UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
POSTGRADO EN MATEMÁTICA

REPRESENTACIÓN DE NÚCLEOS DE TOEPLITZ GENERALIZADOS INDEFINIDOS Y MEDIBLES EN LA RECTA

Autor: MSc. Boris Lora.
Tutor: Dr. Ramón Bruzual.

Tesis Doctoral presentada ante la ilustre Universidad Central de Venezuela para optar al título de Doctor en Ciencias, Mención Matemática.

Caracas, Venezuela
Julio-2011

Resumen

Se demuestra que todo núcleo de Toeplitz generalizado, con una cantidad finita de cuadrados negativos y medible en un intervalo de la recta, se puede representar como la suma de dos núcleos de Toeplitz generalizados, uno de los cuales está dado por cuatro funciones continuas y tiene el mismo número de cuadrados negativos que el inicial y el otro es definido positivo y nulo en casi todo punto. Además se establece un resultado de extensión para este tipo de núcleos.

Agradecimientos

Ante todo agradezco a la Universidad del Atlántico que me concedió la comisión de estudios remunerada para realizar el Doctorado y al programa de postgrado de la Universidad Central de Venezuela por aceptarme como estudiante. Durante la realización de este trabajo fueron muchas las personas que interactuaron conmigo y a las que debo agradecimiento. Pero sólo puedo mencionar a unos cuantos, sin que por ello mi agradecimiento a los omitidos sea poco.

En el orden académico agradezco al Doctor Bruzual por aceptar dirigir este trabajo y ser pilar fundamental en la realización del mismo con sus conocimientos e ideas y su siempre amable disposición a aclararme cualquier duda, a la Doctora Marisela Domínguez por sus aportes al artículo y al trabajo, a los doctores Castillo, Mijares y Balderrama por sus ilustrativas e interesantes clases.

En Barranquilla agradezco a mi esposa Mirian, a mis hijos Boris, Leo y Miriam del Carmen por su amor, paciencia y apoyo; a Milton, Ronnell y Sandra y a mis buenas amigas Beatriz y Cristina, por su cariño y estímulo. Gracias a la maravilla del internet tanto unos como otros no permitieron que me sintiera lejos y me acompañaron con sus inspiradoras y terapéuticas charlas virtuales; a la señora Carmelina que no me dejaba viajar sin darme la bendición y a Orlando quien siempre me ayuda en todo suavizando el peso de mi ausencia; y a mis amigos de tertulias matemáticas y políticas O. Dede, R. Castro y M. Caro.

En Caracas debo un infinito agradecimiento a mi hermana Enith quien, junto con mis sobrinos y Keyla, me brindó su hospitalidad y toda la comodidad de su hogar para que yo pudiera llevar a buen fin este proyecto. También agradezco a los y las jóvenes –doctores y futuros doctores– del grupo de análisis por permitirme compartir su juventud, alegría y conocimientos y a las secretarias del postgrado en matemáticas por facilitarme los frecuentes trámites administrativos propios de mi condición de extranjero.

Finalmente, pero no de último, agradezco a mi madre –ya no está con nosotros– por seguirme protegiendo y guiando desde donde quiera que esté y a mi padre quien a sus ochenta y pocas primaveras es un hombre joven y alegre que me alienta en todo lo que emprendo.

Índice general

Introducción

En el año 1933 el matemático húngaro F. Riesz [**36**] demostró que si f es una función compleja con dominio $\mathbb{R}^n$, definida positiva y medible Lebesgue, entonces f se puede representar como la suma de una función continua definida positiva y una función nula en casi todo punto. En un artículo presentado en 1955 y publicado en 1956, M. Crum [**21**] complementó este resultado al demostrar que la segunda función también es definida positiva (curiosamente este hecho parece que era conocido por el matemático soviético A. Artjomenco, quien murió durante la Segunda Guerra Mundial y nunca publicó su hallazgo [**39**]). En el mismo artículo Crum demostró que si además f es isotrópica y $n > 1$ entonces la segunda función se anula en todo punto diferente al origen.

Este resultado de Riesz - Crum ha sido objeto de muchos estudios posteriores y diversas generalizaciones: en 1960 A. Devinatz [**22**] lo extendió para funciones a valores operadores en un espacio de Hilbert, que son definidas positivas y débilmente medibles con dominio un grupo localmente compacto con medida invariante a izquierda. En el libro de E. Hewitt y K. Ross [**26**] aparece un resultado similar para funciones complejas definidas positivas y medibles, en un grupo localmente compacto con medida invariante a izquierda.

En el año 1983, H. Langer [**34**] publicó un teorema similar al de Crum, para funciones escalares medibles y localmente acotadas en un intervalo de la recta real y que tienen un número finito de cuadrados negativos. Tres años más tarde, Z. Sasvári [**37**] demostró que (como al parecer, lo sospechaba el mismo Langer) la condición de acotación local es superflua, al probar que si una función es medible en un intervalo de la recta real y tiene un número finito de cuadrados negativos entonces es localmente acotada. En este mismo artículo, Sasvári extendió la modificación del resultado de Langer para funciones complejas medibles sobre un grupo localmente compacto, con medida invariante a izquierda y que tienen un número finito de cuadrados negativos.

En 1997 R. Bruzual [**11**] obtuvo un resultado análogo al de Crum para núcleos de Toeplitz generalizados a valores escalares, medibles y definidos positivos en un intervalo de la recta real. Pocos años más tarde, en el 2003, R. Bruzual y M. Dominguez [**12**] generalizaron el resultado de Devinatz para funciones a valores operadores en un espacio de Krein separable, que tienen una cantidad finita de cuadrados negativos y que son débilmente medibles, con dominio un grupo localmente compacto con medida invariante a izquierda. Antes, en 1992, R. Bruzual y S. Marcantognini [**15**] establecieron un resultado acerca de la extensión a toda la recta de núcleos de Toeplitz generalizados definidos en un intervalo, dados por cuatro funciones continuas y que tienen un número finito de cuadrados negativos, que generaliza el teorema de extensión de Krein-Langer [**32**].

En el presente trabajo se demuestra que un núcleo de Toeplitz generalizado a valores escalares, definido sobre un intervalo de la recta real, dado por cuatro funciones medibles y que tiene un número finito de cuadrados negativos, admite una representación como la suma de dos núcleos de Toeplitz generalizados: el primero viene dado por cuatro funciones continuas y tiene el mismo número de cuadrados negativos que el inicial y el segundo es nulo en casi todo punto y definido positivo. Este resultado extiende a núcleos de Toeplitz generalizados el teorema de representación de Langer ya mencionado y contiene el resultado de representación de núcleos de Toeplitz generalizados definidos positivos dado por Bruzual. También se prueba un teorema de extensión para este tipo de núcleos definidos sobre un intervalo finito, que generaliza el teorema de extensión de Krein-Langer.

El trabajo está organizado de la siguiente manera:

En el primer capítulo se esbozan los conceptos de núcleo, núcleo de Toeplitz y núcleo de Toeplitz generalizado definido positivo y κ-indefinido, así como algunos teoremas sobre ellos. También se estudian los espacios de núcleos reproductores. Este capítulo incluye un resultado fundamental que es el Lema 1.10 sobre la acotación local de los núcleos de Toeplitz generalizados medibles y κ-indefinidos, que extiende a núcleos de Toeplitz generalizados el resultado de acotación local dado por Sasvári. Este lema es esencial para la aplicación de las técnicas con las que se demuestra el teorema principal.

El segundo capítulo trata sobre semigrupos locales y grupos de isometrías, tanto en espacios de Hilbert como en espacios de Pontryagin. Además de los conceptos básicos se presentan algunos teoremas que son relevantes en este trabajo.

El tercer capítulo –el central– contiene la demostración del teorema principal, que incluye los resultados de representación y de extensión de núcleos de Toeplitz generalizados medibles y κ-indefinidos. También se demuestra el Lema 3.7 que permite establecer la positividad del núcleo nulo en casi todo punto. Estos resultados, junto con el Lema 1.10 aparecerán en un artículo que fue aceptado para su publicación en la revista Acta Scientiarum Mathematicarum [**14**].

Finalmente se incluye un Apéndice donde se recogen aspectos generales de los espacios de Pontryagin y teoremas conocidos del análisis que son usados en el trabajo, además de algunos ejemplos de funciones definidas positivas y de funciones κ-indefinidas acotadas y no acotadas.

Capítulo 1

Núcleos

La utilización de los núcleos en diferentes aspectos de la matemática data de principios del siglo XX. Según N. Aronszajn [**5**] existen dos tendencias en el estudio y aplicación de los núcleos.

La primera tendencia consiste en estudiar los núcleos en si mismos, sin considerar la clase de funciones a la cual ellos corresponden. Esta tendencia es ampliamente utilizada en la teoría de ecuaciones integrales, grupos topológicos y geometría métrica y fue iniciada por autores como J. Mercer, E. Moore, I. Schoenberg y S. Bochner entre otros muchos.

La segunda tendencia es la de los núcleos reproductores. En ella el interés primario es la clase de funciones que corresponde a un núcleo y éste es usado como herramienta de estudio de las propiedades de las funciones pertenecientes a la clase. A esta tendencia están asociados en un inicio los nombres de S. Zaremba, quien aplicó estas técnicas en la solución de problemas de contorno para funciones armónicas y biarmónicas, S. Bergman y N. Aronszajn entre otros. Este último sistematizó la teoría general de los núcleos reproductores.

Los núcleos, especialmente los definidos positivos, han sido exitosamente utilizados en la teoría de funciones de una y varias variables complejas, en particular en el estudio de mapeos conformes en dominios simple y multiplemente conexos, mapeos cuasi-conformes, métricas Riemannianas, etc. En teoría de las probabilidades fueron aplicados por A. Kolmogorov, E. Parzen y otros.

Son muchos los autores que han utilizado la teoría de los núcleos reproductores en años más recientes, como por ejemplo E. Hille, S. Saitoh, T. Ando, D. Alpay, A. Dijksma, J. Rovnyak y H. de Snoo.

Los núcleos de Toeplitz generalizados fueron introducidos en las décadas de los setenta-ochenta por R. Arocena, M.Cotlar y C. Sadosky ([**18**], [**6**], [**7**], [**19**], [**20**]), en relación con el teorema de Helson-Szegö, generalizaciones del teorema de Bochner y problemas de momento.

En este capítulo se expondrán algunos aspectos básicos sobre núcleos de Toeplitz, núcleos de Toeplitz generalizados y espacios de Hilbert con núcleo reproductor.

1. Núcleos de Toeplitz

Definición 1.1. Sea $I = (-a, a)$. Se denomina *núcleo sobre* I a toda función $K : I \times I \to \mathbb{C}$.

Un núcleo K sobre I es *hermítico* si $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$.

Un núcleo K sobre I es *definido positivo* si para todo natural n, cualquier colección de puntos $\{x_1, \dots, x_n\} \in I$ y cualesquiera números complejos $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ se tiene que

$$\sum_{i,j=1}^{n} K(x_i, x_j)\lambda_i \overline{\lambda_j} \geq 0.$$

La definición de núcleos hermíticos y definidos positivos puede generalizarse en varios sentidos. En este trabajo sólo se considerará el caso de núcleos a valores complejos sobre subconjuntos de la recta real.

Definición 1.2. Sea $0 < a \leq +\infty$. Un núcleo K sobre $I = (-a, a)$ es un *núcleo de Toeplitz (ordinario)* si existe una función $f \colon I - I \to \mathbb{C}$ tal que para todo $x, y \in I$, $K(x,y) = f(x-y)$.

Si la función f es continua (medible), se dice que el núcleo es *continuo (medible).*

La característica que permite generalizar esta definición a otros dominios es la invarianza traslacional. Es decir, si K es un núcleo de Toeplitz sobre I, se cumple que

$$K(x+t, y+t) = K(x,y),$$

siempre que $x, y, x+t, y+t \in I$. En ocasiones esta característica se utiliza como definición de núcleo de Toeplitz.

Definición 1.3. Sea $0 < a \leq +\infty$. Un núcleo hermítico K sobre $I = (-a, a)$ es un *núcleo κ-indefinido* si para cualquier colección de puntos $\{x_1, \dots, x_n\} \in I$ la matriz hermítica $\big(K(x_i, x_j)\big)_{i,j=1}^{n}$ tiene a lo sumo κ valores propios negativos (contando multiplicidad) y exactamente κ para alguna de estas colecciones de puntos. En este caso también se suele decir que el núcleo *tiene κ cuadrados negativos.*

Para los núcleos de Toeplitz definidos positivos y continuos S. Bochner estableció en 1933 [**8**] que si $K(x,y) = f(x-y)$ y f es continua, entonces

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} dV(\xi), \tag{1.1}$$

donde V es no-decreciente y acotada. En ese mismo año F. Riesz [**36**] demostró que si f es medible, entonces f es igual a una integral como la (1.1) en casi todo punto, probando así que un núcleo de Toeplitz definido positivo y medible en la recta coincide con un núcleo de Toeplitz definido positivo y continuo en casi todo punto. En 1956 M. Crum refinó este resultado, al demostrar que todo núcleo de Toeplitz definido positivo y medible en la recta, es la suma de un núcleo continuo más uno nulo casi siempre, ambos Toeplitz y definidos positivos.

M. G. Krein [**31**] amplió el resultado de Crum, demostrando un resultado similar de representación para núcleos de Toeplitz hermíticos y definidos positivos sobre un intervalo. En ese artículo Krein deja abierta la pregunta acerca de una generalización de este teorema a núcleos indefinidos.

H. Langer [**34**] dio una respuesta afirmativa a esta interrogante, al demostrar que una función hermítica κ-indefinida medible y localmente acotada en un intervalo, admite una representación como suma de dos funciones hermíticas en el intervalo, una de ellas continua y κ-indefinida y la otra nula casi siempre y definida positiva. Tres años más tarde Z. Sasvári [**37**] demostró que la condición de acotación local en el teorema de Langer es superflua, debido a que toda función hermítica κ-indefinida y medible es localmente acotada.

