómenos socioeducativos y *transformación de la realidad*. La investigación-acción involucra una *espiral sucesiva de ciclos* que hace referencia al proceso según el cual se va a desarrollar el carácter cíclico, dinámico e interpretativo de todas las etapas o fases que la integran; las cuales a su vez suponen la articulación entre la acción y la reflexión; entre la teoría y práctica. En el desarrollo de la presente investigación el modelo de “espiral de ciclos” se caracteriza por ser sucesiva, lo cual hace posible el inicio de una nueva “espiral de ciclos”. En tal sentido,

el desarrollo de este proceso de investigación-acción está constituido por siete (07) fases, a saber:

Fase 1, denominada “Diagnóstico de la situación problemática”; en esta fase se identifica la situación en la que se encuentra la enseñanza del contenido curricular referente a la estimación del error en el Método de los Trapecios. Para ello, se procedió a utilizar como técnicas de recolección de datos, la entrevista y la revisión documental; en la fase 2, denominada “Formular las estrategias de acción”; se especifican las estrategias de acción planteadas, en cuanto a la mejora de las necesidades detectadas en la fase anterior; en la fase 3, denominada “Evaluar las estrategias de acción”; se analizan, interpretan y evalúan las estrategias de acción planteadas en el proceso de las etapas descritas en la fase anterior; en la fase 4, denominada “Reflexión e interpretación de los resultados”; se describen los aspectos que han surgido en cuanto a la mejora de las estrategias de acción planteadas en relación a la preocupación temática; en la fase 5, denominada “Replanificación”; se procedió a replanificar los aspectos susceptibles de mejora en cuanto a las estrategias de acción planteadas con anterioridad; en la fase 6, denominada “Evaluar las estrategias de acción”; se analizan, interpretan, sintetizan y evalúan la ejecución organizada de las estrategias de acción planteadas en las fases descritas en todo el proceso de investigación acción; y finalmente en la fase 7, denominada “Reflexión e interpretación de los resultados”; se reflexiona sobre la factibilidad (viabilidad) de las estrategias de acción planteadas en relación a la preocupación temática generada en el proceso de investigación-acción.

Para el registro de los datos en la técnica de la entrevista se utilizó como instrumento de recolección de datos un “Guión de Entrevista” formalizado y estructurado en función de las interrogantes planteadas en la investigación; el mismo fue suministrado a una muestra conformada por el 76,923 % de la población. Los resultados obtenidos, fueron presentados en una tabla de datos integrados pertenecientes a la distribución de frecuencia (absoluta y relativa); luego cada ítem fue graficado y analizado en forma individual. En cuanto a la técnica de la revisión documental, se utilizó como instrumento de recolección de datos una serie de técnicas operacionales y protocolos instrumentales que son propios y/o específicos de

la investigación documental. Los resultados obtenidos, fueron presentados en tablas que especifican la fuente seleccionada y sus respectivas observaciones; así como, un análisis integral de toda la información.

En tal sentido, las técnicas e instrumentos de recolección de datos anteriormente descritas permitieron detectar la necesidad de propiciar el desarrollo de una propuesta didáctica referida a la estimación del error en el Método de los Trapecios que se adaptase a las condiciones de los cursos básicos de la asignatura Matemáticas II de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela; todo ello, con el propósito de contribuir con el proceso de enseñanza-aprendizaje de este contenido curricular.

PALABRAS CLAVES: Propuesta didáctica, Método de los Trapecios, Estimación del error por truncado, Análisis de contenido.

Índice general

Introducción.	3
Capítulo 1. Problema.	6
1. Formulación del Problema.	6
2. Objetivos.	10
3. Justificación.	11
4. Limitaciones.	14
Capítulo 2. Marco Teórico.	15
1. Breve Historia del Método de los Trapecios.	15
2. Teorías y Fundamentos Generales que Sustentan la Propuesta.	16
3. Análisis del Diseño Curricular (planes y/o programas de estudios).	39
4. Diseño de la Propuesta Didáctica.	44
5. Elementos Estructurales que Conforman la Propuesta.	50
6. Sustentación Legal.	50
7. Bases Matemáticas.	54
Capítulo 3. Marco Metodológico.	61
1. Tipo y Nivel de la Investigación.	61
2. Descripción de las Fases en la Investigación-Acción.	64
3. Diseño de la Investigación.	69
4. Población y Muestra.	70
5. Técnicas e Instrumentos de Recolección de Datos.	71
6. Validez de los Instrumentos.	73
7. Técnicas de Análisis e Interpretación de Resultados.	73
8. Validación de la Propuesta Didáctica.	75
Capítulo 4. Análisis de Resultados.	77

1. Guión de Entrevista.	78
2. Revisión Documental.	87
Capítulo 5. Conclusiones y Recomendaciones.	90
Capítulo 6. Propuesta Didáctica.	94
Propósito Educativo de la Propuesta.	96
Objetivos de la Propuesta.	96
Contenido de los Módulos.	97
Fundamentación de la Propuesta.	97
Estimación del Error en el Método de los Trapecios.	100
Bibliografía	119
Apéndice A. Programas.	124
Matemática I	125
Matemática II	128
Matemática III	131
Apéndice B. Guión de Entrevista.	135
Apéndice C. Instrumento para Validar el Guión de Entrevista.	139
Apéndice D. Instrumento para Validar la Propuesta Didáctica.	142

Introducción.

El cálculo integral surgió de la necesidad de calcular el área de una región plana. Los antiguos griegos descubrieron fórmulas para calcular el área de una región plana acotada por rectas, por ejemplo; el área de un rectángulo es el producto de su largo por su ancho, el área de un triángulo es la mitad del producto de su base por su altura, el área de cualquier polígono se halla descomponiéndolo en triángulos, así como el área de círculos y áreas de algunas regiones limitadas por segmentos de curvas, entre otros.

Con el desarrollo del cálculo, la herramienta más utilizada para la determinación de áreas es la integral definida. El proceso de evaluación de una integral definida o una integral indefinida se llama integración. Debe destacarse la diferencia entre una integral indefinida y una integral definida. La integral indefinida, $\int f(x)dx$ se define como una función g tal que su derivada $D_x[g(x)] = f(x)$. Sin embargo la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ es un número cuyo valor depende de la función f y de los números a y b .

La interpretación geométrica de la integral definida es el área bajo la curva correspondiente al gráfico del integrando, entre los puntos a y b . Esta área es calculada por un procedimiento que consiste en utilizar particiones del área total, generalmente en rectángulos y haciendo tender al infinito el número de particiones. La implementación numérica de este concepto es denominado ***Método de los Rectángulos*** y constituye el soporte teórico de la solución de problemas de aplicación de integrales definidas. De este modo, es relevante destacar que para calcular el valor de una integral definida se pueden utilizar los métodos de integración numérica con la exactitud deseada. Estos métodos, consisten en aproximar el área de una función continua en un intervalo cerrado mediante regiones poligonales inscritas o circunscritas a la misma, tales que al aumentar el número de polígonos (subintervalos), la suma de las áreas de cada región tiende a aproximarse con mayor exactitud al área requerida.

Es importante tener presente que para calcular la integral definido, aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo es preciso obtener previamente una primitiva del integrando. Aunque se conocen diversas técnicas permiten calcular una integral indefinida de una cantidad considerable de funciones, existen muchas para las cuales estas técnicas no son aplicables. En tal sentido, los métodos de integración numérica son útiles cuando resulta complejo o imposible obtener una integral indefinida o primitiva del integrando.

Uno de los procedimientos de integración numérica más utilizado para calcular el valor aproximado de una integral definida es conocido con el nombre de “**Método de los Trapecios o Regla Trapecial**” y es consecuencia de un enfoque propuesto para el cálculo de áreas poligonales. Este método consiste en aproximar el área de una región del plano a través de una partición del área total en trapecios circunscritos a la misma. Es importante, considerar la exactitud del valor aproximado de una integral definida al utilizar la Regla Trapecial; es decir, hay que tener presente la existencia del error por truncado (ε_τ) que se obtiene cuando se emplea la Regla del Trapecio para estimar el valor aproximado de una integral definida; el cual obedece a la aproximación a la gráfica de la función por medio de segmentos de rectas. Sin embargo, a medida que crece el valor de n (número de subintervalos), la exactitud de la aproximación del área de la región por medio de las áreas de trapecios aumenta, esto reduce la magnitud del error por truncado.

Este trabajo especial de grado, tiene como finalidad introducir una propuesta didáctica que permita deducir analíticamente las acciones que determinan el desarrollo de la estimación del error en el Método de los Trapecios. Adicionalmente y siguiendo las ideas de Stein, S. [71, 1976] se expondrá como obtener una versión aproximada de la fórmula de Stirling a partir de la fórmula del error en la Regla Trapecial; de igual manera, fueron incorporadas aplicaciones específicas de esta área de conocimiento. De esta forma, se contribuye al desarrollo de las capacidades mentales del aprendiz (habilidad) y a la formación del pensamiento lógico matemático. Dentro de esta perspectiva, el presente trabajo de investigación está dirigido a los docentes de las asignaturas Matemáticas II y Matemáticas III de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, a fin de proporcionar una alternativa en torno al contenido curricular referido a la estimación del error en el Método de los Trapecios.

El material a elaborar también puede ser de utilidad para los estudiantes interesados en profundizar sus conocimientos en torno al tema de la estimación del error en la Regla Trapecial.

Dadas las consideraciones anteriores, es importante destacar que el presente trabajo de investigación titulado “Propuesta didáctica para la estimación del error en el Método de los Trapecios”, fue organizado considerando los lineamientos sugeridos por los autores Palella, S. y Martins, F.; los cuales fueron extraídos del texto denominado “Metodología de la Investigación Cuantitativa” [59, 2004]. De este modo, la presente investigación consta de seis (6) capítulos que se describen a continuación:

En el Capítulo I, se desarrollan los siguientes tópicos a saber: planteamiento del problema de investigación, objetivos (general y/o específicos), justificación de la investigación y las limitaciones previstas en el proceso de la misma. El Capítulo II, denominado “Marco Teórico” abarca una breve reseña de la historia del Método de los Trapecios, así como las teorías y fundamentos que sustentan el desarrollo de la propuesta; la cual esta compuesta por: bases teóricas, bases legales y algunos aspectos específicos de la temática de estudio. El Capítulo III, denominado “Marco Metodológico”, incluye el tipo, diseño y nivel de la investigación, las etapas y/o fases previstas en la realización de la misma, y la validez de la propuesta. De igual forma, se incluyen aspectos específicos que están relacionados con el diseño de la investigación, como lo son: población, muestra y las técnicas e instrumentos de recolección de datos. En el Capítulo IV, se presentan y analizan los resultados obtenidos mediante las diversas técnicas de recolección de datos (la entrevista y la revisión documental). El Capítulo V, abarca las conclusiones de los objetivos propuestos y las recomendaciones sugeridas en cuanto a la posible mejora de los tópicos abordados en el proceso de investigación y las orientadas a contribuir en el proceso de enseñanza y aprendizaje en el nivel superior educativo. En el Capítulo VI, se presenta la propuesta didáctica referida a la estimación del error en el Método de los Trapecios, con sus respectivos objetivos y fundamentación. Adicionalmente, se incluye el índice bibliográfico; una sección que abarca los textos que han servido de referencia en el desarrollo de este proceso de investigación. Finalmente, se presentan los anexos que constituyen el soporte complementario que clarifica y sustenta este trabajo de investigación.

CAPÍTULO 1

Problema.

1. Formulación del Problema.

La psicología educativa se enriquece con las leyes, principios, teorías y resultados empíricos que aportan las diversas ramas o especialidades de la psicología básica; pero a su vez contribuye con sus aportaciones a mejorar la comprensión, planificación y explicación de los fenómenos y procesos educativos; y como disciplina aplicada, incluye una serie de conocimientos de naturaleza conceptual (teórico-explicativa), de naturaleza esencialmente procedimental sobre planificación y diseño (tecnológico-proyectiva), y de naturaleza esencialmente técnica e instrumental (técnico-práctica); todo ello, con el objeto de: proporcionar modelos explicativos de los procesos de cambio, contribuir a la planificación de situaciones educativas eficaces y de ayudar a la resolución de problemas educativos; a fin de enriquecer y mejorar la teoría y la práctica educativa. Dentro de esta perspectiva, la psicología educativa abarca el desarrollo y la aplicación de las teorías y principios que rigen el proceso de enseñanza y aprendizaje de un corpus organizado de conocimiento. Por consiguiente, la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos escolares específicos, es sin lugar a dudas una de las tendencias actuales que marcan el desarrollo reciente de la psicología educativa, y se enfoca fundamentalmente, hacia aspectos específicos del conocimiento escolar. En tal sentido, el autor Coll, C. [18, 2001], señala lo siguiente:

... hace tan sólo unas décadas la preocupación por los contenidos se concretaba mayoritariamente en la aplicación de los principios generales del desarrollo y del aprendizaje en las áreas de contenidos específicos, ahora el objetivo es más bien comprender la interrelación entre el pensamiento del alumno, la estructura interna de estos contenidos, y la manera en que se intenta promover su aprendizaje mediante la enseñanza ... p.(60).

De esta modo, la psicología educativa plantea como elemento de transformación la organización de los contenidos específicos, y la importancia que se le debe asignar a los materiales didácticos en función de la significación, tanto lógica como psicológica; a fin de “... *promover en los aprendices la construcción significativa del conocimiento, la reflexión crítica de lo que se lee o la aplicación de los aprendizajes en los contextos reales y de relevancia para el que aprende ...*”^{p.(40)}. Díaz, F. y García B. [27, 2001]

Por consiguiente, nuevamente se hace referencia a las autoras Díaz, F. y García, B. [27, 2001], quienes destacan lo siguiente:

La importancia que tienen los materiales de estudio en el proceso de aprendizaje, puede ser resignificada, no solo desde la vertiente cognitiva, sino también desde la visión sociocultural y de los procesos de medición en el aprendizaje. Los materiales didácticos vinculan contenidos o saberes culturales y cubren una importante función de medición en el encuentro del alumno con los mismos. Pero dicha medición involucra además otros agentes educativos en procesos de interacción complejos. Por un lado al docente, quien recurre a dichos materiales no sólo en busca de apoyos didácticos a su labor, sino con frecuencia para organizar y dar sentido a su propio plan de actividades. Por otro lado está presente el autor del material; los educandos “usan, significan y se apropian de los contenidos que son codificados por el elaborador del material de apoyo”, y así, quien elabora los materiales se convierte en un agente mediacional, que a su vez “identifica las mediciones idóneas para que entren en juego información, procesos de significación, socialización de contenidos, etc.”^{p.(41)}

Dentro de esta perspectiva, es relevante fomentar el impulso del aprendizaje y la enseñanza de la matemática en los diferentes niveles educativos, a tal fin uno de los objetivos de la didáctica de las matemáticas es propiciar la elaboración de materiales didácticos para contribuir en la mejora de las estructuras de conocimiento matemático que poseen los

estudiantes; todo ello con el propósito de promover óptimos resultados en el rendimiento académico estudiantil. Con referencia a los planteamientos anteriores, es relevante destacar al autor Godino, J. [37, 2003], quien refiere lo siguiente : “... las investigaciones sobre la enseñanza del currículum matemático constituyen un área de estudio en la didáctica de las matemáticas de extraordinario interés. Rico[1977] ” p.(26)

Mora, C. [53, 2001], señala al respecto, que algunos didactas de la matemática reconocidos internacionalmente sostienen que:

... la tarea específica de la didáctica de la Matemática se puede tomar seriamente en consideración, si el desarrollo y la investigación de técnicas, métodos, estrategias y materiales para el tratamiento de conceptos matemáticos teóricos correspondientes al campo de la matemática escolar y su implementación práctica tiene como objeto básico el mejoramiento de la enseñanza real de la matemática en sí misma, y la incorporación al proceso de su aprendizaje y enseñanza un uso socialmente significativo ... p.(119).

Es por ello, que la enseñanza de la matemática significativa implica un esfuerzo sistemático en donde se integre en un esquema coherente la estructura interna del contenido a enseñar y la forma en que el corpus organizado de conocimiento es incorporado en la estructura cognoscitiva del aprendiz; todo ello con el objeto de promover el aprendizaje significativo de la información que se ha de aprender.

Dentro de los múltiples núcleos y componentes básicos a conformar dentro de la Didáctica de las Matemáticas definidos por Mora, C. [53, 2001], se presentan tres aspectos, a los cuales se le hará especial acotación:

- *Examen crítico de los contenidos matemáticos en todos los niveles del sistema educativo, en el marco de los objetivos generales de la educación matemática.*

- *El desarrollo de unidades de enseñanza significativas y a la investigación de su factibilidad y pertinencia práctica en condiciones de aprendizaje y enseñanza en el respectivo contexto sociocultural.*
- *La profundización en la enseñanza de contenidos matemáticos elementales y a la diferenciación didáctica tanto interna como externa de todos los contenidos matemáticos escolares, con la finalidad de hacerlos accesibles a la mayoría de los jóvenes.* p.(120)

Los planteamientos anteriores, sirven de soporte para destacar que el contenido referente a la Regla de los Trapecios y la estimación del error, está incluido en el plan de estudio de la asignatura Matemáticas II de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela. Al realizar una primera revisión documental en algunos textos preseleccionados de Cálculo Diferencial e Integral diseñados para la formación en cuanto al dominio de los contenidos matemáticos de estudiantes de carreras científicas y afines, se evidencio poca presentación de este contenido curricular, así como la carencia de la demostración de la formula para la estimación del error en el Método de los Trapecios; usualmente algunos autores consideran que por su complejidad este contenido es objeto de estudio en obras más avanzadas; esto obedece a que la formula para la estimación del error en el Método de los Trapecios requiere de procedimientos avanzados para su demostración.

La problemática antes descrita podría dificultar el cumplimiento de los objetivos correspondientes al programa de la asignatura Matemáticas II de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela. Esto pone de manifiesto, como elemento importante, la necesidad de propiciar el desarrollo de una propuesta didáctica referida a la estimación del error en el Método de los Trapecios, que se adaptase a las necesidades de los cursos básicos de la asignatura Matemática II de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela. Con la finalidad de lograr tal propósito, es fundamental considerar una estructuración de este contenido curricular; en tal sentido, se deben precisar los componentes didácticos apropiados para la ejecución organizada de la misma. Por consiguiente, hay que tener presente un análisis de los conceptos, elementos y acciones implicadas en las áreas a

considerar; todo ello, con el objeto de contribuir en la mejora en cuanto al desarrollo analítico y/o geométrico de esta área de conocimiento.

Hechas las consideraciones anteriores, el análisis particular de la estimación del error en el Método de los Trapecios implica una valorización específica en esta área de conocimiento. En tal sentido, resulta de alto interés la necesidad de propiciar una mayor difusión en el estudio de este contenido curricular, lo que podría ser relevante en la educación matemática. Para el objeto de este estudio se concibe la educación matemática bajo la perspectiva del concepto expresado por Rico, Sierra y Castro (2000, citado en Godino, J. [37, 2003]) como: “... *todo el sistema de conocimientos, instituciones, planes de formación y finalidades formativas que conforman una actividad social compleja y diversificada relativa a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.*”_{p.(2)}

Dentro de esta perspectiva, esta línea de trabajo está orientada de manera fundamental hacia el análisis de este contenido curricular. De este modo, se podrá determinar los elementos didácticos implicados en la estructuración de la estimación del error en el Método de los Trapecios.

2. Objetivos.

Objetivo General.

Desarrollar una propuesta didáctica referida a la estimación del error en el Método de los Trapecios.

Objetivos Específicos.

- Determinar la situación en la que se encuentra la enseñanza del contenido curricular referido a la estimación del error en el Método de los Trapecios.
- Identificar en fuentes bibliográficas preseleccionadas el contenido referido a la estimación del error en el Método de los Trapecios.

- Establecer las competencias básicas que el aprendiz debe poseer para la comprensión de la estimación del error en el Método de los Trapecios.
- Analizar las acciones estructurales que conformarán la ejecución organizada de la propuesta didáctica referida a la estimación del error en el Método de los Trapecios.
- Formular una propuesta didáctica referente la estimación del error en el Método de los Trapecios.
- Validar la propuesta didáctica referida a la estimación del error en el Método de los Trapecios.

3. Justificación.

De forma general, un proceso básico que se utilizará en el desarrollo de la propuesta didáctica referida a la estimación del error en el Método de los Trapecios, es la incorporación de las distintas modalidades que representan las demostraciones matemáticas.

La demostración es un proceso de validación que caracteriza a la Matemática respecto a otras ciencias experimentales y juega un rol central en los componentes del currículum de la Licenciatura de Matemática. Respecto a lo anteriormente expresado Shoenfeld (1994, citado en Godino, J. y Recio, A. [38, 2001]) afirma que “... *la demostración no es una cosa separable de las matemáticas, tal y como aparece en los currícula; es un componente esencial del hacer, comunicar y registrar las matemáticas ...*”_{p.(412)}.

Para efectos de este trabajo de investigación el término demostración se refiere de modo genérico al objeto de sistemas de *prácticas argumentativas analíticas formales*, donde se requiere justificar o validar el carácter verdadero de un enunciado, su consistencia o la eficacia de acción, en el cual no hay un estándar generalmente aceptable del grado de rigor y sistematización exigible a una demostración matemática, ya que en la misma se integran conceptos, afirmaciones, teoremas, lemas, proposiciones, dibujos geométricos, expresiones simbólicas en

sí, exponiendo su propia estructura axiomática. Dentro de esta perspectiva, el autor Godino, J. [38, 2001], destaca que en una demostración “... *existen diversos tipos de justificaciones, aunque probablemente debemos reconocer algún tipo de organización jerárquica ...*”_{p.(408)}.

Por otra parte, es necesario destacar la relevante importancia que tiene para la formación en el dominio de los contenidos matemáticos de los alumnos. En tal sentido, las autoras Bravo, M. y Arrieta, J. [10, 2004], establecen que mediante la demostración matemática: “... *se contribuye a la formación del pensamiento lógico educativo, heurístico y creativo; a la formación lingüística, al desarrollo de operaciones mentales generales y de habilidades estrechamente relacionadas con estas ...*”_{p.(1)}.

En relación a lo anterior expuesto, se describen a continuación algunos aspectos señalados por las autoras Bravo, M., Del Sol, J. y Arteaga, E. [9, 2001], en los que se incorpora el valor formativo que pueden tener intrínsecamente las demostraciones matemáticas.

- El profesorado debe propiciar en los aprendices, un dominio en las acciones, de procedimientos heurísticos y de solidez de los conocimientos para su aplicación segura; mediante el análisis y las diversas formas de proceder en la realización de las demostraciones a través de la reflexión individual, donde los aprendices buscan y analizan diversas posibilidades de modelar situaciones; de esta manera se contribuye al desarrollo del pensamiento *extra-lógico* (*pensamiento creativo, el pensamiento especulativo, el pensamiento heurístico*), que se complementan con las formas del pensamiento *lógico-deductivo* en la solución de problemas y que son fundamentales para el desarrollo del pensamiento matemático.
- El desarrollo de una demostración debe exigir una completa expresión oral, no solo como un medio de comunicación, sino también como una manifestación del pensamiento. Es por ello que contribuye a la formación lingüística de los aprendices y al desarrollo del lenguaje con la utilización correcta del vocabulario propiamente matemático.
- A efectos de la formación multilateral que pueden adquirir los aprendices y del desarrollo de su pensamiento y lenguaje se genera una poderosa influencia sobre

el desarrollo de capacidades generales para *argumentar, inferir, deducir, refutar y fundamentar*.

- Las demostraciones a su vez contribuyen al desarrollo de operaciones mentales generales como lo son: *abstraer, concretar, sintetizar, comparar, particularizar, clasificar y generalizar*.

De esta forma, conviene destacar a las autoras Bravo, M., Del Sol, J. y Arteaga, E. [9, 2001], quienes señalan lo siguiente:

... es indiscutible el destacado aporte del tratamiento de las demostraciones al proceso educativo desde las dimensiones: instructiva, educativa y desarrollada; pues mediante estas se contribuye a fijar el sistema de conocimientos, el sistema de habilidades y el sistema de valores de asignatura y/o disciplina. Es un recurso didáctico universal para desarrollar valores, conocimientos y habilidades. p.(23)

El desarrollo de la propuesta didáctica referente a la estimación del error en el Método Trapezial, requiere para su solución una noción matemática donde se estructure este contenido curricular; para ello hay que realizar un análisis de contenido, con el propósito de establecer y/o identificar las acciones específicas que sirven de base para el desarrollo organizado de este tópico; en el cual se integran varios tipos de conceptos, procedimientos, lemas, teoremas, proposiciones, representaciones simbólicas, entre otras; que están interrelacionadas entre sí para lograr el objetivo final, pues cada una de estas acciones por sí solas no conducen al desarrollo organizado de la misma.

Por lo tanto, este trabajo de investigación permitirá caracterizar el desarrollo de una propuesta estructurada acerca del contenido referente a la estimación del error en el Método de los Trapecios, fundamentada didácticamente; todo ello con el propósito de promover el aprendizaje significativo de esta área de conocimiento y de contribuir a la inducción de una nueva perspectiva en torno a este contenido curricular, y así proporcionar una alternativa de estudio en los cursos básicos de las asignaturas Matemática II y Matemática III de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela.

4. Limitaciones.

Como todo trabajo de investigación, estuvo sometido a una serie de limitaciones que a continuación se detallan:

- La escasa presencia de docentes especialistas en el área de Análisis Numérico, que permitiese realizar sugerencias y establecer recomendaciones en cuanto al contenido curricular referente a la estimación del error en el Método de los Trapecios.
- La aplicabilidad de la propuesta en condiciones reales, ya que intentar intervenir en algún curso donde se dictase la asignatura Matemática II, podría ocasionar dificultades e inconvenientes al mismo, considerando que el semestre I-2006 fue de catorce (14) semanas exactas.
- La obtención de los datos se realizó unilateralmente desde la perspectiva de los docentes que dictan la asignatura Matemáticas II, sin incluir las opiniones de los estudiantes, lo que hubiese permitido una mayor variedad de información en cuanto al presente contenido curricular.

CAPÍTULO 2

Marco Teórico.

1. Breve Historia del Método de los Trapecios.

El origen de la integral definida se remonta en la época de Arquímedes (287-212 A.C. aproximadamente), matemático griego de la antigüedad, mucho antes de ser descubierto el cálculo integral. El proceso seguido en la definición de la integral definida es en esencia la misma que utilizó Arquímedes: “... *Dada una región del plano, su área puede calcularse por medio de regiones poligonales inscritas o circunscritas a la misma, tales que al aumentar el número de lados el área de estos polígonos tiende a aproximarse al área pedida ...*” La idea de la integral definida es una generalización práctica sutil de este proceso.

En el Siglo XVII casi simultáneamente pero trabajando independientemente Newton y Leibniz descubrieron que el cálculo se podía usar para determinar el área de una región acotada por curvas. Llegaron al descubrimiento del *cálculo diferencial e integral*, donde sintetizaron dos conceptos llamados hoy en día *derivada e integral*, desarrollaron unas reglas para manipular la derivada y mostraron la íntima conexión que existe entre la derivada de una función y la integral definida. Ambos se dieron cuenta y generalizaron la idea de que la derivación y la integración eran procesos inversos; este procedimiento incluye lo que se conoce en la actualidad como “**Los Teoremas Fundamentales del Cálculo**”, para resolver problemas de cuadraturas, máximos y mínimos, tangentes, centros de gravedad, entre otros; en el cual sus predecesores habían ocupado gran parte de su tiempo y sólo bastaba echar a andar estos dos conceptos mediante sus correspondientes reglas de cálculo.

El método Arquimediano de aproximación ha adquirido nuevamente importancia ya que en la actualidad el cálculo de las integrales definidas puede obtenerse mediante el uso de computadoras con tanta precisión como sea deseado y como se mencionó antes resulta útil

cuando no es posible evaluar con exactitud la integral definida por medio de funciones elementales.

En consecuencia, en este trabajo se enfatizará en el estudio del Método Trapecial, el cual podrá aproximar la medida del área de una región por medio de la utilización de trapecios en lugar de rectángulos.

2. Teorías y Fundamentos Generales que Sustentan la Propuesta.

La educación se enfoca en el aprendizaje guiado, dirigido o manipulado hacia la consecución de fines específicos, los cuales pueden definirse como “... *la adquisición permanente de cuerpos estables de conocimientos y de las capacidades necesarias para adquirir tal conocimiento ...*”_{p.(22)}. Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. [6, 1990]

Es por ello, que la psicología educativa tiene como finalidad “... *estudiar los procesos de cambio que se producen en las personas, como consecuencia de su participación en las actividades educativas ...*”_{p.(48)}. Coll, C. [18, 2001] Por consiguiente, aborda las propiedades del aprendizaje que se puedan relacionar con las diversas formas de ejecutar *deliberadamente* cambios cognoscitivos estables que tengan un valor social. De esta forma, la psicología educativa se ocupa del estudio de los fenómenos y procesos educativos con múltiples propósitos:

... contribuir a la elaboración de una teoría que permita comprender y explicar mejor estos procesos; ayudar a la elaboración de procedimientos, estrategias y modelos de planificación e intervención que ayude a orientarlos en una dirección determinada; y coadyuvar a la instauración de unas prácticas educativas más eficaces, más satisfactorias y más enriquecedoras para las personas que participan en ellas. _{p.(46)} Coll, C. [18, 2001]

En tal sentido, la psicología educativa se centra en los siguientes tópicos del aprendizaje:

- (1) Los aspectos del proceso de aprendizaje que afectan la adquisición y retención a largo plazo de cuerpos estructurados del conocimiento.
- (2) El mejoramiento de las capacidades para aprender y resolver problemas
- (3) Los aspectos sociales, interpersonales del ambiente de aprendizaje, así como las características cognoscitivas y personalidad del alumno, su motivación y disposición para aprender.
- (4) El cómo estructurar un material de aprendizaje de forma tal que esté organizado y sea de máxima eficacia, el cual sirva para dirigir y motivar deliberadamente el proceso de aprendizaje.

La enseñanza comprende un conjunto de factores o variables que influyen en el aprendizaje. De este modo, resulta importante clasificar dichas variables en virtud de delimitar y asentar la naturaleza del aprendizaje, así como las condiciones que la afectan. En tal sentido, las variables se pueden categorizar de la siguiente manera:

Intrapersonales: son los factores internos del alumno, compuestas por las siguientes variables:

- Variables de la estructura cognoscitiva.
- Disposición del desarrollo.
- Capacidad intelectual.
- Factores motivacionales y actitudinales.
- Factores de la personalidad.

Situacional: Son los factores de la situación de aprendizaje, la cual comprende las siguientes variables:

- La práctica
- El ordenamiento de los materiales de enseñanza.
- Ciertos factores sociales y de grupo.
- Características del profesor.

2.1. Aprendizaje Significativo y Teoría de la Asimilación. (Ausubel, D.)

Con respecto al desarrollo del aprendizaje, es importante distinguir claramente los principales tipos de aprendizaje que pueden ocurrir en un salón de clases. Se diferencian en primer lugar dos dimensiones posibles como lo son:

- (1) La que se refiere al *modo en que se adquiere el conocimiento*
- (2) La relativa a la *forma en que el conocimiento es subsecuentemente incorporado en la estructura del conocimiento* del aprendiz.