Una versión, enunciada de manera relevante para este trabajo, del resultado de Sasvári en términos de núcleos de Toeplitz es la siguiente

Teorema 1.4 (Z. Sasvári [**37**])**.** *Si K es un núcleo de Toeplitz medible y κ-indefinido en (-a,a), entonces K es localmente acotado.*

Se pueden diferenciar dos grupos, bastante relacionados entre si, de teoremas sobre núcleos definidos positivos y κ-indefinidos: por un lado, los teoremas de extensión que tratan sobre la posibilidad de definir núcleos en dominios más amplios, manteniendo las propiedades que tiene el núcleo en el dominio menor (también son importantes y particularmente difíciles los teoremas de parametrización de las extensiones) y, por el otro lado, los teoremas de representación que tratan sobre la posibilidad de expresar un núcleo en términos (generalmente como suma) de núcleos con características más manejables.

Un importante teorema de extensión debido al matemático ukraniano M. Krein [**30**] establece que una función hermítica continua y definida positiva en un intervalo $(-a, a)$ puede extenderse a una función continua y definida positiva en todo $\mathbb{R}$. Este teorema fue ampliado por el matemático alemán H. Langer, conjuntamente con Krein [**32**], para funciones hermíticas κ-indefinidas.

Teorema 1.5 (M. Krein y H. Langer [**32**], [**33**])**.** *Para cualquier a, $0 < a < +\infty$, toda función continua hermítica y κ-indefinida en $(-2a, 2a)$ admite una extensión continua y hermítica $\widetilde{f}$ a toda la recta que mantiene el índice de indefinición.*

En ese mismo teorema, se evidencia que la extensión puede no ser única y se dan parametrizaciones. Se omitió ex professo esta parte del enunciado.

Además de los teoremas de representación que ya han sido mencionados anteriormente (Riesz [**36**] , Crum [**21**] y Krein [**31**]) y que tratan sobre núcleos definidos positivos, está el importante teorema de Langer, que se enuncia a continuación en términos de núcleos de Toeplitz y tomando en consideración el Teorema 1.4.

Teorema 1.6 (H. Langer [**34**]). *Sea $K(x,y) = f(x-y)$ un núcleo de Toeplitz medible y κ-indefinido sobre $I = (-a,a)$. Entonces K admite una única representación en la forma*

$$K(x,y) = K^c(x,y) + K^o(x,y),$$

donde K^c es un núcleo de Toeplitz hermítico κ-indefinido y continuo, mientras que K^o es un núcleo de Toeplitz definido positivo y nulo en casi todo punto de $I \times I$.

A continuación se da la definición de núcleos de Toeplitz generalizados, que fueron introducidos por M. Cotlar, C. Sadosky y R. Arocena a finales del siglo pasado.

Definición 1.7. Sean $0 < a \leq +\infty$, $I = (-a,a)$, $I_1 = I \cap [0,+\infty)$ e $I_2 = I \cap (-\infty, 0)$. Un núcleo F sobre I es un *núcleo de Toeplitz generalizado* (NTG) sobre I si existen cuatro funciones $f_{\alpha\beta} : I_\alpha - I_\beta \to \mathbb{C}$ tales que

$$F(x,y) = f_{\alpha\beta}(x-y), \quad \text{para todo } (x,y) \in I_\alpha \times I_\beta, \quad \alpha, \beta = 1,2.$$

Si las funciones $f_{\alpha\beta}$, $\alpha,\beta = 1,2$ son continuas (medibles) se dice que el núcleo es un *núcleo de Toeplitz generalizado continuo (medible).*

Nótese que si $f_{11} = f_{22}$, $f_{11} = f_{12}$ sobre $I_1 - I_2$ y $f_{11} = f_{21}$ sobre $I_2 - I_1$, entonces F es un núcleo de Toeplitz (ordinario). Por esto se puede considerar a los núcleos de Toeplitz generalizados como una generalización de los núcleos de Toeplitz (ordinarios).

También se define, de forma similar a como se hace con los núcleos de Toeplitz ordinarios, los *núcleos de Toeplitz generalizados hermíticos y κ-indefinidos.*

De acuerdo con la Definición 1.1, un núcleo de Toeplitz generalizado F sobre I definido por las cuatro funciones $f_{\alpha\beta}$, $\alpha,\beta = 1,2$, es *un núcleo de Toeplitz generalizado hermítico* si $f_{\alpha\alpha}(x-y) = \overline{f_{\alpha\alpha}(y-x)}$, para todo x,y de I_α, $\alpha = 1,2$ y $f_{12}(x-y) = \overline{f_{21}(y-x)}$ para $x \in I_1$, $y \in I_2$.

De acuerdo con la Definición 1.3, un núcleo de Toeplitz generalizado hermítico F sobre I es *un núcleo de Toeplitz generalizado κ-indefinido*, si para cualquier colección de puntos $\{x_1, \ldots, x_n\} \in I$ la matriz hermítica

$$\big(F(x_i, x_j)\big)_{i,j=1}^{n} \tag{1.2}$$

tiene a lo sumo κ valores propios negativos (contando multiplicidad) y exactamente κ para alguna de esas colecciones de puntos. En este caso también se suele decir que el *núcleo de Toeplitz generalizado tiene κ cuadrados negativos.*

Es importante destacar que si en la definición anterior $\kappa = 0$, entonces el núcleo es definido positivo.

Uno de los objetivos de varios investigadores en los años recientes ha sido la de encontrar teoremas de extensión y de representación para núcleos de Toeplitz generalizados, similares a los que se han obtenido para núcleos de Toeplitz. He aquí algunos de esos resultados.

Teorema 1.8 (R. Bruzual y S. Marcantognini [**15**])**.** *Todo núcleo de Toeplitz generalizado κ-indefinido y* ***continuo*** *sobre $I = (-a, a)$, $(0 < a \leq +\infty)$ puede extenderse a un núcleo de Toeplitz generalizado continuo y κ-indefinido sobre todo el eje real.*

Los autores del Teorema 1.8 en su artículo comentan que los argumentos usados en la demostración son válidos también para $I = \mathbb{R}$ e incluso para núcleos de Toeplitz ordinarios en $(-a, a)$ y en $\mathbb{R}$. Este comentario permite ver este teorema como una generalización del teorema de extensión de Krein-Langer.

El siguiente es un teorema de representación dado por R. Bruzual en 1997, que generaliza el teorema de representación de Krein para núcleos de Toeplitz definidos positivos.

Teorema 1.9 (R. Bruzual [**11**])**.** *Sea $I = (-a, a)$, donde $0 < a \leq +\infty$ y sea K un núcleo de Toeplitz generalizado medible y definido positivo sobre I.*

Entonces

$$K = K^c + K^o$$

donde K^c y K^o son núcleos de Toeplitz generalizados definidos positivos sobre I, K^c está dado por cuatro funciones continuas y K^o se anula en casi todo punto de $I \times I$.

Para la demostración del teorema principal de este trabajo, ver Capítulo 3, fue necesario demostrar una generalización para núcleos de Toeplitz generalizados del Teorema 1.4 de Sasvári. Esta generalización es la siguiente.

Lema 1.10 ([**14**])**.** *Sea $I = (-a, a)$, donde $0 < a \leq +\infty$. Sea $F : I \times I \to \mathbb{C}$ un núcleo de Toeplitz generalizado. Si F es medible y κ-indefinido, entonces F es localmente acotado.*

Demostración. Esta demostración está inspirada en la del Teorema 1 de [**37**].

Si $\kappa = 0$, se sabe que $|F(x,y)| \leq F(0,0)$ y por lo tanto, en este caso, el núcleo es acotado. Por esto se considerará el caso en que $\kappa \geq 1$.

Por cuanto $F(0,0)$ es un número real y para cada número real ρ el núcleo de Toeplitz generalizado $F + \rho$ es κ'-indefinido con $\kappa' \leq \kappa$, se puede suponer que

$$F(0,0) = f_{11}(0) > 0.$$

Se tiene que existen cuatro funciones medibles $f_{\alpha\beta} : I_\alpha - I_\beta \to \mathbb{C}$ tales que

$$F(x,y) = f_{\alpha\beta}(x-y),$$

para cada $x \in I_\alpha$, $y \in I_\beta$, para $\alpha, \beta = 1, 2$, donde $I_1 = [0,a)$, $I_2 = (-a, 0)$.

Se probará que cada una de las funciones $f_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2)$ es localmente acotada en su dominio.

Si $x_1, \ldots, x_p \in [0,a)$ entonces

$$F(x_i, x_j) = f_{11}(x_i - x_j),$$

por lo tanto $f_{11} : (-a,a) \to \mathbb{R}$ es una función κ_1-indefinida donde κ_1 es un entero no-negativo menor o igual que κ. Del Teorema 1.4 se sigue que f_{11} es localmente acotada. Lo mismo ocurre con f_{22}, por razones similares.

Se mostrará que las funciones $f_{12} : (0, 2a) \to \mathbb{C}$ y $f_{21} : (-2a, 0) \to \mathbb{C}$ son localmente acotadas.

Sea $V_\delta = [\delta, 2a - \delta]$. Se demostrará que f_{12} es acotada sobre V_δ para cada $\delta \in (0, a)$.

Si $\lambda > 0$ sea

$$\Omega_\lambda = \{x \in (0, 2a) : |f_{12}(x)| < \lambda\} \cup \{0\} \cup \{x \in (-2a, 0) : |f_{21}(x)| < \lambda\}.$$

Los conjuntos Ω_λ son medibles, $\lim_{\lambda \to +\infty} \mathrm{m}\,(\Omega_\lambda) = 4a$ y, como $f_{21}(x) = \overline{f_{12}(-x)}$, ellos son simétricos con respecto al 0.

Sea $\lambda_o > 0$ tal que

$$\mathrm{m}\,(\Omega_{\lambda_o}) > 4a - \frac{\delta}{3\kappa^3}.$$

Supóngase que $J \subset (-2a, 2a)$ y $\mathrm{m}\,(J) \geq \delta$, entonces $\mathrm{m}\,((-2a,2a) \setminus J) \leq 4a - \delta$, así que

$$\mathrm{m}\,(\Omega_{\lambda_o}) \leq \mathrm{m}\,(\Omega_{\lambda_o} \cap J) + 4a - \delta,$$

por lo cual

$$\mathrm{m}\,(\Omega_{\lambda_o} \cap J) > \delta - \frac{\delta}{3\kappa^3}. \tag{1.3}$$

Si f_{12} no es acotada en V_δ, entonces existe una sucesión $\{\omega_n\} \subset V_\delta$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} |f_{12}(\omega_n)| = +\infty.$$

Sea $J_\delta = \left(-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right)$, como $\delta \leq \omega_n \leq 2a - \delta$ se tiene que $J_\delta \pm \omega_n \subset (-2a, 2a)$. De (1.3) se obtiene

$$\mathrm{m}\left((\Omega_{\lambda_o} \pm \omega_n) \cap J_\delta\right) = \mathrm{m}\left(\Omega_{\lambda_o} \cap (J_\delta \mp \omega_n)\right) > \delta - \frac{\delta}{3\kappa^3}. \tag{1.4}$$

Ahora se verá que para cada $n = 1, 2, \ldots$ existen $\kappa + 1$ puntos $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_{\kappa+1}^{(n)}$, tales que:

$$|x_i^{(n)}| < \frac{\delta}{2}, \quad (i = 1, \ldots, \kappa + 1) \tag{1.5}$$

$$x_i^{(n)} - x_j^{(n)} \in \Omega_{\lambda_o}, \quad (i, j = 1, \ldots, \kappa + 1) \tag{1.6}$$

$$x_i^{(n)} - x_j^{(n)} + \omega_n \in \Omega_{\lambda_o}, \quad (i, j = 1, \ldots, \kappa + 1, i \neq j). \tag{1.7}$$

Primero es necesario escoger $x_1^{(n)}$ y $x_2^{(n)}$. Se toma $x_1^{(n)} = 0$.

De (1.3) y (1.4) se tiene que

$$\mathrm{m}\ \left(J_\delta \setminus (\Omega_{\lambda_o} \cap J_\delta)\right) < \frac{\delta}{3\kappa^3}$$

y

$$\mathrm{m}\ \left(J_\delta \setminus ((\Omega_{\lambda_o} \pm \omega_n) \cap J_\delta)\right) < \frac{\delta}{3\kappa^3}.$$

Considérese

$$A_1^{(n)} = \Omega_{\lambda_o} \cap J_\delta,$$
$$B_1^{(n)} = (\Omega_{\lambda_o} + \omega_n) \cap J_\delta,$$
$$C_1^{(n)} = (\Omega_{\lambda_o} - \omega_n) \cap J_\delta,$$

entonces

$$\mathrm{m}\ \left(J_\delta \setminus A_1^{(n)}\right) + \mathrm{m}\ \left(J_\delta \setminus B_1^{(n)}\right) + \mathrm{m}\ \left(J_\delta \setminus C_1^{(n)}\right) < 3\frac{\delta}{3\kappa^3} \leq \mathrm{m}\ (J_\delta).$$

Por lo tanto

$$\mathrm{m}\ \left(A_1^{(n)} \cap B_1^{(n)} \cap C_1^{(n)}\right) > 0.$$

Así que se puede tomar $x_2^{(n)} \in A_1^{(n)} \cap B_1^{(n)} \cap C_1^{(n)}$.

Se continúa por inducción, suponiendo que ya se tienen l puntos $x_1^{(n)}, \ldots, x_l^{(n)}$ que satisfacen las propiedades (1.5), (1.6), (1.7) para $i, j = 1, 2, \ldots, l$ con $l < \kappa + 1$.

Para $i = 1, \ldots, l$, se consideran

$$A_i^{(n)} = (\Omega_{\lambda_o} + x_i^{(n)}) \cap J_\delta,$$
$$B_i^{(n)} = (\Omega_{\lambda_o} + x_i^{(n)} + \omega_n) \cap J_\delta,$$
$$C_i^{(n)} = (\Omega_{\lambda_o} + x_i^{(n)} - \omega_n) \cap J_\delta.$$

Si $|x| \leq 2a - \frac{\delta}{2}$ entonces $J_\delta \pm x \subset I$, así que de (1.3) se obtiene

$$\mathrm{m}((\Omega_{\lambda_o} \pm x) \cap J_\delta) = \mathrm{m}(\Omega_{\lambda_o} \cap (J_\delta \mp x)) > \delta - \frac{\delta}{3\kappa^3}.$$

Por cuanto $|x_i^{(n)}| < \frac{\delta}{2}$ y $|\omega_n| \leq 2a - \delta$ se tiene que $|x_i^{(n)} \pm \omega_n| < 2a - \frac{\delta}{2}$.