Dentro de la primera dimensión se encuentra a su vez dos tipos de aprendizaje posible: por recepción y por descubrimiento; y en la segunda dimensión se encuentran dos modalidades: por repetición y significativo. La interacción de estas dos dimensiones se traduce en las denominadas *situaciones de aprendizaje escolar*, aprendizaje por recepción repetitiva, por descubrimiento repetitivo, significativo por recepción o significativo por descubrimiento.

El objeto de la presente investigación, es desarrollar una propuesta didáctica referente a la estimación del error en el Método de las Trapecios. Dentro de esta perspectiva, resulta relevante destacar el aprendizaje significativo por recepción, el cual es fundamental en la educación, ya que representa un mecanismo humano que permite adquirir y almacenar un cúmulo de ideas, así como una amplia cantidad de información; la cual puede ser representada por cualquier campo del conocimiento que involucre la adquisición de significados nuevos.

Para los autores Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. [6, 1990] el aprendizaje en el aula “... se ocupa principalmente y entre otras cosas de la adquisición, retención y uso de grandes cuerpos de información potencialmente significativos ...” p.(47). El aprendizaje significativo, es en esencia relacionar un conjunto de ideas expresadas simbólicamente con lo que el alumno ya sabe. Esa relación no arbitraria y sustancial se refiere a que esas ideas están relacionadas con algún aspecto ya existente dentro de la estructura cognoscitiva del alumno, como una imagen, símbolos, conceptos o proposición. En tal sentido, los autores Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. [6, 1990] señalan lo siguiente:

El aprendizaje significativo por recepción es un proceso activo porque requiere por lo menos: (a) del tipo de análisis cognoscitivo necesario para averiguar cuales aspectos de la estructura cognoscitiva existentes son más pertinentes al nuevo material potencialmente significativo.

(b) cierto grado de reconciliación con las ideas existentes en la estructura cognoscitiva- esto es, aprender las similitudes y las diferencias, y resolver las contradicciones reales y aparentes entre los conceptos y proposiciones nuevos y los ya establecidos, y (c) la reformulación del material de aprendizaje en términos de los antecedentes intelectuales, idiosincrásicos en el vocabulario del alumno particular. p.(110)

Por consiguiente, cabe destacar las condiciones que permiten el logro del aprendizaje significativo.

- (1) Que el alumno manifieste una disposición para relacionar sustancialmente y de forma no arbitraria el nuevo material con su estructura cognoscitiva, mostrando una actitud de aprendizaje significativo.
- (2) Que el material por aprender sea potencialmente significativo para él, esto quiere decir que el material “... sea relacionable con su estructura de conocimiento sobre una base no arbitraria y no al pie de la letra ...”_{p.(48)}. Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. [6, 1990]

Que el material sea o no potencialmente significativo depende de dos factores principales que son:

- (1) La naturaleza del material por aprender.
- (2) La naturaleza de la estructura cognoscitiva del aprendiz.

El punto (1) se refiere a lo siguiente: Que el material de aprendizaje tenga significado lógico, es decir, debe ser relacionable de forma no arbitraria, pero si sustancialmente con las ideas pertinentes y correspondientes que se hallen dentro de la capacidad del aprendizaje humano. Por tal razón el material de aprendizaje debe ser estructurado por dos criterios,

el primero es el de la *relacionalidad no arbitraria*, lo que significa que si el material *en si* tiene la suficiente intencionalidad, se podría establecer una base adecuada y casi obvia de relacionarlo, de modo no arbitrario con los tipos de ideas correspondientes o pertinentes que se hallen dentro del dominio de las capacidades humanas. El segundo criterio se refiere a la *relacionalidad sustancial* (no al pie de la letra), lo que significa que si el material de aprendizaje es lo suficientemente no arbitrario, un grupo de ideas equivalentes (o grupos de símbolos) podrían relacionarse de un modo intencionado y sustancial con la estructura cognoscitiva sin que hubiese un cambio importante en el significado.

De este modo, la naturaleza del material de aprendizaje debe ser estructurado de forma no arbitrario y sustancial para que pueda relacionarse con las ideas relevantes que se hallen dentro del dominio de las capacidades del aprendizaje.

El punto (2) se refiere a lo siguiente: Que exista un contenido pertinente en la estructura cognoscitiva particular del aprendiz. Este factor “... *varia exclusivamente en función de la estructura cognoscitiva ...*”_{p.(50)}. Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. [6, 1990], la cual es variable de una persona a otra, ya que los significados nuevos que se adquieren son únicos en sí mismos.

De esta forma, en un campo específico de estudio un factor principal que influye en el aprendizaje es la organización y estructuración de un material lógicamente significativo. La facilitación del aprendizaje es tan solo uno de los fines propios de la enseñanza, por tal razón unas de las medidas para el mejoramiento del aprendizaje radica en perfeccionar materiales didácticos en un campo específico de estudio.

A través del diseño de materiales didácticos se puede lograr un máximo aprendizaje significativo de un sistema amplio de información. Como señalan los autores Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. [6, 1990] “... *Los factores más importantes que influyen en el valor del aprendizaje de los materiales didácticos radica en el grado en que estos materiales facilitan el aprendizaje significativo ...*”_{p.(308)}.

El material didáctico referente a la estimación del error en el Método de los Trapecios, incluye en su presentación; lemas, proposiciones y teoremas matemáticos, en donde intervienen dos grandes principios explicativos como lo son: el de representaciones y el de proposiciones; esto es debido a que se presentan símbolos específicos donde se incluye el “*nombramiento*” de elementos matemáticos que serán reconocidos por el aprendiz, así como ideas compuestas generadas mediante la combinación de palabras individuales, cada una de las cuales representa un concepto o referente unitario, expresados en forma de oración, en donde la idea resultante, es más que la suma de los significados de cada palabra o (componentes individuales).

Dentro de esta perspectiva, es importante mencionar que, en el desarrollo de la propuesta referente a la estimación del error en el Método de los Trapecios, se incluyen diversos conceptos que son representados mediante símbolos matemáticos, es decir, las diversas representaciones simbólicas se igualan en significado a las palabras o conceptos que estos representan; lo cual, es una condición necesaria en la ejecución de la misma. Sin embargo, el uso de los diversos símbolos matemáticos le permitirá al aprendiz familiarizarse con el nuevo material por aprender, ya que en su mayoría las representaciones simbólicas serán reconocidas por los estudiantes de la asignatura Matemática II de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela.

La tarea de identificar la organización particular de los diversos componentes estructurales que conforman el material didáctico, se sustenta en el “**principio de diferenciación progresiva**”. Este principio caracteriza la organización del contenido de la materia por enseñar en la estructura cognoscitiva del alumno, en el cual “... *las ideas mas generales e inclusivas se presentan primero, y luego se diferencian progresivamente en función de los detalles y especificidad ...*” p.(173). Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. [6, 1990]

Según los autores Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. [6, 1990] este principio “... *reconoce que la mayor parte del aprendizaje, y toda la retención y la organización de la materia de estudio es de naturaleza jerárquica, procediendo de arriba hacia abajo en términos de un nivel de abstracción, generalidad e inclusividad ...*” p.(111).

El orden jerárquico que presenta el principio de diferenciación progresiva corresponde a la secuencia natural en la que se adquiere consciencia cognoscitiva de un contenido desconocido o en la manera en que se organiza y almacena un conocimiento en el sistema cognoscitivo humano. Como señalan los autores Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. [6, 1990]

“... la organización del contenido de una materia en particular en la mente de un individuo consiste en una estructura jerárquica en que las ideas más inclusivas ocupan el ápice e incluyen las proposiciones, conceptos y datos fácticos progresivamente menos inclusivos y más finamente diferenciados ...” p.(173).

En tal sentido, el principio a utilizar en el desarrollo del material didáctico referente a la estimación del error en el Método de los Trapecios es el de diferenciación progresiva, ya que se presentan primero las ideas más generales e inclusivas del contenido y luego se diferencian progresivamente en función de los detalles y la especificidad.

Por otra parte, cabe destacar que dependiendo de la naturaleza del contenido de aprendizaje es preferible presentar materiales introductorios, antes que el nuevo material de aprendizaje. Estos materiales introductorios son llamados *organizadores previos*, ya que se presentan antes que el material de aprendizaje en si, cuya función principal consiste en proporcionar un *punte* entre la información que el alumno ya posee y la información nueva que se va aprender; todo ello con la finalidad de facilitar el vínculo entre el nuevo material de aprendizaje y los aspectos pertinentes en la estructura cognoscitiva del aprendiz. De esta forma, se contribuye al establecimiento de una actitud favorable hacia el aprendizaje significativo. Los autores Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. [6, 1990] mencionan *“... estos materiales de aprendizaje mas generales e inclusivos sirven a modo de puente cognoscitivo para facilitar la vinculación del nuevo material de aprendizaje con los elementos pertinentes y a disposición del alumno en su estructura cognoscitiva ...”* p.(155).

Es importante resaltar, que la adquisición de la información nueva depende en alto grado de las ideas que ya existen en la estructura cognoscitiva del aprendiz. En tal sentido, el aprendizaje significativo de los seres humanos ocurre a través de una *interacción* entre la nueva información y las ideas pertinentes que existen en la estructura cognoscitiva. Ahora

bien, esta interacción que ocurre entre el material nuevo por aprender y las ideas existentes en la estructura cognoscitiva, constituyen una *asimilación* de significados nuevos y antiguos, que es la base para formar una estructura cognoscitiva altamente diferenciable. Los autores Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. [6, 1990], mencionan: “... *para que el aprendizaje sea significativo, el nuevo conocimiento que ha de aprenderse debe poseer conceptos de afianzamiento pertinentes, que estén disponibles en la estructura cognoscitiva del alumno ...*”_{p.(313)}.

Por consiguiente, la base en el despliegue para el desarrollo del material didáctico radica en el principio que establece lo siguiente: el nuevo conocimiento que ha de aprenderse debe poseer conceptos de afianzamiento pertinentes que estén disponibles en la estructura cognoscitiva del aprendiz. En vista, de que existe una amplia cantidad de información por ser aprendida en cualquier área de conocimiento, “... *únicamente los conceptos más generales e inclusivos tienen la probabilidad de servir de afianzamiento en una amplia variedad de situaciones de aprendizajes ...*”_{p.(314)}. Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. [6, 1990]

Es por ello, que para el desarrollo de la propuesta didáctica referida a la estimación del error en el Método de los Trapecios se considera los aportes del modelo de Johnson, M. (1967, referido en Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. [6, 1990]), para el currículo y la enseñanza, junto con la teoría de la asimilación; ya que es la base para describir lo mejor en materiales de aprendizaje. Este modelo considera fundamentalmente dos criterios; el primero establece que se debe empezar por los conceptos y proposiciones más generales o inclusivos o dentro de un esquema jerárquico y racional, y el segundo que la ordenación del material didáctico puede vincularse a la descripción de diferenciación progresiva.

2.2. Teoría de la Elaboración. (Reigeluth, C.)

Los postulados Ausubelianos, son retomados por Reigeluth, C. (1987, referido en Coll, C. y Rochera, M. [22, 1990]) en su Teoría de la Elaboración, la cual responde a un mismo principio: el establecimiento de secuencias que van de los elementos más simples, generales y fundamentales de un contenido, para luego pasar a elaborar cada uno de los elementos mediante la introducción de la información detallada y cada vez más compleja de un contenido.

Los autores Coll, C. y Rochera, M. [22, 1990], señalan que “... *la secuencia elaborativa eleva a estrategia general para la secuenciación de los contenidos de enseñanza el principio de comenzar por los elementos más simples y generales e ir introduciendo progresivamente los elementos más complejos y detallados ...*” p.(390).

Es por ello, que la teoría de la elaboración constituye el eje vertebrador de una verdadera teoría de los procesos de enseñanza y aprendizaje, ya que no se limita a proponer únicamente una estrategia general para secuenciar un contenido de enseñanza, sino que intenta integrar un esquema coherente las diferentes técnicas de análisis de contenido; lo cual es posible gracias a las diversas teorías que tienden cada vez más a contribuir una importante creciente a los procesos cognitivos de los alumnos en el aprendizaje de los contenidos escolares. La teoría de la elaboración aplica el establecimiento de secuencias, tanto en programas amplios, como en unidades didácticas específicas; Los autores Coll, C. y Rochera, M. [22, 1990], señalan que “... *aunque en su origen la teoría de la elaboración fue desarrollada para ayudar a la organización y secuenciación de los contenidos de uno o varios cursos (macrosecuenciación), posteriormente sus prescripciones han sido aplicadas igualmente a la organización y secuenciación de los contenidos de una lectura o un tema (microsecuenciación) ...*” p.(393).

La secuencia elaborativa se despliega en dos aspectos fundamentales, los cuales son:

- (1) Las características del “*epítome*”.
- (2) La orientación básica de la naturaleza del contenido interno de algún área del conocimiento.

El aspecto uno (1) se refiere, al hecho que la teoría de la elaboración propone presentar en un principio los elementos más simples, generales y fundamentales del contenido. El plano de este conjunto recibe el nombre de epítome, pasando a desarrollar cada uno de ellos mediante la introducción de los detalles y la complejidad que amerita cada caso.

Una vez que se procede de este modo, se puede repetir el proceso tantas veces como sea preciso, es decir, introduciendo en los niveles de elaboración de forma progresiva los elementos más complejos a partir de los elementos del primer nivel de elaboración; con el

fin de enriquecer y ampliar el plan de conjunto para convertir la secuencia en un “*epítome ampliado*”.

Hay que destacar, que el epítome no contiene una versión resumida de todos los elementos del contenido, sino exclusivamente de aquellos que se consideran más fundamentales y representativos del contenido a desarrollar. De este modo, los epítome deben ser seleccionados de manera que el resto de los elementos que se desarrollan en un contenido puedan ser presentados como una ampliación en cuanto a detalle y complejidad.

El aspecto dos (2) radica en la naturaleza interna del contenido; es decir, la organización de la enseñanza tiene como base uno de los tres tipos de contenido (conceptos, principios o procedimientos) los cuales dependen de la naturaleza de la materia. Sin embargo, la decisión en cuanto al tipo de elemento organizador, depende de diversos elementos claves, como lo son: Las características de los alumnos y las intenciones educativas que se preside en el proceso enseñanza aprendizaje. El modelo de secuencia elaborativa varía según la orientación del contenido elegido:

- **Secuencia de orientación conceptual:** Representan una estructura similar a las jerarquías de Ausubel, D., el cual se basa en presentar en el epítome los conceptos más fundamentales y representativos del contenido e introduciendo en los sucesivos niveles de elaboración los detalles y la precisión sobre los mismos.
- **Secuencia de orientación teórica:** El cual se basa en presentar en el epítome los principios más simples y fundamentales, introduciendo en los sucesivos niveles de elaboración, versiones progresivamente más complejas, específicas, contextualizadas e interrelacionadas de los mismos.
- **Secuencia de orientación procedimental:** El cual se basa en incluir en los epítomes los procedimientos más simples y generales, introduciendo en los sucesivos niveles de elaboración, procedimientos más complejos y específicos que los que figuran en el epítome.

Es necesario destacar, que la organización de la propuesta didáctica referida a la estimación del error en el Método de los Trapecios adopta como base fundamental los principios teóricos que constituyen esta área de conocimiento; sin embargo, los otros aspectos (conceptos y procedimientos) están siempre presentes en mayor o menor grado como soporte complementario y esencial del contenido. En tal sentido, en el desarrollo de la propuesta didáctica se presenta en forma conjunta diversos procedimientos y conceptos; esto obedece a que un determinado procedimiento incluye la adquisición de los conceptos; y viceversa, la utilización de conceptos se basa en el desarrollo de algún procedimiento específico. Por lo tanto, la propuesta contiene estructuras teóricas que se basan fundamentalmente en el uso y aplicaciones de conceptos y procedimientos.

2.3. Curriculum en Espiral. (Bruner, J.)

Para promover secuencias óptimas de aprendizajes, es fundamental considerar tanto las características de los aprendices como la naturaleza interna del contenido a enseñar. En base a lo expresado; el autor Bruner, J. formula la propuesta del curriculum en espiral, la cual consiste básicamente en retomar de forma cíclica los mismos contenidos de enseñanza a niveles cada vez más amplios y profundos; es decir, el curriculum debe ser organizado en espiral y no lineal; retomando de manera constante y a niveles cada vez mas elevados los núcleos básicos o estructura interna del contenido de una disciplina; todo ello, con el propósito de que el estudiante modifique de forma continua las representaciones mentales que ha venido construyendo.

La teoría de la enseñanza o de la instrucción, difiere de la teoría psicológica del aprendizaje y del desarrollo en que esta se “... *ocupa de la forma en que lo que uno desea enseñar pueda ser mejor aprendido, de mejorar más que de describir el aprendizaje ...*” pp.(53–54). Bruner, J. [12, 1969]; es decir, no se limita a describir el proceso de enseñanza aprendizaje sino, fundamentalmente de dirigirlo; es normativa y prescriptiva. De este modo, una teoría de la enseñanza es prescriptiva en el sentido de que “... *expone reglas respecto al modo más eficaz de lograr conocimientos y destrezas ...*” y normativa en cuanto a que “... *formula criterios y condiciones para satisfacerlo ...*” p.(53). Bruner, J. [12, 1969]

En tal sentido, el autor Bruner, J. expone de forma resumida, en su ensayo titulado “*notas sobre una teoría de instrucción*” [12, 1969], cuatro (04) componentes principales que una teoría de la enseñanza o de la instrucción debería de considerar:

- (1) Un conocimiento acerca de las experiencias que despiertan en el estudiante de una forma efectiva la predisposición a aprender; este componente es el matiz motivacional que implican un tipo de diseño didáctico, condición de la eficacia misma del aprendizaje. Tal motivación, debe favorecer la activación de una dinámica de búsqueda por parte del aprendiz, el mantenimiento de la búsqueda y la dirección. Esta dirección se logra cuando el aprendiz conoce el objeto de la tarea y las alternativas que necesita para lograrlas.

- (2) Un conjunto organizado de saberes o cuerpo de conocimientos puede estructurarse de forma “*lo suficientemente sencilla*” con la finalidad de que el aprendiz pueda comprenderlo de un “*modo más rápido*”. El autor Bruner, J. [12, 1969], establece el término de estructura óptima de un cuerpo de conocimiento, la cual no es absoluta sino relativa, ya que depende del estado de progreso de un campo particular de conocimiento, y de su poder para “*... simplificar la información, generar proposiciones y aumentar la manipulación de un cuerpo de conocimientos, la cuál deberá relacionarse siempre con el nivel y dotes del que aprende ...*”_{p.(55)}.

- (3) La secuencia en la representación de los contenidos; la secuencia del aprendizaje no es única, ni tiene que coincidir con la secuencia del conocimiento tal como esta sistematizada en las diversas disciplinas el estado de la estructura cognoscitivas del sujeto, la etapa de desarrollo, el carácter del material y las diferencias individuales, condiciones las secuencias que vaya a adoptarse. El autor Bruner, J. [12, 1969] establece que cualquier contenido o rama de conocimiento se puede representar mediante tres formas:
 - Conjunto de acciones apropiadas para alcanzar cierto resultado (Representación prescriptiva).

- Series de imágenes o gráficas que representan un concepto sin definirlo cabalmente (Representación icónica).
 - Propositiones lógicas o símbolos derivadas de un sistema simbólico gobernado por reglas para formar y transferir proposiciones (Representación simbólica).
- (4) La naturaleza y ritmo de las recompensas y castigos; este elemento, es en realidad una matización del primero; pues se refiere al sustento motivacional o mantenimiento de la predisposición para aprender; es decir, a un programa que permita dar conciencia al alumno de lo correcto o no de las iniciativas que toma para mantener la dirección hacia la meta. Necesita conocer los resultados para que se mantengan tal dirección al confirmar o rechazar la iniciativa emprendida.

Como puede observarse, el planteamiento del autor Bruner, J. se reduce a dos grandes apartados, a saber: por un lado, la clarificación de la estructura del contenido debidamente secuencializado; y por otro, la necesidad de un proceso de motivación que mantenga el proceso de aprendizaje, desde el comienzo hasta el logro de la meta.

2.4. Jerarquías de Aprendizajes. (Gagné, R.)

Gagné Robert, formula la teoría del Aprendizaje Acumulativo; el cual representa una versión especial de la teoría de los elementos idénticos; en las que las tareas más sencillas funcionan como componentes (elementos) de las tareas más complejas. El hecho de que las tareas complejas estén compuestas de elementos identificables y más sencillos permite la transferencia de lo sencillo a lo complejo. De este modo, propone un conjunto de principios alternativos cuya idea esencial es que los seres humanos poseen unas series de habilidades intelectuales que facilitan la ejecución o la retención de una serie de tareas, todas aproximadamente del mismo nivel de complejidad. En tal sentido, define a las habilidades como las “... *capacidades intelectuales que son necesarias para ejecutar una tarea en forma correcta ...*”^{p.(1)}. Gagné, R. (1970, citado en Silva, F. [69, 2006])

Dentro del ámbito educativo, las habilidades se conciben como capacidades conductuales dispuestas en forma jerárquica, llamadas *jerarquías de aprendizaje*. La conceptualización que

presenta este autor sobre las habilidades, se basa en la distinción entre lo que el denomina transferencia lateral y transferencia vertical.

La transferencia lateral, es la capacidad de aplicar en una nueva situación una aptitud previamente aprendida. Una demostración de transferencia lateral será la aplicación de habilidades en el dominio de tareas que abarca un mismo nivel de complejidad; es decir, la incorporación de una habilidad incluye para su ejecución requisitos del mismo nivel de dificultad; en este caso, el estudiante aprende a aplicar una capacidad en situaciones relacionadas con otras áreas. En tal sentido, los autores Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. [6, 1990] señalan que “*...las capacidades de aprendizajes existentes se aplican algo indirectamente y, en términos generales, a la resolución de problemas relacionados o a la comprensión de materiales de estudio de otras disciplinas.*”_{p.(155)}. Por su parte, la transferencia vertical ocurre cuando una capacidad por aprenderse se adquiere más rápidamente, si fue precedida por el aprendizaje de capacidades secundarias; en la cual, cada habilidad necesita una habilidad inferior para ser desarrollada; es decir, varias habilidades inferiores (secundarias) conducen a habilidades superiores (primarias). Una demostración de transferencia vertical, “*... se aplica a la situación en que el dominio de un conjunto más bien específico de capacidades subordinadas es requisito previo para la adquisición de capacidades de orden más elevado dentro de una subárea más limitada de conocimiento.*”_{p.(155)}

El postulado que subyace a las jerarquías de aprendizaje, se basa en que las habilidades de un nivel inferior son aprendidas mediante procesos que incluyen la ejecución de subtareas que son más elementales que las requeridas en las habilidades de un nivel superior.

Este modelo establece que se debe comenzar con las tareas de aprendizajes más sencillas; es decir, aquellas que se muestran en la base de su jerarquía, y luego seguir o avanzar secuencialmente hasta alcanzar las tareas de aprendizajes más complejas. En tal sentido, es relevante resaltar que cualquier tarea puede descomponerse en un conjunto de subtareas con una ordenación jerárquica que representa una estructura de transferencia, de tal manera que las subtareas que corresponden a las capacidades de orden inferior deben aprenderse

previamente a las subtareas que implican capacidades de orden superior; tal planteamiento supone:

- (1) Identificar la tarea o conducta terminal que el aprendiz debe exhibir al culminar el proceso de enseñanza y aprendizaje.
- (2) Identificar todos los elementos que conforman la misma; es decir, desglosar los componentes que lo conforman.
- (3) Establecer secuencias de aprendizaje de los componentes identificado; es decir, asegurarse de que las tareas que implican capacidades de nivel inferior serán aprendidas antes de pasar a las tareas que implican capacidades de nivel superior.

La clave para planificar el aprendizaje de las destrezas intelectuales es el establecimiento de jerarquías de aprendizajes; tal expresión es utilizada para denominar el orden jerárquico de las subtareas (o subobjetivo) que conforman una tarea (u objetivo terminal), mostrando a su vez las relaciones de requisitos que existen entre ellas. El análisis de tareas utilizando jerarquías de aprendizajes limita por arriba con la resolución de tareas (u objetivo terminal), y por abajo con el estado inicial del alumno. Partiendo de la tarea u objetivo terminal elegido, la jerarquía de aprendizaje muestra las habilidades intelectuales que son un requisito para su resolución o logro; una vez identificadas estas habilidades, es posible, a su vez, indagar las subhabilidades que actúan como requisitos para cada una de ella; y así sucesivamente hasta alcanzar en nivel más elemental de subhabilidades implicadas en la resolución de tareas. Por consiguiente, es importante realzar el concepto de habilidad de requisito previo, el cual es esencial en las tareas de las jerarquías de aprendizaje. En tal sentido, una habilidad de requisito se refiere a una habilidad más simple que se relaciona íntegramente con la habilidad a la que esta subordinada, de tal manera que esta ultima no puede llevarse acabo si la primera no ha sido adquirida previamente.

2.5. Análisis de Contenido.

El análisis de contenido específico de un área de conocimiento es la base para la estructura de un conjunto organizado de saberes, ya que el “análisis del contenido” designa un

conjunto de procedimientos y técnicas para establecer secuencias de aprendizajes que parten del contenido de una disciplina a enseñar y de su estructura interna de organización lógica.

En tal sentido, los autores Coll, C. y Rochera, M. [22, 1990], señalan que “... *el punto de arranque del análisis del contenido es la materia, la temática, o el corpus organizado de conocimientos que el profesor y el alumno tratan de enseñar y aprender respectivamente.*”_{p.(374)}

El primer aspecto a considerar en el análisis de contenido consiste, en identificar la información y los tópicos que son relevantes y específicos de la materia a enseñar; desde un ámbito instruccional, seleccionando los que deben ser objeto de enseñanza. Finalmente se procede a analizar cada uno de los items que configuran el conjunto organizado de conocimientos y que concretan las intenciones educativas del proceso de enseñanza y aprendizaje. En tal sentido, los autores Coll, C. y Rochera, M. [22, 1990] señalan: “*La idea esencial es, pues, que las decisiones sobre el contenido de la enseñanza deben apoyarse en el análisis de la estructura interna del contenido ya elaborado que se desea transmitir ...*”_{p.(375)}. De este modo, se identifican los elementos que desempeñan el papel de organizador jerárquico en la estructura del contenido.

Estructura Lógica del Contenido.

Cada disciplina presenta un conjunto de estructuras conceptuales que son denominadas “*Estructuras sustanciales*”, las cuales determinan el tipo y la naturaleza del contenido. En tal sentido, los autores Coll, C. y Rochera, M. [22, 1990], hacen referencia al autor Elam [1973] y señalan que: “... *es esencial identificar las estructuras sustanciales de las materias y disciplinas con el fin de poder enseñarlos a los alumnos y de que estos capten el papel que desempeñan en el proceso de construcción del conocimiento ...*”_{p.(375)}.

Lo planteado supone que las estructuras sustanciales deberían ser el eje vertebrador de la selección y secuencia de los contenidos de enseñanza. Los autores Coll, C. y Rochera, M. [22, 1990] hacen referencia, a que todo el contenido por enseñar “... *debería consistir en su totalidad en conocimientos derivado de las disciplinas, puesto a que éstas*

presentan el conjunto organizado de una forma especialmente apta para la enseñanza y el aprendizaje ...” p.(376).

A tal efecto, las disciplinas son un conjunto de conocimientos que poseen diversas características que las adecúa para la enseñanza; entre las cuales se destacan:

- Contiene *simplificaciones analíticas*, esto obedece a que el conocimiento disciplinar permite entender la realidad a la que se refieren, gracias a la simplificación y al orden.
- Posee *dinamismo*, es decir, su capacidad le permite generar nuevos conocimientos y de provocar nuevos análisis y síntesis.
- Proporcionan *coordinaciones sintéticas*, de elementos seleccionados para ser comprensibles a la realidad, esto obedece a que las disciplinas tratan de poner de manifiesto las relaciones entre los principales componentes identificados, lo que le confiere al conocimiento disciplinar su carácter organizado y estructurado.

Sin embargo, es importante acotar que la estructura interna de una disciplina o de un corpus de conocimientos, está formada por conceptos, definiciones, procedimientos y teorías; las cuales no son las “... más adecuadas para facilitar el aprendizaje de un alumno que se inicia en el conocimiento de la disciplina ...” p.(376). Coll, C. y Rochera, M. [22, 1990]

La secuencia óptima del contenido de aprendizaje, no solo depende de la estructura lógica, sino también de la adecuación que adoptan estas estructuras para que el aprendiz pueda comprenderlo. Por tal razón, la utilización de la estructura lógica del contenido como base para el establecimiento de secuencias de aprendizajes, implica una interacción entre la estructura interna que posee una disciplina y la estructura interna que debe adoptar la *misma* disciplina para poder ser aprendido por los estudiantes.

Estructura Psicológica del Contenido.

Para establecer secuencias óptimas en el aprendizaje, es fundamental considerar la naturaleza del contenido de una disciplina y las características que poseen los alumnos. Para ello, es necesario distinguir los elementos internos que conforman una disciplina en particular

(estructura lógica) y la representación organizada que posee los elementos internos de la *misma* disciplina, en la estructura cognoscitiva de los aprendices (estructura psicológica).

En tal sentido, los autores Coll, C. y Rochera, M. [22, 1990] hacen referencia al autor Elam [1973] y señalan lo siguiente, “... *la estructura psicológica del conocimiento y en especial los principios que rigen su organización, constituyen para Ausubel el referente ideal para establecer secuencias óptimas de aprendizaje ...*”^{p.(377)}.