Luego

$$\mathrm{m}\left(J_\delta \setminus A_i^{(n)}\right) < \frac{\delta}{3\kappa^3}, \quad \mathrm{m}\left(J_\delta \setminus B_i^{(n)}\right) < \frac{\delta}{3\kappa^3}, \quad \mathrm{m}\left(J_\delta \setminus C_i^{(n)}\right) < \frac{\delta}{3\kappa^3},$$

por eso

$$\mathrm{m}\left(\bigcup_{i,j,m=1}^{l} \left(J_\delta \setminus A_i^{(n)}\right) \cup \left(J_\delta \setminus B_j^{(n)}\right) \cup \left(J_\delta \setminus C_m^{(n)}\right)\right) < 3l^3\,\frac{\delta}{3\kappa^3} \leq \delta,$$

así que

$$\mathrm{m}\left(\bigcap_{i,j,m=1}^{l} \left(A_i^{(n)} \cap B_j^{(n)} \cap C_m^{(n)}\right)\right) > 0.$$

Si se toma

$$x_{l+1}^{(n)} \in \bigcap_{i,j,m=1}^{l} \left(A_i^{(n)} \cap B_j^{(n)} \cap C_m^{(n)}\right)$$

entonces (1.5), (1.6) y (1.7) se cumplen con $l+1$ en lugar de $\kappa+1$.

Supóngase que $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_{\kappa+1}^{(n)}$ se han escogido de tal manera que cumplan (1.5), (1.6) y (1.7) para $n = 1, 2, \ldots$ y sean $y_1^{(n)}, \ldots, y_{2\kappa+2}^{(n)}$ definidos como

$$y_1^{(n)} = \frac{\omega_n}{2} + x_1^{(n)}, \quad y_2^{(n)} = -\frac{\omega_n}{2} + x_1^{(n)}, \quad y_3^{(n)} = \frac{\omega_n}{2} + x_2^{(n)},$$

$$y_4^{(n)} = -\frac{\omega_n}{2} + x_2^{(n)}, \ldots, \; y_{2\kappa+1}^{(n)} = \frac{\omega_n}{2} + x_\kappa^{(n)}, \; y_{2\kappa+2}^{(n)} = -\frac{\omega_n}{2} + x_\kappa^{(n)}.$$

Nótese que $y_{2i-1} \in I_1$, $y_{2i} \in I_2$, para $i = 1, \ldots, \kappa+1$ y

$$y_1^{(n)} = \frac{\omega_n}{2}, \quad y_2^{(n)} = -\frac{\omega_n}{2}.$$

Considérense las matrices

$$M_n = \left(F\left(y_i^{(n)}, y_j^{(n)}\right)\right)_{i,j=1}^{2\kappa+2}.$$

Se tiene que

$$F\left(y_{2i-1}^{(n)}, y_{2i}^{(n)}\right) = f_{12}(\omega_n),$$

$$F\left(y_{2i}^{(n)}, y_{2i-1}^{(n)}\right) = f_{21}(-\omega_n) = \overline{f_{12}(\omega_n)}$$

y, de la construcción, sigue que todas las demás entradas de las matrices son acotadas.

Al igual que en [**37**], se consideran los determinantes

$$D_l^{(n)} = \det\left(F\left(y_i^{(n)}, y_j^{(n)}\right)\right)_{i,j=1}^{l},$$

para $l = 1, \ldots, 2\kappa + 2$. Se tiene que

$$D_1^{(n)} > 0 \text{ para todo } n,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D_{2l}^{(n)}}{|f_{12}(\omega_n)|^{2l}} = (-1)^l, \text{ para } l = 1, \ldots, \kappa + 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D_{2l+1}^{(n)}}{|f_{12}(\omega_n)|^{2l}} = (-1)^l F(0,0), \text{ para } l = 1, \ldots, \kappa.$$

Luego, para n suficientemente grande, los signos en la sucesión

$$D_1^n, D_2^n, \ldots, D_{2\kappa+2}^n$$

cambian $\kappa + 1$ veces, así que la matriz M_n tiene $\kappa + 1$ autovalores negativos. Esto contradice la κ-indefinición de F. Se concluye entonces que f_{12} es localmente acotada en $(0, 2a)$. Como $f_{21}(x - y) = \overline{f_{12}(y - x)}$, también se tiene que f_{21} es localmente acotada en $(-2a, 0)$.

$\square$

2. Espacios de Hilbert con núcleos reproductores

Definición 1.11. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de funciones definidas sobre un intervalo I de $\mathbb{R}$. Para $f, g \in \mathcal{H}$ el producto interior de f y g se denotará por $\langle f, g\rangle$ y $\|f\| = \langle f, f\rangle^{\frac{1}{2}}$ es la norma asociada. La función $K : I \times I \to \mathbb{C}$ es un *núcleo reproductor del espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$ si se satisfacen las siguientes condiciones:

(NRH-1) Para cada $x \in I$, $K_x(y) = K(y, x)$ como función de y está en $\mathcal{H}$.

(NRH-2) (Propiedad reproductora) Para cada $x \in I$ y cada $f \in \mathcal{H}$,

$$f(x) = \langle f, K_x\rangle.$$

Obsérvese que

$$K_x(y) = \langle K_x, K_y \rangle, \text{ para todo } x, y \in I,$$

y tomando en consideración (NRH-1)

$$K(y, x) = \langle K_x, K_y \rangle, \text{ para todo } x, y \in I.$$

Y también $\|K_x\| = \langle K_x, K_x \rangle^{\frac{1}{2}}$.

Definición 1.12. Un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de funciones definidas sobre un intervalo I de $\mathbb{R}$ es un *espacio de Hilbert con núcleo reproductor* si existe un núcleo K reproductor de $\mathcal{H}$.

Los siguientes teoremas, tomados esencialmente de [**5**] y cuyas demostraciones se transcriben para ilustrar los métodos aplicados, establecen la existencia y unicidad de los núcleos reproductores.

Teorema 1.13. *Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor, entonces el núcleo asociado está unívocamente determinado por el espacio $\mathcal{H}$.*

Demostración. Sean $K(y, x)$ y $K'(y, x)$ dos núcleos reproductores de $\mathcal{H}$ entonces para todo $x \in I$ se tiene

$$\begin{aligned} \|K_x - K'_x\| &= \langle K_x - K'_x, K_x - K'_x \rangle = \\ &= \langle K_x - K'_x, K_x \rangle - \langle K_x - K'_x, K'_x \rangle = \\ &= (K_x - K'_x)(x) - (K_x - K'_x)(x) = \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Teorema 1.14. *Para un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de funciones sobre I, existe un núcleo reproductor K de $\mathcal{H}$ si y sólo si para cada $x \in I$ el funcional lineal, $f \mapsto f(x)$ con dominio $\mathcal{H}$ es acotado.*

Demostración. Supóngase que K es el núcleo reproductor de $\mathcal{H}$. Por (NRH-2) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz-Bunyakowskyi, se tiene que para todo $x \in I$

$$|f(x)| = |\langle f, K_x \rangle| \leq \|f\|\|K_x\| = \|f\|\langle K_x, K_x \rangle^{\frac{1}{2}} = \|f\|K(x, x)^{\frac{1}{2}}.$$

Recíprocamente, si para cada $x \in I$ el funcional $f \mapsto f(x)$ es acotado, entonces por el teorema de representación de Riesz, para cada $x \in I$ existe una función $h_x \in \mathcal{H}$ tal que $f(x) = \langle f, h_x \rangle$. Definiendo ahora $K_x(y) = h_x(y)$, se obtiene que K es un núcleo reproductor de $\mathcal{H}$. □

Es importante notar que los núcleos reproductores de espacios de Hilbert resultan ser definidos positivos como lo afirma el siguiente

Teorema 1.15. *El núcleo reproductor $K(y,x)$ de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es definido positivo.*

DEMOSTRACIÓN.

$$0 \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i K_{y_i} \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i K_{y_i}, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j K_{y_j} \right\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \overline{\lambda_j} \left\langle K_{y_j}, K_{y_i} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \overline{\lambda_j} K(y_j, y_i).$$

Lo que significa que el núcleo K es definido positivo. □

El siguiente teorema es una especie de recíproco del anterior.

Teorema 1.16. *Para cada núcleo $K(y,x)$ definido positivo sobre I, existe un único espacio de Hilbert $\mathcal{H}_K$ de funciones sobre I que admite a K como núcleo reproductor.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{H}_0$ el espacio de todas las funciones $f : I \to \mathbb{C}$ de la forma

$$f(y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i K(y, x_i),$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son números complejos y $x_1, \ldots, x_n$ pertenecen a I. Sea $g(y) = \sum_{j=1}^{m} \xi_j K(y, x_j)$ otra función perteneciente a $\mathcal{H}_0$. Se define el producto interior en este espacio como

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}_0} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \overline{\xi_j} K(y_j, x_i). \tag{1.8}$$

Entonces

$$\langle f, K(.,x) \rangle_{\mathcal{H}_0} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i K(x, x_i) = f(x). \tag{1.9}$$

Por lo tanto se tiene la propiedad reproductora (NRH-2). La forma cuadrática definida en (1.8) es sesquilineal y como K es definido positivo se tiene que $\langle f, f \rangle_{\mathcal{H}_0} \geq 0$ y tiene lugar la desigualdad de Cauchy-Schwarz-Bunyakowskyi para este producto interior. Por otro lado, si $\langle f, f \rangle_{\mathcal{H}_0} = 0$, $\|f\| = 0$ y por (1.9), para toda $x \in I$ se tiene

$$|f(x)| \leq \|f\| \|K(.,x)\| = 0$$

lo que implica que $f \equiv 0$. Luego, $(\mathcal{H}_0, \langle .,. \rangle_{\mathcal{H}_0})$ es un espacio pre-Hilbert.

Sea ahora $\mathcal{H}$ la compleción de $\mathcal{H}_0$. Falta mostrar que $\mathcal{H}$ es el único espacio de Hilbert con núcleo reproductor K.

Sea $\{f_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}_0$. Para todo $x \in I$ se tiene que

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &= |\langle f_m, K_x\rangle_{\mathcal{H}_0} - \langle f_n, K_x\rangle_{\mathcal{H}_0}| = \\ &= |\langle f_m - f_n, K_x\rangle_{\mathcal{H}_0}| \leq \\ &\leq \|f_m - f_n\|_{\mathcal{H}_0} K(x,x)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto existe una función $f \in \mathcal{H}$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \tag{1.10}$$

además

$$\|f\|_{\mathcal{H}} = \lim_{n\to+\infty} \|f\|_{\mathcal{H}_0}$$

y también, si f y g son los límites puntuales de las sucesiones de Cauchy $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ respectivamente,

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}} = \lim_{n,m\to+\infty} \langle f_n, g_m\rangle_{\mathcal{H}_0}.$$

Nótese que (1.10) da una representación concreta de las funciones de $\mathcal{H}$. Por otro lado K posee la propiedad reproductora con respecto a $\mathcal{H}$. En efecto, si $f \in \mathcal{H}$ y $\{f_n(x)\} \subset \mathcal{H}_0$ es tal que $f_n \to f$, cuando $n \to +\infty$, entonces

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \langle f_n, K_x\rangle_{\mathcal{H}_0} = \langle f, K_x\rangle_{\mathcal{H}}, \text{ para cada } x \in I.$$

Sea $\mathcal{H}_1$ un espacio de Hilbert con núcleo reproductor K. Entonces para todo $x \in I$, $K_x \in \mathcal{H}_1$ y por eso $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_1$ y para cada $f, g \in \mathcal{H}_0$ se tiene

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}_0} = \langle f, g\rangle_{\mathcal{H}_1} \tag{1.11}$$

Si $f \in \mathcal{H}_1$ es tal que $0 = \langle f, K_x\rangle_{\mathcal{H}_1} = f(x)$ para toda $x \in I$, entonces $f \equiv 0$. Esto es, la familia $\{K_x\}_{x\in I}$ es una familia total en $\mathcal{H}_1$. Así que para cualquier $f \in \mathcal{H}_1$ se puede tomar una sucesión de Cauchy $\{f_n\}$ en $\mathcal{H}_0$ tal que $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$. Por lo tanto la igualdad (1.11) es válida en $\mathcal{H}$.

Ahora, de $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_1$ y (1.11), se obtiene que $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_1$. Pero, por la construcción de $\mathcal{H}$ (1.10), se tiene también que $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$, comprobándose así la igualdad de $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}$.

Finalmente, considérense dos funciones $f, g \in \mathcal{H}_1$ y dos sucesiones de Cauchy $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ en $\mathcal{H}_0$ que convergen a f y g respectivamente, entonces

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}_1} = \lim_{n\to+\infty} \langle f_n, g_n\rangle_{\mathcal{H}_1} = \lim_{n\to+\infty} \langle f_n, g_n\rangle_{\mathcal{H}_0} = \langle f, g\rangle_{\mathcal{H}}.$$

Esto quiere decir que los productos interiores y las normas de $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}$ son iguales. $\square$

Al final del Capítulo 2 se tratarán los espacios de Pontryagin con núcleos reproductores.

Capítulo 2

Semigrupos locales y grupos de isometrías en espacios de Hilbert y de Pontryagin

Definición 2.1. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ el álgebra de todos los operadores lineales y acotados sobre $\mathcal{H}$. Una familia$\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ es un *semigrupo (uniparamétrico) de operadores* si

(SG-1) $T(0) = I$ (el operador identidad),

(SG-2) $T(s+t) = T(s)T(t)$, para todos $s, t \geq 0$.

Si un semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ satisface además

(SGUC-3) $\|T(t) - I\| \xrightarrow{t\to 0^+} 0$,

se dice que es un *semigrupo uniformemente continuo.*

Un semigrupo de operadores $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es *fuertemente continuo* si el mapeo $t \mapsto T(t)$ es continuo en la topología fuerte de $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$, es decir si cumple

(SGFC-3) $\lim\limits_{t\to t_0} \|T(t)f - T(t_0)f\| = 0$, para todo $f \in \mathcal{H}$ y $t, t_0 \geq 0$.

Esta condición se puede reducir a

(SGFC-3*) $\lim\limits_{t\to 0^+} \|T(t)f - f\| = 0$, para todo $f \in \mathcal{H}$.