Con la finalidad de lograr tal propósito, es indispensable identificar los elementos fundamentales del contenido, ya que los elementos que son más generales, integran el mayor número de elementos restantes; luego deben ser organizados en un esquema jerárquico y racional; todo ello, con el objeto de secuenciarlos en función de los principios y leyes que establecen la organización psicológica del conocimiento; los cuales según Novak (1982, citado en Coll, C. [22, 1990]) pueden resumirse como a continuación se muestra:

- (1) *Todos los alumnos pueden aprender significativamente un contenido a condición de que dispongan de conceptos relevantes e inclusores en su estructura cognoscitiva.*
- (2) *El contenido del aprendizaje, debe ordenarse y secuenciarse de manera que los conceptos más generales e inclusivos se presentan al principio. Esto favorece la formación de conceptos inclusores en la estructura cognoscitiva de los alumnos y facilita, posteriormente el aprendizaje significativo de los otros elementos del contenido.*
- (3) *Con el fin de lograr una diferenciación progresiva del conocimiento del alumno; es decir, la incorporación de nuevos elementos en su estructura cognoscitiva, así como una reconciliación integradora posterior; es decir, la coherencia del conjunto de elementos incorporados -, las secuencias de aprendizaje deben ordenarse y secuenciarse presentando en primer lugar los conceptos más generales, avanzando de forma progresiva hacia los conceptos más específicos.*
- (5) *Tras la presentación de los conceptos más generales e inclusivos, la introducción de los elementos posteriores debe hacerse mostrando tanto las relaciones que mantienen con los primeros, como las relaciones que mantienen entre si.*
- (6) *La presentación inicial de los conceptos más importantes generales e inclusivos debe apoyarse en ejemplos concretos que los ilustren empíricamente. p.(377)*

Es fundamental realzar que la propuesta didáctica fue desarrolla considerando los principios que rigen la organización psicológica de este contenido. Como es sabido, “... *la teoría del aprendizaje verbal significativo considera que la secuenciación óptima de los contenidos encuentra a su referente ideal en la estructura psicológica del conocimiento y en los principios que rigen su organización.*”_{p.(100)}. Martín, E. y Sole, I. [46, 2001]

2.6. El Conocimiento Matemático.

El conocimiento matemático posee un conjunto de características que le otorga una notable especificidad, e incluso dichas características pueden definir lo que es el conocimiento matemático. Entre las diversas características del conocimiento matemático mencionadas por las autoras Onrubia, J.,Rochera, J. y Barberà, E. [56, 2001], conviene mencionar las siguientes:

- *Es un conocimiento de alto nivel de abstracción y generalidad, que elimina las referencias a objetos, situaciones y contextos particulares, y que se desvincula también de las formas de representación perceptivas e intuitivas de esos objetos, situaciones y contextos;*
- *Suprime intenciones, emociones, y afectos; es de naturaleza teórica, impersonal y atemporal;*

- *Es de naturaleza esencialmente deductiva, y no se valida mediante el contraste con fenómenos o datos de la realidad, como en otras disciplinas científicas, sino mediante un proceso interno de demostración a partir de determinadas definiciones fundamentales o axiomas; este carácter deductivo provoca, además, que el conocimiento matemático tenga, aún en mayor medida que otras ciencias, una estructura altamente integrada y jerarquizada;*
- *Es un conocimiento de alto nivel de abstracción y generalidad, que elimina las referencias a objetos, situaciones y contextos particulares, y que se desvincula también de las formas de representación perceptivas e intuitivas de esos objetos, situaciones y contextos;*
- *Se apoya en el lenguaje formal específico, que presenta notables diferencias con el lenguaje natural: implica un conjunto particular de sistemas notacionales, busca la precisión, el rigor, la abreviación y la universalidad, y su finalidad fundamental no es tanto la representación o la comunicación de fenómenos o situaciones reales cuanto la posibilidad de obtener resultados internamente consistentes, realizando inferencias válidas en términos del propio sistema axiomático que constituye el conocimiento matemático.*

pp.(388–489)

Sin embargo, cabe destacar que las matemáticas poseen una dimensión menos abstracta, más funcional y relacionada con la resolución de problemas en situaciones concretas, es por ello que “... constituye, también, una actividad cultural, social, e históricamente situada, influenciada por criterios mundanos de utilidad e intencionalidad, y basado en prácticas

cotidianas como contar, medir, localizar, diseñar, jugar, o explicar. Bishop (1999)"^{p.(489)}.
Onrubia, J., Rochera, J. y Barberà, E. [56, 2001].

Desde esta perspectiva, se pueden mencionar dos significados relacionados con el conocimiento matemático: el primero es el interno, formal y puramente matemático, y el segundo es el externo, referencial, que a su vez vincula el sistema formal de la matemática, con algunos aspectos de la vida real.

La investigación psicoeducativa ha permitido establecer las capacidades implicadas en la "*pericia matemática*"; cuyas capacidades incluyen el dominio de una extensa base de conocimientos declarativos y un conjunto igualmente extenso de procedimientos específicos, así como la posibilidad de controlar metacognitivamente ambos tipos de conocimientos.

El Conocimiento declarativo, no se limita a un conjunto de definiciones y de teoremas al margen del proceso de demostración que lo sustenta, sino que incluye también el razonamiento mediante el cual se desarrolla. Es por ello, que el conocimiento declarativo aporta elementos relevantes, como lo son: las características de un problema y sus condiciones internas para poder ejecutar un procedimiento particular, además se encuentra mediado por el lenguaje formal y por los sistemas notables en que se expresa; es decir, el conocimiento se caracteriza por incluir:

... hechos (como una colección de eventos ordenada en función de un criterio), conceptos, y sistemas conceptuales (que describen regularidades o relaciones entre hechos y que se designan mediante signos o símbolos) y principios (teorías o modelos explicativos o de naturaleza descriptiva normalmente basados en relaciones formales, lógicas y de causalidad) de carácter matemático(...), ello resulta especialmente relevante

desde el punto de vista de la enseñanza y el aprendizaje de este tipo de contenido, que no debe limitarse únicamente a enunciados o formulaciones finales, sino que debe extenderse también, en mayor o menor medida, a los procesos o caminos que conducen a estos enunciados o formulaciones finales.
p.(490) Onrubia, J.,Rochera, J.y Barberà, E. [56, 2001]

El conocimiento procedimental, se caracteriza por la acción (saber hacer), ya que supone la aplicación de secuencias de acciones y operaciones en las que se obtiene un resultado, vinculado con un objeto concreto. En el área de las matemáticas se pueden distinguir dos tipos de procedimientos como lo son: los algorítmicos y los heurísticos; dentro de los cuales los autores Onrubia, J.,Rochera, J. y Barberà, E. [56, 2001], hacen mención:

Los procedimientos algorítmicos desarrollan, preferentemente, capacidades matemáticas fundamentales basadas en la repetición e implican su aplicación a contextos necesarios. Por su parte, los procedimientos heurísticos implican un mayor esfuerzo cognitivo y piden del alumno un proceso de toma de decisiones, no predeterminadas, como en el caso de los algoritmos, en función de los resultados parciales que se van consiguiendo a lo largo de su aplicación. p.(492)

2.7. Criterios generales para la enseñanza de las Matemáticas.

Los autores Onrubia, J.,Rochera, J. y Barberà, E.)[56, 2001], mencionan lo siguientes criterios:

- *Contextualizar el aprendizaje de las matemáticas en actividades auténticas y significativas para los alumnos.*
- *Vincular el lenguaje formal matemático con su significado referencial.*

- *Orientar el aprendizaje de los alumnos hacia la comprensión y la resolución de problemas.*
- *Activar y emplear como punto de partida el conocimiento matemático previo, formal e informal, de los alumnos.*
- *Secuenciar adecuadamente los contenidos matemáticos, asegurando la interrelación entre las distintas capacidades implicadas en la adquisición del conocimiento matemático.*
- *Avanzar de manera progresiva hacia niveles cada vez más altos de abstracción y generalización.*
- *Enseñar explícitamente y de manera informada estrategias y habilidades matemáticas de alto nivel.*
- *Apoyar sistemáticamente la enseñanza en la interacción y cooperación entre los alumnos.*
- *Ofrecer a los alumnos oportunidades suficientes de “hablar matemáticas” en el aula.*
- *Atender los aspectos afectivos y motivacionales implicados en el aprendizaje y dominio de las matemáticas.* p.(498)

3. Análisis del Diseño Curricular (planes y/o programas de estudios).

En la actualidad, existen diversos criterios que se enfocan fundamentalmente hacia el análisis del diseño curricular (planes y/o programas de estudios). En tal sentido, es esencial definir el término “Análisis”; el cual se refiere a la “... *articulación y separación de las partes en un todo hasta llegar a conocer sus principios, teorías o elementos.*” p.(68). Rodríguez, N. [66, 2000]; por lo general, al análisis se le relaciona con la profundización, con el cuidado por los detalles, con la descomposición en partes para culminar con su opuesto y complemento, que es la síntesis; en la cual domina la abstracción y la búsqueda de la unidad y coherencia.

Entre los diversos criterios que permiten el análisis de programas educativos, se destacan: el análisis externo y el análisis interno. De este modo, el análisis externo se refiere al estudio de los aspectos formales que abarca el programa, es decir, de los componentes (elementos) que lo conforman; entre los cuales se pueden mencionar: la organización y la presentación. Por su parte, el análisis interno abarca los siguientes criterios a saber: fundamentación (filosófica, psicológica y sociológica), análisis de los elementos específicos del programa (objetivos, contenidos, actividades y recursos) y finalmente la eficiencia interna. En lo que respecta al presente trabajo de investigación, se le hará especial acotación a un criterio que corresponde al análisis interno; en particular, a los elementos específicos que abarca un programa de estudio; destacándose de ellos fundamentalmente: los objetivos, contenidos y las estrategia de aprendizajes.

3.1. Componentes Específicos que Abarca un Programa.

- (1) **Los objetivos:** Cumplen con dos funciones principales, la primera es la de servir de guía en las actividades de aprendizaje, y la segunda es la de proporcionar criterios para el control de dichas actividades. Los objetivos proceden de lo general a lo particular; en este proceso los objetivos pasan de ser fines de la educación a ser objetivos operacionales. En tal sentido, los objetivos deben considerar los siguientes criterios:
 - Claridad en el planteamiento.
 - Aspectos de comportamiento (cognoscitivo, afectivo y psicomotor).
 - Tipo de comportamiento que se espera de estudiante en relación a cada uno de los aspectos anteriores.
 - Condiciones en relación al tiempo.

- (2) **Contenidos:** La selección de los contenidos depende de la fundamentación filosófica psicológica y sociológica del curriculum; por consiguiente, se deriva de los objetivos generales de la educación en una formación social determinada; de igual forma se aplica para el análisis de los contenidos que constituye un programa. Para la selección de los contenidos es indispensable la participación de especialistas en las áreas a

considerar. Por otra parte, la autora Rodríguez, N. [66, 2000], refiriéndose a las teorías del autor Bruner, J. [1968] destaca que “... *el dominio de la asignatura se basa en el conocimiento y comprensión de su estructura ...*”^{p.(95)}. En tal sentido, este autor indica cuatro (04) principios que son aplicables a la selección de los contenidos:

1. *Entender los fundamentos hace la materia más comprensible. Esto es cierto no solamente en la física y en las matemáticas donde tenemos principalmente ilustrado este punto, sino igualmente en los estudios sociales y en la literatura;*
2. *un detalle se olvida rápidamente sino se coloca dentro de un patrón estructurado;*
3. *una comprensión de los principios y las ideas fundamentales, como antes se ha señalado, parece ser el camino principal para una transferencia de adiestramiento adecuada.* ^{pp.(95–96)}. Bruner, J. (1968, citado en Rodríguez, N. [66, 2000])

Tales planteamientos coinciden con los de Ausubel, en cuanto; le asigna gran relevancia a la organización de las áreas de conocimientos específicos. En tal sentido, establece “... *una diferencia entre significado lógico y psicológico del conocimiento, por cuanto sus estructuras se rigen por diferentes leyes (las leyes de la lógica de la clasificación y las leyes del aprendizaje respectivamente). Sin embargo, tienden a superponerse en cuanto se entiende el aprendizaje significativo como un proceso de inclusión en conceptos más generales ya existentes en la estructura cognoscitiva.*”^{p.(96)}. Rodríguez, N. [66, 2000]

Dadas las consideraciones que anteceden; la organización de los contenidos correspondientes a programas específicos, reflejará la estructura esencial de la disciplina o ciencia a la cual representan. Para la elección de los contenidos se plantean tres (03) aspectos o dimensiones: organización, pertinencia, y volumen; de los cuales se derivan criterios de análisis, presentación y un alto grado de interrelación.

- Organización: Se refiere a la disposición de las unidades de información que abarca la asignatura; la organización comprende tres criterios:
 - Estructura de la ciencia: Se refiere a que la disposición de los contenidos la asignatura no contradiga la organización del núcleo fundamental de la ciencia a la cual se desprende.
 - Secuencia: Se refiere a que cada nueva unidad de información se funde en la precedente en un programa de un curso.
 - Continuidad: Se refiere a la secuencia pero en un sentido vertical dentro del plan de estudio; en el cual puede incluir organización concéntrica, lineal o mixta.
- Pertinencia: Se refiere a la adecuación de los contenidos en cuanto: a la utilidad para el conocimiento de la realidad, el desarrollo actual de la ciencia.
- Volumen: Se refiere a la cantidad de información respecto al tiempo y el conocimiento fundamental que sirva de base para la adquisición de otros conocimientos.

(3) **Estrategias de aprendizaje:** El papel fundamental del docente es orientar, promover y crear las condiciones adecuadas para que se produzca un aprendizaje significativo en los estudiantes, las estrategias de aprendizaje tienen como propósito de enfatizar la idea de que lo importante es el aprendizaje, que la enseñanza está al servicio del aprendizaje y está subordinada al logro de las metas y objetivos.

En resumen, las estrategias de aprendizaje se pueden analizar desde varios aspectos a saber: en la búsqueda de su fundamentación psicológica en una teoría del aprendizaje, en cuanto a las características del aprendiz, en cuanto de consideración de algunos principios didácticos y en relación a las estrategias para el logro de los objetivos en una área específica de conocimiento.

3.2. Análisis del Programa Correspondiente a la Asignatura Matemáticas II de la Universidad Central de Venezuela.

El programa correspondiente a la asignatura Matemáticas II es común para las Licenciaturas en Biología, Química, Computación, Física, Geoquímica y Matemática de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela. En este programa se especifican las características principales de esta asignatura, tales como: el código: 8207, el número de créditos: 6, horas de práctica semanales: 4, horas de teoría semanales: 4, así como los requisitos que se necesitan para inscribirla: en el cual, el único requisito es haber aprobado Matemática I.

Los objetivos se especifican en un lenguaje idóneo en donde resulta evidente los conceptos, elementos o principios que el estudiante debe dominar, de tal manera que los objetivos expresan el vínculo que existe entre lo que los alumnos ya saben y los conceptos y principios nuevos que deben aprender.

Los autores Ausubel, D., Novak J. y Hanesian, H. [6, 1990], señalan que “... *al diseñar un curriculum nuevo o al planear un segmento de un programa de enseñanza es importante tener siempre en cuenta que el factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya conoce ...*”^{p.(309)}; lo que significa que cuando se planifica la enseñanza hay que tener como aspecto relevante lo que el alumno posee para así adquirir los nuevos cuerpos de conocimiento.

Otro aspecto presente en el contenido de Matemáticas II es planificado de forma tal que se observa un orden secuencial, ya que se presentan los temas principales *desde el principio mismo* del curso, de modo que sirvan como afianzamiento cognoscitivo para los temas posteriores, es decir, cada tema debe ser articulado con los que le preceden, lo que permite avanzar de lo más simple a lo más complejo.

Por otra parte, los temas están organizados dentro de un esquema jerárquico racional. En tal sentido, los autores Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. [6, 1990], señalan lo siguiente “... *esta tarea exige un talento especial con respecto al conocimiento de la disciplina y también*

la dirección ingeniosa por parte de expertos en la elaboración del curriculum durante el proceso de ‘develar’ el conocimiento de una disciplina ...” p.(317).

Es preciso mencionar que uno de los objetivos presente en el programa, es que el estudiante esté en capacidad de aproximar integrales definidas utilizando la Regla del Trapecio y la de Simpson, así como también se observa que el tema siete (07) se refiere al cálculo aproximado de integrales, en donde se especifican la estimación del error así como la aproximación de áreas por rectángulos, Regla del Trapecio y Regla de Simpson.

4. Diseño de la Propuesta Didáctica.

Para una mejor exposición y visualización en cuanto al diseño de la propuesta didáctica referida a la estimación del error en el Método de los Trapecios, es importante precisar con claridad y exactitud la significación de cada uno de los siguientes fundamentos: material de enseñanza y diseño de un material de enseñanza.

En tal sentido, el autor Dick, W. [28, 1979], define a un material de enseñanza como un dispositivo que tiene la función de “... *transmitir al estudiante, bien sea por medio de la palabra escrita o por cualquier otro medio de comunicación, los conocimientos que necesita adquirir para alcanzar los objetivos propuestos. Este material debe incluir no solo los contenidos necesarios para que el estudiante pueda alcanzar los objetivos principales, sino también, todos los conocimientos de tipo remedial o complementario que fuere necesario agregar.*” p.(183). Por otra parte, la autora Borrego, E. [29, 1995], concibe al diseño de un material de enseñanza como “... *el proceso sistemático mediante el cual se analizan las necesidades y metas de enseñanza, establecidas en el plan el curso y, a partir de ese análisis y de las características y conocimientos previos del estudiante se desarrollan los contenidos (...) para alcanzar esas metas.*” p.(55)

Las autoras Díaz, F. y García, B. [27, 2001], destacan que el diseño un material didáctico, se fundamenta:

... en la estructuración y organización de una serie de

elementos psicopedagógicos vinculados con los contenidos específicos de enseñanza, teniendo como finalidad potencial el aprendizaje de los estudiantes. De esta manera (...) abarca la selección y planificación de las experiencias educativas sistematizadas vinculadas a las unidades de perteneciente a un enseñanza proyectó formativo educacional específico, sea este escolarizado o no. En este sentido el diseño (...) guarda un nivel de generalidad menor que el diseño curricular, pero debe tener una estrecha relación de interdependencia con éste. p.(41)

Por consiguiente, el diseño un material educativo tiene como fin promover el aprendizaje significativo de contenidos específicos de enseñanza; y la adquisición de las habilidades deseadas. En tal sentido, permite establecer los aprendizajes que el estudiante debe alcanzar, y de seleccionar los procedimientos adecuados para orientar esos aprendizajes, así como los medios mas apropiados para transmitir la información nueva que se ha de aprender. Ahora bien, son múltiples los medios que se disponen para transmitir un contenido específico de enseñanza; es por ello, que los medios se clasifican partiendo de los “*atributos inherentes*”; es decir, de la capacidad que tengan los medios para presentar los estímulos necesarios para el logro de los objetivos deseados. En tal sentido, según del canal sensorial que utilice el medio, se clasifican en visual, auditivo, audiovisual y táctil. Los medios visuales poseen la capacidad de presentar imágenes las cuales pueden ser fijas o tener movimiento; entre los medios visuales se la hará especial acotación a los **materiales impresos**; esto obedece a que en el desarrollo de la propuesta didáctica referida a la estimación del error en el Método de los Trapecios, se caracteriza por ser un material de enseñanza impreso.

Para la transmisión rutinaria del contenido específicos de enseñanza, **los materiales didácticos impresos** son indudablemente el método a elegir, ya que presentan numerables aportaciones, entre las cuales se destacan:

- La velocidad de presentación depende del alumno; lo que le permite avanzar en el curso de acuerdo a su capacidad.
- Permite visualizar y analizar diversas demostraciones como fuente de información importante.

- Presentan mayor cantidad de materiales por unidad.
- Ofrece al estudiante distintos caminos para el estudio individualizado.
- Permite reflexionar el material y relacionarlo con las ideas existentes en la estructura cognoscitiva.
- Presenta un nivel adecuado de elaboración y presencia de ideas explicativas e integradoras.

Los contenidos específicos de enseñanza, pueden estar organizados en **módulos** y/o unidades didácticas; los cuales se presentan en un formato auto-didáctico que incluye los objetivos de aprendizajes y prevé la participación activa de los estudiantes. En tal sentido, es relevante destacar, que dependiendo de las características de los objetivos establecidos para el logro de determinados aprendizajes, del grado de atracción del contenido a ser transmitido y de la cantidad de información que posee un contenido específico; es fundamental presentar la información en unidades mínimas que permitan lograr determinados aprendizajes, así como las experiencias requeridas para su logro. Tales unidades, comúnmente reciben el nombre de **módulos**; y permiten desarrollar “... una secuencia de eventos de aprendizaje para orientar la consecución, por parte del aprendiz, de un amplio rango de objetivos.” En la misma forma, “... da la oportunidad de organizar gran número de secuencias y experiencias de aprendizaje; facilita la revisión continua de los materiales de estudio y permite que los docentes desarrollen sus propias ideas ...”^{p.(56)} Dorrego, E. y Garcia, A. [31, 1990]. Además, permite desarrollar capacidades en niveles de aprendizaje bajos, medios y altos, así como un pensamiento convergente y divergente, por su posibilidad de contrastar diversos enfoques; a fin de enriquecer el aprendizaje significativo de amplios bloques de conocimientos altamente estructurados; todo ello, con el propósito de prever una organización adecuada de las ideas contenidas en la información que se ha de aprender.

En lo que respecta al presente trabajo de investigación, se define al término módulo como “... una unidad de instrucción auto-suficiente y auto-didáctica que es un componente de todo un currículo, en el cual se expone una terna integrada y le proporciona al estudiante la información necesaria para que pueda adquirir ciertos conocimientos y habilidades.”^{p.(23)} Dick, W. [28, 1979]. Por lo tanto, los módulos representan un medio eficaz de aprendizaje; el cual le proporciona a el aprendiz desarrollar las diversas habilidades descritas en lo objetivos.

En tal sentido, la propuesta didáctica referida a la estimación del error en el Método de los Trapecios se centra en el proceso de enseñanza y aprendizaje; y se orienta hacia el logro de aprendizaje significativo. En cuanto al diseño de la propuesta didáctica, se adopta “*las dimensiones para el diseño de materiales didácticos impresos*” propuesta por las autoras Díaz, F. y García, B. [27, 2001]; el cual se esquematiza en la siguiente figura:



FIGURA 2.1. Esquema para el diseño de materiales didácticos impresos.

4.1. Dimensiones que Integran el Diseño de Materiales Didácticos Impresos:

A continuación, se exponen las dimensiones que constituyen el diseño de materiales didácticos impresos; las cuales se centran en el proceso de enseñanza y aprendizaje; y se orientan en la construcción significativa de un área específica de conocimiento.

- **Contexto y sentido de las actividades de aprendizaje.**

En la presente dimensión los materiales educativos vinculan a los estudiantes con las tareas a realizar y a su vez muestran la relevancia de las mismas y le proporcionan un panorama realista del nivel del compromiso y las competencias deben alcanzar. Además le permite al aprendiz establecer el nivel de involucramiento y motivación en torno a las mismas e incluso prever el abordaje y esfuerzo que debe de manifestar

en el proceso de enseñanza del aprendizaje. Esta dimensión comprende los siguientes aspectos:

- La delimitación de los objetivos, fundamentación o estándares que debe alcanzar el aprendiz, en relación a las tareas que va a enfrentar.
- La inclusión de los elementos introductorios o interrogantes previas al contenido de enseñanza.
- Inclusión de contenidos y estrategias pertinentes como lo son: presentación apropiada de ilustraciones y aplicaciones específicas con los que el aprendiz se pueda identificar.

• **Tratamiento didáctico de los contenidos**

En esta dimensión se considera fundamental para el logro de un determinado propósito la apropiación y asimilación por parte de los aprendices. Por lo cual, los contenidos de aprendizajes se relacionan con aquellos saberes que se pretende que adquieran los aprendices.

• **Organización, secuencia y formato**

En cuanto a la secuencia y organización del contenido de una disciplina, es importante destacar los criterios aplicables al establecimiento de los aprendizajes que se intenta promover. En tal sentido, la secuencia y organización abarca diversos criterios a saber:

- Diferenciación progresiva. (Ausubel, D.)
- Teoría de la elaboración. (Reigelud, C.)
- El curriculum en espiral. (Bruner, J.)
- Jerarquías de aprendizaje. (Gagné, R.)

Otro aspecto importante, es el formato que adopta los materiales didácticos, ya que el manejo pertinente de diversos formatos de representación ejerce un efecto facilitador del aprendizaje; el cual puede ser exclusivamente lingüístico o textual (texto escrito) ; o bien visoespacial (presentación gráfica o ilustrada) audiovisuales e incluso multimedia, o puede existir combinaciones en los diversos formatos.

- **Modelos del aprendizaje: activo, estratégico y cooperativo.**

El aprendizaje apoyado en la lectura de materiales impreso, es un tipo de aprendizaje que involucra procesos activos de comprensión lectora; esto es debido a que el lector no solo realiza una transposición unidireccional de los mensajes comunicados en el material de enseñanza, si no que el lector utiliza todos los recursos cognoscitivos pertinentes para construir una representación fidedigna a partir del discurso escrito. En tal sentido, el texto escrito expone una gran diversidad de estrategias, a fin de facilitar la comprensión o promover procesos de reflexión y aplicación del conocimiento. En la literatura reportada se evidencia una gran diversidad de estrategias, entre las cuales se pueden mencionar: organizadores, ilustraciones, señalizaciones, entre otras.

- **Seguimiento y evaluación del aprendizaje.**

Esta dimensión expresa y evalúa si el material de enseñanza proporciona argumentos suficientes para valorar la efectividad y la factibilidad de los mismos; factor que condiciona la selección de los medios. En tal sentido, en el material de enseñanza se debe evaluar:

- Posesión de conocimiento suficiente referido al contenido por aprender.
- Uso y aplicación apropiado de ese conocimiento en las situaciones particulares en que está prevista su ejecución.

Es importante acotar que los materiales de enseñanza escritos pueden implicar dos tipos de evaluación (formativa y /o sumativa). Sin embargo, “... *no existe un proceso sistemático, para la evaluación formativa y sumativa (...) salvo algunas investigaciones individuales. Por esta razón, es necesario establecer enfoques más flexibles y sencillos que se adapten a las condiciones académicas y administrativa de las universidades venezolanas.*”_{p.(114)}. Dorrego, E. [30, 1991]. Por consiguiente, a fin de validar la propuesta didáctica referente a la estimación del error en el Método de los Trapecios; se consideran aspectos como: la coherencia del material escrito

respecto a las concepciones teóricas que dio su origen (diseño) y la pertinencia de los aspectos técnicos - gráficos (realización).

5. Elementos Estructurales que Conforman la Propuesta.

A continuación, se exponen los elementos estructurales que integran el desarrollo de la propuesta didáctica referida a la estimación de error en el Método de los Trapecios.

Lema: Un teorema recibe el nombre de Lema cuando por si solo no tiene mucha transcendencia en la teoría que se esta desarrollando pero va a ser usado, inmediatamente después de su formulación, en la demostración de otro teorema de marcada importancia.

Proposición: Una proposición es la expresión lingüística que posee una función informativa, que afirma o niega algo y tiene sentido decir de ella que es verdadera o falsa.

Teorema: Proposición demostrable lógicamente partiendo de axiomas o de otros teoremas ya demostrados, mediante reglas de inferencia aceptadas.

Ilustraciones: Recurso pictórico utilizado para representar o reproducir ideas de tipo concreto, conceptos de tipo visual, procedimientos lógico matemáticos. Generalmente se utilizan para apoyar los procesos de codificación de la información por aprender. Entre las funciones de las ilustraciones se pueden mencionar:

- Permitir la explicación en términos visuales de lo que sería difícil comunicar en forma lingüística y de integrar en un todo, información que de otra forma quedaría fragmentada.
- Contribuir a clarificar y organizar la información
- Favorecer la retención de la información, ya que se ha demostrado que las ilustraciones favorecen el recuerdo de los textos científicos y textos narrativos. Balluerka (1995, referido en Díaz, F. y García B. [27, 2001]).

6. Sustentación Legal.

Constitución de la República Bolivariana de Venezuela.

Publicada en Gaceta Oficial Extraordinaria N° 5.453 de la República Bolivariana de Venezuela. Caracas, viernes 24 de marzo de 2000.

El desarrollo de esta investigación se basa en lo expresado en la Constitución Nacional en sus artículos:

Artículo 109: El Estado reconoce la autonomía universitaria como principio y jerarquía que permite a los profesores, profesoras, estudiantes, egresados, egresadas de su comunidad dedicarse a la búsqueda del conocimiento a través de la investigación científica, humanística y tecnológica, para beneficio espiritual y material de la nación.

Artículo 110: El Estado reconocerá el interés público de la ciencia, la tecnología, el conocimiento, la innovación y sus aplicaciones y los servicios de información necesarios por ser instrumentos fundamentales para el desarrollo económico, social y político del país, así como para la seguridad y soberanía del país.

Ley Orgánica de Educación.

Publicada en Gaceta Oficial No. 2635, Extraordinario de fecha 28-07-80.

De igual forma, la Ley Orgánica de Educación, establece en los artículos siguientes:

Artículo 27, ordinal 2: Fomentar la investigación de nuevos conocimientos e impulsar el progreso de la ciencia, la tecnología, las letras, las artes y demás manifestaciones creadoras del espíritu en beneficio del bienestar del ser humano, de la sociedad y del desarrollo independiente de la nación.

Ley de Universidades

Gaceta Oficial N° 1.429 Extraordinario

8 de Septiembre de 1.970

Dentro de las disposiciones legales que fundamentan el presente trabajo de investigación, se pueden enunciar los siguientes artículos de la mencionada Ley de Universidades:

TÍTULO I DISPOSICIONES FUNDAMENTALES

Artículo 1. La Universidad es fundamentalmente una comunidad de intereses espirituales que reúne a profesores y estudiantes en la tarea de buscar la verdad y afianzar los valores trascendentales del hombre.

Artículo 3. Las Universidades deben realizar una función rectora en la educación la cultura y la ciencia. Para cumplir esta misión, sus actividades se dirigirán a crear, asimilar y difundir el saber mediante la investigación y la enseñanza; a completar la formación integral iniciada en los ciclos educacionales anteriores; y a formar los equipos profesionales y técnicos que necesita la Nación para su desarrollo y progreso.

Artículo 4. La enseñanza universitaria se inspirará en un definido espíritu de democracia, de justicia social y de solidaridad humana, y estará abierta a todas las corrientes del pensamiento universal, las cuales se expondrán y analizarán de manera rigurosamente científica.

Artículo 6. La finalidad de la Universidad tal como se define en los artículos anteriores, es una en toda la Nación. Dentro de este concepto se atenderá a las necesidades del medio donde cada Universidad funciones y se respetará la libertad de iniciativa de cada Institución.

Artículo 9. Las Universidades son autónomas. Dentro de las previsiones de la presente Ley y de su Reglamento, se disponen de:

1. Autonomía organizativa, en virtud de la cual podrán dictar sus normas internas;
2. Autonomía académica, para planificar, organizar y realizar los programas de investigación, docentes y de extensión que fueren necesarios para el cumplimiento de sus fines;
3. Autonomía administrativa, para elegir y nombrar sus autoridades y designar su personal docente, de investigación y administrativo;
4. Autonomía económica y financiera para organizar y administrar su patrimonio.

SECCIÓN IV: De las Facultades

Artículo 47. La Universidad realiza sus funciones docentes y de investigación a través del conjunto de sus Facultades. Por su especial naturaleza a cada Facultad corresponde enseñar e investigar una rama particular de la Ciencia o de la Cultura, pero todas se integran en la unidad de la Universidad y deben cumplir los supremos fines de esta. El Reglamento de

cada Universidad, previa aprobación del Consejo Nacional de Universidades, determinará las Facultades que funcionarán en ella.

Artículo 51. La enseñanza de cada Facultad se regirá por un plan de estudio previamente aprobado por el Consejo Universitario, de acuerdo con lo establecido por el numeral 5 del artículo 62 de la presente Ley.

SECCIÓN V: De los consejos de las Facultades

Artículo 62. Son atribuciones del Consejo de la Facultad:

Parágrafo 2. Coordinar las labores de enseñanza, de investigación, y las otras actividades académicas de la Facultad, de acuerdo con lo dispuesto en el Consejo Universitario.

Parágrafo 5. Considerar los planes de enseñanza elaborados por Escuelas respectivas, y elevarlos, para su aprobación final, al Consejo Universitario;

Parágrafo 6. Aprobar los programas de estudio elaborados por las Escuelas;

SECCIÓN VIII: De las Escuelas

Artículo 68. Las labores docentes de cada Facultad serán realizadas a través de las Escuelas que la integren. Por su especial naturaleza a cada Escuela corresponde enseñar e investigar un grupo de disciplinas fundamentales y afines dentro de una rama de la Ciencia o de la Cultura.