Observación 2.2. Todo semigrupo uniformemente continuo es fuertemente continuo.

Definición 2.3. Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo de operadores (uniforme o fuertemente continuo). El *generador infinitesimal* de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es el operador $A_T : Dom(A_T) \to \mathcal{H}$, definido por:

$$A_T f = \lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)f - f}{t}. \tag{2.1}$$

Donde

$$Dom(A_T) = \left\{ f \in \mathcal{H} / \lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)f - f}{t} \text{ existe} \right\}.$$

Detalles sobre la teoría de semigrupos de operadores en espacios de Hilbert se pueden encontrar, por ejemplo, en el texto [**23**].

Algunas propiedades importantes de los semigrupos son las siguientes:

(i) Todo semigrupo de operadores uniformemente continuo tiene un único generador infinitesimal que es un operador acotado y su dominio es todo $\mathcal{H}$.

(ii) Todo semigrupo de operadores fuertemente continuo tiene un único generador infinitesimal que resulta ser un operador cerrado con dominio denso en $\mathcal{H}$.

(iii) Si $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo de operadores (uniforme o fuertemente continuo), entonces existen constantes $M \geq 1$ y $\lambda \geq 0$ tales que $\|T(t)\| \leq Me^{\lambda t}$, para todo $t \geq 0$.

(iv) Si $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo de operadores fuertemente continuo, entonces el mapeo $t \mapsto T(t)f$ es diferenciable en $\mathbb{R}_+$ si y sólo si $f \in Dom(A_T)$ y en este caso se tiene

$$\frac{d}{dt}T(t)f = A_T T(t)f = T(t)A_T f. \tag{2.2}$$

La identidad (2.2) muestra la relación que tienen los semigrupos de operadores con algunos problemas tipo Cauchy.

Definición 2.4. Si en (iii) $M = 1$ y $\lambda = 0$, entonces se tiene un *semigrupo de operadores contráctiles* o *semigrupo de contracciones.*

Si para cada cada $t \geq 0$, $T(t)$ es un operador isométrico, es decir si cumple que $\langle T(t)f, T(t)g\rangle = \langle f, g\rangle$ para toda $f, g \in Dom(T(t))$, entonces $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es un *semigrupo de isometrías.*

Definición 2.5. Un *grupo fuertemente continuo de operadores* en $\mathcal{H}$ es una familia $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}} \subset \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ que satisface

(GH-1) $T(0) = I$ (el operador identidad),

(GH-2) $T(s + t) = T(s)T(t)$, para todos $s, t \in \mathbb{R}$.

(GH-3) $\lim_{t\to 0} \|T(t)f - f\| = 0$, para todo $f \in \mathcal{H}$.

Un semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ fuertemente continuo de operadores con generador infinitesimal A_T puede extenderse a un grupo $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ fuertemente continuo de operadores si y sólo si $-A_T$ genera un semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. En este caso $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ se obtiene como

$$U(t) := \begin{cases} T(t), & \text{para } t \geq 0, \\ S(-t), & \text{para } t < 0. \end{cases}$$

Un ejemplo importante de semigrupos y grupos fuertemente continuos son los (semi)grupos de traslaciones sobre el espacio $(L^2(\mathbb{R}_+))$ $L^2(\mathbb{R})$ de las funciones de cuadrado integrable.

Definición 2.6. Se denomina *(semi)grupo de traslaciones* al (semi)grupo $\{T(t)\}$ contenido en $L(\mathcal{H})$, definido por la fórmula

$$T(t)f(x) = f(x+t) \quad \text{para } f \in \mathcal{H} \tag{2.3}$$

Cuando el espacio $\mathcal{H}$ es $L^2(\mathbb{R}_+)$ se obtiene un semigrupo fuertemente continuo de isometrías y si se considera que el espacio $\mathcal{H}$ es $L^2(\mathbb{R})$ se obtiene un grupo fuertemente continuo de operadores unitarios.

El generador infinitesimal es en ambos casos el operador de derivación $\frac{d}{dx}$ con dominio

$$\{f \in L^2/f \text{ es absolutamente continua y } f^{'} \in L^2\},$$

donde L^2 denota $L^2(\mathbb{R}_+)$ o $L^2(\mathbb{R})$ según corresponda.

Los semigrupos locales de contracciones fueron introducidos en [**10**] y su definición fue sugerida por la relación entre los teoremas de representación de Bochner, el teorema de Stone y el teorema de extensión de Krein. La noción de semigrupos locales de operadores ya había sido tratada con anterioridad por Klein y Landau [**29**], Nussbaum [**35**] y por Langer y Grossman [**25**].

Definición 2.7. Sea a tal que $0 < a \leq +\infty$. Un *semigrupo local de contracciones (SLC)* sobre el espacio de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle , \rangle)$ es una familia $(S(r), \mathcal{H}(r))_{r\in[0,a)}$ que cumple las siguientes condiciones

(SLC-1) Para cada $r \in [0, a)$, $\mathcal{H}(r)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}(0) = \mathcal{H}$.

(SLC-2) Para cada $r \in [0, a)$, $S(r) : \mathcal{H}(r) \to \mathcal{H}$ es una contracción lineal y $S(0) = I_{\mathcal{H}}$.

(SLC-3) $\mathcal{H}(t) \subset \mathcal{H}(r)$, si $0 \leq r < t < a$.

(SLC-4) $\bigcup\limits_{t\in(r,a)} \mathcal{H}(t)$ es denso en $\mathcal{H}(r)$, para cada $r \in [0, a)$.

(SLC-5) Si $r, t \in [0, a)$ y $r + t < a$, entonces $S(t)\mathcal{H}(r + t) \subset \mathcal{H}(r)$ y $S(r + t)f = S(r)S(t)f$, para toda $f \in \mathcal{H}(r + t)$.

Si en (SLC-2) se cambia “contracción” por “isometría”, entonces el semigrupo, se denomina *semigrupo local de isometrías.*

El semigrupo local se dice que es *fuertemente continuo* si para cada $r_0 \in [0, a)$ y $f \in \mathcal{H}(r_0)$ la función $r \mapsto S(r)f$, de $[0, r_0]$ en $\mathcal{H}$ es continua.

Si $(S(r), \mathcal{H}(r))_{r\in[0,a)}$ es un semigrupo local de contracciones fuertemente continuo, el *generador infinitesimal* A del semigrupo se define con la misma fórmula (2.1) pero con

$$Dom(A) = \left\{ f \in \bigcup_{r\in(0,a)} \mathcal{H}(r) / \lim_{r\to 0^+} \frac{S(r)f - f}{r} \text{ existe.} \right\} \tag{2.4}$$

Algunas de las propiedades de los semigrupos y sus generadores infinitesimales se extienden a los semigrupos locales.

El siguiente teorema fue probado en [**10**], donde se pueden encontrar más detalles sobre semigrupos locales de contracciones y de isometrías.

Teorema 2.8. *Sea $(S(t), \mathcal{H}(t))_{t\in[0,a)}$ un semigrupo local de contracciones sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces*

(a) Existe un semigrupo fuertemente continuo de contracciones $(V(t))_{t\in[0,+\infty)}$ sobre $\mathcal{H}$ tal que $S(t) = V(t)|_{\mathcal{H}(t)}$, para toda $t \in [0, a)$.

(b) Existe un espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y un grupo fuertemente continuo de operadores unitarios $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ sobre $\mathcal{F}$ tales que $S(t) = \mathcal{P}U(t)|_{\mathcal{H}(t)}$, para todo $t \in [0, a)$, donde $\mathcal{P} : \mathcal{F} \to \mathcal{H}$ es la proyección ortogonal sobre $\mathcal{H}$.

(c) Si $(S(t), \mathcal{H}(t))_{t\in[0,a)}$ es un semigrupo local de isometrías, entonces $S(t) = U(t)|_{\mathcal{H}(t)}$, para todo $t \in [0, a)$, donde $U(t)$ es como en (b).

En el Apéndice se ha incluido un poco de la teoría general de los espacios de Pontryagin. A continuación se consideran algunos aspectos sobre los núcleos de Toeplitz generalizados y los semigrupos locales de isometrías en espacios de Pontryagin. Esta información ha sido tomada esencialmente de [**16**].

Es importante recordar que, tanto en este capítulo como en el siguiente, cuando se habla de continuidad y/o de convergencia en espacios de Pontryagin se está considerando la topología fuerte del espacio descrita en el apéndice (ver página 36).

Definición 2.9. Sea $0 < a < +\infty$. Un *semigrupo local de isometrías en el espacio de Pontryagin de índice* κ $\big(\mathcal{G}, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ (SLIP) es una familia $\big(S(r), \mathcal{G}(r)\big)_{r\in[0,a)}$ que satisface:

(SLIP-1) Para cada $r \in [0, a)$, $\mathcal{G}(r)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{G}$ y $\mathcal{G}(0) = \mathcal{G}$.

(SLIP-2) Para cada $r \in [0, a)$, $S(r) : \mathcal{G}(r) \to \mathcal{G}$ es una isometría continua y $S(0) = I_{\mathcal{G}}$.

(SLIP-3) $\mathcal{G}(t) \subset \mathcal{G}(r)$, si $0 \le r < t < a$.

(SLIP-4) $\bigcup_{t\in(r,a)} \mathcal{G}(t)$ es denso en $\mathcal{G}(r)$, para cada $r \in [0, a)$.

(SLIP-5) Si $r, t \in [0, a)$ y $r + t < a$, entonces $S(t)\mathcal{G}(r + t) \subset \mathcal{G}(r)$ y $S(r + t)f = S(r)S(t)f$, para toda $f \in \mathcal{G}(r + t)$.

Al igual que en el caso de espacios de Hilbert, se dice que el semigrupo local es *fuertemente continuo* si para cada $r_0 \in [0, a)$ y $f \in \mathcal{G}(r_0)$ la función $r \mapsto S(r)f$, de $[0, r_0]$ en $\mathcal{G}$ es continua.

Definición 2.10. Sea $\mathcal{G}$ un espacio de Pontryagin de índice κ de funciones definidas sobre un intervalo I de $\mathbb{R}$. Para $f, g \in \mathcal{G}$ sea $\langle f, g\rangle_{\mathcal{G}}$ el producto interior de f y g. La función $K : I \times I \to \mathbb{C}$ es un *núcleo reproductor del espacio de Pontryagin* $\mathcal{G}$ si se satisfacen las siguientes condiciones:

(NRP-1) Para cada $x \in I$, $K_x(y) = K(y, x)$ como función de y está en $\mathcal{G}$.
(NRP-2) (Propiedad reproductora) Para cada $x \in I$ y cada $f \in \mathcal{G}$,

$$f(x) = \langle f, K_x\rangle_G.$$

Así como las definiciones de núcleo reproductor en espacio de Hilbert y núcleo reproductor en espacio de Pontryagin son idénticas, salvo los espacios en los que se definen, así también algunas de las propiedades de los núcleos reproductores en espacios de Hilbert se cumplen para núcleos reproductores en espacios de Pontryagin. Los siguientes dos teoremas fueron tomados de [**2**].

Teorema 2.11. *Un espacio de Pontryagin $\mathcal{G}$ con índice κ de funciones sobre I admite un núcleo reproductor $K(s,t)$ si y sólo si todos los funcionales de evaluación son acotados. En este caso K es un núcleo hermítico con κ cuadrados negativos y es único.*

El siguiente es una especie de recíproco del teorema anterior.

Teorema 2.12. *Si $K(s,t)$ es un núcleo hermítico sobre $I \times I$ que tiene κ cuadrados negativos, existe un único espacio de Pontryagin de funciones sobre I que tiene a K como núcleo reproductor.*

Demostración. Sea $\mathcal{G}_0$ el conjunto de todas las funciones de la forma $f(\cdot) = \sum_{i=1}^{n} a_i K(s_i, \cdot)$, donde $a_i \in \mathbb{C}$, $s_i \in I$.

Dadas dos funciones $f, g \in \mathcal{G}_0$, se pueden expresar como

$$f(\cdot) = \sum_{i=1}^{n} a_i K(s_i, \cdot) \text{ y } g(\cdot) = \sum_{j=1}^{n} b_j K(s_j, \cdot) \tag{2.5}$$

y se pueden usar los mismos puntos en ambas funciones añadiendo, de ser necesario, términos nulos. El producto interior se define mediante

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{G}_0} = \sum_{i,j=1}^{n} a_i \bar{b}_j K(s_j, s_i)$$

Como $\langle f, g\rangle_{\mathcal{G}_0} = \sum_{j=1}^{n} \bar{b}_j f(s_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{g(s_i)}$, el producto interior está bien definido y es sesquilineal. La propiedad reproductora $\langle f(\cdot), K(s,\cdot)\rangle_{\mathcal{G}} = f(s)$ se cumple para todo $s \in I$ y $f \in \mathcal{G}_0$.

Por el Lema 4.5 del Apéndice, se tiene que $\mathcal{G}_0$ contiene un subespacio $\mathcal{G}_-$ que es el antiespacio de un espacio de Hilbert, y ningún espacio de mayor dimensión tiene esta propiedad. Un núcleo reproductor de $\mathcal{G}_-$ puede darse en términos de funciones $u_1, \ldots, u_\kappa$ de $\mathcal{G}_0$ tales que

$$\langle u_i, u_j\rangle_{\mathcal{G}_0} = -\delta_{ij}, \text{ para } i, j = 1, \ldots, \kappa,$$

así $K_-(s,t) = -\sum_{l=1}^{\kappa} u_l(t)\overline{u_l(s)}$. Defínase

$$K_+(s,t) = K(s,t) - K_-(s,t)$$

sobre $I \times I$, y sea $\mathcal{G}_0^+$ el span lineal de todas las funciones $K_+(s,\cdot)$ con $s \in I$.

Para cada $s \in I$ y $j = 1, \ldots, \kappa$,

$$\begin{aligned}\langle K_+(s,\cdot), u_j(\cdot)\rangle_{\mathcal{G}_0} &= \langle K(s,\cdot), u_j(\cdot)\rangle_{\mathcal{G}_0} + \sum_{l=1}^{\kappa} \langle u_l(\cdot)\overline{u_l(s)}, u_j(\cdot)\rangle_{\mathcal{G}_0} = \\ &= \overline{u_j(s)} - \overline{u_j(s)} = 0,\end{aligned}$$

y por lo tanto $\mathcal{G}_0^+ \perp \mathcal{G}_-$ en el producto interior de $\mathcal{G}_0$.

Considérense dos funciones $f, g \in \mathcal{G}_0^+$. Representándolas en la forma (2.5) con K_+ en lugar de K se obtiene

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle_{\mathcal{G}_0} &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i K(s_i,\cdot) - \sum_{i=1}^{n} a_i K_-(s_i,\cdot), \sum_{j=1}^{n} b_j K(s_j,\cdot) - \sum_{j=1}^{n} b_i K_-(s_j,\cdot) \right\rangle_{\mathcal{G}_0} \\ &= \sum_{j,i=1}^{n} a_i \bar{b}_j \{K(s_i,s_j) - K_-(s_i,s_j) - K_-(s_i,s_j) + K_-(s_i,s_j)\} \\ &= \sum_{j,i=1}^{n} a_i \bar{b}_j K_+(s_i,s_j).\end{aligned}$$

De aquí se sigue que K_+ es no-negativo, puesto que de lo contrario se puede encontrar un subespacio de dimensión $\kappa + 1$ que es antiespacio de un espacio de Hilbert con el producto interior de $\mathcal{G}_0$ lo cual es contradictorio.

El espacio $\mathcal{G}_0^+$ se completa hasta un espacio de Hilbert $\mathcal{G}_+$ con núcleo reproductor K_+ y se define el espacio de Pontryagin $\mathcal{G} = \mathcal{G}_- \oplus \mathcal{G}_+$. Este espacio tiene a $K(s,t)$ como núcleo reproductor. $\square$

El siguiente teorema es de particular importancia en la demostración del teorema principal y fue demostrado en [**15**].

Teorema 2.13. *Sea* $\big(S(r), \mathcal{G}(r)\big)_{r\in[0,a)}$ *un semigrupo local de isometrías fuertemente continuo sobre el espacio de Pontryagin* $(\mathcal{G}, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ *de índice* κ.

Entonces existe un espacio de Pontryagin más grande $(\widetilde{\mathcal{G}}, \langle\cdot\,,\cdot\rangle_{\widetilde{\mathcal{G}}})$ *con el mismo índice* κ *y un grupo de operadores unitarios fuertemente continuo* $(U(t))_{-\infty<t<+\infty}$ *sobre* $\widetilde{\mathcal{G}}$ *tal que* $U(t)\,|_{\mathcal{G}(t)}= S(t)$ *para* $t \in [0, a)$.

Una buena referencia para el estudio de los semigrupos locales de isometrías en espacios de Hilbert y de Pontryagin, que está escrita de manera muy accesible, son los capítulos 3 y 4 del libro [**17**], editado para la tercera Escuela Venezolana de Matemáticas.

Capítulo 3

Resultados de representación y extensión para núcleos de Toeplitz generalizados κ-indefinidos

En este capítulo se demuestra el teorema principal de este trabajo: todo núcleo de Toeplitz generalizado definido en un intervalo, medible y κ-indefinido admite una representación como la suma de dos núcleos de Toeplitz generalizados, uno de los cuales es κ-indefinido y continuo y el otro es nulo casi siempre y definido positivo. Se demuestra además un teorema de extensión de estos núcleos a todo el eje real.

Para la demostración de este teorema fue necesario generalizar al caso de núcleos de Toeplitz generalizados κ-indefinidos dos resultados, uno de Sasvári y el otro de Langer. El primero de ellos es el contenido del Lema 1.10 del Capítulo 1 y el segundo –el Lema 3.7– es una versión simplificada de una generalización a núcleos de Toeplitz generalizados de un lema de Langer (ver [**34**]). Estos resultados, junto con el teorema principal, están contenidos en el artículo [**14**] mencionado en el Capítulo 1.

Se realizarán una serie de construcciones previas, que son necesarias para llegar al teorema principal, que será enunciado y demostrado al final del capítulo.

1. Espacios de Pontryagin asociados a un núcleo de Toeplitz generalizado medible y κ-indefinido

Sea $I = (-a, a)$, donde $a > 0$. En lo que sigue $F : I \times I \to \mathbb{C}$ será un núcleo de Toeplitz generalizado κ-indefinido y medible.

1.1. El espacio de Pontryagin con núcleo reproductor.

Del Teorema 2.12 se obtiene que existe un espacio de Pontryagin $\mathcal{E}$ de funciones escalares sobre I, con núcleo reproductor F tal que $\text{ind}_-(\mathcal{E}) = \kappa$. Ver también [**5**] y la demostración del Teorema 1.1.3 de [**1**]. El espacio $\mathcal{E}$ tiene las siguientes propiedades:

(i) Los elementos de $\mathcal{E}$ son funciones escalares medibles sobre I y, si para $\omega \in I$ se define $F_\omega : I \to \mathbb{C}$ por $F_\omega(\lambda) = F(\lambda, \omega)$, entonces la función F_ω pertenece a $\mathcal{E}$.

(ii) Para cada $u \in \mathcal{E}$ y $\omega \in I$

$$u(\omega) = \langle u, F_\omega \rangle_{\mathcal{E}}.$$

(iii) Si $\mathcal{M}$ es la variedad lineal generada por las funciones de la forma $F_\omega(\cdot)$, con $\omega \in I$, entonces $\mathcal{M}$ es un subespacio denso de $\mathcal{E}$.

(iv) Si $u, v \in \mathcal{M}$ están dadas por

$$u(\cdot) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, F_{\lambda_i}(\cdot) \qquad v(\cdot) = \sum_{j=1}^{m} c'_j\, F_{\omega_j}(\cdot)$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \omega_1, \ldots, \omega_m \in I$, $c_1, \ldots, c_n, c'_1, \ldots, c'_m \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\langle u, v\rangle_{\mathcal{E}} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_i\, \overline{c'_j}\, F(\omega_j, \lambda_i).$$

Estos espacios $\mathcal{M}$ y $\mathcal{E}$ se llamarán los espacios *pre-Pontryagin* y *Pontryagin de núcleo reproductor asociados a* F, respectivamente.

Como $\mathcal{M}$ es un espacio pre-Pontryagin de índice κ, existe un conjunto $\{u_1, \ldots, u_\kappa\} \subset \mathcal{M}$ tal que

$$\langle u_i, u_j\rangle_{\mathcal{E}} = -\delta_{ij}.$$

El conjunto ortogonal $\{u_1, \ldots, u_\kappa\}$ da origen a una descomposición fundamental $\mathcal{E} = \mathcal{E}^+ \oplus \mathcal{E}^-$, donde $\mathcal{E}^-$ es el subespacio generado por el conjunto $\{u_1, \ldots, u_\kappa\}$. La norma inducida sobre $\mathcal{E}$ por esta descomposición fundamental viene dada por

$$\|u\|^2_{|\mathcal{E}|} = \langle u, u\rangle_{\mathcal{E}} + 2\sum_{j=1}^{\kappa} |\langle u, u_j\rangle_{\mathcal{E}}|^2. \tag{3.1}$$

Se fijará el conjunto $\{u_1, \ldots, u_\kappa\}$ y $\|\ \|_{|\mathcal{E}|}$ para el resto de esta sección.

Proposición 3.1.

(a) *La función $\omega \mapsto \|F_\omega\|_{|\mathcal{E}|}$ de $(-a, a)$ en $\mathbb{R}$ es localmente acotada.*

(b) *Los elementos de $\mathcal{E}$ son localmente acotados.*

Demostración.

Por el Lema 1.10 se tiene que los elementos de $\mathcal{M}$ son localmente acotados, en particular las funciones $u_1, \ldots, u_\kappa$ son localmente acotadas. De (3.1) se sigue que

$$\begin{aligned}\|F_\omega\|^2_{|\mathcal{E}|} &= \langle F_\omega, F_\omega\rangle_{\mathcal{E}} + 2\sum_{j=1}^{\kappa} |\langle F_\omega, u_j\rangle_{\mathcal{E}}|^2 \\ &= F_\omega(\omega) + 2\sum_{j=1}^{\kappa} |u_j(\omega)|^2.\end{aligned}$$

Como

$$F_\omega(\omega) = \begin{cases} f_{11}(0) & \text{si } \omega \in [0,a), \\ f_{22}(0) & \text{si } \omega \in (-a,0), \end{cases}$$

se tiene la parte (a) de la proposición.

Si $u \in \mathcal{E}$ y $\omega \in (-a,a)$, se cumple que

$$|u(\omega)| = |\langle u, F_\omega\rangle_{\mathcal{E}}| \leq \|u\|_{|\mathcal{E}|}\, \|F_\omega\|_{|\mathcal{E}|},$$

por lo que (b) resulta de (a).

□

Observación 3.2. Para cualquier núcleo hermítico K sobre $I \times I$ se puede considerar el espacio de las funciones de la forma

$$u(\cdot) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, K_{\lambda_i}(\cdot),$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in I,\ \ c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$, con la forma sesquilineal indefinida

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_i\, \overline{c'_j}\, K(\omega_j, \lambda_i),$$

donde

$$u(\cdot) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, K_{\lambda_i}(\cdot) \qquad v(\cdot) = \sum_{j=1}^{m} c'_j\, K_{\omega_j}(\cdot)$$

aquí $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \omega_1, \ldots, \omega_m \in I,\ \ c_1, \ldots, c_n, c'_1, \ldots, c'_m \in \mathbb{C}$.

1.2. El espacio de Pontryagin de las funciones de soporte compacto.

Sea $\mathcal{N}$ la variedad lineal generada por las funciones complejas continuas φ sobre $I = (-a,a)$ que se anulan fuera de un subconjunto compacto contenido en $(-a,0) \cup (0,a)$.

Si $\varphi, \psi \in \mathcal{N}$, se define

$$\langle \varphi, \psi\rangle_{\mathcal{N}} = \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} F(x,y)\varphi(x)\overline{\psi(y)}dxdy \tag{3.2}$$

Proposición 3.3. *La forma sesquilineal* $\langle\ ,\ \rangle_{\mathcal{N}}$ *es* κ_o*-indefinida, donde* κ_o *es un entero no-negativo menor o igual que* κ*.*

Demostración. Para $y \in (-a,a)$ sea $T_y : \mathcal{E} \to \mathbb{C}$ el funcional lineal dado por

$$T_y(u) = u(y) = \langle u, F_y\rangle_{\mathcal{E}}.$$

Se tiene que

$$|T_y(u)| \leq \|u\|_{|\mathcal{E}|}\, \|F_y\|_{|\mathcal{E}|},$$

luego, de la Proposición 3.1, se sigue que $\|T_y\|_{|\mathcal{E}|}$ es una función localmente acotada de $y \in (-a, a)$. Por lo tanto, para $\varphi \in \mathcal{N}$ el funcional

$$u \mapsto \int_{-a}^{a} \varphi(x)\, \langle F_x, u\rangle_{\mathcal{E}}\, dx$$

es antilineal y acotado, así que para cada $\varphi \in \mathcal{N}$ existe un elemento $A(\varphi) \in \mathcal{E}$ tal que

$$\langle A(\varphi), u\rangle_{\mathcal{E}} = \int_{-a}^{a} \varphi(x)\, \langle F_x, u\rangle_{\mathcal{E}}\, dx.$$

Para $y \in (-a, a)$ se cumple que

$$A(\varphi)(y) = \langle A(\varphi), F_y\rangle_{\mathcal{E}} = \int_{-a}^{a} \varphi(x)\, \langle F_x, F_y\rangle_{\mathcal{E}}\, dx = \int_{-a}^{a} \varphi(x)\, F(y, x)\, dx.$$

Finalmente, si $\varphi \in \mathcal{N}$ entonces

$$\begin{aligned}
\langle A(\overline{\varphi}), A(\overline{\varphi})\rangle_{\mathcal{E}} &= \int_{-a}^{a} \overline{\varphi(x)}\, \langle F_x, A(\overline{\varphi})\rangle_{\mathcal{E}}\, dx = \int_{-a}^{a} \overline{\varphi(x)}\, \overline{\langle A(\overline{\varphi}), F_x\rangle_{\mathcal{E}}}\, dx \\
&= \int_{-a}^{a} \overline{\varphi(x)} \left(\int_{-a}^{a} \overline{\overline{\varphi(y)}\, F(x, y)}\, dy \right) dx \\
&= \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} \overline{\varphi(x)} \varphi(y) F(y, x)\, dx\, dy \\
&= \overline{\int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} \varphi(x) \overline{\varphi(y)} F(x, y)\, dx\, dy} \\
&= \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} \varphi(x) \overline{\varphi(y)} F(x, y)\, dx\, dy \\
&= \langle \varphi, \varphi\rangle_{\mathcal{N}}.
\end{aligned}$$

como $\langle\ ,\ \rangle_{\mathcal{E}}$ es una forma κ-indefinida, se obtiene el resultado deseado.

$\square$

Completando el espacio $\mathcal{N}$, módulo el subespacio isotrópico, se obtiene un espacio de Pontryagin de índice κ_o. Este espacio se denotará por $\mathcal{G}$ y se identificarán los elementos de $\mathcal{N}$ con sus correspondientes clases de equivalencia en $\mathcal{G}$.

Por cuanto $\mathcal{N}$ es denso en $\mathcal{G}$, existe un conjunto $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{\kappa_o}\} \subset \mathcal{N}$ tal que

$$\langle \varphi_i, \varphi_j\rangle_{\mathcal{G}} = -\delta_{ij}.$$

El conjunto ortogonal $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{\kappa_o}\}$ genera la descomposición fundamental $\mathcal{G} = \mathcal{G}^+ \oplus \mathcal{G}^-$, donde $\mathcal{G}^-$ es el subespacio generado por el conjunto $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{\kappa_o}\}$. Esta descomposición fundamental induce sobre $\mathcal{G}$ la norma

$$\|\varphi\|_{|\mathcal{G}|}^2 = \langle \varphi, \varphi \rangle_{\mathcal{G}} + 2 \sum_{j=1}^{\kappa_o} |\langle \varphi, \varphi_j \rangle_{\mathcal{G}}|^2. \tag{3.3}$$

Se fijará el conjunto $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{\kappa_o}\}$ y $\| \ \|_{|\mathcal{G}|}$ en lo que sigue de esta sección.