Artículo 69. El gobierno de las Escuelas será ejercido por el Director y el Consejo de la Escuela. Las Escuelas estarán constituidas por Departamentos y Cátedras. La Cátedra es la unidad académica primordial integrada por uno o más profesores que tienen a su cargo la enseñanza o la investigación de una determinada asignatura. El Departamento es el conjunto de Cátedras que se integran en la unidad de una disciplina. Cada Departamento coordinará el funcionamiento de las diversas Cátedras que lo integren y podrá prestar sus servicios a otras Facultades.

Artículo 71. Son atribuciones del Consejo de Escuela:

1. Coordinar las labores y el funcionamiento de las cátedras y departamentos de la Escuela;
2. Elaborar los planes y programas de estudio y someterlos a la aprobación del Consejo de la Facultad;
3. Proponer la incorporación y la promoción del personal docente;
4. Evacuar las consultas que en materia académica le formule el Consejo de la Facultad.

SECCIÓN X: Del Personal Docente y de Investigación

Artículo 83. La enseñanza y la investigación, así como la orientación moral y cívica que la Universidad debe impartir a sus estudiantes, están encomendadas a los miembros del personal docente y de investigación.

Capítulo II: De la Enseñanza Universitaria

SECCIÓN I: Disposiciones Generales

Artículo 145. La enseñanza universitaria se suministrará en las Universidades y estará dirigida a la formación integral del alumno y a su capacitación para una función útil a la sociedad.

Artículo 146. Además de establecer las normas pedagógicas internas que permitan armonizar la enseñanza universitaria con la formación iniciada en los ciclos educacionales anteriores las universidades señalarán orientaciones fundamentales tendientes a mejorar la calidad general de la educación en el país.

7. Bases Matemáticas.

Para poder enunciar la definición de integral definida es importante establecer algunos conceptos previos.

Para comenzar se define una *partición* \mathcal{P} de un intervalo cerrado $[a, b]$ como una colección finita de puntos de $[a, b]$, de los cuales uno es a y otro es b .

Es usual numerar los puntos de una partición como $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, suponiendo que el conjunto está ordenado de la siguiente manera

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

La partición \mathcal{P} da origen a una división de intervalos de la siguiente forma

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n],$$

donde n es un entero positivo.

La longitud del k -ésimo subintervalo correspondiente a la partición \mathcal{P} del intervalo $[a, b]$ viene dada por

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}.$$

En una partición típica del intervalo $[a, b]$, los Δx_k son de distintas longitudes; en tal sentido, se define la *norma de la partición* \mathcal{P} , que se denotará por $\|\mathcal{P}\|$, como el mayor de los números Δx_k , es decir

$$\|\mathcal{P}\| = \text{máx}\{x_k - x_{k-1} : k = 1, \dots, n\}.$$

Las definiciones dadas permiten establecer una primera aproximación del área bajo la curva, como suma de áreas cuyas bases son particiones del intervalo $[a, b]$. Este concepto es conocido como sumas de Riemann.

Sumas de Riemann.

f una función definida en el intervalo $[a, b]$ y sea \mathcal{P} una partición de $[a, b]$. Una *suma de Riemann de f con respecto a la partición \mathcal{P}* es una expresión de la forma

$$R_{\mathcal{P}} = \sum_{k=1}^n f(w_k) \Delta x_k,$$

donde w_k es un número perteneciente al intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, para $k = 1, 2, \dots, n$.

La figura que se muestra a continuación, permite visualizar una idea geométrica de lo que representa una suma de Riemann, en términos del área comprendida entre el eje x y el gráfico de la función.

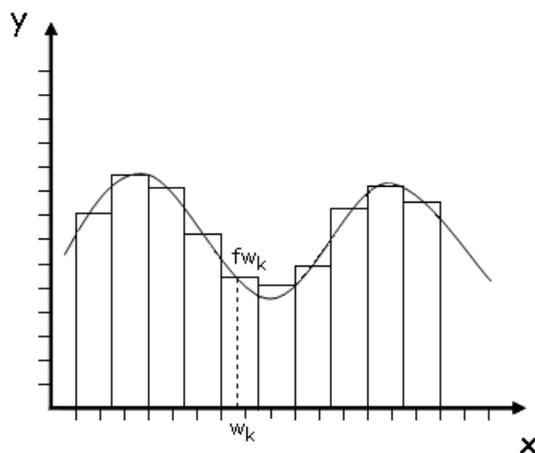


FIGURA 2.2. Interpretación geométrica de la suma de Riemann.

En el caso en que f es no negativa, resulta claro que una suma de Riemann es una primera aproximación del área comprendida entre el eje de abscisas y el gráfico de f .

Es importante destacar que $f(w_k)$ no representa el valor máximo ni mínimo de f en $[x_{k-1}, x_k]$. Al construir el rectángulo de base Δx_k y altura $f(w_k)$, éste no está inscrito ni circunscrito a la porción del gráfico de f que queda sobre el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Adicionalmente, como f puede tomar valores negativos, algunos de los términos de R_p que conforman la suma de Riemann pueden tomar valores negativos. A los intervalos en los que el gráfico de la función f está por encima del eje de las abscisas, le corresponden sumandos positivos y a los otros le corresponden sumandos negativos.

La Integral Definida.

Es intuitivamente claro que si la norma de la partición \mathcal{P} tiende a 0, entonces las sumas de Riemann correspondientes a \mathcal{P} se aproximan al área algebraica de la región limitada por el eje de abscisas y el gráfico de f . El término área algebraica se refiere a que las áreas de las regiones donde f es positiva se suman como positivas y donde f es negativa se suman como negativas.

La idea es definir la integral definida de f desde a hasta b por

$$\lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_k^n f(w_k) \Delta x_k,$$

en caso de que el límite exista. En términos precisos

DEFINICIÓN 2.1 (Integral de Riemann). Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y acotado y sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es *integrable Riemann* en $[a, b]$ si existe $A \in \mathbb{R}$ que satisface lo siguiente: para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ es una partición de $[a, b]$, $\{c_1, \dots, c_n\} \in [a, b]$ son tales que $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$ y $\|\mathcal{P}\| < \delta$, entonces

$$\left| \sum_{i=1}^n f(c_i)(t_i - t_{i-1}) - A \right| < \varepsilon.$$

El número A se le llama *integral definida de f desde a hasta b* y se denota por

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Derivada de una Función.

DEFINICIÓN 2.2. $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función y sea $x \in (a, b)$. Se dice que f es *derivable* en el punto x si existe el siguiente límite:

$$\lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

En este caso, el límite se denota por $f'(x)$ y recibe el nombre de *derivada* de f en el punto x .

Teorema Fundamental del Cálculo.

Este teorema es muy útil para calcular integrales definidas, ya que en ciertos casos, permite encontrar la integral definida sin utilizar límites de suma. Suele enunciarse de las siguientes maneras.

TEOREMA 2.3. Sea f integrable en $[a, b]$ y definamos F sobre $[a, b]$ por

$$F(x) = \int_a^x f$$

Sea $c \in (a, b)$. Si f es continua en c , entonces F es diferenciable en c y

$$F'(x) = f(x)$$

Además si f es continua en a , entonces $F'_+(a) = f(a)$ y si f es continua en b entonces $F'_-(b) = f(b)$.

TEOREMA 2.4. Si f es continua en $[a, b]$ y $f = g'$ para alguna función g , entonces:

$$\int_a^b f = g(b) - g(a)$$

Existen funciones cuya primitiva no se puede expresar en términos de funciones elementales. Ejemplos de ello lo representan las funciones $f(x) = e^{-x^2}$, $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$, $f(x) = \sqrt{1+x^4}$.

Es relevante destacar que la función $f(x) = e^{-x^2}$ aparece muy frecuentemente en la teoría de probabilidades, puesto que, salvo un cambio de variable, corresponde con la densidad de la distribución normal. En tal sentido, es importante calcular la integral definida de esta función sobre un intervalo, para resolver algunos problemas de probabilidades.

De manera similar, es frecuente encontrar que es necesario calcular integrales definidas de funciones cuya primitiva no se puede expresar en términos de funciones elementales. Existen diferentes métodos numéricos que permiten calcular el valor aproximado de la integral definida de una función continua en un intervalo cerrado. Uno de estos métodos es conocido con el nombre de *Regla del Trapecio* o *Regla Trapecial*.

En términos geométricos, para esos casos donde no se puede evaluar una integral definida por medio de funciones elementales, la Regla del Trapecio da como resultado una aproximación del área bajo la curva, utilizando trapecios en lugar de rectángulos, asociados con la suma de Riemann (es importante recordar que la suma de Riemann es la base para la conceptualización de la integral definida).

Regla del Trapecio.

A continuación se presenta una demostración intuitiva a lo que se conoce como Regla de los Trapecios o Método Trapecial.

Supongamos que f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y que los números $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ determinan una partición \mathcal{P} del intervalo $[a, b]$.

Cada $x_i \in [a, b]$ tiene una imagen $f(x_i)$. Por lo tanto la partición \mathcal{P} da origen a n trapecios. Los vértices de estos trapecios son los puntos $(x_i, 0)$, $(x_{i+1}, 0)$, $(x_i, f(x_i))$ y $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$, tal como se muestra en la siguiente figura.

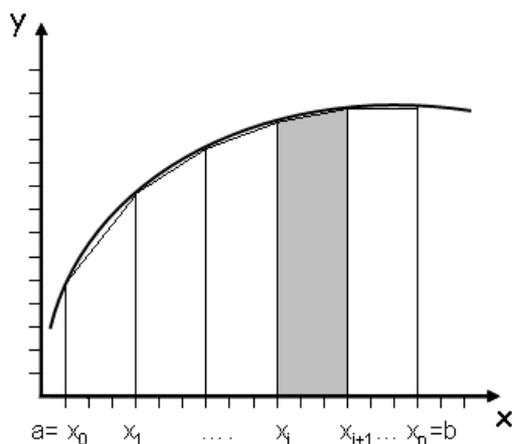


FIGURA 2.3. Interpretación geométrica del i -ésimo trapecio.

El área del i -ésimo trapecio viene dada por

$$A_i = \frac{(x_{i+1} - x_i)(f(x_{i+1}) + f(x_i))}{2}$$

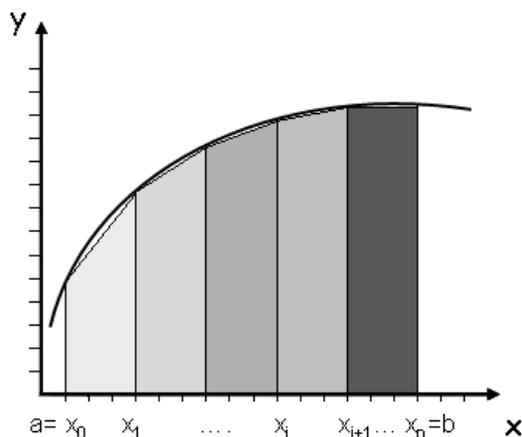
La suma de las áreas de los n trapecios es una aproximación al área bajo la curva en el intervalo $[a, b]$.

Por lo tanto tenemos

$$\int_a^b f(x)dx \approx A_1 + A_2 + \dots + A_i + \dots + A_n$$

Sustituyendo el valor del área de cada trapecio, se obtiene que la suma es igual a

$$\frac{(x_1 - x_0)(f(x_1) + f(x_0))}{2} + \frac{(x_2 - x_1)(f(x_2) + f(x_1))}{2} + \dots + \frac{(x_n - x_{n-1})(f(x_n) + f(x_{n-1}))}{2}$$

FIGURA 2.4. Interpretación geométrica de n trapecios.

Si la partición la escogemos de manera que $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$, para $i = 1, \dots, n$, al factorizar la suma por agrupación de términos y extrayendo factores comunes, se obtiene

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n} [f(x_0) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + \dots + f(x_n)],$$

es decir

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Es de esperarse que este método de un resultado aproximado del valor de $\int_a^b f(x)dx$. Este resultado debería ser más acertado en la medida en que el número de subintervalos que conforman la partición \mathcal{P} que dividen al intervalo $[a, b]$ tienda a infinito, haciendo que $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ tienda a 0.

En una gráfica, esa diferencia entre el valor de la integral y el cálculo aproximado de la misma por la Regla del Trapecio es igual al área del espacio entre el gráfico de f y el área no cubierta por los trapecios.

CAPÍTULO 3

Marco Metodológico.

1. Tipo y Nivel de la Investigación.

El estudio a realizar se caracteriza por ser una metodología orientada hacia la investigación aplicada, ya que está comprometida con la elaboración de dispositivos didácticos para la acción. Por tal razón, es el campo propicio para la estructuración específica del contenido curricular referido a la estimación del error en el Método de los Trapecios.

Esto trae como consecuencia que la metodología a utilizar para el desarrollo del presente trabajo de investigación es del tipo “**Investigación-Acción**”, cuya finalidad esencial no es la acumulación de conocimientos sobre la enseñanza o la comprensión de una realidad educativa, sino fundamentalmente aportar información que guíe la toma de decisiones y los procesos de cambio para las mejoras de la misma.

M. Paz Sandin E.[58, 2003] menciona:

La investigación acción contribuye a la recreación sistemática sobre la práctica social y educativa, con vistas a la mejora y al cambio tanto personal como social. Unifica procesos considerados a menudo independientes; por ejemplo la enseñanza, el desarrollo del currículum, el contenido, la evaluación, la investigación educativa y el desarrollo profesional. Así pues, este tipo de investigación juega un papel esencial en todas aquellas áreas o ámbitos educativos que se deseen mejorar, transformar y/o innovar.^{p.(164)}

Los autores Carr, W. y Kemmis, S. en el texto “*Teoría Crítica de la Enseñanza*”, señalan que toda investigación - acción posee dos objetivos fundamentales que son: *mejorar e interesar*, en el cual el objetivo interesar va de la mano con el de mejorar. En cuanto a la mejora,

establece que la investigación acción se dirige a tres sectores que son: el mejoramiento de una *práctica*, a la mejora del *entendimiento* de una práctica por parte de quienes la realizan y por último el mejoramiento de una *situación*, en que dicha práctica tiene lugar.

Realizadas las consideraciones anteriores, hay tres aspectos necesarios que involucran la investigación acción:

- (1) Plantea una forma de acción estratégica para la mejorar la educación mediante su cambio.
- (2) Se desarrolla siguiendo una espiral introspectiva: una espiral de ciclos.
- (3) Involucra a todos los responsables de la acción.

Es importante mencionar que existen diversas formas de concebir el proceso de investigación acción; pero en lo que corresponde a este estudio la concepción más generalizada es entender dicho proceso como una espiral de cambio que consta de cuatro fases:

- Diagnosticar la situación problemática para la práctica.
- Formular las estrategias de acción para resolver el problema.
- Evaluar las estrategias de acción.
- Reflexión e interpretación de resultados.

La investigación acción, admite como eje primordial la mejora de la práctica educativa en el proceso de enseñanza-aprendizaje, en el cual se considera que el camino a recorrer en el proceso, es tan importante o mas que el resultado final.

El autor McIntyre, A. (citado por los autores Carr, W. y Kemmis, S.[14, 1998]) establece que las prácticas en función de sus valores se define como:

...cualquier forma de actividad humana cooperativa, coherente, compleja y socialmente establecida, por medio de la cual se realizan unos bienes internos a dicha actividad, mientras

se intentan alcanzar ciertos criterios de excelencia propios de la actividad y parcialmente definitivos de la misma, siendo la consecuencia que se van ampliando sistemáticamente las capacidades humanas para conseguir la excelencia y las concepciones humanas de las finalidades y de los bienes que ella supone... p.(206)

EL autor Elliott [34, 1993] perfila diez características distintivas del proceso de investigación-acción:

- (1) Examina problemas que resultan difíciles para los profesionales en ejercicio.
- (2) Estos problemas se consideran resolubles.
- (3) Estos problemas requieren una solución práctica.
- (4) La investigación-acción deja en suspenso una definición acabada de la situación hasta que se emprende la investigación exploratoria.
- (5) La meta es profundizar la comprensión del problema del investigador.
- (6) La investigación-acción utiliza la metodología del estudio de casos en un intento por “contar una historia” sobre lo que esta sucediendo y como los acontecimientos permanecen unidos.
- (7) El estudio de casos se comunica desde el punto de vista de las percepciones y las creencias de los que están presentes en el entorno: profesores, estudiantes, etc.
- (8) La investigación-acción utiliza el lenguaje del discurso cotidiano empleado por los participantes.
- (9) La investigación-acción sólo puede validar en su dialogo sin restricciones de los participantes.
- (10) Debe haber un flujo libre de información dentro de los grupos de apoyo y entre los actores en el proyecto.

En el marco de la investigación planteada, el nivel es descriptivo, puesto que es recomendable cuando se pretende ejecutar una acción, ya que al presentar el estudio de una situación tal y como ocurre en la realidad, incluyendo todos sus casos y características, es posible conducir a una planificación tendiente a mantener, corregir, reformar o cambiar una situación específica; la cual dependerá de los resultados arrojados en el proceso de investigación. De

este modo, el levantamiento de información y/o recolección se realizará basado en técnicas de investigación cualitativa.

En tal sentido, el termino “*investigación cualitativa*” constituye un concepto amplio que incluye diversos métodos y estrategias de investigación. Para objeto del presente trabajo de investigación se concibe la investigación cualitativa como “... *una actividad sistemática orientada a la comprensión en profundidad de los fenómenos educativos y sociales, a la transformación de prácticas y escenarios socioeducativos, a la toma de decisiones también hacia el descubrimiento y desarrollo de un cuerpo organizado de conocimiento.*”^{p.(123)} Palella, S. y Martins F. [59, 2004]

2. Descripción de las Fases en la Investigación-Acción.

Fase 1: Diagnóstico de la Situación Problemática.

El tópico relativo a la estimación del error en el Método de los Trapecios resulta importante, ya que está incluido en el tema número 7, denominado “Cálculo aproximado de integrales”, del programa correspondiente a la asignatura Matemáticas II de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela.

Para el estudio de la situación en la cual se encuentra la enseñanza este contenido curricular se procedió en primer lugar, a la realización de entrevistas a expertos que laboran como docentes en la asignatura Matemáticas II de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, quienes están vinculados con la situación a estudiar. En tal sentido, las entrevistas fueron estructuradas, sobre la base de un formulario previamente establecido y estrictamente normalizado; en el cual se presentan una serie de preguntas (abiertas y cerradas) formulada de manera clara y concisa; y focalizadas en torno a los tópicos y/o aspectos relevantes.

Luego de las entrevistas, se procedió a realizar una revisión documental mediante la lectura exhaustiva, con el propósito de identificar en fuentes bibliográficas preseleccionadas y diseñadas para estudiantes de carreras científicas y afines, el contenido curricular referido a

la estimación del error en el Método de los Trapecios. Para ello, se realizó una revisión bibliográfica donde fueron incluidos textos que correspondiesen con el programa de la asignatura Matemáticas II. Posteriormente se procedió a efectuar una revisión bibliográfica donde fueron incluidos textos que correspondiesen al programa de la asignatura Análisis Numérico y que incluyesen este contenido; para así recolectar la información, organizarla y sistematizarla.

Este proceso permitió extraer los datos comunes y diferenciables evidenciados en la revisión documental realizada en las fuentes bibliográficas preseleccionadas, con el objeto de establecer las peculiaridades específicas y los aspectos relevantes de este contenido. Los datos seleccionados fueron clasificados con el propósito de elaborar síntesis parciales que luego se incorporaron en una síntesis general, a fin de describir e interpretar de forma total la información recolectada; y así efectuar generalizaciones.

Tanto la revisión documental como la entrevista a los diversos docentes, permitió inferir la carencia en cuanto al desarrollo de la demostración de la fórmula para la estimación del error en el Método de los Trapecios, lo que implicó una estructuración lógica de este contenido como base para el establecimiento de secuencias de aprendizaje, lo que conlleva a una interacción entre la estructura interna de un *“cuerpo organizado de conocimiento”* y la estructura que debe adoptar este mismo *“cuerpo organizado de conocimiento”* para que pueda ser apto para la enseñanza y el aprendizaje.

Fase 2: Formular las Estrategias de Acción.

A fin de mejorar la situación problemática, surge la necesidad de desarrollar una propuesta didáctica referente a la estimación del error en el Método del los Trapecios, bajo el perfil de material impreso; que se adaptase a las necesidades de los cursos básicos de la asignatura Matemáticas II de Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela.

Con la finalidad de lograr tal propósito, se procedió a realizar un análisis de contenido con la intención de identificar desde un ámbito instruccional los tópicos y/o aspectos relevantes que abarca esta área de conocimiento, lo que podría ser pertinente para una mejor comprensión y visualización por parte del aprendiz.

Paralelo a este proceso, se realizaron síntesis para establecer los componentes didácticos necesarios que conformarían el desarrollo de la propuesta didáctica referente a la estimación del error en el Método del los Trapecios; de esta forma, fueron seleccionados los elementos más acorde para una mejor asimilación y visualización en cuestión. Posteriormente, se procedió a identificar los núcleos conceptuales de la estructura interna de este contenido, lo que permitió determinar los diferentes elementos estructurales que intervendrían en el desarrollo de la demostración de la formula para la estimación del error en el Método de los Trapecios; los cuales se integran por varios tipos de conceptos matematicos, procedimientos, representaciones simbolicas, lemas, proposiciones, teoremas, entre otros; tales componentes identificados se relacionan entre sí para lograr el objetivo final, pues cada una de estas acciones por si solas no conducen al desarrollo de la misma. De esta forma, los componentes (elementos) y acciones seleccionadas le confieren al desarrollo de la propuesta una secuencia jerárquica estructurada y racional , la cual le constituye una forma especialmente apta para la enseñanza y el aprendizaje de este contenido curricular. Sin embargo, es importante acotar que la demostración debe apoyarse en ejemplos concretos, que ilustren de forma visual aspectos de razonamiento analítico y geométricos.

Como parte de la revisión documental se incluyó la sección “Classroom Notes” de los diversos números de las revistas American Mathematical Monthly. Esta sección de la revista está dedicada al intercambio de ideas acerca de la enseñanza de las matemáticas. Mediante la revisión se selecciono un artículo de S.K. Stein [71, 1976] donde, de una manera geométrica y sumamente ingeniosa se logra obtener un estimado del error en la Regla Trapecial para funciones cóncavas crecientes. Al aplicar esta estimación a la función logaritmo se logra obtener una versión aproximada de la fórmula de Stirling. Estas ideas fueron desarrolladas de una manera comprensible e incluidas en la propuesta didáctica.

Fase 3: Evaluar las Estrategias de Acción.

Para evaluar las estrategias de acción se adoptó como base las entrevistas realizadas para el diagnóstico y las opiniones de expertos sobre la secuencia de las estrategias de acción propuestas. Por consiguiente, las estrategias planeadas en la fase anterior cumplen con la ejecución de una propuesta didáctica, que incluye como eje central el desarrollo de la demostración de la fórmula para estimar el error en el Método de los Trapecios. Sin embargo, es

importante resaltar que para el desarrollo de una propuesta integral que presentase todos los componentes (elementos) necesarios para la ejecución organizada de la misma, fue preciso incluir aplicaciones específicas de esta área de conocimiento; que permitiesen el fortalecimiento de una conciencia reflexiva en los aprendices. En tal sentido, la presencia de aplicaciones constituye un elemento complementario en el aprendizaje y la enseñanza de la Matemática; que a nivel universal adquiere la connotación propia de “*proceso de modelación*”, en dos niveles fundamentales, el de la “*realidad*” y el de la “*Matemática*” propiamente dicha. Mora, C. [51, 2001]

Fase 4: Reflexión e Interpretación de los Resultados.

Una vez realizado el proceso reflexivo en cuanto a la preocupación temática, y acerca de la adecuación de la propuesta didáctica para la estimación del error en el Método de los Trapecios, fue preciso reformular las estrategias de acción; todo ello, con la finalidad de ejecutar el desarrollo de una propuesta didáctica que considerara la presencia de aplicaciones ilustrativas; que permitiese al estudiante verificar mediante ejemplos concretos, ilustrativos y sistemáticos, el error que se comete al utilizar la Regla Trapecial en la solución del valor aproximado de integrales definidas; lo que constituyó el inicio de una nueva espiral de cambio, entrando en la fase de replanificación.

Fase 5: Replanificación.

Dentro de esta perspectiva, otro aspecto a considerar en la planificación fue la presencia de aplicaciones específica de esta área de conocimiento, ya que constituye herramientas de gran relevancia para la mejora de los procesos educativos en todas las áreas de desarrollo de una sociedad. Desde este punto de vista, Klein (citado en Mora, C. [51, 2001]), menciona que “...*las aplicaciones personifican una gran parte de la Matemática, y fuerzan el posterior desarrollo de la misma Matemática...*”_{p.(5)}. De allí, la importancia de considerar aplicaciones en cuanto al cálculo del valor aproximado de integrales definidas; mediante la realización de ejemplos sencillos y sistemáticos.

Para el desarrollo de las aplicaciones en cuanto al cálculo del valor aproximado de integrales definidas, se utilizaron dos procedimientos. En el primero, se realizó una verificación

directa donde se estima el error mediante la utilización del cálculo numérico, y en el segundo, se realizó una verificación utilizando el paquete de programación matemático Maple. En ambos procesos, se realizaron las etapas descritas a continuación:

Primero se procedió a utilizar el Método de los Trapecios para calcular el valor aproximado de integrales definidas; luego se realizó el cálculo del valor exacto de la misma integral, con el propósito de establecer comparaciones y de esta forma calcular la diferencia entre el valor exacto y el valor aproximado, todo ello, con la finalidad de visualizar y determinar el error real cometido al utilizar la Regla Trapecial. Posteriormente, se determinó el error posible mediante la fórmula de la estimación del error en el Método de los Trapecios, para luego comparar este valor con el error real calculado, lo cual permite visualizar que tan preciso es la fórmula para la estimación del error en el Método de los Trapecios.

Posteriormente, se procedió a utilizar el programa Maple para el cálculo del valor aproximado de integrales definidas que no se pueden evaluar por medio del segundo teorema Fundamental del Cálculo. Para ello, se procedió a calcular directamente en Maple el valor aproximado de integrales definidas empleando el Método de los Trapecios; luego, se procedió a programar en Maple la fórmula para estimar el posible error por truncado que se obtiene cuando se emplea el Método de los Trapecios.

Fase 6: Evaluar las Estrategias de Acción.

Las estrategias de acción planteadas cumplen con la precisión de los componentes; es decir, los elementos estructurales propuestos conllevan a la ejecución organizada para el desarrollo de una propuesta didáctica referida a la estimación del error en el Método de los Trapecios, que se adaptase a las necesidades de los cursos básicos de la asignatura Matemáticas II de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela.

De este modo, la puesta en práctica de las estrategias de acción planeadas conduce a la exposición escrita de una propuesta didáctica referida a la estimación del error en el Método de los Trapecios, el cual se estructura en cuatro (04) módulos, siguiendo el principio de diferenciación progresiva.

El módulo uno incluye la presentación de organizadores previos que tiene como función *“...tender un puente cognoscitivo entre lo que el alumno ya sabe y lo que necesita saber antes de aprender significativamente la tarea en cuestión ...”* p.(158). Ausubel, D., Novak J. y Hanesian, H. [6, 1990]. Es por ello, que se presenta la demostración intuitiva de la Regla de los Trapecios.

El módulo uno conduce a la segunda etapa denominada módulo dos; en la que se presenta el desarrollo de la demostración de la fórmula para la estimación del error en el Método de los Trapecios. Para ello, se procedió a estimar el error que se comete al utilizar la Regla Trapecial en una función definida en un intervalo cerrado $[a,b]$; es decir, considerando un único trapecio y luego se generaliza para un número de n trapecios.

En el módulo tres se desarrolla las ideas de Stein, S. [71, 1976], donde se incluye un caso particular del error en el Método de los Trapecios que se obtiene de forma geométrica para curvas cóncavas, lo que conduce a una versión aproximada de la fórmula de Stirling.

Por último, en el módulo cuatro se desarrollan algunas aplicaciones en cuanto al cálculo del valor aproximado de integrales definidas. Para ello se realizó una verificación directa donde se estima el error mediante la utilización del cálculo numérico, y luego se procede a realizar una verificación utilizando el paquete de programación matemático Maple, el cual contiene las especificaciones para su ejecución. Los módulos anteriormente descritos refuerzan todos los lazos de la propuesta y se hace explícita la estructura interna de la misma.

Fase 7: Reflexión e Interpretación de los Resultados.

Para la reflexión sobre las estrategias de acción propuestas se constató lo planteado y lo obtenido; lo que constituyó el final de la fase de la investigación acción.

3. Diseño de la Investigación.

El diseño de la investigación según lo expresa el autor Alvira, F.(1986, citado en Bales-treni, M.) [7, 2001] *“... se define como el plan global de investigación que integra de modo*

coherente y adecuadamente correcto técnicas de recogida de datos a utilizar, análisis previstos y objetivos (...) el diseño de una investigación intenta dar de una manera clara y no ambigua respuestas a las preguntas planteadas en la misma ...” p.(131)

De este modo, en relación a los tipos de datos que se deben recolectar, esta investigación se orienta hacia la incorporación de diseños de campo (no experimental) y diseños bibliográficos; los cuales se adecúan a los objetivos planteados. En tal sentido, esta línea de trabajo permite un registro de los datos mediante la aplicación de instrumentos diseñados para tal fin. En el diseño de campo (no experimental) la información se logra recolectar de forma directa de la realidad o ambiente cotidiano, para posteriormente analizarlas e interpretarlas; por su parte, en el diseño bibliográfico la información se logra recolectar a partir de la aplicación de técnicas documentales, en las cuales se procede a recolectar, seleccionar y analizar diversas fuentes bibliográficas.

4. Población y Muestra.

Población.

Según Balestrini, A. [7, 2001], se entiende por población “...*Un conjunto finito o infinito de personas, casos o elementos que presentan características comunes ...”* p.(17).

Dentro de esta perspectiva, cabe destacar que la población fue seleccionada con fines de validar, indagar y conocer la situación en la que se encuentra la enseñanza del contenido curricular referido a la estimación del error en el Método de los Trapecios. Por consiguiente, la población seleccionada aporta información sobre los tópicos y aspectos relevantes que presenta la estructura interna de este contenido curricular en cuanto a su enseñanza; lo que permitió contribuir en el desarrollo de una propuesta didáctica referida a la estimación del error en el Método de los Trapecios que se adaptase a las condiciones de los estudiantes de la asignatura Matemática II de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela . En tal sentido, en la presente investigación la población estuvo conformada por doce (12) docentes que actualmente laboran en la asignatura Matemáticas II y un (01)

docente especializado en el área de Análisis Numérico de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela.

Muestra.

La muestra es definida por Ramírez, T. [64, 1999], como “...*Un grupo relativamente pequeño de una población que representa características semejantes a la misma ...*”_{p.(87)}.

En el caso que ocupa este estudio, la selección de la muestra de docentes en el área de Matemática, se realizó siguiendo los criterios del autor antes mencionado, quien sostiene que “...*la mayoría de los autores han coincidido en señalar que para los estudios sociales con tomar un aproximado del 30 por ciento de la población se tendría una muestra con un nivel elevado de representatividad ...*”_{P.(91)}.

En tal sentido, se determinó considerar el 76,923 % de la población, a fin de hacer aún más elevada la representación de la muestra. En consecuencia, la muestra seleccionada estuvo conformada por diez (10) docentes.

5. Técnicas e Instrumentos de Recolección de Datos.

Técnicas de Recolección de Datos.

Para Palella, S. y Martins, F. [59, 2004], “... *Las técnicas de recolección de datos son las distintas maneras o formas de obtener información ...*”_{p.(103)}. En las etapas de este proceso investigativo se utilizó como técnicas de recolección de datos la revisión documental y la entrevista.

La revisión documental permitió el análisis de los textos preseleccionados; mediante principios y procedimientos sistemáticos y de organización que son propios y/o específicos de la revisión documental; los cuales permitieron recolectar las diferentes investigaciones que se han realizado en torno al contenido curricular referente a la estimación del error del Método de los Trapecios; todo ello, con finalidad de resaltar los núcleos fundamentales para su descripción e interpretación. De la misma forma, la técnica de la entrevista permitió el acopio de la información directa mediante el diálogo y/o la interacción verbal. De este modo, la

entrevista involucra un proceso de interacción recíproca que se fundamenta sobre la base de un formulario previamente establecido y estrictamente normalizado; el cual abarca una serie de preguntas de tipo abiertas y cerradas, directas e indirectas; que fueron planteadas con el mismo orden y se formularon en los mismos términos, con el único fin de recolectar los tópicos y aspectos relevantes que presenta este contenido.

Instrumentos de Recolección de Datos.

Según Palella, S. y Martins, F. [59, 2004], “... *Un instrumento de recolección de datos es, en principio, cualquier recurso del cual pueda valerse el investigador para acercarse a los fenómenos y extraer de ellos información ...*” p.(113).

En tal sentido, los instrumentos de recolección de datos permiten obtener información de los hechos relevantes (datos) y de la realidad empírica. Para el registro de los datos en la revisión documental se utilizó como instrumento de recolección de datos una serie de técnicas operacionales y protocolos instrumentales, que son específicas de la revisión documental, empleándose de ellas fundamentalmente: presentación de cuadros, lista de cotejo, análisis interno, resumen analítico, notas de referencias bibliográficas, análisis de contenido y el subrayado. A tal efecto, las fuentes bibliográficas fueron preseleccionadas de acuerdo a criterios preestablecidos como lo son: algunos textos recomendados por los docentes y otros por la bibliografía sugerida en el programa de la asignatura Matemática II.

En cuanto a la técnica de la entrevista, se utilizó como instrumento de recolección para el registro de los datos, el guión de entrevista formalizada en función de las interrogantes planteadas en la investigación; lo que permitió extraer de especialistas vinculados con la temática de estudio, la situación en la que se encuentra la enseñanza de este contenido curricular referente a la estimación del error en el Método de los Trapecios. El guión de entrevistas estuvo conformado por preguntas de tipo abiertas y cerradas, las cuales fueron administradas a un número de diez docentes en el área de Matemática.

6. Validez de los Instrumentos.

Conforme a Hernández, S. Fernández, R. y Baptista, C. [42, 2003], la validez se refiere “... al grado en que un instrumento mide la variable que pretende medir ...” p.(236). En la presente investigación la validez del instrumento de recolección de datos (Guión de entrevista), se determinó mediante la técnica de juicio de experto. En tal sentido, el autor Ramírez, T. [64, 1999] define al experto como “...aquella persona que se ha destacado como conocedor de un área de estudio ...” p.(27).

Por consiguiente, a fin de validar el guión de entrevista en cuanto a la pertinencia, redacción y adecuación de sus items; de acuerdo con los objetivos planteados en la investigación, se le suministró a tres especialistas el instrumento de validación con su respectiva matriz, los objetivos de la investigación y una serie de criterios para calificar los items. Es importante acotar que el instrumento para validar el guión de entrevista fue extraído del texto: “Metodología de la Investigación cuantitativa”, por Palella, S. y Martins F. [59, 2004]; el cual permitió recolectar las opiniones y/o sugerencias respectivas; todo ello, con el objeto de constatar que el mismo cumple con los criterios suficientes para considerarlo válido; debido a que los items abordados tienen estrecha relación con la temática planteada y a su vez permite medir los objetivos planteados en la investigación.

7. Técnicas de Análisis e Interpretación de Resultados.

Una vez culminado el proceso de recolección de los datos, se realizan una serie de etapas que condujeron a interpretar y analizar toda información recolectada en la investigación. En tal sentido, Jahoda y otros (citada en Balestrini, A. [7, 2001]) menciona que: “... *El propósito del análisis es resumir las observaciones llevadas a cabo, de forma tal que proporcione respuestas a las interrogantes de investigación ...*” p.(169)

Para el análisis de los resultados obtenidos en las entrevistas realizadas a los docentes de la asignatura Matemáticas II que laboran en la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela; se utilizaron criterios que orientan los procesos de codificación y tabulación de los datos; a fin de interpretar toda la información obtenida mediante el guión de preguntas;

para luego resumirla y de esta forma obtener conclusiones en función de las interrogantes planteadas.

El proceso de codificación permitió que cada respuesta del guión de preguntas fuera traducida y representada por indicaciones numéricas (códigos); todo ello, con el objeto de agrupar los datos similares a fin de sistematizar y simplificar toda información procedente de las preguntas; y de esta forma clasificar las respuestas. Dentro de este procedimiento, a los efectos del diseño y confección del código, se procedió a realizar una división entre las preguntas abiertas y cerradas que están presentes en el guión de preguntas. En el caso de las preguntas abiertas, la codificación se realizó conociendo la respuesta de todos los entrevistados; a las cuales se le asignó un nombre a los patrones generales de respuestas, donde cada una presenta un valor numérico (código). De este modo, un patrón de respuesta constituye una categoría de respuesta que permite establecer el número de veces que se repiten de manera similar los patrones planteados. En el caso de las preguntas cerradas, se le asignó un valor numérico (código) a las categorías de cada ítem con el fin de facilitar la agrupación de las respuestas.

Para el proceso de tabulación se realizó un recuento de la información, a fin de determinar el número de casos que se ubican en las diferentes categorías; efectuadas mediante la construcción de cuadros de frecuencia, donde se ubicó la información recogida atendiendo a las preguntas analizadas a partir de los determinados códigos. Los resultados se presentaron en gráficos y tablas estadísticas que resumen la información obtenida mediante la entrevista.

En cuanto a la revisión documental, es importante mencionar que el análisis de las fuentes bibliográficas preseleccionadas, se llevo a cabo mediante principios sistemáticos y de organización; todo ello, con el objeto de extraer los datos comunes y diferenciales; lo que permitió establecer las peculiaridades específicas y los aspectos relevantes de este contenido, a fin de interpretar de una manera rigurosa toda la información recolectada para luego ser incorporada en una síntesis general.

8. Validación de la Propuesta Didáctica.

El autor Martínez, M. [50, 1994], expresa que la validación “... *consiste en un proceso epistemológico que integra las evidencias de una realidad representacional con las construcciones heurísticas del investigador acerca de la realidad emergente ...*” p.(104)

En la actualidad, no existen criterios estrictos, únicos y sistemáticos que permitan validar propuestas teóricas; salvo algunas investigaciones individuales. Es por ello, que en esta línea de trabajo fue preciso establecer enfoques flexibles y sencillos que se adaptasen a las diversas condiciones académicas. En tal sentido, para determinar la validez de la propuesta didáctica referente a la estimación del error en el Método de los Trapecios, se procedió a utilizar la técnica de juicio de experto; la cual permitió determinar la coherencia, actualidad y pertinencia de la propuesta didáctica; respecto a las concepciones teóricas, lineamientos y características del diseño que dio su origen; así como la adecuación y evidencia de los aspectos técnico-gráficos.

El instrumento que se utilizó para validar la propuesta didáctica fue elaborado seleccionando algunos aspectos evidenciados en los diversos modelos propuestos por las profesoras García, A. y Dorrego, E. [30, 1991], en el texto titulado “Dos Modelos Para la Producción y Evaluación de Materiales Instruccionales”.

Para validar el desarrollo y logro de los objetivos de la propuesta (Diseño), del “Cuestionario de Opinión para Evaluar Módulos Instruccionales” propuesto por la Profesora García, A. se seleccionaron algunos aspectos, como lo son: (a) Adecuación de los objetivos, (b) Organización, (c) Contenido; de igual manera, del modelo “Instrumento para Evaluar la Etapa de Planificación de un Video Instruccionales” propuesto por la profesora Dorrego E., se seleccionaron otros aspectos como: (d) Características del contenido, (e) Características de la forma del contenido.

Para validar los aspectos Técnico-gráficos (Realización), del modelo “Cuestionario Para Evaluar Los Aspectos Técnico-Gráficos” propuesto por la Profesora García A., se seleccionaron algunos aspectos como: (f) Composición, (g) Diseño gráfico, (h) Formato e Impresión.

En cuanto al diseño y estructura del instrumento para validar la propuesta didáctica, también fueron consideradas las ideas propuestas por la Profesora E. Dorrego. Dentro de esta perspectiva, el instrumento permitió validar de forma objetiva y sistemática la coherencia interna de los elementos estructurales de la propuesta y la expresión conceptual y lingüística de la misma; igualmente, permitió validar los elementos de forma, tales como: presentación, organización, diseño y las secuencias entre las estrategias de acción propuestas.

CAPÍTULO 4

Análisis de Resultados.

En este capítulo, se presentan los resultados obtenidos en el proceso de investigación; los cuales fueron derivados mediante la aplicación de instrumentos diseñados para tal fin. De este modo, se procedió a interpretar, analizar y generalizar toda la información recolectada (datos) en el desarrollo de este proceso investigativo.

Los resultados obtenidos por medio del guión de entrevista fueron procesados mediante dos niveles de operaciones, los cuales son la codificación y la tabulación de los datos. Posteriormente se utilizaron métodos estadísticos derivados de la estadística descriptiva a objeto de resumir y comparar las observaciones que se han evidenciado en relación con cada una de las variables y sus respectivas categorías (dicotómicas y policotómicas). Por consiguiente, atendiendo a las características y aspectos que han de medirse en cada una de las variables involucradas, el nivel de medición apropiado es el nivel nominal. Desde esta óptica a nivel nominal y en función de las interrogantes planteadas en la investigación, se aplicaron métodos estadísticos permisibles, como lo son: distribución de frecuencias (absoluta-relativa) y medidas de tendencia central, con el fin de determinar el nivel de significación de los resultados obtenidos. A continuación se presentan las respuestas obtenidas, mediante el guión de entrevista que fue suministrado a la muestra de docentes seleccionados, los cuales figuran en la tabla de datos integrados pertenecientes a la distribución de frecuencias (absoluta-relativa); seguidamente cada ítem fue analizado y graficado en forma individual.

En cuanto a los resultados obtenidos por medio de la técnica de la revisión documental; estos fueron presentados en cuadros que especifican la fuentes preseleccionada para el desarrollo de la investigación y sus respectivas observaciones. Adicionalmente se incluye una síntesis general de los aspectos relevante que evidencia este contenido.

1. Guión de Entrevista.

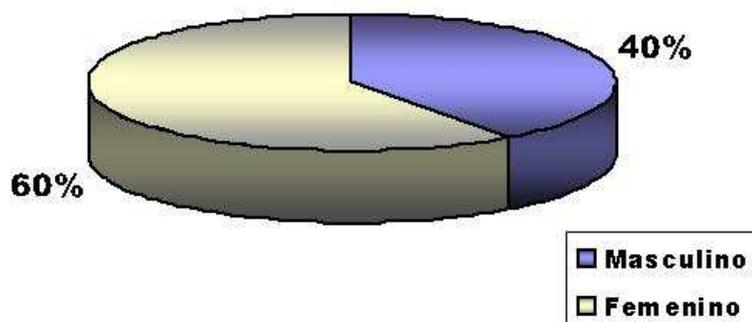
1.1. Tabla de frecuencias Absolutas y Relativas del Guión de Entrevista.

Ítem	Descripción de la Pregunta	Categorías	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativas (porcentajes)
1	Sexo	Masculino	4	40,00%
		Femenino	6	60,00%
2	Edad	Entre 21 y 30 años	8	80,00%
		Entre 31 y 40 años	1	10,00%
		Entre 41 y 50 años	1	10,00%
		Más de 51 años	0	0,00%
3	Nivel de Instrucción	Licenciado	3	30,00%
		Especialización	3	30,00%
		Magister	3	30,00%
		Doctorado	1	10,00%
		Otros	0	0,00%
4	Área de Especialización	Probabilidad/Estadística	4	40,00%
		Matemática aplicada	1	10,00%
		Análisis Numérico	2	20,00%
		Ninguna	3	30,00%
5	Años de Experiencia	De 0 a 4 años	6	60,00%
		De 5 a 9 años	3	30,00%
		De 10 a 14 años	1	10,00%
		Más de 15 años	0	0,00%
6	¿Ha dado usted anteriormente la asignatura Matemáticas II?	Si	8	80,00%
		No	2	20,00%
7	¿Qué fuente o fuentes bibliográficas se adecuan más a esta asignatura?	Swokowski	6	25,00%
		Leithold	5	20,83%
		Demidovich	4	16,67%
		Purcell	2	8,33%
		Alson Pedro	3	12,50%
		Piskunov	2	8,33%
		Thomas	2	8,33%
8	¿Recuerda si el tema de aproximación de integrales aparece en el programa de Matemáticas II?	Si	5	50,00%
		No	5	50,00%

Ítem	Descripción de la Pregunta	Categorías	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativas (porcentajes)
9	¿Recuerda si la estimación del error en el Método de los Trapecios es un contenido de este programa?	Si	4	40,00%
		No	6	60,00%
10	¿Posee Usted Algún material impreso no bibliográfico referente a la estimación del error del Método de los Trapecios?	Si	0	0,00%
		No	10	100,00%
11	¿Qué aspectos considera usted que el alumno de Matemáticas II debe poseer para comprender la demostración de la fórmula para la estimación del error en el Método de los Trapecios?	Límites	1	4,35%
		Derivadas e Integrales	6	26,09%
		Sumatorias	2	8,70%
		Geometría (áreas básicas)	7	30,43%
		Conocimientos generales de cálculo	3	13,04%
		Teorema de Taylor	4	17,39%
12	¿Considera usted que la demostración de la fórmula para la estimación del error del Método de los trapecios es un tema difícil de comprender para los alumnos de Matemáticas II?	Si	9	90,00%
		No	1	10,00%
13 a	¿Por qué? (no)	Fórmula intuitiva y práctica para calcular integrales definidas	1	10,00%
13 b	¿Por qué? (si)	Muy Abstracta	1	10,00%
		Muy extensa	1	10,00%
		Muy complicada analíticamente	3	30,00%
		Los alumnos no poseen los conocimientos previos para su comprensión	4	40,00%
14	¿Considera usted que sería de gran utilidad un material didáctico impreso respecto a la demostración de la fórmula para la estimación del error en el método de los trapecios en aras de facilitar la comprensión de este contenido?	Si	10	100,00%
		No	0	0,00%

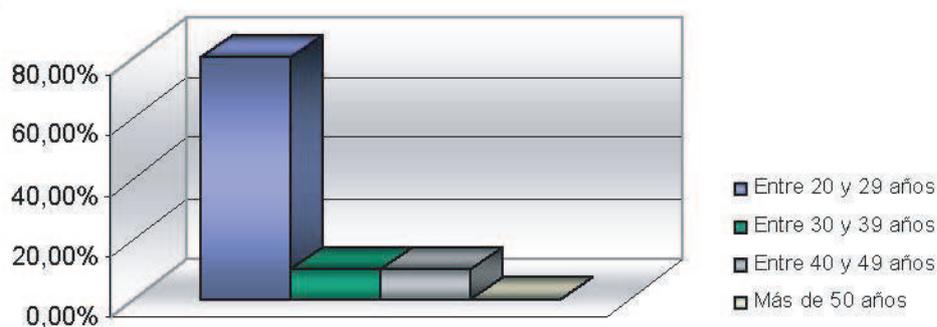
1.2. Gráficas y Análisis del Guión de Entrevistas.

Ítem N° 1: Sexo.



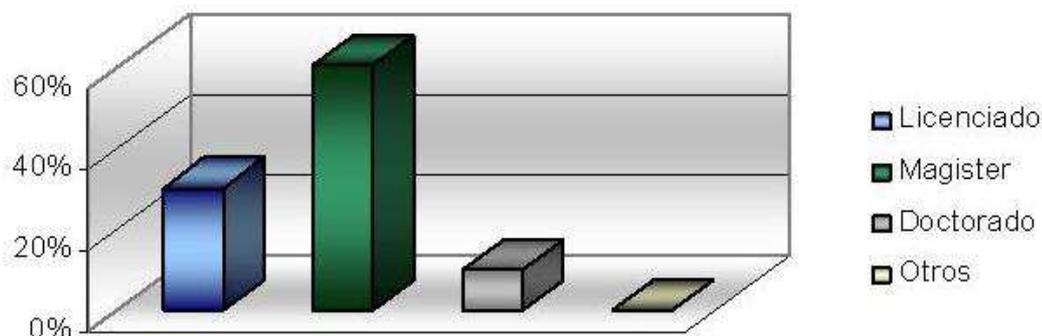
De la muestra encuestada, el 60 % de la población es de sexo femenino y el 40 % complementario es de sexo masculino.

Ítem N° 2: Edad.



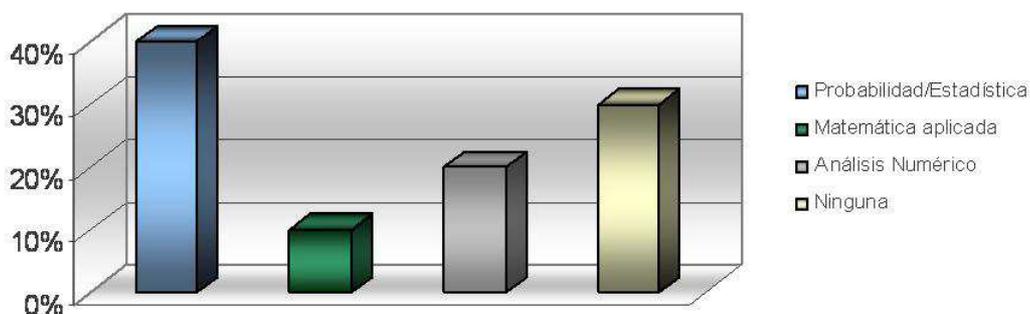
El 80 % de la muestra tiene edades comprendidas entre los 21 años y los 30 años, un 10 % tiene edades comprendida entre los 31 años y los 40 años; y el restante 10 % tiene edades comprendidas entre los 41 años hasta los 50 años. Estos valores evidencian una predominante juventud en los docentes encuestados, lo cual posiblemente repercutirá en factores como la experiencia así como su desempeño como docentes.

Ítem N° 3: Nivel de Instrucción.



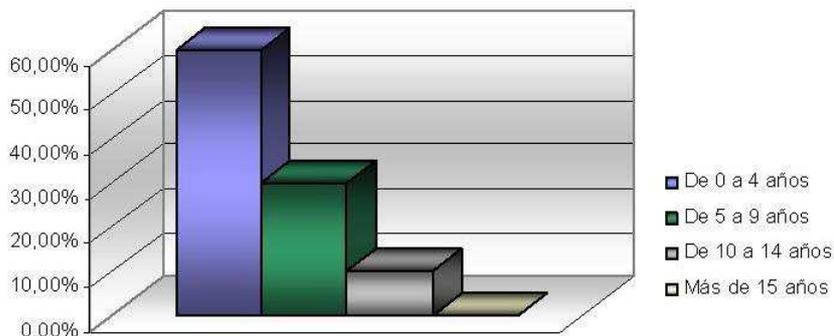
De la muestra entrevistada, el 30 % es licenciado sin estudios de especialización, el 60 % posee Magister y solo un 10 % tiene estudios de Doctorado. Es decir que el 70 % de la muestra posee estudios de post-grado en su haber curricular, de los cuales la moda o el valor que se presenta con más frecuencia es Magister.

Ítem N° 4: Área de Especialización.



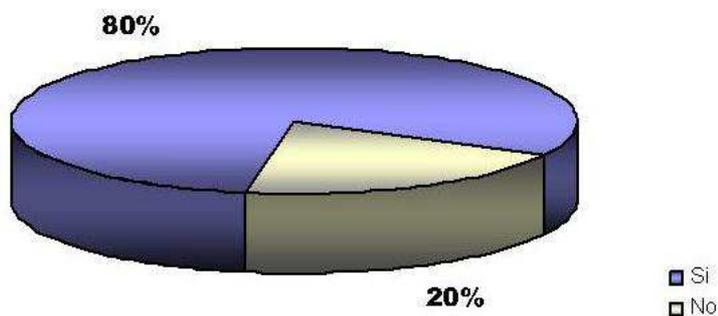
El 70 % de la muestra posee área de especialización, y como se mencionó en el ítem anterior el 30 % no posee ningún área de especialización. Ahora bien, del grupo que posee especialización, un 40 % es especialista en el área de Probabilidad-Estadística, un 20 % en Análisis Numérico, y sólo un 10 % tiene especialización en el área de Matemática Aplicada.

Ítem N° 5: Años de Experiencia.



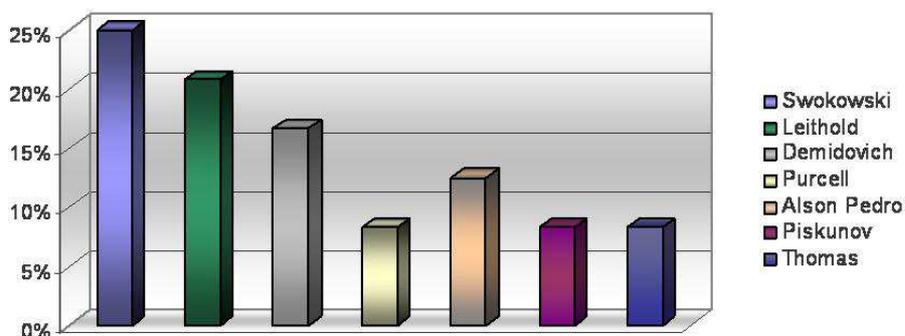
El 60% de los entrevistados tiene de 0 a 4 años de experiencia, un 30% tiene de 5 a 9 años de experiencia y un 10% tiene de 10 a 14 años de experiencia. Esto muestra que la mayoría de los profesores posee pocos años en el desempeño de la profesión docente.

Ítem N° 6: ¿Ha dado usted anteriormente la asignatura Matemáticas II?



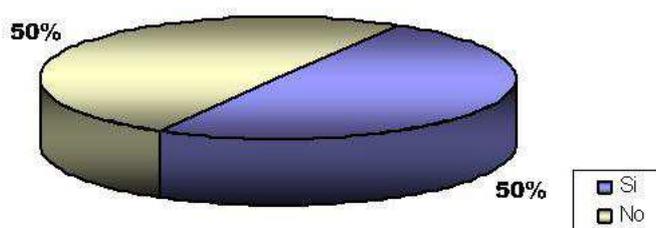
Del 100% de la muestra seleccionada, un 80% de los entrevistados ha laborado anteriormente como docente en la asignatura Matemáticas II, siendo este el valor predominante en este ítem, y el 20% complementario está laborando en la misma por primera vez.

Ítem N° 7: ¿Qué fuente o fuentes bibliográficas se adecuían más a esta asignatura?



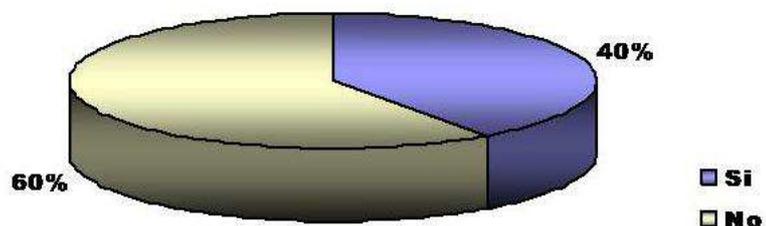
En la respuesta a este ítem se observa una gran diversidad de las fuentes bibliográficas seleccionadas por los docentes entrevistados, ya que en su mayoría recomiendan varias fuentes bibliográficas, dentro de las cuales se mencionan el autor Swokowsky, E. [72, 1989], en su texto denominado “*Cálculo con Geometría Analítica*” con un 25%, el Leithold, L. [44, 1992], en su obra denominada “*Cálculo con Geometría Analítica*” con un 20,83%, el autor Demidovich, B. [26, 1978], con su libro denominado “*Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático*” con un 16,67%, el autor Purcell, E. y Varberg, D. [63, 1993], en su texto denominado “*Cálculo con Geometría Analítica*” con un 8,33%, el autor Alson, P. [1, 1999], en su texto denominado “*Cálculo Básico*” con un 12,50%, el autor Piskunov, N. [61, 2001], en su libro denominado “*Cálculo Diferencial e Integral*” con 8,33% y finalmente el autor Thomas, G. y Finney, R. [73, 1972], en su libro denominado “*Cálculo con Geometría Analítica*”, con un 8,33%.

Ítem N° 8: ¿Recuerda si el tema de aproximación de integrales aparece en el programa de Matemáticas II?



Ante la dicotomía de este ítem, las respuestas de la muestra entrevistada fueron que un 50 % de los docentes recuerda que el tema aproximación de integrales aparece en el programa de matemáticas II, y un 50 % de los docentes no lo recuerda. Sin embargo este tema sí pertenece al contenido programático de la asignatura Matemáticas II, en el tema número 7, denominado “*Cálculo aproximado de integrales*”.

Ítem N° 9: ¿Recuerda si la estimación del error en el Método de los Trapecios es un contenido de este programa?

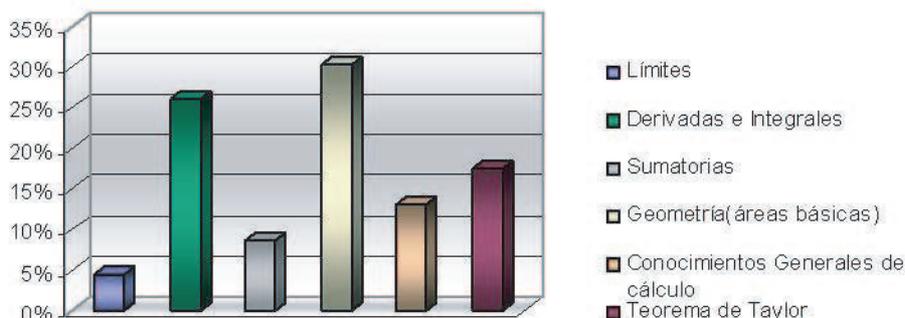


El 60 % de los docentes no recuerda si la estimación del error en el Método de los Trapecios es un contenido perteneciente al programa de la asignatura Matemáticas II, y un 40 % de los docentes si recuerda que la estimación del error en el Método de los Trapecios es un contenido perteneciente a este programa. Es importante mencionar que el Método de los Trapecios permite calcular el valor aproximado de integrales y por lo tanto es un contenido del tema número 7 denominado “*Cálculo aproximado de integrales*”.

Ítem N° 10: ¿Posee usted algún material impreso no bibliográfico referente a la estimación del error del Método de los Trapecios?

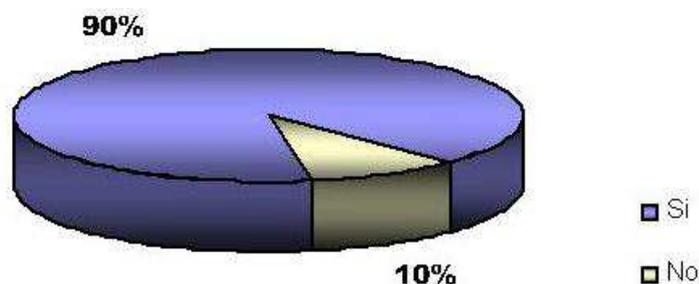
En el presente ítem se observa que en su totalidad la muestra entrevistada no posee un material impreso no bibliográfico referente a la estimación del error del Método de los Trapecios.

Ítem N° 11: ¿Qué aspectos considera usted que el alumno de Matemáticas II debe poseer para comprender la demostración de la fórmula para la estimación del error en el Método de los Trapecios?



Para este ítem según la muestra encuestada, se observa una gran diversidad en cuanto a los aspectos que el alumno debe poseer para la comprensión de la demostración de la fórmula del error en el Método de los Trapecios debido a que en su mayoría expusieron más de un aspecto, dentro de los cuales un 4,35% considera que deben tener conocimientos relativos a límites, un 26,09% derivadas e integrales, un 8,70% deben conocer y comprender sumatorias, un 30,46% geometría (áreas básicas), un 13,04% conocimientos generales de Cálculo y finalmente un 17,39% considera que el alumno debe poseer conocimientos relativos al teorema de Taylor.

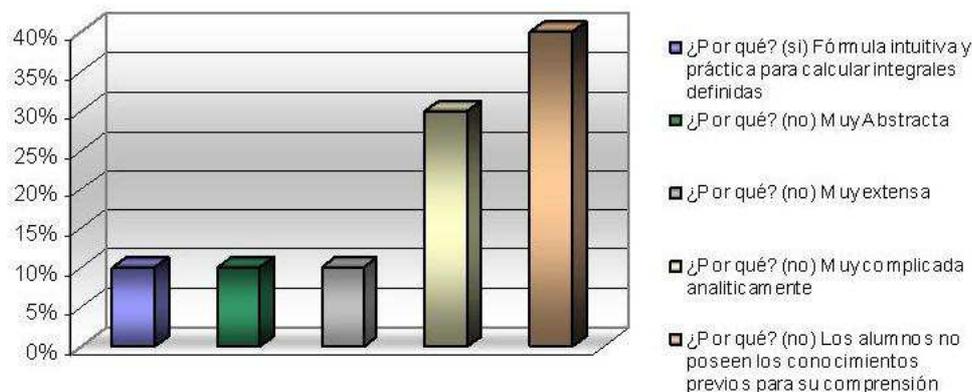
Ítem N° 12: ¿Considera usted que la demostración de la fórmula para la estimación del error del Método de los Trapecios es un tema difícil de comprender para los alumnos de la asignatura Matemáticas II?



En cuanto a este ítem, el 90% de la muestra encuestada consideró una predominante tendencia en cuanto a que la demostración de la fórmula para la estimación del error del

Método de los Trapecios es un tema difícil de comprender para los alumnos de Matemáticas II, mientras que el 10 % complementario considera que dicho tema no es de difícil comprensión.

Ítem N° 13: ¿Por qué?



En relación al ítem anterior, del 100 % de la muestra seleccionada, el 10 % que considera que la demostración de la fórmula para la estimación del error del Método de los Trapecios no es difícil de comprender, argumentando su respuesta en que es una fórmula intuitiva y práctica para calcular integrales definidas. Mientras que del 90 % que considero que la demostración de la fórmula para la estimación del error del Método de los Trapecios es un tema de difícil comprensión, un 10 % basa la dificultad del tema en que el mismo resulta muy abstracto, un 10 % establece que es muy extenso, un 30 % alega que es muy complicado analíticamente, y un 40 % considera que los alumnos a ese nivel no poseen los conocimientos previos para su comprensión.