1.2.1. *La función δ en $\mathcal{G}$.*

Para $n \in \mathbb{N}$ sean $\varphi_n^{(1)}$ y $\varphi_n^{(2)}$ las funciones definidas por

$$\varphi_n^{(1)}(x) = \begin{cases} n & \text{si } 0 < x < \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

$$\varphi_n^{(2)}(x) = \begin{cases} n & \text{si } -\frac{1}{n} < x < 0, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Es fácil notar que $\varphi_n^{(1)}$ y $\varphi_n^{(2)}$ son elementos de $\mathcal{G}$. En efecto, dado $n \in \mathbb{N}$, la sucesión $\{\rho_m\}_{m=1}^{+\infty}$ donde

$$\rho_m(x) = \begin{cases} n^2(m+1)x & \text{si } 0 < x < \frac{1}{(m+1)n}, \\ n & \text{si } \frac{1}{(m+1)n} \leq x \leq \frac{m}{(m+1)n}, \\ -n(m+1)(nx-1) & \text{si } \frac{m}{(m+1)n} < x < \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{N}$ que converge a $\varphi_n^{(1)}$. De forma similar se puede construir una sucesión de Cauchy de funciones en $\mathcal{N}$ que converja a $\varphi_n^{(2)}$.

Ahora, para $t \in [0, a)$ sea $\varphi_{n,t}^{(1)}$ la función definida por

$$\varphi_{n,t}^{(1)}(x) = \varphi_n^{(1)}(x - t),$$

y para $t \in (-a, 0]$ sea $\varphi_{n,t}^{(2)}$ la función definida por

$$\varphi_{n,t}^{(2)}(x) = \varphi_n^{(2)}(x - t).$$

Proposición 3.4.

(a) *Para $t \in [0, a)$ la sucesión $\{\varphi_{n,t}^{(1)}\}_{n=1}^{+\infty}$ es débilmente convergente en $\mathcal{G}$.*

(b) *Para $t \in (-a, 0]$ la sucesión $\{\varphi_{n,t}^{(2)}\}_{n=1}^{+\infty}$ es débilmente convergente en $\mathcal{G}$.*

Demostración. Se tiene que

$$\|\varphi_{n,t}^{(\alpha)}\|_{|\mathcal{G}|}^2 = \langle \varphi_{n,t}^{(\alpha)}, \varphi_{n,t}^{(\alpha)} \rangle_{\mathcal{G}} + 2 \sum_{j=1}^{\kappa_o} |\langle \varphi_{n,t}^{(\alpha)}, \varphi_j \rangle_{\mathcal{G}}|^2.$$

De la definición de $\langle\ ,\ \rangle_{\mathcal{G}}$, usando que las funciones $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\kappa_o}$ tienen soporte compacto contenido en $(-a, 0) \cup (0, a)$ y que F es localmente acotado, se obtiene que para cada $t \in [0, a)$ la sucesión $\left\{ \|\varphi_{n,t}^{(1)}\|_{|\mathcal{G}|} \right\}$ es acotada.

Ahora, si $\varphi \in \mathcal{N}$, el teorema de diferenciación de Lebesgue (ver Teorema 4.6) permite afirmar que para cada $t \in [0, a)$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \langle \varphi_{n,t}^{(1)}, \varphi \rangle_{\mathcal{G}} &= \lim_{n\to\infty} \int_{I_1} \int_{-a}^{a} F(x, y) \varphi_{n,t}^{(1)}(x) \overline{\varphi(y)} dx dy \\ &= \int_{-a}^{a} F(t, y) \overline{\varphi(y)} dy, \end{aligned}$$

es decir, el límite existe. Por cuanto $\mathcal{N}$ es denso en $\mathcal{G}$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} \langle \varphi_{n,t}^{(1)}, \varphi \rangle_{\mathcal{G}}$ existe para todo $\varphi \in \mathcal{G}$.

El caso $\alpha = 2$ se demuestra de forma análoga.

□

Sean $\delta_t^{(1)}$ y $\delta_t^{(2)}$ los límites débiles de las sucesiones $\varphi_{n,t}^{(1)}$ y $\varphi_{n,t}^{(2)}$ para $t \in [0, a)$ y $t \in (-a, 0]$ respectivamente.

De la demostración anterior y del teorema de diferenciación de Lebesgue se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 3.5.

(a) *Si* $\varphi \in \mathcal{N}$ *y* $t \in [0, a)$, *entonces*

$$\langle \delta_t^{(1)}, \varphi \rangle_{\mathcal{G}} = \int_{-a}^{a} F(t, y) \overline{\varphi(y)} dy.$$

(b) *Si* $\varphi \in \mathcal{N}$ *y* $t \in (-a, 0]$, *entonces*

$$\langle \delta_t^{(2)}, \varphi \rangle_{\mathcal{G}} = \int_{-a}^{a} F(t, y) \overline{\varphi(y)} dy.$$

(c) *Se cumple que*

$$\langle \delta_s^{(\alpha)}, \delta_t^{(\beta)} \rangle_{\mathcal{G}} = F(s, t) = f_{\alpha\beta}(s - t)$$

en casi todo punto $(s, t) \in I_\alpha \times I_\beta$, $\alpha, \beta = 1, 2$.

1.3. El semigrupo local de operadores isométricos asociados a una función κ-indefinida.

Para $r \in [0,a)$ sea $\mathcal{N}(r)$ el conjunto de las funciones en $\mathcal{N}$, con soporte contenido en $(-a+r,0)\cup(r,a)$. Para $\varphi \in \mathcal{N}(r)$, se define $(S(r)\varphi)(x)$ como $\varphi(x-r)$ si x está en $(-a,-r)\cup(0,a-r)$ y 0 en el resto.

Sea $\mathcal{G}(r)$ la clausura de $\mathcal{N}(r)$ como subespacio de $\mathcal{G}$.

Un cálculo rutinario permite ver que los operadores $S(r)$ preservan el producto interior sobre $\mathcal{N}(r)$. Si r es suficientemente pequeño, entonces $\mathcal{N}(r)$ contiene un subespacio negativo κ_o-dimensional, así que para r suficientemente pequeño se tiene que $S(r)$ puede extenderse a un operador isométrico y continuo de $\mathcal{G}(r)$ a $\mathcal{G}$. Y como $S(r) = \left(S(\frac{r}{n})\right)^n$ se tiene que todos los operadores $S(r)$ pueden extenderse a operadores isométricos y continuos de $\mathcal{G}(r)$ en $\mathcal{G}$. Estas extensiones se denotarán también por $S(r)$.

Proposición 3.6. *La familia $(S(r),\mathcal{G}(r))_{r\in[0,a)}$ es un semigrupo local de isometrías fuertemente continuo en el espacio $\mathcal{G}$.*

Demostración.

(1) Para cada $r \in [0,a)$, $\mathcal{G}(r)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{G}$, por la construcción de $\mathcal{G}(r)$ y $\mathcal{G}(0) = \mathcal{G}$.

(2) Por construcción se tiene que $\mathcal{G}(s) \subset \mathcal{G}(r)$ si $r,s \in [0,a)$ y $r \leq s$.

(3) Ya se tiene que para cada $r \in [0,a)$, $S(r) : \mathcal{G}(r) \to \mathcal{G}$ es un operador lineal isométrico y acotado y $S(0) = I_{\mathcal{G}}$.

(4) Si $r,t \in [0,a)$ y $r+t < a$ entonces $S(t)\mathcal{G}(r+t) \subset \mathcal{G}(r)$ y $S(r+t)h = S(r)S(t)h$ para todo $h \in \mathcal{G}(r+t)$.

    Lo primero es cierto porque $r+t \geq r$ y lo segundo es consecuencia inmediata de la definición de los operadores de traslación.

(5) Que $\displaystyle\bigcup_{s\in(r,a)} \mathcal{G}(s)$ sea denso en $\mathcal{G}(r)$ para todo $r \in [0,a)$ también es consecuencia de la definición de los $\mathcal{G}(r)$.

A continuación se demuestra la continuidad fuerte del semigrupo local.

De la definición de $S(r)$ y $\mathcal{N}(r)$ sigue que existe r_o tal que

$$\varphi_1,\ldots,\varphi_{\kappa_o} \in S(r)\mathcal{N}(r)$$

si $0 \leq r \leq r_o$.

Si $\varphi \in \mathcal{N}(r)$, entonces

$$
\begin{aligned}
\|S(r)\varphi\|_{|\mathcal{G}|}^2 &= \langle S(r)\varphi, S(r)\varphi\rangle_{\mathcal{G}} + 2\sum_{j=1}^{\kappa_o} |\langle S(r)\varphi, \varphi_j\rangle_{\mathcal{G}}|^2 \\
&= \langle \varphi, \varphi\rangle_{\mathcal{G}} + 2\sum_{j=1}^{\kappa_o} |\langle \varphi, S(r)^{-1}\varphi_j\rangle_{\mathcal{G}}|^2.
\end{aligned}
$$

para $i = 1, \ldots, \kappa_o$

$$
\|S(r)^{-1}\varphi_i\|_{|\mathcal{G}|}^2 = \langle \varphi_i, \varphi_i\rangle_{\mathcal{G}} + 2\sum_{j=1}^{\kappa_o} |\langle S(r)^{-1}\varphi_i, \varphi_j\rangle_{\mathcal{G}}|^2.
$$

Ahora, de la definición del producto sobre $\mathcal{N}$ sigue que es posible hallar $r_1 > 0$ y $C > 0$ tales que $|\langle S(r)^{-1}\varphi_i, \varphi_j\rangle_{\mathcal{G}}| \leq C$ para $0 < r < r_1$, $i, j = 1, \ldots, \kappa_o$. Luego para $0 < r < r_1$ se tiene que

$$
\|S(r)^{-1}\varphi_i\|_{|\mathcal{G}|}^2 \leq \|\varphi_i\|_{|\mathcal{G}|}^2 + 2\kappa_o C^2.
$$

Así que existe $M > 0$ tal que

$$
\|S(r)^{-1}\varphi_i\|_{|\mathcal{G}|} \leq M
$$

para $0 < r < r_1$. Por lo tanto, si $0 < r < r_1$ se tendrá que

$$
\|S(r)\varphi\|_{|\mathcal{G}|}^2 \leq \left(1 + 2\kappa_o M^2\right) \|\varphi\|_{|\mathcal{G}|}^2.
$$

Más aún, como

$$
\|S(t)\|_{|\mathcal{G}|} \leq \|S(t/n)\|_{|\mathcal{G}|}^n,
$$

entonces $\|S(r)\|_{|\mathcal{G}|}$ es acotado para $r \in [0, a)$ por una constante independiente de r.

La continuidad de la traslación para los elementos de $\mathcal{N}(r)$ se deduce de la continuidad de la traslación para la integral de Lebesgue. De aquí y de la acotación uniforme de las normas de los operadores $S(r)$ se obtiene el resultado.

$\square$

2. El teorema de representación y extensión para núcleos de Toeplitz generalizados κ-indefinidos y medibles

En esta sección se demostrará el teorema principal. Se necesita el siguiente resultado que es una versión simplificada de una generalización, para núcleos de Toeplitz generalizados, del Lema 3 de [**34**].

Lema 3.7. *Sea $F^{(o)}$ un núcleo de Toeplitz generalizado hermítico sobre $(-a,a)$ nulo en casi todo punto. Sea $\mathcal{M}_o$, con la forma sesquilineal $\langle\ ,\ \rangle_o$ el espacio asociado a $F^{(o)}$ (ver Observación 3.2).*

Si existe $u_o \in \mathcal{M}_o$ tal que $\langle u_o, u_o\rangle_o < 0$, entonces existe un conjunto infinito $M \subset \mathcal{M}_o$ tal que $\langle u,u\rangle_o = -1$, $\langle u,v\rangle_o = 0$ si $u,v \in M$, $u \neq v$.

Demostración.

El elemento u_o tiene la forma

$$u_o(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i F^{(o)}(x,x_i),$$

donde $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{C}$ y $x_1,\ldots,x_n \in (-a,a)$. Se puede suponer que

$$\langle u_o,u_o\rangle_o = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i\overline{\alpha_j}F^{(o)}(x_j,x_i) = -1.$$

Se deben considerar dos casos.

Caso 1: $x_i \neq 0$, para $i = 1,\ldots,n$.

Sea δ tal que

$$0 < \delta < \min\{a - x_i, x_i + a, |x_i|,\ 1 \leq i \leq n\}.$$

Entonces $x_i \pm \delta$ está en I_α siempre que x_i esté en I_α, ($\alpha = 1,2$; $i = 1,\ldots,n$). Luego, para $r \in (-\delta,\delta)$ se pueden considerar

$$\Theta_r u_o(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i F^{(o)}(x, x_i + r) = u_o(x - r),$$

y se cumple que

$$\langle \Theta_r u_o, \Theta_r u_o\rangle_o = -1.$$

Sea

$$A = \{x - y\ : x,y \in I \text{ y } F^{(o)}(x,y) = 0\},$$

nótese que $A \subset (-2a,2a)$ y que por hipótesis se tiene que $\mathrm{m}\,(A) = 2a$.

Se mostrará que existe un conjunto infinito $\{s_1, s_2, \ldots\} \subset (-\delta,\delta)$ tal que si $l \neq m$ entonces

$$s_l - s_m + (x_i - x_j) \in A, \text{ para } i,j = 1,\ldots,n. \tag{3.4}$$

Sea $s_1 = 0$ y sea

$$A_{jl}(s_1) = (s_1 + (x_j - x_l) - A) \cap (-\delta,\delta) = ((x_j - x_l) - A) \cap (-\delta,\delta),$$

entonces $\mathrm{m}\,(A_{jl}(s_1)) = 2\delta$ para $j,l = 1,\ldots n$, luego $\mathrm{m}\,(\cap_{j,l=1}^{n} A_{jl}(s_1)) = 2\delta$.

Se puede tomar $s_2 \in \cap_{j,l=1}^{n} A_{jl}(s_1)$ tal que $s_2 \neq s_1$ y sea

$$A_{jl}(s_2) = (s_2 + (x_j - x_l) - A) \cap (-\delta, \delta),$$

entonces $\mathrm{m}\,(A_{jl}(s_2)) = 2\delta$ para $j, l = 1, \dots n$, por lo que

$$\mathrm{m}\,\left(\cap_{j,l=1}^{n} A_{jl}(s_2) \cap \cap_{j,l=1}^{n} A_{jl}(s_1)\right) = 2\delta.$$

Ahora se toma $s_3 \in \cap_{j,l=1}^{n} A_{jl}(s_2) \cap \cap_{j,l=1}^{n} A_{jl}(s_1)$, con la condición de que $s_3 \notin \{s_1, s_2\}$ y se considera

$$A_{jl}(s_3) = (s_3 + (x_j - x_l) - A) \cap (-\delta, \delta),$$

Continuando en forma inductiva, se construye un conjunto $\{s_1, s_2, \dots\}$ que satisface (3.4).