Ítem N° 14: ¿Considera usted que sería de gran utilidad un material didáctico impreso respecto a la demostración de la fórmula para la estimación del error en el Método de los Trapecios en aras de facilitar la comprensión de este contenido?

El 100 % de la muestra seleccionada, consideró que sería de gran utilidad un material didáctico impreso respecto a la demostración de la fórmula para la estimación del error en el Método de los Trapecios en aras de facilitar la comprensión de este contenido, el cual es uno de los objetivos de este trabajo de investigación.

2. Revisión Documental.

2.1. Tabla de observaciones. La revisión bibliográfica está anclada dentro de un área específica del conocimiento, como lo es la estimación del error en el Método de los Trapecios. A continuación se presenta unas tablas en donde se muestran, las fuentes bibliográficas que proporcionan información específica de la temática de estudio.

Tabla 1: Textos de Cálculo.

Nº	Autor	Título	Observaciones
1	Earl W. Swokowski	Calculo con Geometría Analítica	En cuanto al contenido referente a la estimación del error en el Método de los trapecios se evidencia el enunciado con sus respectivas hipótesis. Adicionalmente se presenta un ejemplo donde se calcula el valor aproximado de la integral definida en el intervalo cerrado $[1,2]$ de la función $f(x) = 1/x$. No presenta el desarrollo de la fórmula para la estimación del error en el Método de los Trapecios. Además el autor hace referencia a que la demostración se omite por completo.
2	Tom M. Apostol	Calculus (Volumen II)	Presenta el Enunciado en forma de teorema y a su vez el desarrollo de una demostración en cuanto a la estimación del error de una forma compleja y rigurosa , no presenta elementos didácticos.
3	Thomas George	Calculo con Geometría Analítica	Presenta el enunciado con sus respectivas hipótesis pero no el desarrollo de la demostración. Además el autor sugiere que por métodos expuestos en obras más avanzadas, resulta posible la demostración del enunciado. Sin embargo presenta un ejemplo donde se procede a calcular una cota del error en la integral definida en el intervalo cerrado $[1,2]$ de la función $f(x) = 1/x$.
4	Louis Leithold	Calculo con Geometría Analítica	Enuncia en forma de teorema la estimación del error en el método de los trapecios con sus respectivas hipótesis. Adicionalmente presenta un ejemplo donde se determinan los límites para el error por truncado en la integral definida en el intervalo cerrado $[0,3]$ de la función $f(x) = 1/(16 + x^2)$. En cuanto al desarrollo de la fórmula para la estimación del error, el autor hace referencia a que el teorema se demuestra en los textos de análisis numéricos.
5	Edwin J. Purcell	Calculo con Geometría Analítica	Presenta el enunciado en forma de teorema con sus respectivas hipótesis, así como un ejemplo ilustrativo donde se calcula una cota del error posible al aproximar la integral definida en el intervalo cerrado $[1,3]$ de la función $f(x) = x^4$ por el Método de los Trapecios, pero no presenta el desarrollo de la demostración. Además el autor señala que omiten la demostración de este teorema, el cual aparece en libros más avanzados.
6	David E. Penney	Calculo con Geometría Analítica	Presenta el enunciado en forma de teorema de la estimación del error en el Método de los Trapecios, con sus respectivas hipótesis. No presenta el desarrollo de la demostración de la fórmula del error en el Método de los trapecios. Además el autor hace referencia a que el teorema es demostrado en los textos de análisis numérico. Sin embargo presenta un ejemplo donde se procede a calcular una cota del error en la integral definida en el intervalo cerrado $[1,2]$ de la función $f(x) = 1/x$.

Nº	Autor	Título	Observaciones
7	Alson, Pedro	Cálculo Básico	Este texto no muestra información alguna referente a la estimación del error en el Método de los Trapecios.
8	Piskunov, N.	Cálculo Diferencial e Integral	Presenta la demostración intuitiva sobre la fórmula de los trapecios, sin embargo; dicho texto no presenta ninguna información referente a la estimación del error en el Método de los Trapecios.
9	Demidovich B.	Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático	Este texto establece la fórmula de los trapecios, con el error absoluto que se genera al emplear dicha fórmula. Sin embargo; no presenta el desarrollo de la demostración de la estimación del error en el Método de los Trapecios.

Tabla 2: Textos de Análisis Numérico.

Nº	Autor	Título	Observaciones
1	Curtis F. Gereld	Análisis Numérico	En los presentes textos de Análisis Numérico se evidencia el desarrollo de la demostración de la fórmula para la estimación del error en el Método de los Trapecios de una forma generalizada y compleja, en el cual los autores asumen por obvia las operaciones implicadas en el desarrollo de la misma y con un nivel elevado en cuanto a los procedimientos .
2	Atkinson E. Kendall	An Introduction to Numerical Analysis	
3	J. Stoer R, Bulirsch	An Introduction to Numerical Analysis	

2.2. Análisis de la Observación Documental:

Como puede observarse, los textos de Cálculo con Geometría Analítica diseñados para estudiantes de carreras científicas y afines en su mayoría evidencia poca presentación del contenido referente al desarrollo de la demostración de la fórmula para la estimación del error en el Método de los Trapecios. Autores como Leithold, Swokowsky, Thomas, Purcell, entre otros, se limitan a enunciar el teorema con sus respectivas hipótesis y a la presentación de ejemplos para el cálculo del valor aproximado de integrales definidas así como cotas del error. Adicionalmente, hacen referencia a la omisión de la misma.

En cuanto a los textos de Análisis Numérico diseñados para estudiantes con un nivel académico avanzado, se presenta el desarrollo de la demostración de la fórmula para la estimación del error en el Método de los Trapecios, de una forma compleja y rigurosa, para el nivel de alumnos correspondientes a la asignatura Matemáticas II y por lo tanto no se adaptan a las necesidades de dichos estudiantes.

CAPÍTULO 5

Conclusiones y Recomendaciones.

Como conclusión global, se puede señalar que los objetivos propuestos en la investigación fueron alcanzados.

La propuesta didáctica referida a la estimación del error en el Método de los Trapecios, proporciona una organización jerárquica y racional de la información que se ha de aprender; todo ello, con el objeto de promover en los estudiantes el logro del aprendizaje significativo de este contenido curricular. En tal sentido, la propuesta didáctica adopta como base la interacción entre la estructura interna de esta área de conocimiento y de los procesos cognitivos que poseen los aprendices; a fin de establecer secuencias óptimas de aprendizajes, susceptibles de contribuir con el proceso de enseñanza y aprendizaje de este contenido curricular.

Como observación general, es importante resaltar que el diagnóstico fue realizado considerando dos perspectivas: (situación de la enseñanza y revisión bibliográfica) del contenido curricular referente a la estimación del error en el Método de los Trapecios. En relación a la situación en la que se encuentra la enseñanza de esta área de conocimiento, se puede concluir la presencia de una escasa difusión en cuanto al estudio de este contenido curricular, ya que por lo general este tópico no es incorporado al repertorio de las planificaciones académicas; esto obedece a que la estructura interna de esta área de conocimiento no se encuentra organizada de forma especialmente apta para su enseñanza; puesto que no conduce a facilitar el aprendizaje de estudiantes que se inician en el conocimiento de esta disciplina. En relación a la revisión documental realizada en los textos bibliográficos preseleccionados y diseñados para la formación en cuanto al dominio de contenidos matemáticos de estudiantes de carreras científicas y afines, se puede concluir una carencia en cuanto al desarrollo de la demostración de la fórmula para la estimación del error en el Método de los Trapecios, así como una escasa incorporación de los conceptos generales y básicos que incorpora este contenido; esto obedece a que este tópico requiere de procedimientos avanzados para su demostración.

Todo ello, permitió establecer como base fundamental la necesidad de incorporar las acciones estructurales que permitiesen el desarrollo de una propuesta didáctica referente a la estimación del error en el Método de los Trapecios, en donde se integrase el conocimiento a enseñar de un modo potencialmente significativo, es decir, mediante el establecimiento de secuencias de aprendizajes en las que se dispusiese en un esquema coherente y estable, la estructura interna del contenido que se ha de enseñar (estructura lógica) y la estructura que debe adoptar este *mismo contenido* para ser aprendido por los estudiantes (estructura psicológica).

Para el desarrollo de la propuesta didáctica referida a la estimación en el Método de los Trapecios fue preciso establecer las competencias básicas que el aprendiz correspondiente a la asignatura Matemática II debe poseer antes de aprender significativamente la nueva información. Sin embargo, es relevante destacar que en el programa correspondiente a la asignatura Matemática II, los temas son presentados en un esquema jerárquico y racional, es decir, proceden de los contenidos mas generales e inclusivos a los mas específicos y detallados.

En tal sentido, entre las competencias básicas que debe poseer el aprendiz para la comprensión del contenido curricular referente a la estimación del error en el Método de los Trapecios, se pueden mencionar algunas definiciones previas como lo son; partición, suma de Riemann e integral definida y los Teoremas Fundamentales del Calculo, entre otros. No obstante, es fundamental el dominio de la demostración intuitiva y geométrica de la Regla Trapecial.

En cuanto, a las acciones estructurales que conforman la ejecución organizada del desarrollo de la propuesta didáctica referida a la estimación del error en el Método de los Trapecios, se puede concluir; que el conocimiento escolar fomenta un proceso de elaboración en el cual es esencial analizar los elementos internos de un contenido o de una disciplina en particular, así como la manera en que se intenta promover el aprendizaje mediante la enseñanza. A tal fin, se postula que el aprendizaje debe de incluir las aportaciones de las teorías cognocitivas, las cuales están dirigidas a explicar el aprendizaje de amplios bloques

de conocimientos altamente estructurados y organizados, con el objeto de proporcionar una adecuada organización de las ideas contenidas en la información nueva por aprender.

Toda las condiciones anteriores permitieron el desarrollo de un material impreso referente a la estimación del error en el Método de los Trapecios, que se adaptase a las condiciones de los cursos básicos de la asignatura Matemática II, con el propósito de facilitar el aprendizaje significativo de este contenido curricular y a la vez propiciar una alternativa para los docentes de la asignatura Matemática II que laboran en la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela.

Dentro de esta perspectiva, la técnica de juicio de expertos permitió validar la etapas de Diseño y de Realización, que comprende el proceso de producción de la propuesta didáctica referida a la estimación del error en el Método de los Trapecios.

Recomendaciones.

Las siguientes recomendaciones están orientadas a contribuir con el proceso de enseñanza y aprendizaje en el nivel superior del sistema educativo.

- Incorporar la propuesta didáctica referida a la estimación del error en el Método de los Trapecios, en los cursos básicos de la asignatura Matemática II de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela.
- Atender a la necesidad de desarrollar materiales didácticos, que incorporen contenidos específicos de enseñanza.
- Realizar actividades que permitan correlacionar el uso de estrategias didácticas, a fin de promover el aprendizaje significativo de los contenidos específicos de enseñanza.
- Establecer diferencias entre los aprendizajes declarativos (Estructuras de Conocimiento) y los aprendizajes procedimentales (Estrategias de Procesamiento de Información).

- Considerar en la teoría y en la práctica educativa, los métodos actuales que están dirigidos a la enseñanza de la matemática; dentro de una concepción integradora de la educación.
- Indagar sobre las diversas corrientes orientadas al tratamiento de la matemática escolar, tales como: la etnomatemática y la enseñanza crítica de la matemática.
- Profundizar la ejercitación y visualización de los conceptos matemáticos.
- Establecer una enseñanza de la matemática que incluya aplicaciones específicas de los contenidos de enseñanza.
- Continuar con desarrollo de teorías referidas a la didáctica de las matemáticas; que permitan contribuir en los procesos cognoscitivos de los alumnos y en el aprendizaje de los contenidos escolares.
- A las futuras investigaciones, es recomendable realizar estudios cualitativos que incluyesen las diversas opiniones de los estudiantes; lo que sería de gran utilidad a la hora de tomar decisiones para la mejora de la enseñanza.

CAPÍTULO 6

Propuesta Didáctica.

Luego de realizar la revisión documental en diversas fuentes bibliográficas preseleccionadas, y de recolectar analizar e interpretar los aspectos más significativos de los resultados obtenidos mediante la aplicación de los instrumentos de recolección de datos, se procedió a desarrollar la propuesta didáctica referida a la estimación del error en el Método de los Trapecios.

A continuación, se presenta el desarrollo de la propuesta didáctica referida a la estimación del error en el Método de los Trapecios, con la finalidad de proporcionar tanto al docente de la asignatura Matemáticas II, como a los estudiantes interesados en profundizar sus conocimientos, una alternativa de estudio en cuanto a los tópicos generales y aspectos relevantes que abarca esta área de conocimiento; todo ello, con el propósito de contribuir a una nueva perspectiva en torno a este contenido curricular, y así ofrecer la posibilidad de enriquecer el proceso de enseñanza y aprendizaje.



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE HUMANIDADES Y EDUCACIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE EDUCACIÓN

Estimación del Error en el Método de los Trapecios

Autora: Br. Karen González G.

Tutor: Dr. Ramón Bruzual

Caracas, Noviembre de 2006

Estimación del Error en el Método de los Trapecios

Propósito Educativo de la Propuesta.

Inducir al estudiante a emplear el Método de los Trapecios, analizando las ventajas y desventajas.

Objetivos de la Propuesta.

Objetivo General:

Capacitar al estudiante para calcular empleando el Método de los Trapecios el valor aproximado de integrales definidas, y de estimar el posible error por truncado que se comete al utilizar este Método de integración numérica. Además, de comprender los fundamentos teóricos de otros procedimientos y contenidos afines.

Objetivos Específicos:

- Deducir la fórmula para la estimación del error en el Método de los Trapecios, incluyendo sus fundamentos matemáticos.
- Determinar el error posible cometido al utilizar la Regla Trapecial en la resolución de integrales definidas.
- Desarrollar el artículo de Stein [71, 1976], publicado en la revista American Mathematical Monthly en el que de una manera geométrica y sumamente ingeniosa se logra obtener un estimado del error en la Regla Trapecial para funciones cóncavas crecientes. Al aplicar esta estimación a la función logaritmo se obtiene una versión aproximada de la fórmula de Stirling.
- Utilizar el paquete de programación gráfico matemático Maple, para determinar el valor aproximado de integrales definidas mediante la Regla Trapecial.

- Utilizar el paquete gráfico matemático Maple, para programar el algoritmo de la fórmula para estimar el error cometido en la Regla Trapecial en el cálculo del valor aproximado para integrales definidas.

Contenido de los Módulos.

- **Módulo 1:** Demostración intuitiva de la Regla de los Trapecios.
- **Módulo 2:** Desarrollo de la demostración de la fórmula para la estimación del error en el Método de los Trapecios.
- **Módulo 3:** Estimación del error en el Método del Trapecio que se obtiene de forma geométrica para curvas cóncavas, lo que conduce a una versión aproximada de la fórmula de Stirling.
- **Módulo 4:** Aplicaciones en cuanto al cálculo del valor aproximado de integrales definidas.

Fundamentación de la Propuesta.

Existen diversos métodos de integración numérica que permiten calcular el valor aproximado de una integral definida. Unos de estos métodos es conocido con el nombre de “**Método de los Trapecios o Regla Trapecial**”; el cual consiste en aproximar el área de una región del plano a través de una partición del área total en trapecios circunscritos a la misma. Es importante, evaluar la exactitud del valor aproximado de una integral definida al emplear este método de integración numérica. Para ello, hay que tener presente la existencia del error por truncado (ε_τ), el cual obedece a la aproximación a la gráfica de la función por medio de segmentos de rectas. Sin embargo, a medida que crece el valor de n (número de subintervalos), la exactitud de la aproximación del área de la región por medio de las áreas de trapecios aumenta, esto reduce la magnitud del error por truncado.

El Método de los Trapecios es de gran utilidad para el cálculo de integrales definidas, que no se pueden evaluar mediante el segundo Teorema Fundamental del Cálculo, porque las primitivas de sus integrandos no se pueden expresar en términos de funciones elementales.

Por otra parte, este método de integración numérica conduce a algoritmos eficientes que se pueden programar directamente en calculadoras o computadoras, es por ello que en la actualidad existen programas matemáticos diseñados para computadoras, que permiten el cálculo del valor aproximado de una integral definida utilizando el Método de los Trapecios.

El objeto de estudio en esta línea de investigación, fue la elaboración de una propuesta didáctica basada en el desarrollo de un material impreso referente a la estimación del error en el Método de los Trapecios, en la cual se pone de manifiesto como elemento fundamental las estructuras subyacentes de la matemática. No obstante, se plantea una meta digna en la estructuración de este contenido curricular para “...el diseño de una enseñanza óptima que presente las estructuras básicas de la matemática de forma elegante y sencilla, teniendo en cuenta al mismo tiempo las capacidades de dichos estudiantes...”^{p.(155)}. Resnick, L. y Ford, W. [65, 1990]

En tal sentido, la presente propuesta didáctica se sistematiza con la incorporación de los principios psicológicos (cognoscitivo) y matemáticos, donde se considera como eje central una interacción entre las capacidades cognoscitivas que posee el aprendiz y la estructura interna del contenido a desarrollar, con el propósito de facilitar el aprendizaje significativo de este contenido curricular y a su vez propiciar una alternativa a los docentes de la asignatura Matemática II, que laboran en la de Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela.

Dentro de esta perspectiva, cabe destacar nuevamente a los autores Resnick, L. y Ford, W. [65, 1990] quienes hacen referencia en que “...se pueden enseñar las estructuras de forma intelectualmente válida, presentándolas de forma concreta, sobre todo en forma de materiales matemáticos que son una materialización física de dichas estructuras. Se considera

fundamental para la enseñanza significativa una comprensión de las estructuras matemáticas básicas de los procedimientos y los conceptos que se enseña en el aula...” p.(154)

Por consiguiente, la propuesta didáctica referente a la estimación del error en el Método de los Trapecios supone combinar el desarrollo de la psicología cognitiva y el desarrollo de las estructuras propias de la matemática, ya que el objeto básico es hacer llegar el contenido de una forma matemáticamente significativa; para proporcionar una enseñanza que responda a los procesos cognitivos de los aprendices y que a su vez les permita alcanzar una comprensión de las estructuras matemáticas.

Estimación del Error en el Método de los Trapecios.

Módulo 1

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Por T_n se denotará a la aproximación de $\int_a^b f$ que se obtiene al aplicar el método de los trapecios a f con la partición

$$a, a + \frac{b-a}{n}, a + 2\frac{b-a}{n}, \dots, b.$$

Regla del Trapecio.

A continuación se presenta una introducción intuitiva a lo que se conoce como Regla de los Trapecios o Método Trapecial.

Supongamos que f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y que los números $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ determinan una partición \mathcal{P} del intervalo $[a, b]$.

Cada $x_i \in [a, b]$ tiene una imagen $f(x_i)$. Por lo tanto la partición \mathcal{P} da origen a n trapecios. Los vértices de estos trapecios son los puntos $(x_i, 0)$, $(x_{i+1}, 0)$, $(x_i, f(x_i))$ y $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$, tal como se muestra en la siguiente figura.

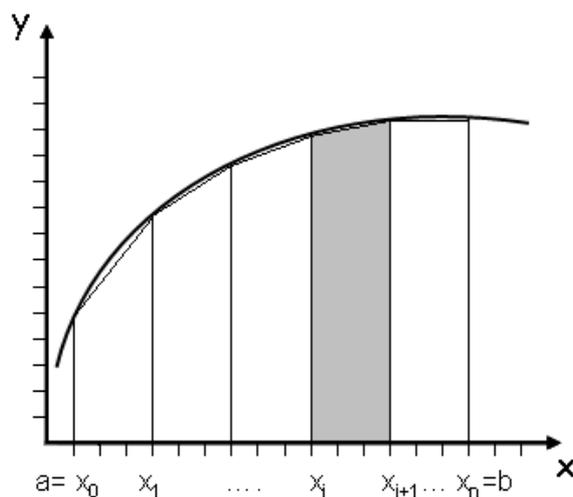


FIGURA 6.1. Interpretación geométrica del i -ésimo trapecio.

El área del i -ésimo trapecio viene dada por

$$A_i = \frac{(x_{i+1} - x_i)(f(x_{i+1}) + f(x_i))}{2}$$

La suma de las áreas de los n trapecios es una aproximación al área bajo la curva en el intervalo $[a, b]$.

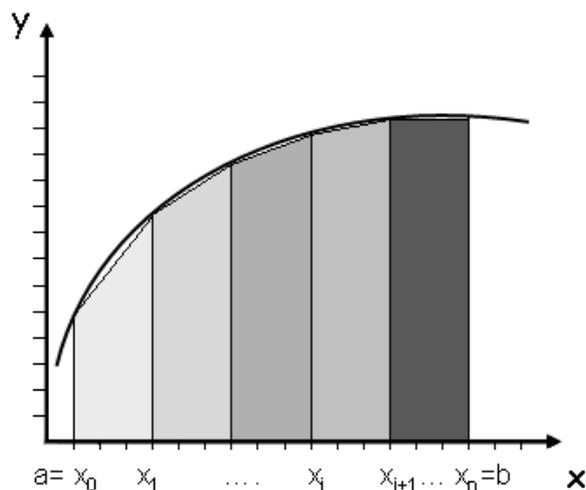


FIGURA 6.2. Interpretación geométrica de n trapecios.

Por lo tanto tenemos

$$\int_a^b f(x)dx \approx A_1 + A_2 + \cdots + A_i + \cdots + A_n$$

Sustituyendo el valor del área de cada trapecio, se obtiene que la suma es igual a

$$\frac{(x_1 - x_0)(f(x_1) + f(x_0))}{2} + \frac{(x_2 - x_1)(f(x_2) + f(x_1))}{2} + \cdots + \frac{(x_n - x_{n-1})(f(x_n) + f(x_{n-1}))}{2}$$

Si la partición la escogemos de manera que $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$, para $i = 1, \dots, n$, al factorizar la suma por agrupación de términos y extrayendo factores comunes, se obtiene

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n} [f(x_0) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)],$$

es decir

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Es de esperarse que este método de un resultado aproximado del valor de $\int_a^b f(x)dx$. Este resultado debería ser más acertado en la medida en que el número de subintervalos que conforman la partición \mathcal{P} que dividen al intervalo $[a, b]$ tienda a infinito, haciendo que $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ tienda a 0.

En una gráfica, esa diferencia entre el valor de la integral y el cálculo aproximado de la misma por la Regla del Trapecio es igual al área del espacio entre el gráfico de f y el área no cubierta por los trapecios.

A continuación establece un resultado que permite estimar el error en la Regla del Trapecio. Es importante destacar que este resultado muestra que, bajo ciertas condiciones bastante generales, el Método de los Trapecios es una buena alternativa para el cálculo aproximado de integrales definidas.

Módulo 2

TEOREMA 6.1. *Sea f una función definida en el intervalo $[a, b]$. Supongamos que f es derivable dos veces en $[a, b]$ y que la derivada segunda de f es continua.*

Sea $M = \max\{|f''(x)| : x \in [a, b]\}$, entonces:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - T_n \right| \leq \frac{(b-a)^3 M}{12n^2}$$

Antes de dar la demostración de este teorema, se expondrán y se recordarán ciertos resultados preliminares.

El siguiente resultado se estudia en los cursos básicos de cálculo.

TEOREMA 6.2 (Rolle). *Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Si f es derivable en el intervalo (a, b) y $f(a) = f(b)$ entonces existe un número $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$*

PROPOSICIÓN 6.3. *Sea f una función continua definida en el intervalo $[a, b]$ y derivable dos veces en (a, b) . Si existen tres puntos $x_0, x_1, x_2 \in [a, b]$ tales que $f(x_0) = f(x_1) = f(x_2)$ entonces existe un número $c \in (a, b)$ tal que $f''(c) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Es claro que se puede suponer $x_0 < x_1 < x_2$.

Se considera el intervalo $[x_0, x_1]$, se aplica el teorema de Rolle y se obtiene un número $c_1 \in (x_0, x_1)$ tal que $f'(c_1) = 0$

Se considera el intervalo $[x_1, x_2]$, se aplica el teorema de Rolle y se obtiene un número $c_2 \in (x_1, x_2)$ tal que $f'(c_2) = 0$

De lo anterior se tiene $f'(c_1) = f'(c_2)$, aplicando nuevamente el teorema de Rolle en $[c_1, c_2]$, se obtiene un número $c \in (c_1, c_2) \subset (a, b)$ tal que $f''(c) = 0$. \square

El siguiente resultado permite dar una estimación del error que aparece en el Método Trapecial cuando se considera un único trapecio.

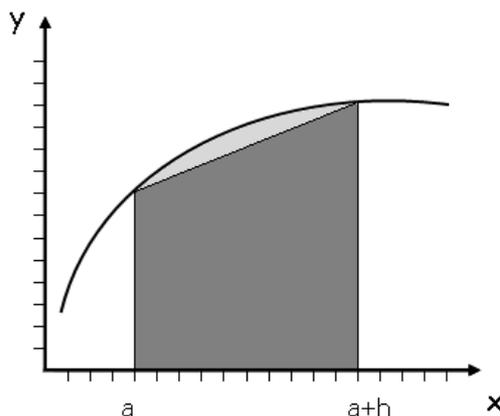


FIGURA 6.3. Considerando un único trapecio.

LEMA 6.4. *Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, a + h]$ y dos veces derivable en $(a, a + h)$. Entonces para cada $x \in (a, a + h)$ existe un número $c \in (a, a + h)$ tal*

que

$$f(x) = f(a) + \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) (x-a) + \frac{(x-a)(x-(a+h))f''(c)}{2}.$$

DEMOSTRACIÓN. Una primera aproximación de la función $f(x)$ es tomar la recta que une el punto $(a, f(a))$ con el punto $(a+h, f(a+h))$. La ecuación de esta recta es $y = P(x)$, donde

$$P(x) = f(a) + \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) (x-a)$$

El error al aproximar la función en cada punto del intervalo $[a, a+h]$ se define como

$$E(x) = f(x) - P(x).$$

Se va a probar que existe $g(x)$ continua en $[a, b]$ tal que

$$(6.1) \quad f(x) - P(x) = g(x)(x-a)(x-(a+h))$$

Se define $g(x)$ de la siguiente manera:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)(x-(a+h))} & \text{si } x \neq a \wedge x \neq a+h, \\ \frac{f'(a) - P'(a)}{-h} & \text{si } x = a, \\ \frac{f'(a+h) - P'(a+h)}{h} & \text{si } x = a+h. \end{cases}$$

Veamos que $g(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$.

Se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P(x)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - P'(x)}{1} = f'(a) - P'(a)$$

y

$$\lim_{x \rightarrow a+h} \frac{f(x) - P(x)}{x-(a+h)} = \lim_{x \rightarrow a+h} \frac{f'(x) - P'(x)}{1} = f'(a+h) - P'(a+h),$$

por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)(x-(a+h))} = \frac{f'(a) - P'(a)}{-h}$$

y

$$\lim_{x \rightarrow a+h} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)(x-(a+h))} = \frac{f'(a+h) - P'(a+h)}{h}.$$

Por construcción se tiene que g satisface la ecuación (6.1)

Para $x \in (a, a+h)$, sea

$$W(t) = W_x(t) = f(t) - P(t) - (t-a)(t-(a+h))g(x),$$

entonces

$$W(a) = W(a+h) = W(x) = 0.$$

Como f es continua y derivable dos veces en $(a, a+h)$ por la Proposición 6.3 existe un número $c \in (a, a+h)$ tal que $W''(c) = 0$.

Un cálculo simple muestra que

$$W''(t) = f''(t) - P''(t) - 2g(x),$$

como P es un polinomio de grado 1, se tiene que $P'' = 0$, substituyendo $t = c$ se obtiene

$$0 = W''(c) = f''(c) - 2g(x).$$

Por lo tanto

$$g(x) = \frac{1}{2}f''(c).$$

Substituyendo el valor anterior de $g(x)$ en la ecuación 6.1 y despejando el valor de $f(x)$ se obtiene

$$f(x) = P(x) + \frac{(x-a)(x-(a+h))f''(c)}{2}.$$

□

LEMA 6.5. Sea f una función definida en el intervalo $[a, a + h]$. Supongamos que f es derivable dos veces en $[a, a + h]$ y que la derivada segunda de f es continua.

Sea $K = \text{máx}\{|f''(x)| : x \in [a, a + h]\}$, entonces

$$\left| \int_a^{a+h} f(x)dx - \frac{h(f(a) + f(a+h))}{2} \right| \leq \frac{h^3 K}{12}.$$

DEMOSTRACIÓN. Al igual que antes, sea

$$P(x) = f(a) + \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) (x - a),$$

entonces

$$\int_a^{a+h} P(x)dx = \frac{h(f(a) + f(a+h))}{2}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \left| \int_a^{a+h} f(x)dx - \frac{h(f(a) + f(a+h))}{2} \right| &= \left| \int_a^{a+h} (f(x) - P(x))dx \right| \\ &\leq \int_a^{a+h} |f(x) - P(x)|dx, \end{aligned}$$

por el Lema 6.4 se tiene que

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{K}{2} |(x-a)(x-(a+h))|,$$

luego

$$\int_a^{a+h} |f(x) - P(x)|dx \leq \frac{K}{2} \int_a^{a+h} |(x-a)(x-(a+h))|dx.$$

Ahora sólo falta calcular

$$\int_a^{a+h} |(x-a)(x-(a+h))|dx.$$

Con el cambio de variable $u = x - a$, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_a^{a+h} |(x-a)(x-(a+h))| dx &= - \int_0^h (u)(u-h) du = - \int_0^h (u^2 - uh) du \\ &= - \left[\frac{u^3}{3} - \frac{u^2 h}{2} \right]_0^h = \frac{h^3}{6}. \end{aligned}$$

Finalmente

$$\left| \int_a^{a+h} f(x) dx - \frac{h(f(a) + f(a+h))}{2} \right| \leq \frac{K}{2} \frac{h^3}{6} = \frac{h^3 K}{12}.$$

□

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 6.1.

Consideremos la siguiente partición de $[a, b]$

$$a, a + \frac{b-a}{n}, a + 2 \frac{b-a}{n}, \dots, a + k \frac{b-a}{n}, \dots, b,$$

es decir $x_j = a + jh$, donde $h = \frac{b-a}{n}$ para $j = 0, 1, 2, \dots, n$.

La integral de f sobre el intervalo $[a, b]$ se descompone como una suma de integrales sobre los subintervalos de la partición de la siguiente manera

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{a+h} f(x) dx + \int_{a+h}^{a+2h} f(x) dx + \dots + \int_{a+(n-1)h}^b f(x) dx$$

Por el Lema 6.5, al considerar un único trapecio en el intervalo $[a + (j-1)h, a + jh]$, el error cometido al aproximar la integral

$$\int_{a+(j-1)h}^{a+jh} f(x) dx$$

está acotado por

$$\frac{K_j h^3}{12},$$

donde $K_j = \text{máx}\{|f''(x)| : x \in [a + (j-1)h, a + jh]\}$.

Como $M = \text{máx}\{|f''(x)| : x \in [a, b]\}$, se tiene que $K_j \leq M$ para $j = 1, \dots, n$.

El error que se comete al aproximar la integral de f sobre $[a, b]$ al considerar los trapezoidos correspondientes a la partición $\{x_0, \dots, x_n\}$ está acotado por la suma de los errores en cada uno de los subintervalos, por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)dx - T_n \right| &\leq \sum_{j=1}^n \frac{K_j h^3}{12} \leq \sum_{j=1}^n \frac{M h^3}{12} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{M (b-a)^3}{12n^3} = \frac{(b-a)^3 M}{12n^2} \end{aligned}$$

□

Módulo 3

El Error del Método Trapezoidal para Curvas Cóncavas.

Para el caso particular de las funciones cóncavas se puede deducir, de manera muy geométrica e intuitiva, una estimación del error que se comete en la Regla Trapezoidal.

Aplicando esta estimación del error a la función logaritmo, se puede obtener una versión aproximada de la fórmula de Stirling. Lo que se expone a continuación está basado en el artículo "The error of the trapezoidal method for a concave curve" de S. K. Stein, aparecido en la sección "Classroom notes" de la revista American Mathematical Monthly.

Stein, S.K (1976, PP.643-644) establece el siguiente resultado:

TEOREMA 6.6. *Sea f una función definida para $x \geq 1$. Supongamos que f es derivable dos veces y que $f(x) \geq 0$, $f'(x) \geq 0$ y $f''(x) \leq 0$ para todo $x \geq 1$. Sea n un entero positivo y sea T_n el estimado Trapezoidal de $\int_1^n f(x)dx$ basado en la partición $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ del intervalo $[1, n]$, entonces*

$$0 \leq \int_1^n f(x) dx - T_n \leq \frac{f(2) - f(1)}{2}$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración que se dará es geométrica. Es importante notar que, debido a las hipótesis sobre la función f se tiene que f es creciente y su gráfico es cóncavo.

Para cualquier entero $i = 2, 3, \dots, n - 1$ se considera el siguiente diagrama, que contiene la clave de la demostración. Del gráfico sigue que la diferencia considerada es no negativa.

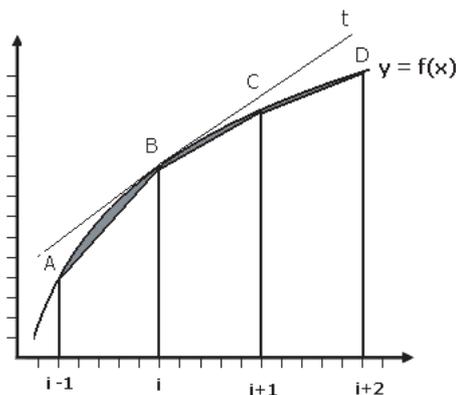


FIGURA 6.4. Error del Método Trapezoidal para curvas cóncavas.

Sea t la recta tangente al gráfico de f en el punto $B = (i, f(i))$. Las áreas de las regiones sombreadas representan los errores de los sumandos adyacentes en la aproximación trapezoidal. Cuando la región sombreada de B a C es trasladada por el vector $B - C$, ningún punto de la región resultante R queda por debajo de t . Por lo tanto R y la región sombreada de A a B , que tienen a la derecha el punto común B , no comparten puntos interiores.

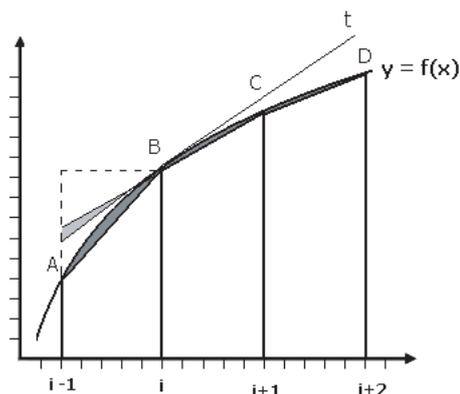


FIGURA 6.5. Traslado de la región sombreada de B a C por el vector $B - C$.

Ahora bien, para cada $i = 2, 3, \dots, n - 1$ se traslada la región correspondiente BC de forma tal que el punto final de la derecha coincida con el punto $(2, f(2))$.

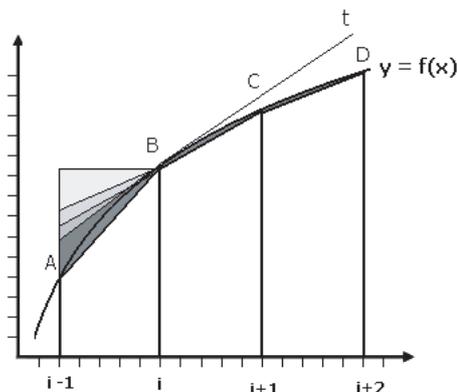


FIGURA 6.6. Traslado de la región correspondiente BC , para cada $i = 2, 3, \dots, n - 1$.

Se observa que ninguna de las regiones trasladadas comparten puntos interiores entre si ni con la región sombreada AB asociada con el caso $i = 2$. Por lo tanto el error total de la aproximación trapezoidal está acotado por el área del triángulo con vértices $(1, f(1))$, $(1, f(2))$, $(2, f(2))$.

Para terminar, basta notar que el área de este triángulo es

$$\frac{f(2) - f(1)}{2}$$

□

OBSERVACIÓN 6.7.

Con las mismas hipótesis con el teorema anterior, se tiene que la sucesión $\{a_n\}$ dada por

$$a_n = \int_1^n f(x) dx - T_n$$

es monótona creciente. Como es acotada se tiene que existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx - T_n.$$

Formula de Stirling. La fórmula de Stirling dice que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n} = 1.$$

El teorema anterior permite establecer el siguiente resultado, que es una primera aproximación a la fórmula de Stirling.

Stein, S.K ([71, 1976, pag. 675] utiliza el resultado anterior para establecer el siguiente resultado:

TEOREMA 6.8. *Existe una constante C tal que:*

$$n! \sim C\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

DEMOSTRACIÓN. Se considera la función $f(x) = \ln(x)$ para $x \geq 1$. Entonces

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad y \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2},$$

por lo que se cumplen las hipótesis del teorema anterior.

Por lo tanto, si

$$a_n = \int_1^n \ln x - T_n,$$

entonces

$$a_n \leq \frac{\ln 2 - \ln 1}{2} = \ln(\sqrt{2})$$

para todo n y existe $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Además

$$\int_1^n \ln(x) dx = [x \ln(x) - x]_1^n = n \ln(n) - n + 1 = \ln(n^n) - n + 1,$$

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{2}(\ln(1) + 2 \ln(2) + \cdots + 2 \ln(n-1) + \ln(n)) \\ &= \ln(2) + \cdots + \ln(n) - \frac{1}{2} \ln(n) \\ &= \ln(1,2,3 \dots n) - \frac{1}{2} \ln(n) \\ &= \ln(n!) - \ln(\sqrt{n}). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\ln(n^n) - n + 1 - \ln(n!) + \ln(\sqrt{n}) = a_n,$$

tomando exponencial

$$\frac{n^n e^{-n} e^{\sqrt{n}}}{n!} = e^{a_n}.$$

De esta última igualdad se deduce que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}} = e^{1-a},$$

donde $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, lo que demuestra el teorema.

□

Módulo 4

0.3. Ilustraciones Prácticas.

0.4. Verificación directa. Se ilustrará lo anteriormente propuesto por medio del siguiente ejemplo:

Verificar directamente la validez de la fórmula de estimación del error que se comete al utilizar la Regla Trapecial para estimar

$$\int_0^2 x^2 dx,$$

al dividir el intervalo $[0, 2]$ en 4 partes iguales.

Primero se procederá a utilizar la regla trapecial para calcular el valor aproximado de la integral $\int_0^2 x^2 dx$ con $n = 4$.

Como $[a, b] = [0, 2]$ y $n = 4$,

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{2 - 0}{4} = 0,50$$

y se obtienen los valores de $f(x)$

$$x_0 = 0,000 \quad f(x_0) = (0,000)^2 = 0,000$$

$$x_1 = 0,500 \quad f(x_1) = (0,500)^2 = 0,250$$

$$x_2 = 1,000 \quad f(x_2) = (1,000)^2 = 1,000$$

$$x_3 = 1,500 \quad f(x_3) = (1,500)^2 = 2,250$$

$$x_4 = 2,000 \quad f(x_4) = (2,000)^2 = 4,000$$

Por lo tanto mediante la Regla Trapecial se obtiene:

$$\int_0^2 x^2 dx \approx \frac{0,500}{2} [0,000 + 2(0,250) + 2(1,000) + 2(2,250) + 4,000],$$

de donde

$$\int_0^2 x^2 dx \approx T_4 = 2,750.$$

Se calcula el valor exacto de la integral definida

$$\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3} \cong 2,667$$

Posteriormente se procede a comparar el valor aproximado calculado mediante la Regla Trapecial, con el valor exacto de la integral definida. Para determinar el error cometido, se calcula la diferencia entre el valor aproximado y el valor exacto de la integral.

$$E = 2,750 - 2,667 = 0,083$$

Finalmente se calcula el error de la Regla Trapecial por medio de la fórmula obtenida en la demostración del Teorema 6.1. Recordemos que esta fórmula establece que

$$|E_T| = \left| \int_a^b f(x) dx - T_n \right| \leq \frac{(b-a)^3 M}{12 n^2}$$

Donde $M = \max\{|f''(x)| : x \in [a, b]\}$.

Como $f''(x) = 2$, se tiene que $M = 2$. Como $a = 0$, $b = 2$ y $n = 4$, se tiene que

$$|E_T| \leq \frac{(2-0)^3 2}{12 (4)^2} = \frac{1}{12} \cong 0,08333 \dots$$

Finalmente se verifica que

$$|E| = 0,083 \leq 0,08333 \dots = |E_T|.$$

0.5. Verificación usando Maple. La siguiente Sección corresponde a una aplicación utilizando el Programa Maple 9 (programa de aplicaciones matemáticas). Este programa permite, entre otras cosas, calcular el valor aproximado de la integral de una función por el Método de los Trapecios y, en algunos casos sencillos, permite calcular el valor exacto de la integral definida de una función. También permite establecer la validez de la fórmula de estimación del error al utilizar el Método de los Trapecios.

Ejercicio: Se desea hallar un valor aproximado de la integral de la función $f(x) = 2^x$, sobre $[0, 2]$, utilizando la Regla Trapecial con $n = 4$.

Para ello se introduce la expresión:

```
with(Student[Calculus1]):
```

```
ApproximateInt(2^x, x=0..2, partition=4, method = trapezoid,
output = plot );
```

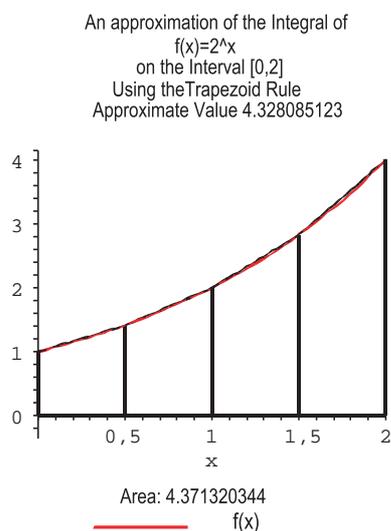


FIGURA 6.7. Valor aproximado de $f(X) = 2^x$.

Donde:

- “**Student[Calculus1]**” es un subprograma diseñado para ayudar a los estudiantes a comprender el cálculo elemental en una variable.
- “**ApproximateInt**” ($f(x)$, $x=a..b$) es un comando que aproxima la integral de una expresión $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$. Utilizando opciones, se puede especificar la partición del intervalo (`partition = n`), el método a utilizar para aproximar la función (`method = trapezoid`) y la forma de observar el resultado (`output = plot`).

Se procede a colocar la siguiente línea de comandos, que permite calcular el valor exacto de la integral definida de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo cerrado $[0, 2]$

```
> with(Student[Calculus1]):
> a:=evalf(int( 2^x, x=0..2));
      a := 4.328085123
```

Donde:

- “**a:=**” permite asignar a una variable el valor obtenido en la estimación de la integral.
- “**evalf**” retorna el resultado como una expresión de números reales.
- “**int**” es el comando que permite calcular el valor exacto de una integral en el intervalo cerrado $[a, b]$.

Luego se procede a colocar la siguiente línea de comandos, que permite encontrar el valor correspondiente a la estimación de la integral de la función $f(x)$ por el método de los trapecios.

```
> with(Student[Calculus1]):
> b:=evalf(ApproximateInt(2^x, x=0..2, partition = 4, method = trapezoid));
      b := 4.371320343
```

- “**b:=**” es la variable asignada a la operación antes señalada.

A continuación se calcula el error por truncado, el cual se obtiene mediante la serie de comandos:

```
> E:= abs(b - a);
```

```
E := 0.043235220
```

Donde:

- “**E:=**” es la variable asignada al cálculo del error que se desea estimar.
- “**abs**” permite hallar el valor absoluto de la diferencia entre el valor de la integral (a) y el valor aproximado de la integral por el Método del Trapecio (b) .

Para Calcular el Error del método del trapecio demostrado en el teorema 6.1, denotada por:

$$|E_T| = \left| \int_a^b f(x)dx - T_n \right| \leq \frac{(b-a)^3 M}{12 n^2}$$

Se procede a calcular el valor máximo (M) de la función $f(x)$, donde:

$$M = \max\{|f''(x)| : x \in [a, b]\}$$

Por medio de la secuencia de comandos:

```
> Max:=evalf(abs(maximize(diff(2^x,x$2), x=0..2)));
```

```
Max := 1.921812056
```

Donde:

- “**Max:=**” es la variable asignada para el valor antes descrito.
- “**maximize**” permite calcular el máximo de la función a evaluar. En este caso la función a evaluar es la segunda derivada de la función $f(x) = x^2$, la cual se obtiene mediante el comando “**diff(f(x), x 2)**”.

Por último, se procede a calcular la fórmula del error del Método de los Trapecios, mediante su expresión algebraica, como se muestra a continuación:

```
> Et:=evalf((((2-0)^3)*Max)/(12*(4^2)));
      Et := 0.08007550233
```

Donde:

- “**Et:=**” es la variable asignada a esta operación algebraica.

Este resultado “**Et**” sirve de comparación con el resultado obtenido en la variable “**E**”, y así verificar el teorema 6.1.

0.6. Caso en que no se puede hallar la primitiva.

Como se mencionó anteriormente, existen diversas funciones para las cuales no es posible evaluar con exactitud una integral definida por medio de funciones elementales; es por ello que es de gran utilidad implementar como método de integración numérica la Regla Trapecial, para aproximar integrales definidas en un intervalo cerrado.

Un ejemplo de ello lo representa la integral $\int_a^b e^{-x^2}$, la cual es muy utilizada en probabilidades y estadística. Como no es posible evaluarla aplicando directamente el segundo teorema fundamental del cálculo se aplicará la Regla Trapecial, ya que esta puede ser muy exacta y se desarrolla con gran facilidad en un sistema de álgebra por computadora programada utilizando Maple. También se puede programar utilizando Maple, el algoritmo para estimar el error cometido en la Regla Trapecial en el cálculo del valor aproximado en esta integral definida.

Por consiguiente se procederá en el paquete de programación Maple, al cálculo del valor aproximado de la integral $\int_0^1 e^{-x^2}$, por medio de la Regla Trapecial con $n = 6$.

```
with(Student[Calculus1]):
ApproximateInt(exp(-x^2),x=0..1,partition = 6, method =trapezoid,
output = plot );
```

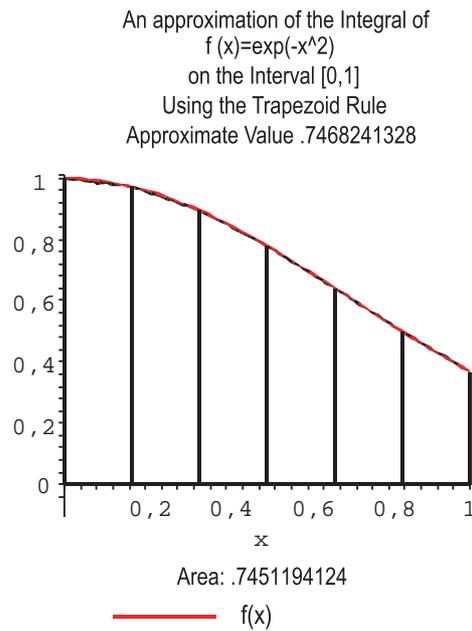


FIGURA 6.8. Valor aproximado de $\exp(-x^2)$.

Posteriormente, se procederá a programar en Maple el algoritmo de la fórmula del error en la Regla Trapezial, y de esta forma estimar el error posible en el calculo del valor aproximado de $\int_0^1 e^{-x^2}$ con $n = 6$, por medio de este método.

```
Et:=evalf((((1-0)^3)*Max)/(12*(6^2)));
```

```
Et := 0.001703145561
```

Bibliografía

- [1] ALSON, P. (1999) *Cálculo básico*. Editorial Erro. Citado y/o referido en página(s): 83
- [2] ANDER-EGG, E. (1974) *Introducción a las técnicas de investigación social*. Argentina: Editorial Humanistas.
- [3] APOSTOL, T. (1998) *Calculus Volumen II*. (Segunda Edición) Barcelona-Bogotá-Buenos Aires-Caracas-Mexico-Rio de Janeiro: Editorial Reverté.
- [4] ARIZA, V. (1995) “Foro: Tendencias actuales en la enseñanza de la matemática. La enseñanza de la matemática”. *Enseñanza de la Matemática*. Volumen 4, N° 2.
- [5] ATKINSON, E. (1998) *An introduction to numerical analysis*. (Segunda Edición) John Wiley & Sons.
- [6] AUSUBEL, D., NOVAK, J. Y HANESIAN, H. (1990) *Psicología educativa: Un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas. Citado y/o referido en página(s): 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 29, 43, 69
- [7] BALESTRIN, M. (2001) *Cómo se elabora el proyecto de investigación*. Caracas: Consultores Asociados B.L. Servicio Editorial. Citado y/o referido en página(s): 69, 70, 73
- [8] BRAVO, M. Y ARRIETA J.(2005) “Algunas reflexiones sobre las funciones de las demostraciones Matemáticas”. *Revista Iberoamericana de Educación*. N° 35.
- [9] BRAVO, M., DEL SOL, J. Y ARTEAGA, E. (2001) “El valor formativo de las demostraciones”. *Revista Electrónica de Didáctica de las Matemáticas*. Año 1, N° 3, Abril. Citado y/o referido en página(s): 12, 13
- [10] BRAVO, M. Y ARRIETA J. (2004) “Etapas en la determinación de un sistema de acciones para la enseñanza de las demostraciones geométricas.” *Revista Iberoamericana de Educación*. N° 33. Citado y/o referido en página(s): 12
- [11] BRAVO, S. (1979) *Técnicas de investigación social*. España: Editorial Paraninfo.
- [12] BRUNER, J (1969) *Hacia una teoría de la instrucción*. Mexico: Editorial Hispanoamericana. Citado y/o referido en página(s): 26, 27
- [13] CAMPEROS, M. (1997) *De los fines educativos a los objetivos instruccionales*. Caracas: Universidad Central de Venezuela. Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico.
- [14] CARR, W. Y KEMMIS, S. (1998) *Teoría crítica de la enseñanza. La investigación acción en la formación del profesorado*. Barcelona: Martínez-Roca. Citado y/o referido en página(s): 62
- [15] CASTILLO, J. (2004) *Compendio elemental de lógica Matemática*. Caracas: Editorial Nueva Expresión.
- [16] CHADWICK, C. Y RIVERA, N. (1991) *Evaluación formativa para el docente*. Barcelona, España: Ediciones Paidós.

- [17] CHIRIVELLA, J. (1995) "Algunas consideraciones acerca de la enseñanza de la Matemática." *Enseñanza de la Matemática*. Volumen 4, N° 2.
- [18] COLL, C. (2001) "Concepciones y tendencia actuales en psicología de la educación". En Coll, C., Palacios, J. y Marchesi, A. *Desarrollo Psicológico y Educación 2. Psicología de la educación escolar*. Madrid: Alianza. Citado y/o referido en página(s): 6, 16
- [19] COLL, C. (2001) "Constructivismo y educación: la concepción constructivista de la enseñanza y el aprendizaje". En Coll, C., Palacios, J. y Marchesi, A. *Desarrollo Psicológico y Educación 2. Psicología de la educación escolar*. Madrid: Alianza.
- [20] COLL, C. (1990) "Psicología y educación: aproximación a los objetivos y contenidos de la psicología de la educación". En Coll, C., Palacios, J. y Marchesi, A. *Desarrollo Psicológico y Educación II*. Madrid: Alianza.
- [21] COLL, C. Y MARTI, E. (2001) "Aprendizaje y desarrollo: la concepción genético-cognitiva del aprendizaje". En Coll, C., Palacios, J. y Marchesi, A. *Desarrollo Psicológico y Educación 2. Psicología de la educación escolar*. Madrid: Alianza.
- [22] COLL, C. Y ROCHERA, M. (1990) "Estructuración y organización de la enseñanza: las secuencia de aprendizaje." En Coll, C., Palacios, J. y Marchesi, A. *Desarrollo Psicológico y Educación II*. Madrid: Alianza. Citado y/o referido en página(s): 23, 24, 31, 32, 33
- [23] COLL, C. Y VALLS, E. (1995) "El Aprendizaje y la enseñanza de los procedimientos". En Coll, C., Pozo, J. y Valls, E. *Los contenidos en la reforma. Enseñanza y Aprendizaje de Conceptos, Procedimientos y Actitudes*. Madrid: Santillana.
- [24] CRUZ, CIPRIANO (1994) "Estrategias cognitivas para la enseñanza de la Matemática: Posibilidades y limitaciones". *Enseñanza de la Matemática*. Volumen 3, N° 3.
- [25] CURTIS, G. (1987) *Análisis numérico*. (Segunda Edición) Mexico: Representaciones y servicios de Ingeniería.
- [26] DEMIDOVICH, B. (1978) *Problemas y ejercicios de análisis matemático*. Madrid: Editorial Paraninfo. Citado y/o referido en página(s): 83
- [27] DÍAZ, F. Y GARCÍA B. (2001) "Elementos para la evaluación del diseño instruccional de materiales didácticos impresos orientados al aprendizaje significativo". *Revista: Tecnología y Comunicación Educativa*. N° 33. Citado y/o referido en página(s): 7, 44, 47, 50
- [28] DICK-LOU, W. (1979) *Diseño sistemático de la instrucción*. Bogotá-Colombia: Voluntad Editores LTDA & Cia. S.C.A. Citado y/o referido en página(s): 44, 46
- [29] DORREGO, E. (1995) "Modelo para la producción y evaluación formativa de Medios instruccionales". *Revista de Tecnología Educativa*. Volumen XII, N° 3, Universidad Central de Venezuela. Caracas: Fondo Editorial. Citado y/o referido en página(s): 44

- [30] DORREGO, E. Y GARCIA, A. (1991) *Dos modelos para la producción y evaluación de materiales instruccionales*. Facultad de Humanidades y Educación. Universidad Central de Venezuela. Caracas: Fondo Editorial. Citado y/o referido en página(s): 49, 75
- [31] DORREGO, E. Y GARCIA, A. (1990) *Estrategias y medios instruccionales*. Universidad Central de Venezuela, Facultad de Humanidades y Educación, Estudios Universitarios Supervisados, Escuela de Educación. Caracas. Citado y/o referido en página(s): 46
- [32] DUVERGER, M. (1969) *Método de las ciencias sociales*. España: Ediciones Ariel.
- [33] EDWARDS, C. Y PENNEY, D. (1994) *Cálculo con geometría Analítica*. (Cuarta Edición). Mexico-Argentina-Brasil-Colombia-Costa Rica-Chile-Ecuador-España-Guatemala-Panamá-Perú-Puerto Rico-Uruguay-Venezuela: Pearson Educación.
- [34] ELLIOT, J. (1993) *El cambio educativo desde la investigación acción* Madrid: Ediciones Morata. Citado y/o referido en página(s): 63
- [35] GACÍA, A. Y DORREGO, E. (1993) “Diseño, producción y evaluación de materiales instruccionales”. *Revista Pedagógica*. Volumen X, N° 19, Abril.
- [36] GIMENEZ, J. (2002) *Matemática V. Segundo Año C.D.* Caracas: Ediciones Vega.
- [37] GODINO, J. (2003) *Perspectiva de la didáctica de las Matemáticas como disciplina científica*. Universidad de Granada. Citado y/o referido en página(s): 8, 10
- [38] GODINO, J. Y RECIO A. (2001) *Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación Matemática: Enseñanza de las Ciencias: Documento de trabajo del curso de Doctorado “Teoría de la educación Matemática”*. Recuperable en Internet: <http://www.ugr.es/local/jgodino/>. Universidad de Granada. Citado y/o referido en página(s): 11, 12
- [39] GOOD, W. (1970) *Métodos de investigación social* Mexico: Editorial Trillas.
- [40] GUERRERO, O. (1994) “Una propuesta metodológica de la enseñanza de las Matemáticas, en I y II Etapa E.B.”. *Enseñanza de la Matemática*. Volumen 3, N° 3.
- [41] CUTIERREZ, P. (1995) “Foro: tendencias actuales en la enseñanza de la Matemática. Reflexiones sobre las tendencias actuales de la Matemática”. *Enseñanza de la Matemática*. Volumen 4, N° 2.
- [42] HERNANDEZ, S. FERNÁNDEZ, R. Y BAPTISTA, C. (2003) *Metodología de la investigación* Mexico: McGraw Hill. Citado y/o referido en página(s): 73
- [43] KEMMIS, S. Y MC TAGGART, R. (1998) *Cómo planificar la investigación acción*. Barcelona: Laertes.
- [44] LEITHOLD, L. (1992) *Cálculo con geometría Analítica*. (Sexta Edición.) Mexico: Harla. Citado y/o referido en página(s): 83
- [45] MCKERNAN, J. (1999) *Investigación acción y currículum*. Madrid: Morata.
- [46] MARTÍN, E. Y SOLE, I. (2001) “El aprendizaje significativo y la teoría de la asimilación”. En Coll, C., Palacios, J. y Marchesi, A. *Desarrollo Psicológico y Educación 2. Psicología de la educación escolar*. Madrid: Alianza. Citado y/o referido en página(s): 35
- [47] MARTÍNEZ M. (2004) *Ciencia y arte en la metodología cualitativa* Mexico: Trillas.

- [48] MARTÍNEZ M. (2004) *El Comportamiento humano. Nuevos métodos de investigación* Mexico: Trillas.
- [49] MARTÍNEZ M. (1991) *La investigación cualitativa etnográfica en educación. Manual Teórico Práctico* Mexico: Trillas.
- [50] MARTÍNEZ M. (1999) *La nueva ciencia, su desafío, lógica y método* Mexico: Trillas. Citado y/o referido en página(s): 75
- [51] MORA, C. (2001) “Aprendizaje y enseñanza de la matemática enfocada en las aplicaciones”. *Enseñanza de la Matemática*. Vol. 10, N° 1. Citado y/o referido en página(s): 67
- [52] MORA, C. (1999) “Concepción integral para el aprendizaje y enseñanza de la Matemática en los diferentes niveles educativos”. *Paradigma* Vol. XX(1), N° 1.
- [53] MORA, C. (2001) “Conformación de una línea de investigación en la enseñanza de la Matemática”. *Revista de Pedagogía*. Vol. XXII, N° 63. Citado y/o referido en página(s): 8
- [54] MORA, C.(2005) *Didáctica crítica, educación crítica de las matemáticas y etnomatemática. Perspectivas para la transformación de la educación matemática en América Latina*. Serie: Pedagogía, Didáctica, Trabajo y Educación, Educación Matemática, Psicología del Aprendizaje, Neurodidáctica e Investigación Acción. Editado en Bolivia-Venezuela.
- [55] MORLES, V. (1977) *Planeamiento y análisis de investigaciones* Caracas: Ediciones de la Facultad de Humanidades y Educación.
- [56] ONRUBIA, J., ROCHERA, J. Y BARBERÀ, E. (2001) “La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: Una perspectiva psicológica”. En Coll, C., Palacios, J. y Marchesi, A. *Desarrollo Psicológico y Educación 2. Psicología de la educación escolar*. Madrid: Alianza. Citado y/o referido en página(s): 35, 37, 38
- [57] ORTON, A. (1998) *Didáctica de las matemáticas*. Madrid: Ediciones Morata , S.L.
- [58] PAZ, M. (2001) *Investigación cualitativa en educación, fundamentos y tradiciones*. México: Mc Graw-Hill. Citado y/o referido en página(s): 61
- [59] PALELLA, S. Y MARTINS F. (2004) *Metdología de la Investigación Cuantitativa* Caracas: Fedupel. Citado y/o referido en página(s): 5, 64, 71, 72, 73
- [60] PEREZ, D. (1994) *Investigación cualitativa: retos e interrogantes* Madrid: La Muralla.
- [61] PISKUNOV, N. (2001) *Cálculo diferencial e integral*. (Cuarta Edición) Mexico: Limusa Noriega Editores. Citado y/o referido en página(s): 83
- [62] POZO, J. (2000) *Aprender y enseñar ciencia*. Madrid: Ediciones Morata, S.L.
- [63] PURCELL, E. Y VARBERG, D. (1993) *Cálculo con geometría analítica*. (Sexta Edición) Londres-Sidney-Toronto-México-Nueva Delhi-Tokio-Singapur-Rio de Janeiro: Prentice Hall Hispanoamericana, S.A. Citado y/o referido en página(s): 83
- [64] RAMIREZ, T. (1999) *Cómo hacer un proyecto de investigación*. Caracas: Editorial Panapo. Citado y/o referido en página(s): 71, 73
- [65] RESNICK, L. Y FORD W. (1990) *La enseñanza de las matemáticas y su fundamentos psicológicos*. Barcelona-Buenos Aires-Mexico: Ediciones Paidós. Citado y/o referido en página(s): 98

- [66] RODRIGUEZ, N. (2000) “Criterios para el análisis del diseño curricular”. *Cuadernos de educación* N° 134. Citado y/o referido en página(s): 39, 41
- [67] ROSALES, C. (1998) *Criterios para una Evaluación formativa*. Madrid: Ediciones Narcea, S.A.
- [68] RUNYON, R. Y HABER A. (1984) *Estadística para las ciencias sociales* Mexico: Editorial Fondo Educativo Interamericano.
- [69] SILVA, F. (2006) “Habilidades investigativas”. *Revista de educación y cultura de la sección 47 del SNTE*. Mexico: Guadalajara. Citado y/o referido en página(s): 28
- [70] STOER, J. Y BURLISH, R. (1992) *Introduction to numerical analysis*. (Second Edition) Springer Editions.
- [71] STEIN, S. (1976) “The error of the trapezoidal method for a concave curve”. *American Mathematical Monthly* Vol. 33, N° 8. Citado y/o referido en página(s): 4, 66, 69, 96, 111
- [72] SWOKOWSKI, E. (1989) *Cálculo con geometría analítica*. (Segunda Edición) Mexico: Belmont: Wadsworth Internacional Iberoamericana. Citado y/o referido en página(s): 83
- [73] THOMAS, G. Y FINNEY, R. (1972) *Cálculo con geometría analítica*. México: Editorial Addison-Wesley. Citado y/o referido en página(s): 83
- [74] WAYNE, D. (1998) *Estadística con aplicaciones en las ciencias sociales y la educación*. Mexico: McGraw-Hill.
- [75] WEINBERS, S. Y GOLDBERS K. (1983) *Estadística básica para las ciencias sociales*. Mexico: Nueva Editorial Interamericana.