El resultado se obtiene al tomar

$$M = \{\Theta_{s_l} u_o \,:\, l = 1, 2, \dots\}.$$

Caso 2: $x_{i_o} = 0$ para algún $i_o \in \{1, \dots, n\}$.

Se escoge $t > 0$ de manera tal que $x_i + t \in I_\alpha$ si $x_i \in I_\alpha$ para $\alpha = 1, 2$, $i = 1, \dots, n$.

Considerando

$$\widetilde{u}_o(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i F^{(o)}(x, x_i + t)$$

el problema se reduce al caso anterior. □

Teorema 3.8. *Sea $F : I \times I \to \mathbb{C}$ un núcleo de Toeplitz generalizado κ-indefinido y medible. Entonces*

(a) *Existen dos núcleos de Toeplitz generalizados hermíticos $F^{(c)}$ y $F^{(o)}$ sobre $I \times I$ tales que*
   (i) *$F = F^{(c)} + F^{(o)}$*
   (ii) *$F^{(c)}$ es κ-indefinido y viene dado por cuatro funciones continuas $f_{\alpha\beta}^{(c)}$, $\alpha, \beta = 1, 2$.*
   (iii) *$F^{(o)}$ es nulo casi siempre y definido positivo.*

(b) *F puede extenderse a un núcleo de Toeplitz generalizado κ-indefinido y medible sobre todo el plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.*

Demostración. Se usará la misma notación y terminología de la sección anterior.

(a) Considérese el semigrupo local de isometrías fuertemente continuo asociado con el núcleo F sobre el espacio de Pontryagin $\mathcal{G}$ de índice κ_o ($\kappa_o \leq \kappa$). Entonces, para $r \in [0, a)$ se tiene que $S(r)\delta_0^{(1)} = \delta_r^{(1)}$ y $S(r)\delta_{-r}^{(2)} = \delta_0^{(2)}$.

Por el Teorema 2.13 existe un espacio de Pontryagin $\widetilde{\mathcal{G}}$, que contiene a $\mathcal{G}$ y tiene el mismo índice κ_o y un grupo unitario fuertemente continuo $(U_r)_{r\in(-\infty,+\infty)}$ que extiende al semigrupo local $(S(r),\mathcal{G}(r))_{r\in[0,a)}$. Por lo tanto $U_r\delta_0^{(1)}=\delta_r^{(1)}$ y $U_{-r}\delta_0^{(2)}=\delta_{-r}^{(2)}$ para $r\in[0,a)$.

Se define $F^{(c)}$ de la siguiente manera

$$F^{(c)}(x,y)=\langle U_x\delta_0^{(\alpha)},U_y\delta_0^{(\beta)}\rangle_{\widetilde{\mathcal{G}}}=\langle U_{x-y}\delta_0^{(\alpha)},\delta_0^{(\beta)}\rangle_{\widetilde{\mathcal{G}}}\quad \text{para } (x,y)\in I_\alpha\times I_\beta,$$

entonces $F^{(c)}$ es un NTG κ_o-indefinido dado por cuatro funciones continuas. Y como

$$\langle\delta_s^{(\alpha)},\delta_t^{(\beta)}\rangle_{\mathcal{G}}=F(s,t)=f_{\alpha\beta}(s-t)$$

en casi todo punto $(s,t)\in I_\alpha\times I_\beta$, $\alpha,\beta=1,2$, se tiene que

$$F(x,y)=F^{(c)}(x,y)$$

en casi todo punto $(x,y)\in I\times I$. Es decir

$$F(x,y)=F^{(c)}(x,y)+F^{(o)}(x,y),$$

donde $F^{(o)}$ es un NTG que se anula en casi todo punto.

Ahora falta demostrar que $F^{(o)}$ es definido positivo, con lo cual se demostraría de paso que $\kappa_0=\kappa$, es decir que $F^{(c)}$ es κ-indefinido.

Nótese que el operador A definido en la Proposición 3.3 se puede extender a un operador continuo de $\mathcal{G}$ en $\mathcal{E}$ y, del teorema de diferenciación de Lebesgue se sigue que

$$A(\delta_x^{(\alpha)})(y)=F^{(c)}(y,x)=F_x^{(c)}(y),$$

para $y\in I$, $x\in I_\alpha$, $\alpha=1,2$. Luego, para $x\in I$, las funciones $F_x^{(c)}$ son elementos del espacio $\mathcal{E}$, y como $F_x^{(o)}=F_x-F_x^{(c)}$, las funciones $F_x^{(o)}$ también lo son.

Supóngase que $F^{(o)}$ no es definido positivo.

Del Lema 3.7 se deduce que es posible encontrar un conjunto infinito $\{u_1,u_2,\dots\}\subset\mathcal{E}$ tal que

$$\langle u_i,u_j\rangle_{\mathcal{E}}=-\delta_{ij},$$

lo que es una contradicción, por cuanto $\mathcal{E}$ es un espacio de índice finito. Con esta contradicción se concluye la demostración de la parte (a).

(b) Del Teorema 1.8 (Teorema 5.1 de [**15**]) se infiere que el núcleo $F^{(c)}$ se puede extender a un NGT κ-indefinido sobre $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ dado por cuatro funciones continuas y del Teorema 4.1 de [**13**] se obtiene que $F^{(o)}$ puede extenderse a un NTG medible y definido positivo sobre $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, con lo que se tiene el resultado anunciado en (b).

$\square$

Capítulo 4

Apéndice

1. Espacios de Pontryagin

En un artículo de P. Dirac de 1942 se utiliza, al parecer, por primera vez un espacio de métrica indefinida. Dos años más tarde L.Pontryagin, sin conocer el trabajo de Dirac expone un tratamiento matemático de esos espacios, inspirado en unas investigaciones de S. Sobolev sobre un problema de mecánica (ver [**9**]).

Desde entonces son muchos los autores que han contribuido al enriquecimiento de esta teoría y a las aplicaciones de los espacios de métrica indefinida en diferentes áreas de las ciencias, particularmente en mecánica cuántica y teoría de la relatividad.

Definición 4.1. Sea $\mathfrak{F}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Un *producto interno* en $\mathfrak{F}$ es una función

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathfrak{F} \times \mathfrak{F} \to \mathbb{C}$$

que satisface

(MI-1) $\langle \alpha x_1 + x_2, y\rangle = \alpha\langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, $x_1, x_2 \in \mathfrak{F}$
(MI-2) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$, para todos $x, y \in \mathfrak{F}$

Al par $(\mathfrak{F}, \langle\ ,\ \rangle)$ se le llama *espacio con producto interno.*

Observación 4.2. si $(\mathfrak{F}, \langle\ ,\ \rangle)$ es un espacio con producto interno, entonces $(\mathfrak{F}, -\langle\ ,\ \rangle)$ también lo es. Este espacio se conoce como *antiespacio de* $\mathfrak{F}$.

En un espacio con producto interno los vectores se clasifican en positivos, negativos o neutros de acuerdo a si $\langle x, x\rangle > 0$, $\langle x, x\rangle < 0$, $\langle x, x\rangle = 0$ respectivamente. Una variedad lineal es positiva, negativa o neutra si todos sus vectores son positivos, negativos o neutros respectivamente.

Si el espacio posee tanto vectores positivos como vectores negativos, se dice que $(\mathfrak{F}, \langle\ ,\ \rangle)$ es un espacio con producto interno indefinido o un espacio de métrica indefinida.

Si un vector de $\mathfrak{F}$ tiene la propiedad de ser ortogonal a todos los vectores del espacio (incluso a él mismo), es decir si $\langle x, y\rangle = 0$ para todo vector $y \in \mathfrak{F}$, se dice que x es un *vector isotrópico* de $\mathfrak{F}$. Si un espacio tiene un vector isotrópico diferente del vector nulo, el espacio es *degenerado.*

Definición 4.3. Sea $\mathfrak{F}$ un espacio con producto interno. Si existen variedades lineales $\mathfrak{F}^o$, $\mathfrak{F}^+$, $\mathfrak{F}^-$ neutra, positiva y negativa respectivamente y tales que

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^o \oplus \mathfrak{F}^+ \oplus \mathfrak{F}^-, \tag{4.1}$$

se dice que $\mathfrak{F}$ es un *espacio descomponible.*

Cada descomposición del tipo (4.1) se denomina *descomposición fundamental* de $\mathfrak{F}$ y en ella $\mathfrak{F}^o$ deviene en la variedad lineal de los vectores isotrópicos de $\mathfrak{F}$.

Definición 4.4. Un *espacio de Krein* es un espacio $\mathfrak{K}$ con producto interno no degenerado, descomponible que admite una descomposición fundamental en la forma

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^+ \oplus \mathfrak{K}^- \tag{4.2}$$

en la que $\mathfrak{K}^+$ y $-\mathfrak{K}^-$ son espacios de Hilbert, todos los vectores de $\mathfrak{K}^+$ son positivos y todos los vectores de $\mathfrak{K}^-$ son negativos.

La dimensión del espacio negativo es la misma independientemente de la descomposición fundamental. A la dimensión de $\mathfrak{K}^-$ se le llama *índice* del espacio $\mathfrak{K}$. Si un espacio de Krein tiene índice finito se llama *espacio de Pontryagin* o espacio Π_κ, donde κ es el índice del espacio.

Nótese que si $|\mathfrak{K}^-|$ es el antiespacio de $\mathfrak{K}^-$, entonces $|\mathfrak{K}| = \mathfrak{K}^+ \oplus |\mathfrak{K}^-|$ es un espacio de Hilbert con producto interno $\langle\ ,\ \rangle_{|\mathfrak{K}|}$ que induce una norma $\|\cdot\|_{|\mathfrak{K}|}$.

Es reconfortante saber que todas las normas asociadas a las diferentes descomposiciones fundamentales de $\mathfrak{K}$ inducen la misma topología, la cual se conoce como la *topología fuerte* del espacio de Krein $\mathfrak{K}$. Salvo que se indique lo contrario, esta es la topología usual en el espacio $\mathfrak{K}$.

En un espacio de Pontryagin es posible dar una fórmula explícita para la norma asociada a una determinada descomposición fundamental:

Sea

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{K}^+ \tag{4.3}$$

una descomposición fundamental del espacio de Pontryagin $\mathfrak{K}$ con espacio negativo $\mathfrak{N}$ de dimensión κ y sea $\{e_1, \ldots, e_\kappa\}$ una base ortonormal en $\mathfrak{N}$. Entonces

$$\|x\|_{|\mathfrak{K}|} = \langle x, x\rangle + 2\sum_{i=1}^{\kappa} |\langle x, e_i\rangle|^2 \tag{4.4}$$

Si un espacio $\mathfrak{K}$ con producto interno no degenerado, descomponible que admite una descomposición fundamental (4.3) donde $\mathfrak{N}$ es un espacio negativo de dimensión finita κ, no es completo se dice que $\mathfrak{K}$ es un espacio *pre-Pontryagin* o *pre*-Π_κ.

Así como todo espacio pre-Hilbert es completable, también todo espacio pre-Pontryagin se puede completar hasta un espacio de Pontryagin.

Otra hecho agradable es que si un espacio con producto interno es descomponible y

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^o \oplus \mathfrak{F}^+ \oplus \mathfrak{F}^-$$

es una de sus descomposiciones fundamentales, donde $\mathfrak{F}^-$ tiene dimensión finita κ, entonces el espacio cociente con respecto a los vectores isotrópicos $\mathfrak{F}/\mathfrak{F}^o$ es un espacio pre-Π_κ. Este hecho permite utilizar la teoría de los espacios pre-Pontryagin en espacios degenerados.

El siguiente lema es de particular importancia por sus aplicaciones. Permite establecer conexiones entre la teoría de los espacios de Pontryagin y la teoría de los núcleos indefinidos. Su demostración detallada puede encontrarse en [**1**].

Lema 4.5 (Matrices de Gramm)**.** *Sean $f_1, \ldots, f_n$ vectores en un espacio $\mathcal{G}$ con un producto interior $\langle\cdot,\cdot\rangle$ hermítico. Entonces el número de autovalores negativos de la matriz de Gramm $G = \big(\langle f_i, f_j\rangle\big)_{i,j=1}^n$ es igual a la dimensión máxima posible de los subespacios $\mathcal{N}$ del span lineal de $f_1, \ldots, f_n$ que son antiespacios de espacios de Hilbert con el producto interno de $\mathcal{G}$.*

Para más información sobre los espacios con métrica indefinida se recomiendan las referencias [**9**], [**4**], [**27**] y [**3**].

2. Algunos teoremas del Análisis.

Se enuncian en esta sección importantes teoremas de Análisis que son utilizados en el trabajo.

Teorema 4.6 (Teorema de Diferenciación de Lebesgue; ver [**24**], página 216, Corolario 7)**.**

Si f es una función integrable de Lebesgue definida en un conjunto abierto Gde $\mathbb{R}^n$ entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \int_{t_1}^{t_1+h} \cdots \int_{t_n}^{t_n+h} f(s_1,\ldots,s_n)ds_1\cdots ds_n = f(t_1,\ldots,t_n)$$

en casi todo punto del abierto G.

Teorema 4.7 (Principio de acotación uniforme)**.**

Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y F una familia de operadores lineales y acotados de X en Y. Si

$$\sup_{T\in F} \|T(x)\|_Y < \infty, \ \textit{para cada } x \in X,$$

entonces

$$\sup_{T\in F} \|T\| < \infty.$$

Definición 4.8. (Convergencia débil)

Sea $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$. Se dice que $\{x_n\}_{n\geq 1}$ *converge debilmente* a $x \in X$, o que x es el *límite débil* de $\{x_n\}_{n\geq 1}$ si

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x),$$

para todo f del espacio dual de X.