APÉNDICE A

Programas.

A continuación se presentan los programas de las asignaturas Matemática I, Matemática II y Matemática III de la Licenciatura en Matemática de la Universidad Central de Venezuela.

El programa de la asignatura Matemática I, abarca la base fundamental y/o requisitos mínimos que el estudiante debe poseer para comprender los tópicos que abarca la asignatura Matemática II.

En el programa de la asignatura Matemática II, se estudia en el tema 7, denominado; “Cálculo aproximado de integrales” los siguientes tópicos: Cálculo aproximado de integrales definidas y estimación del error. Aproximación de áreas por rectángulos, Regla de los Trapecios y Regla de Simpson.

Finalmente, en la asignatura Matemática III, se estudia en el tema 2, denominado “Series numéricas” los siguientes tópicos: Series: definición y ejemplos. Criterios de convergencia para series de términos positivos: comparación, límites, raíz, razón, integral. Series alternadas: criterio de Leibnitz.

Fórmula de Stirling y producto de Wallis.

Matemática I

Licenciaturas en Biología, Computación, Física, Geoquímica, Matemática, Química

Código: 8206	
Créditos: 6	Requisitos: No tiene
Horas de teoría: 4	Horas de práctica: 4
Vigente desde 2000-2	

Objetivos

En este curso el estudiante recibe una introducción al cálculo diferencial en una variable. El objetivo de este curso es que el estudiante:

Aprenda a manipular correctamente los números, las funciones básicas y sus gráficas.

Adquiera una buena base de geometría analítica del plano.

Aprenda a resolver inecuaciones y trabajar con aproximaciones.

Comprenda las nociones de límite y continuidad. Calcule límites. Reconozca puntos de discontinuidad de una función.

Comprenda el concepto de derivada, su significado geométrico y físico y esté en capacidad de aplicarlo a la resolución de problemas.

Aprenda las reglas de derivación y sepa derivar funciones polinómicas, racionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y sus combinaciones y composiciones.

Trace gráficos precisos de funciones, sabiendo precisar sus características usando límites y derivadas.

Contenido

Tema 1: Los números.

Números naturales, enteros, racionales, reales. Propiedades básicas. Identificación del conjunto de los números reales con la recta. Relación de orden. Intervalos.

Tema 2: Curvas, fórmulas, funciones y gráficas.

Pares ordenados y plano Cartesiano.

Curvas que representan gráficas de funciones. Estudio descriptivo. Manipulaciones geométricas con las curvas. Curva inversa y composición de curvas.

Fórmulas y uso de la calculadora. Manipulaciones con fórmulas. Fórmulas inversas.

Relación entre fórmulas y curvas.

Tema 3: Funciones básicas.

Estudio y gráficos de algunas funciones:

- (i) Identidad, cuadrado, raíz cuadrada, potencial, raíz enésima.
- (ii) Valor absoluto, parte entera.
- (iii) Exponencial y logarítmica, logaritmo neperiano y logaritmo en base 10, cambio de base.
- (iv) Funciones polinómicas y funciones racionales.

Trigonometría: círculo trigonométrico, funciones trigonométricas, ángulos notables, fórmulas trigonométricas básicas, funciones trigonométricas inversas, representación gráfica.

Representación gráfica de funciones que se pueden expresar como suma, producto o inversa numérica de las funciones básicas, en particular polinomios y algunas funciones racionales sencillas. Escala logarítmica y semilogarítmica.

Estudio de la noción de ecuación y su interpretación en el cuadro funcional y gráfico. Funciones definidas mediante fórmulas. Dominio y rango de una función.

Tema 4: Geometría analítica plana.

Estudio de las rectas, parábolas e hipérbolas como familia de curvas. Interpretación geométrica de los coeficientes (estudio detallado del binomio de segundo grado). Distancia entre dos puntos del plano. Circunferencia. Elipse. Distancia de un punto a una recta.

Tema 5: Inecuaciones y aproximaciones.

Resolución de inecuaciones (método gráfico). Cálculo de soluciones de ecuaciones por aproximación. Errores. Cifras significativas.

Tema 6: Composición de funciones.

Composición de funciones. Representación gráfica de funciones que se pueden expresar como composición de funciones básicas. En particular considerar: $a \operatorname{sen}(bx+c)$, $\exp(-x^2)$, $\exp(-kx)$, $|f(x)|$, etc.

Tema 7: Límites.

Límites. Discusión intuitiva. Interpretación gráfica del concepto de límite. Límites laterales. Límites infinitos y límites en el infinito. Cálculo de límites de funciones definidas mediante fórmulas. Límites indeterminados sencillos.

Tema 8: Derivadas.

Definición de derivada y su interpretación geométrica y física. Reglas de derivación y su justificación. Suma, resta, producto, cociente. Regla de la cadena y derivada de la función inversa. Cálculo de derivadas de funciones dadas por fórmulas.

Derivadas de las funciones polinómicas, racionales, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.

Uso de la derivada para hallar la tangente a una curva en un punto dado.

Tema 9: Continuidad.

Noción de continuidad. Interpretación geométrica. Distintos tipos de discontinuidades.

Tema 10: Aplicaciones.

Uso de los límites y la derivada para precisar aspectos de una curva. Cálculo de máximos y mínimos de una función. Trazado de gráfico de funciones.

Aplicaciones a problemas de Matemática, Biología, Física y Química.

Bibliografía

- [1] ALSON, PEDRO *Métodos de graficación*. Editorial Erro.
- [2] DEMIDOVICH, B. *Problemas y ejercicios de Análisis Matemático*. Editorial Paraninfo.
- [3] EDWARDS, C. H. Y PENNEY D. E. *Geometría Analítica y Cálculo*. Editorial Prentice Hall Hispanoamericana.
- [4] LEITHOLD, L. *Matemáticas previas al Cálculo*. Editorial Harla.
- [5] MIRANDA, GUILLERMO *Matemática I - Física*. Fac. Ciencias. UCV.
- [6] SWOKOWSKY, E. W. *Cálculo con Geometría Analítica*. Grupo Editorial Iberoamericana.

Comentarios

- (1) La última parte del curso, que corresponde con introducción al cálculo diferencial y aplicaciones, tiene un carácter introductorio. Este tema será estudiado con mayor profundidad en el curso de Matemática II.
- (2) Los libros
 - Calculus de M. Spivak (editorial reverté)
 - Calculus Volumen 1 de T. Apostol (editorial reverté)son excelentes, pero se encuentran por encima del nivel de este curso. Sin embargo, es deseable incentivar a los estudiantes para que comiencen a iniciarse en este tipo de literatura.

Matemática II

Licenciaturas en Biología, Computación, Física, Geoquímica, Matemática, Química

Código: 8207	
Créditos: 6	Requisitos: Matemática I
Horas de teoría: 4	Horas de práctica: 4
Vigente desde 2000-2	

Objetivos

Este es un curso de cálculo diferencial e integral en una variable, al que el estudiante llega con una base de un primer curso de introducción al cálculo diferencial. Los conceptos y resultados de cálculo diferencial introducidos en Matemática I son tratados con mayor rigor y profundidad.

El objetivo de este curso es que el estudiante:

Domine las técnicas de derivación de funciones.

Use las técnicas del cálculo diferencial para calcular límites, trazar gráficos de funciones y resolver problemas de máximos y mínimos.

Comprenda el concepto de sucesión y límite de sucesión, sea capaz de calcular el límite de una amplia variedad de sucesiones.

Entienda el enunciado del teorema de Taylor, esté en capacidad de aproximar funciones y estimar el error. Use el método de la tangente de Newton para aproximar ceros de funciones.

Aprenda a calcular la antiderivada (primitiva) de una amplia variedad de funciones.

Resuelva ecuaciones diferenciales de primer orden, que se resuelven por integración y comprenda algunas aplicaciones elementales.

Comprenda el concepto de integral definida y el teorema fundamental del cálculo. Aplique las técnicas de cálculo integral para resolver una amplia variedad de problemas que incluyen cálculo de volúmenes, longitud de arco, centro de gravedad, etc.

Esté en capacidad de aproximar integrales definidas usando la regla de los trapecios y la de Simpson.

Contenido

Tema 1: Cálculo diferencial en una variable.

Repaso de los conceptos básicos del cálculo diferencial.

Teoremas del valor medio: Rolle, Lagrange y Cauchy. Interpretación geométrica y aplicaciones. Funciones crecientes y decrecientes. Criterio de la primera derivada. Máximos y mínimos. Convexidad. Criterio de la segunda derivada (tanto para convexidad como para máximos y mínimos). Aplicación al trazado de gráficos de

funciones. Regla de L'Hopital. Asíntotas horizontales, verticales y oblicuas. Gráficos de funciones. Aplicaciones de máximos y mínimos.

Tema 2: Sucesiones numéricas.

Concepto de sucesión y ejemplos. Límite de una sucesión. Propiedades del límite. Cálculo de límites de sucesiones.

Tema 3: Teorema de Taylor y aproximaciones.

Fórmula de Taylor con resto. Acotación del resto y aplicaciones: Cálculo aproximado de funciones y desigualdades. Cálculo de ceros de funciones: Método de los intervalos encajados. Método de la tangente de Newton.

Tema 4: La integral indefinida.

Integral indefinida y métodos de integración: Cambio de variables, integración por partes, integrales trigonométricas, fórmulas de reducción para las integrales de $\sin^n x$ y $\cos^n x$, integración de funciones racionales. La sustitución $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Integración de algunas funciones irracionales.

Tema 5: Ecuaciones diferenciales.

Aplicación de los métodos de integración para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias sencillas. Ecuaciones con variables separables. Ecuaciones que se reducen a ecuaciones con variables separables ($y' = f(x, y)$ donde f es homogénea de grado cero, $y' = \frac{ax+by+c}{rx+sy+t}$, etc.). Ecuación lineal de primer orden, ecuación de Bernoulli. Aplicaciones: ley de enfriamiento de Newton, crecimiento de bacterias, desintegración radioactiva, crecimiento logístico.

Tema 6: La integral definida.

Area bajo el gráfico de una función. Area como límite de una sucesión. Integral de Riemann. Primitivas y teorema fundamental del cálculo. Regla de Barrow. Teoremas del valor medio para integrales. Cambio de variables e integración por partes para integrales definidas.

Tema 7: Cálculo aproximado de integrales.

Cálculo aproximado de integrales definidas y estimación del error. Aproximación de áreas por rectángulos, regla de los trapecios y regla de Simpson.

Tema 8: Aplicaciones del cálculo integral.

Cálculo de áreas de regiones planas. Longitud de arco de una curva dada en la forma $y = f(x)$. Volumen de un sólido cuando se conoce el área de su sección transversal (ejemplo: pirámide). Volumen de un sólido de revolución. Centro de gravedad. Area de una superficie de revolución. Integrales impropias en intervalos del tipo (a, ∞) y $(-\infty, a)$.

Bibliografía

- [1] ALSON, PEDRO *Cálculo Básico*. Editorial Erro.
- [2] BATSCHLET, E. *Introduction to Mathematics for Life Scientist*. Springer Verlag.
- [3] DEMIDOVICH, B. *Problemas y ejercicios de Análisis Matemático*. Editorial Paraninfo.
- [4] EDWARDS, C. H. Y PENNEY D. E. *Ecuaciones diferenciales elementales con aplicaciones*. Editorial Prentice Hall Hispanoamericana.
- [5] EDWARDS, C. H. Y PENNEY D. E. *Geometría Analítica y Cálculo*. Editorial Prentice Hall Hispanoamericana.
- [6] MIRANDA, GUILLERMO *Matemática II - Física*. Fac. Ciencias. UCV.
- [6] SWOKOWSKY, E. W. *Cálculo con Geometría Analítica*. Grupo Editorial Iberoamericana.

Comentarios

- (1) El estudiante llega a este curso con una pequeña base de cálculo diferencial, dada en el curso de Matemática I.
- (2) Los libros
 - Calculus de M. Spivak (editorial reverté)
 - Calculus Volumen 1 de T. Apostol (editorial reverté)se encuentran por encima del nivel de este curso. Sin embargo, es deseable incentivar a los estudiantes para que comiencen a iniciarse en este tipo de literatura.
- (3) Por limitaciones de tiempo, el profesor deberá escoger una de las aplicaciones mencionadas en el Tema de Ecuaciones Diferenciales y desarrollarla con cierto detalle. Es recomendable hacer alguna mención de las aplicaciones restantes.

Matemática III

Licenciaturas en Biología, Computación, Física, Matemática, Química.

Código: 8208	
Créditos: 6	Requisitos: Matemática II
Horas de teoría: 4	Horas de práctica: 4
Vigente desde 2001-1	

Objetivos

Este es un curso básico de cálculo, que contiene ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden, sistemas lineales de dos ecuaciones diferenciales, series numéricas, una introducción al álgebra lineal y una introducción al cálculo diferencial e integral en dos y tres variables.

El estudiante deberá:

Aprender a resolver ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, así como una amplia variedad de ecuaciones diferenciales que se reducen a éstas.

Aprender a resolver ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes en una variedad amplia de casos.

Aprender a resolver sistemas de dos ecuaciones diferenciales lineales.

Ser capaz de aplicar los conocimientos adquiridos sobre ecuaciones diferenciales para modelar situaciones que se presentan en Física, Biología y Química, tales como problemas de enfriamiento, desintegración radioactiva, problemas de movimiento, crecimiento de especies, etc.

Comprender el concepto de serie, dominar los criterios básicos de convergencia para series de términos positivos. Entender y aplicar el criterio de Leibnitz para series alternadas.

Adquirir las nociones básicas de geometría plana, del espacio y álgebra lineal, necesarias para comprender el cálculo diferencial e integral en dos y tres variables.

Comprender e interpretar desde el punto de vista físico los conceptos de curva y trayectoria, ser capaz de parametrizar una amplia variedad de curvas, comprender e interpretar el concepto de integral de línea. Ser capaz de calcular una amplia variedad de integrales de línea.

Comprender el concepto de campo escalar y los conceptos de límite y continuidad de campos escalares.

Entender el concepto de diferenciabilidad de un campo escalar, reconocer campos escalares diferenciables, saber calcular derivadas parciales usando las reglas usuales de derivación

de funciones, saber aplicar la regla de la cadena para la composición de un campo escalar con una curva.

Interpretar geoméricamente el gradiente, saber hallar el plano tangente a una superficie, resolver problemas de máximos y mínimos en dos y tres variables sin restricciones y con restricciones.

Comprender los conceptos de integral doble y triple de un campo escalar, saber colocar los límites de integración en regiones no triviales, saber cambiar de coordenadas cartesianas a polares, cilíndricas y esféricas. Saber calcular áreas, volúmenes, centros de masas, etc usando integrales dobles y triples.

Contenido

Tema 1: Ecuaciones diferenciales.

Ecuaciones diferenciales de primer orden. Revisión de los métodos ya estudiados en Matemática II. Ecuaciones con variables separables y reducibles a estas.

Aplicaciones de la ecuación diferencial de primer orden: Crecimiento de poblaciones (exponencial, logístico, limitado). Epidemias. Desintegración radioactiva. Enfriamiento.

Ecuaciones diferenciales lineales de orden 2 con coeficientes constantes. Solución general de la ecuación homogénea. Solución general de la ecuación $ay'' + by' + cy = f(x)$ en los casos en que f es un polinomio, $f(x) = a^x$ y $f(x) = k_1 \sin x + k_2 \cos x$. Aplicaciones: Caída libre, equilibrio de poblaciones, caída libre en un medio resistente.

Sistemas de dos ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Aplicación: competencia entre especies.

Tema 2: Series numéricas.

Series: Definición y ejemplos. Criterios de convergencia para series de términos positivos: comparación, límites, raíz, razón, integral. Series alternadas: criterio de Leibnitz.

Fórmula de Stirling y producto de Wallis.

Tema 3: Nociones de geometría plana, del espacio y álgebra lineal.

Subconjuntos de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 . Vectores. Producto escalar y vectorial. Ecuación paramétrica de la recta. Representación de subconjuntos definidos mediante ecuaciones y desigualdades sencillas. Superficies en \mathbb{R}^3 : plano, esfera, elipsoide, cilindro, cono, paraboloides, hiperboloides. Bolas abiertas y bolas cerradas en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 . Idea de abierto, cerrado y frontera.

Distintos sistemas de coordenadas en \mathbb{R}^2 y en \mathbb{R}^3 : polares, cilíndricas y esféricas. Transformación de coordenadas. Parametrización de subconjuntos de \mathbb{R}^2 y de \mathbb{R}^3 en estas coordenadas.

Concepto de transformación lineal (considerar los casos $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, con $n, m \leq 3$). Concepto de base. Matrices. Matriz asociada a una transformación lineal. Producto de matrices. Inversa de una matriz. Autovectores y autovalores. Determinantes 2×2 y 3×3 . Diagonalización de matrices. Sistemas de Ecuaciones Lineales.

Tema 4: Curvas en el plano y en el espacio.

Funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R}^2 y de \mathbb{R} en \mathbb{R}^3 . Ejemplos y motivación: movimiento circular uniforme, parabólico, etc. Vector tangente a una curva en términos de las funciones coordenadas. Recta tangente a una curva en términos del vector tangente a dicha curva. Reparametrización y longitud de arco. Trayectoria y forma de la trayectoria de una partícula en movimiento. (Interpretar la reparametrización de una curva como una forma de movimiento a lo largo de esa curva). Integrales de línea. Interpretación como trabajo mecánico.

Tema 5: Campos escalares.

Funciones de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R} y de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R} (tales como $f(x + y)$, $f(xy)$, $f(x^2 + y^2)$, $f(x/y)$, donde f es identidad, seno, coseno, \ln). Dominio y rango de funciones de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R} y de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R} . Gráfico y representación gráfica de funciones de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R} . Curvas y superficies de nivel. Límite a lo largo de una curva de una función de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R} . Introducción al concepto de límite en un punto a través del concepto de límite a lo largo de una curva. Noción de continuidad. Límites iterados. Diferenciabilidad de un campo escalar en un punto. Derivadas parciales y direccionales. Concepto de gradiente. Condición suficiente de diferenciabilidad. Regla de la cadena para la composición de un campo escalar con una aplicación de \mathbb{R} en \mathbb{R}^2 y de \mathbb{R} en \mathbb{R}^3 . Diferenciación de funciones definidas en forma implícita.

Tema 6: Gradiente de un campo escalar y aplicaciones, máximos y mínimos.

Interpretación geométrica del gradiente: Dirección de máximo crecimiento para una función de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R} . Plano tangente a una superficie dada en la forma: (a) $F(x, y, z) = 0$ y (b) $z = f(x, y)$. Ecuación del plano tangente en cada uno de estos casos en términos de las derivadas parciales de F y f .

Máximos y mínimos. Desarrollo de Taylor y criterio del Hessiano en dos variables. Método de los multiplicadores de Lagrange.

Tema 7: Integrales dobles y triples.

Integrales dobles y triples de funciones sencillas, haciendo énfasis en la determinación de los límites de integración en regiones no triviales. Cambio de coordenadas cartesianas a polares, cilíndricas y esféricas. Aplicación a cálculo de áreas, volúmenes, centros de masa, etc. Cálculo de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Bibliografía

- [1] APOSTOL, T. *Calculus Volumen 2*. Editorial Reverté.
- [2] BATSCHELET, E. *Introduction to Mathematics for Life Scientist*. Springer Verlag.
- [3] DEMIDOVICH, B. *Problemas y ejercicios de Análisis Matemático*. Editorial Paraninfo.
- [4] EDWARDS, C. H. Y PENNEY D. E. *Ecuaciones diferenciales elementales con aplicaciones*. Editorial Prentice Hall Hispanoamericana.
- [5] KISELIOV, A., KRASNOV, M. Y MAKARENKO, G. *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias*. Editorial MIR.
- [6] KREIDER, D., KULLER, R., OSTBERG, D. Y PERKINS, F. *Introducción an análisis lineal, Parte 1*. Editorial fondo educativo interamericano.
- [7] MARSDEN, J. Y TROMBA, A. *Cálculo Vectorial*. Editorial Addison-Wesley Iberoamericana
- [8] MIRANDA, GUILLERMO *Matemática III - Física* Fac. Ciencias. UCV.
- [9] SWOKOWSKY, E. W. *Cálculo con Geometría Analítica*. Grupo Editorial Iberoamericana.
- [10] WILLIAMSON, R., CROWELL, R. Y TROTTER, H. *Cálculo de funciones vectoriales*. Editorial Prentice Hall.

Comentarios

- (1) Siempre se debe comenzar el curso por la primera parte del Tema 1 (Ecuaciones Diferenciales de primero y segundo orden) ya que se requiere de inmediato en otras asignaturas de algunas Licenciaturas. Antes de comenzar la segunda parte del Tema 1 (Sistemas de dos ecuaciones diferenciales), a juicio del profesor, se puede adelantar algo de álgebra lineal para una mejor comprensión por parte de los estudiantes.
- (2) En el Tema 1 se deben estudiar ejemplos de Física, Química y Biología. En lo que se refiere a los ejemplos de Biología se debe destacar la parte de dinámica de poblaciones, se recomienda el libro de Batschelet ([2]), capítulo 11 para esta parte.
- (3) Se recomienda distribuir el tiempo de acuerdo a la siguiente tabla:

Tema 1	tres semanas
Tema 2	dos semanas y media
Tema 3	dos semanas y media
Tema 4	una semana y media
Tema 5	dos semanas y media
Tema 6	dos semanas
Tema 7	dos semanas

APÉNDICE B

Guión de Entrevista.

A continuación se presenta el guión de entrevistas (instrumento de recolección de datos) empleado para diagnosticar aspectos de la situación problemática.



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE HUMANIDADES Y EDUCACIÓN
ESCUELA DE EDUCACIÓN
COMPONENTE DOCENTE

Estimado docente, en el presente instrumento se le presenta un gui3n de preguntas que tiene como finalidad recolectar informaci3n sobre la situaci3n en la que se encuentra el contenido referente a la “Estimaci3n del Error del M3todo de los Trapecios”, correspondiente a la asignatura Matem3ticas II, de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, la cual ser3 utilizada para una investigaci3n con fines educativos.

La informaci3n suministrada ser3 muy valiosa para un trabajo de grado titulado: “**Propuesta did3ctica para la estimaci3n del error en el M3todo de los Trapecios**”, es por ello que se le sugiere:

- Estar muy atento a todos los items formulados.
- Responder todos y cada uno de los items.
- Sea preciso(a) en las respuestas.
- Su opini3n es de car3cter confidencial.

GRACIAS POR SU GENTIL COLABORACI3N.

Perfil del Docente.

- (1) Sexo:
 - Masculino:
 - Femenino:
- (2) Edad:
 - Entre 21 y 30 años:
 - Entre 31 y 40 años:
 - Entre 41 y 50 años:
 - Mas de 51 años:
- (3) Nivel de Instrucción:
 - Licenciado:
 - Magister:
 - Doctorado:
 - Otros (especifique):
- (4) Años de experiencia:
 - De 0 a 4 años.
 - De 5 a 9 años.
 - De 10 a 14 años.
 - De 14 a 19 años.
 - De 20 a 24 años.
 - De 25 a 29 años.
 - 30 años o más.
- (5) Area de especialización:
- (6) ¿Ha dado usted anteriormente la asignatura Matemáticas II?
 - Si:
 - No:
- (7) ¿Qué fuente o fuentes bibliográficas se adecúan más a esta asignatura?

- (8) ¿Recuerda si el tema de aproximación de integrales aparece en el programa de Matemática II?
 - Si:
 - No:
- (9) ¿Recuerda si la estimación del error en el Método de los Trapecios es un contenido de este programa?

Si:

No:

No sabe:

- (10) ¿Posee usted algún material impreso no bibliográfico referente a la estimación del error del Método de los Trapecios?

Si:

No:

- (11) ¿Qué aspectos considera usted que el alumno de Matemática II debe poseer para comprender la demostración de la fórmula para la estimación el error en el Método de los Trapecios?

- (12) ¿Considera usted que la demostración de la fórmula para la estimación del error del Método de los Trapecios es un tema difícil de comprender para los alumnos de la asignatura Matemáticas II?

Si:

No:

- (13) ¿Por que?

- (14) ¿Considera usted que sería de gran utilidad un material didáctico impreso respecto a la demostración de la fórmula para la estimación del error en el Método de los Trapecios en aras de facilitar la comprensión de este contenido?

Si:

No:

No sabe:

APÉNDICE C

Instrumento para Validar el Guión de Entrevista.

A continuación se presenta el instrumento empleado para validar los items considerados en el guión de entrevista.



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE HUMANIDADES Y EDUCACIÓN
ESCUELA DE EDUCACIÓN
COMPONENTE DOCENTE

Instrumento para Validar el Guión de Entrevistas.

El instrumento que se presenta a continuación es para validar el guión de entrevistas, que se aplicará durante el desarrollo de la investigación.

- Nombres y Apellidos:
- Cédula de identidad:
- Fecha:
- Nivel académico:
- Cargo:
- Firma:

INSTRUCCIONES: Lea cuidadosamente el instrumento y marque con una equis (x) su criterio en cuanto a los aspectos que a continuación se señalan:

- **Pertinencia:** Relación estrecha entre la pregunta, los objetivos a lograr y el aspecto o parte del instrumento que se encuentra desarrollado.
- **Redacción:** Es la interpretación inequívoca del enunciado de la pregunta a través de la claridad y precisión en el uso del vocabulario Técnico.
- **Adecuación:** Es la correspondencia de contenido de la pregunta con el nivel de preparación y desempeño del entrevistado.

Para ponderar su evaluación, considere los siguientes criterios:

CÓDIGO	APRECIACIÓN CUALITATIVA
B	BUENO: El indicador se presenta en grado igual o ligeramente superior al mínimo aceptable
R	REGULAR: El indicador no llega al mínimo aceptable pero se acerca a él.
D	DEFICIENTE: El indicador está lejos de alcanzar el mínimo aceptable

APÉNDICE D

Instrumento para Validar la Propuesta Didáctica.

A continuación se presenta el instrumento empleado para validar la propuesta didáctica referente a la estimación del error en el Método de los Trapecios.



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE HUMANIDADES Y EDUCACIÓN
ESCUELA DE EDUCACIÓN
COMPONENTE DOCENTE

**Instrumento para Validar las Etapas de Diseño y Realización de la
Propuesta Didáctica.**

A continuación se presenta el instrumento que permitirá validar la propuesta didáctica referente a la Estimación del Error en el Método de los trapecios.

- Nombres y Apellidos:
- Cédula de identidad:
- Fecha:
- Nivel académico:
- Cargo:
- Firma:

Instrucciones:

Este instrumento ha sido diseñado para evaluar las etapas de diseño y realización. El instrumento presenta una serie de preguntas relativas a los componentes de esta fase, seguidas de tres (03) alternativas, según la siguiente escala:

- (1) El material NO considera el aspecto indicado en la pregunta.
- (2) El material considera PARCIALMENTE el aspecto indicado en la pregunta.
- (3) El material considera TOTALMENTE el aspecto indicado en la pregunta.

Coloque una equis (X) en la casilla correspondiente a la alternativa que usted considera sea adecuada a su opinión. Añada las observaciones en el aspecto considerado.

	ASPECTO	1	2	3	OBSERVACIONES
I	Consideraciones Pedagógicas				
A	<i>Adecuación de los Objetivos.</i>				
1	Los módulos facilitan en forma efectiva el logro de los objetivos de aprendizaje previstos en la propuesta.				
2	Los objetivos que se especifican en la propuesta sirven de guía para desarrollar el proceso de aprendizaje.				
B	<i>Organización</i>				
3	Los módulos evidencian una secuencia didáctica en la información.				
4	La información en los módulos está claramente dividida en secciones para facilitar su asimilación.				
5	Los contenidos desarrollados en los módulos se articulan con los contenidos desarrollados en asignaturas precedentes.				
C	<i>Contenido</i>				
6	La cantidad de contenido desarrollado en los módulos permite el logro de los objetivos propuestos.				
7	Los contenidos desarrollados en los módulos repiten contenidos vistos en otras asignaturas.				
8	Los conceptos presentados en los módulos están bien fundamentados y se apoyan en un criterio de autoridad.				
9	En los módulos se utilizan ejemplos concretos y situaciones reales para aclarar las ideas o conceptos importantes.				
10	Los nuevos términos que se introducen en los módulos quedan definidos claramente.				
11	Cada idea importante es bien explicada en los módulos, antes de pasar a otra idea.				
12	Las ideas y conceptos fundamentales se repiten lo suficiente, en los módulos para que queden claras.				
13	Los módulos se presentan claramente definidos y segmentados los contenidos que permiten un aprendizaje significativo y fácil de entender.				

	ASPECTO	1	2	3	OBSERVACIONES
<i>D</i>	<i>Característica de la Materia del Contenido.</i>				
14	El contenido está vigente.				
15	El contenido carece de errores de tipo conceptual.				
16	El grado de abstracción es apropiado al medio (material impreso).				
17	La información es relevante y necesaria para el logro de los objetivos.				
<i>E</i>	<i>Características de la Forma del Contenido.</i>				
18	El contenido está organizado didácticamente.				
19	La modalidad de presentación (Exposición) son apropiadas al contenido.				
20	La cantidad de información es adecuada.				
21	Las direcciones orientadoras (organizadores) se usan adecuadamente.				
22	Se utilizan adecuadamente ejemplos y situaciones concretas para aclarar conceptos.				
23	Se observan las normas gramaticales y sintácticas.				
24	El estilo es directo, no rebuscado.				
25	Las ideas se expresan con claridad.				
26	El grado de complejidad es adecuado para el nivel de los alumnos.				
27	El texto posee fluidez del lenguaje oral.				
<i>II</i>	<i>Aspectos Técnico-gráficos.</i>				
<i>F</i>	<i>Composición.</i>				
28	Los módulos presentan una distribución adecuada en los gráficos de igual longitud.				
29	Los módulos presentan una separación adecuada entre párrafo y párrafo, el espacio correspondiente a un renglón o línea.				

	ASPECTO	1	2	3	OBSERVACIONES
G	<i>Diseño gráfico.</i>				
30	Los módulos presentan ilustraciones nítidas.				
31	Las ilustraciones presentadas en los módulos son veraces, es decir, reflejan los contenidos e ideas que se desea transmitir.				
32	Las ilustraciones presentadas en los módulos son sencillas, ya que se eliminan detalles innecesarios.				
33	Las ilustraciones en los módulos se adaptan al nivel al cual están designadas.				
H	<i>Formato.</i>				
34	Los módulos presentan el tamaño que permite la fácil manipulación del material.				
35	Los módulos presentan una adecuada distribución de los elementos que conforman cada página.				
I	<i>Impresión.</i>				
36	Los módulos están impresos con nitidez.				
37	Los módulos presentan uniformidad de precisión y buen contraste de la letra sobre el fondo.				
38	Los módulos presentan un tamaño de letra (12 puntos) apropiado para el nivel al cual van destinados.				
39	los módulos utilizan letra sencilla sin adorno para facilitar su legibilidad.				
40	Los módulos utilizan negrillas, subrayados, y/o comillas al destacar las palabras nuevas para el lector.				