Teorema 4.9 (Acotación uniforme y convergencia débil)**.**

Si $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de puntos del espacio lineal normado X que satisface

(i) $\{\|x_n\|\}$ *es uniformemente acotada.*

(ii) $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ *para todo $f \in Y$ donde Y es un conjunto denso en el dual de X,*

entonces $\{x_n\}_{n\geq 1}$ converge débilmente a x.

Para los ejemplos de la próxima sección se utilizarán los siguientes conceptos y teoremas:

Definición 4.10. (Base de Hamel) Sea $\mathfrak{V}$ un espacio vectorial. El conjunto $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{V}$ es una *base de Hamel* de $\mathfrak{V}$, si $\mathfrak{H}$ es linealmente independiente y genera a $\mathfrak{V}$.

Teorema 4.11.

Todo espacio vectorial posee una base de Hamel.

Todo subconjunto linealmente independiente de un espacio vectorial está contenido en una base de Hamel.

El siguiente teorema se utilizará en la construcción de una función κ-indefinida que no es localmente acotada.

Teorema 4.12 (ver [**28**])**.**

Supongamos que $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es una función aditiva con* $c = A(1) > 0$. *Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) A *es continua en un punto* x_0.
(ii) A *es monótona creciente.*
(iii) A *es no-negativa en los puntos* x *no-negativos.*
(iv) A *es acotada superiormente en un intervalo finito.*
(v) A *es acotada inferiormente en un intervalo finito.*
(vi) A *es acotada superior(inferior)mente en un conjunto acotado de medida de Lebesque positiva.*
(vii) A *es acotada en un conjunto acotado de medida de Lebesgue positiva.*
(viii) A *es acotada en un intervalo finito.*
(ix) $A(x) = cx$.
(x) A *es localmente integrable Lebesgue.*
(xi) A *es diferenciable.*
(xii) A *es medible Lebesgue.*

Observación 4.13. El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ se puede considerar como un espacio vectorial sobre el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ y por lo tanto tiene una base de Hamel $\mathfrak{H}$. Como todo subconjunto linealmente independiente está contenido en una base de Hamel, se tiene que existe una base de Hamel $\mathfrak{H}$ de $\mathbb{R}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ tal que $1 \in \mathfrak{H}$.

A partir de este hecho se puede demostrar la existencia de una función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisface:

(1) φ es aditiva, es decir $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.
(2) $\varphi(1) = 1$.
(3) φ no es lineal, es decir no es de la forma $\varphi(x) = cx$ para alguna constante c.

Por el Teorema 4.12 se tiene que esta función no es medible Lebesgue ni localmente acotada.

3. Ejemplos

A continuación se dan algunos ejemplos de funciones κ-indefinidas acotadas y de una función κ-indefinida que no es localmente acotada.

(I) Son ejemplos de funciones κ-indefinidas acotadas (ver [**39**]).

(I-1) $f(x) = -e^{ix} + e^{2ix}$ es 1-indefinida.

(I-2) $f(x) = \cos x - e^{2ix} - e^{3ix} - e^{4ix}$ es una función 3-indefinida.

(II) Ejemplo de una función κ-indefinida que no es localmente acotada.

El siguiente ejemplo está inspirado en comentarios dados en [**38**].

Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como en la Observación 4.13.

Se define $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ por

$$\Phi(x) = i\varphi(x).$$

Se va a demostrar que la función Φ es 1-indefinida.

Como $\varphi(-x) = -\varphi(x)$, se tiene que Φ es hermítica.

Sea $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ el núcleo de Toeplitz definido por

$$F(x, y) = \Phi(x - y).$$

Para demostrar que Φ es 1-indefinida basta mostrar que el espacio con producto interno Π, asociado al núcleo F es un espacio de Pontryagin de índice 1.

Un elemento típico u de este espacio Π tiene la forma

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{r=1}^{m} c_r F(x, x_r) = \sum_{r=1}^{m} c_r \Phi(x - x_r) \\ &= \sum_{r=1}^{m} c_r i\varphi(x - x_r) = \sum_{r=1}^{m} c_r i\{\varphi(x) - \varphi(x_r)\} \\ &= \left(\sum_{r=1}^{m} c_r\right) \cdot i\varphi(x) + \left(\sum_{r=1}^{m} -ic_r\varphi(x_r)\right) \cdot 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto el espacio Π está generado por las funciones Φ y 1, y en consecuencia su dimensión es menor o igual que dos.

Como

$$\Phi(x) = F(x,0) = F_0(x)$$

y

$$1 = -i(\Phi(x+1) - \Phi(x)) = -i(F_{-1}(x) - F_0(x)),$$

las funciones Φ y 1 pertenecen al espacio Π. Por lo tanto la dimensión de Π es 2.

Las funciones Φ y 1 son vectores neutros, ya que

$$\langle F_0(\cdot), F_0(\cdot)\rangle_\Pi = F(0,0) = \Phi(0) = 0,$$

$$\begin{aligned}
\langle F_{-1}(\cdot) - F_0(\cdot), F_{-1}(\cdot) - F_0(\cdot)\rangle_\Pi &= F_{-1}(-1) - F_0(-1) - (F_{-1}(0) - F_0(0)) \\
&= F(-1,-1) - F(-1,0) - F(0,-1) - F(0,0) \\
&= \Phi(0) - \Phi(-1) - \Phi(1) - \Phi(0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Además

$$\langle \Phi, 1\rangle_\Pi = \langle F_0, 1\rangle_\Pi = 1.$$

Por lo tanto

$$\langle \Phi + 1, \Phi + 1\rangle_\Pi = 2\mathrm{Re}(\ \langle \Phi, 1\rangle_\Pi\ ) = 2$$

y

$$\langle \Phi - 1, \Phi - 1\rangle_\Pi = -2\mathrm{Re}(\ \langle \Phi, 1\rangle_\Pi\ ) = -2.$$

Esto último muestra que la función $\Phi + 1$ es un vector positivo y que la función $\Phi - 1$ es un vector negativo, por lo tanto Π es un espacio de índice 1.

Bibliografía

[1] D. Alpay, A. Dijksma, J. Rovnyak and H. de Snoo, Schur Functions, Operator Colligations, and Reproducing Kernel Pontryagin Spaces, *Operator Theory: Adv. Appl.* **96** (1997). Citado en la(s) página(s): 24, 37

[2] D. Alpay, A. Dijksma, J. Rovnyak and H. de Snoo, Reproducing Kernel Pontryagin Spaces, *Holomorphic spaces, MSRI Publications* **33** (1998). Citado en la(s) página(s): 21

[3] T.Ya. Azizov and I.S. Iokhvidov, *Foundations of the Theory of Linear Operators in Spaces with Indefinite Metric*, Nauka, Moscow, 1986; *Linear Operators in Spaces with Indefinite Metric,* Wiley, New York, 1989 [English transl]. Citado en la(s) página(s): 37

[4] T. Andô , *Linear Operators on Kreĭn Spaces*, Hokkaido University, Research Institute of Applied Electricity, Division of Applied Mathematics, Sapporo, 1979. Citado en la(s) página(s): 37

[5] N. Aronszan, Theory of reproducing kernels, *Trans. Amer. Math. Soc.* **68** (1950), 337-404. Citado en la(s) página(s): 4, 13, 24

[6] R. Arocena and M. Cotlar, Generalized Toeplitz kernels and Adamjam - Arov - Kreĭn moment problems. *Operator Theory: Adv. Appl.* **4** (1982), 37-55. Citado en la(s) página(s): 4

[7] R. Arocena and M. Cotlar, Continuous generalized Toeplitz kernels in $\mathbb{R}$. *Portugaliae Math.* **39** (1980), 419-434. Citado en la(s) página(s): 4

[8] S. Bochner Monotone Funktionen Stieltjessche Integrale und harmonische Analyse *Math. Annalen.* **108** (1997), 378-410. Citado en la(s) página(s): 5

[9] J. Bognár, *Indefinite inner product spaces*, Springer Verlag, 1974. Citado en la(s) página(s): 35, 37

[10] R. Bruzual Local semigroups of contractions and some applications to Fourier representation theorems *Int. Eq. and Op. Theory* **10** (1987), 780-801. Citado en la(s) página(s): 19, 20

[11] R. Bruzual Representation of measurable positive definite generalized Toeplitz kernels in $\mathbb{R}$. *Int. Eq. and Op. Theory* **29** No.3 (1997), 251-260. Citado en la(s) página(s): 1, 8

[12] R. Bruzual and M. Domínguez, On measurable operator valued indefinite functions with a finite number of negative squares. *J. Operator Theory,* **50** (2003) 297-310. Citado en la(s) página(s): 1

[13] R. Bruzual and M. Domínguez, Dilation of generalized Toeplitz kernels on ordered groups. *J. Funct. Anal.* **238** No. 2 (2006), 405-426. Citado en la(s) página(s): 34

[14] R. Bruzual, M. Domínguez and B. Lora, Representation of generalized Toeplitz kernels with a finite number of negative squares. *Acta Sci. Math.*, (aceptado en el 2011), *Por aparecer.* Citado en la(s) página(s): 2, 8, 24

[15] R. Bruzual and S.A.M. Marcantognini, Local semigroups of isometries in Π_κ-spaces and related continuation problems for κ-indefinite Toeplitz kernels, *Int. Eq. and Op. Theory*, **15** (1992), 527-550. Citado en la(s) página(s): 2, 8, 23, 34

[16] R. Bruzual and S.A.M. Marcantognini, The Krein-Langer problem for Hilbert space operator valued functions on the band, *Int. Eq. and Op. Theory* **34** (1999), 527-550. Citado en la(s) página(s): 20

[17] M. Cotlar, R. Bruzual, P. Alegría, M. Domínguez, J. Giménez, S. Marcantognini, Extensión y representación de formas invariantes en la teoría de interpolación, predicción y dilatación. Libro editado para la Tercera Escuela Venezolana de Matemáticas, Mérida, Venezuela 1990. Citado en la(s) página(s): 23

[18] M. Cotlar C. and Sadosky, On the Helson-Szegö theorem and a related class of modified Toeplitz kernels. *Proc. Symp. Pure Math. AMS* **35** 1 (1979), 383-407. Citado en la(s) página(s): 4

[19] M. Cotlar C. and Sadosky, Prolongements des formes de Hankel generalisess en formes de Toeplitz. *C. R. Acad. Sci. Paris* **305**, Serie I (1987), 167-170 Citado en la(s) página(s): 4

[20] M. Cotlar C. and Sadosky, Two-parameter lifting theorems and double Hilbert transforms in commutative and non commutative settings. *J. Mathematical Analysis and Applications* **150** (1990), 439-480. Citado en la(s) página(s): 4

[21] M.M. Crum, On positive definite functions, *Proc. London Math. Soc.* **6** (1956), 548-560. Citado en la(s) página(s): 1, 7

[22] A. Devinatz, On measurable positive definite operator functions, *Journal London Math. Soc.* **35** (1960), 417-424. Citado en la(s) página(s): 1

[23] E.B. Davies, *One-parameter semigroups* Academic press, London-New York-San Francisco, 1980. Citado en la(s) página(s): 17

[24] N. Dunford and J. Schwartz, *Linear Operators. Part I.* Interscience 1957. Citado en la(s) página(s): 38

[25] M. Grossman and H. Langer, Über indexerhaltende Erweiterungen eines hermiteschen operators in Pontrjaginraum, *Math. Nachrichten* **64** (1974) 289-317. Citado en la(s) página(s): 19

[26] E. Hewitt and K. Ross, *Abstract harmonic analysis. Vol.2.*, Springer-Verlag, Berlin, 1974. Citado en la(s) página(s): 1

[27] I.S. Iokhvidov, M.G. Kreĭn and H. Langer, *Introduction to the Spectral Theory of Operators in Spaces with an Indefinite Metric*, Akademie-Verlag, Berlin, 1982. Citado en la(s) página(s): 37

[28] Pl. Kannappan, *Functional Equations and Inequalities with Applications.*, Springer, Dordrecht-Heidelberg-London-New York, 2008. Citado en la(s) página(s): 39

[29] A. Klein and J. Landau, Construction of a unique selfadjoint generator of a symmetric local semigroup. *Journal of Functional Analysis* **44** (1981), 121-137. Citado en la(s) página(s): 19

[30] M. G. Kreĭn, On the representation of functions by Fourier Stieltjes integrals. (Russian). *Učenije Zapiski Kuibishevskogo Gosud. Pedag. i Učitelskogo Inst.* **7** (1943), 123-148. Citado en la(s) página(s): 6

[31] M.G. Kreĭn, On measurable Hermitian-positive functions. *Mat. Zametki* **23** (1978), 79-89, (Russian), *English translation: Math. Notes* **23** (1978), 45- 50. Citado en la(s) página(s): 6, 7

[32] M. G. Kreĭn and H. Langer, Continuous analogues of orthogonal polynomials with respect to an indefinite weight on the unit circle and extensions problems associated with them. *Soviet Math. Dokl.* **23** (1981), 553-557. Citado en la(s) página(s): 2, 6

[33] M.G. Kreĭn and H. Langer, On some continuation problems which are closely related to the theory of operators in spaces Π_κ.IV. Continuous analogues of orthogonal polynomials on the unit circle with respect to an indefinite weight and related continuation problems for some classes of function. *J. Operator Theory* **13** (1985), 299-417. Citado en la(s) página(s): 6

[34] H. Langer, On measurable hermitian indefinite functions with a finite number of negative squares, *Acta Sci. Math.* **45** (1983), 281-292. Citado en la(s) página(s): 1, 6, 7, 24, 31

[35] A.E. Nussbaum, Multiparameter local semigroups of hermitian operators. *Journal of Functional Analysis* **48** No.2 (1982), 213-223. Citado en la(s) página(s): 19

[36] F. Riesz, Uber satze vonStone und Bochner, *Acta Univ. Szeged* **6** (1933), 184-198. Citado en la(s) página(s): 1, 5, 7

[37] Z. Sasvári, On measurable functions with a finite number of negative squares, *Acta Sci. Math.* **50** (1986), 359-363. Citado en la(s) página(s): 1, 6, 8, 12

[38] Z. Sasvári. Characterization of locally bounded functions with a finite number of negative squares. *Acta Sci. Math.* **53**, No. 3-4 (1989), 319-327. Citado en la(s) página(s): 40

[39] Z. Sasvári, *Positive definite and definitizable functions,* Akademie Verlag, 1994. Citado en la(s) página(s): 1, 40