UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE HUMANIDADES Y EDUCACIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE EDUCACIÓN

El Número e en el Cálculo Elemental

Autora: Marcia C. García G.

Tutor: Dr. Ramón J. Bruzual A.

Caracas, Venezuela

Octubre 2005

El Número e en el Cálculo Elemental

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por la **Br. Marcia C. García G.** para optar al título de Licenciada en Educación Mención Matemática.

Tutor: Dr. Ramón J. Bruzual A.

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE HUMANIDADES Y EDUCACIÓN

Caracas, Venezuela
Octubre 2005

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado "**El Número *e* en el Cálculo Elemental**", presentado por la **Br. Marcia C. García G.**, titular de la Cédula de Identidad **14.213.257**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciada en Educación Mención Matemática**.

Prof. Ramón Bruzual
Tutor

Prof. Adelfa Hernández
Jurado

Prof. Yolanda Serres
Jurado

Dedico este trabajo

A mi tesoro más preciado,
mi familia.

A mi abuelita Calixta (Fortu) (mami),
donde quiera que estés.

"Tocar lo que siempre pensamos intangible,
es sólo un piso para alcanzar lo que queremos lograr."

Agradecimiento.

En primer lugar, agradezco a mi tesoro más preciado que son mis padres Evilia y Naih, por haberme traído al mundo y ser parte de un logro más en mi existencia, y a mis queridos hermanos Mariam y Rolando.

A mis tíos Mary y Celestino (Rey), así como también a mi primo Ruicito, por acompañarme en esta travesía y haberme brindado el apoyo que tanto necesité.

A mi tío Juan Carlos por apoyarme a lo largo de toda mi carrera.

Mis más sinceros agradecimientos a mi tutor el profesor Ramón Bruzual, por su paciencia y dedicación en la elaboración de este trabajo.

A la profesora Adelfa Hernández, por su acertada asesoría, además de su disposición tan gentil a ayudarme.

A mis queridos amigos, Celiangel Coello (Celi), Marisa Cruz y Hugo Villarroel, la verdad no se que hubiese hecho sin ustedes en mis momentos difíciles, mil gracias por su amistad, los llevo en mi corazón.

A los estudiantes que participaron en la intervención didáctica.

Al Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico de la Universidad Central de Venezuela por el apoyo financiero ofrecido.

CONTENIDO

Introducción

El número e es de gran importancia en Matemática, por las múltiples aplicaciones que tiene dentro de ésta. El comienzo del estudio sistemático de sus propiedades está asociado al nombre de Leonhard Euler (1707-1783), quien es considerado uno de los matemáticos más prolíficos de todos los tiempos.

El número e es la base de los logaritmos naturales y aparece en la función exponencial. Esta es la única función cuya derivada es igual a si misma y por lo tanto es un elemento básico en ecuaciones que describen crecimiento, diversos fenómenos naturales y ciertos tipos de cambios. La variedad de situaciones en las que está presente la función exponencial es sumamente amplia, aparece constantemente en el cálculo, en las probabilidades y en las ciencias naturales. También se encuentra en finanzas, ya que se usa en las fórmulas de interés compuesto.

Por lo dicho anteriormente, el estudio de la función exponencial y por lo tanto del número e, está incluido en los planes de estudios de las carreras científicas, de las ingenierías, de muchas carreras técnicas y en todas las carreras que tienen que ver con finanzas.

A diferencia de otro número muy importante π (pi), definir el número e no es sencillo. Éste admite tres representaciones básicas, puede ser representado como el límite de una sucesión, una suma infinita y en términos de área.

Más técnicamente:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

$$e \text{ es el único número tal que } \int_1^e \frac{dt}{t} = 1.$$

Además el número e es un número irracional, por lo que su desarrollo decimal no se repite y tiene un valor aproximado de 2,7182818285.

El comprender la definición de e y el por qué de sus diferentes representaciones es fundamental para entender la función exponencial y cada una de sus propiedades.

Es usual que el estudio del número e y de las propiedades de las funciones exponencial y logarítmica se encuentre ubicado en los primeros semestres de la carrera. Para el éxito en asignaturas posteriores es de gran importancia una buena comprensión de esta parte de la materia.

Se observa que a la gran mayoría de los estudiantes no le quedan muy claros los conceptos asociados con el número e. En los cursos elementales, por falta de tiempo y debido a que requiere del desarrollo de muchas herramientas, el estudiante debe limitarse a creer muchas de las cosas que está estudiando, sin entender, ni siquiera de manera intuitiva, los problemas que se van generando. Esto hace que la base que se adquiere no sea sólida y que los estudiantes encuentren dificultades a medida que avanzan en sus estudios.

La situación que se acaba de describir, ha generado muchas propuestas de carácter didáctico alrededor de la enseñanza del número e y de la función exponencial.

Una propuesta muy interesante es la dada por T. Goodman y que apareció publicada en la revista "American Mathematical Monthly" ([**10**]). Esta es una publicación de muy alto reconocimiento internacional, que es editada por la "Mathematical Association of America" (MAA). Publica tanto artículos de investigación como de divulgación y siempre tiene una sección, originalmente llamada "classroom notes" y ahora "notes", dedicada a la divulgación y al intercambio de ideas acerca de la enseñanza de la matemática.

En este artículo se propone una manera de explicar la relación que existe entre las distintas representaciones del número e de una manera intuitiva y clara, explotando situaciones geométricas y la percepción.

Este trabajo toma como base este artículo y lo que se ha observado alrededor de la enseñanza del número e y la función exponencial.

En forma muy específica, la propuesta permitirá explicar de una manera sencilla, geométrica e intuitiva, utilizando solamente técnicas de calculo elemental, porque las siguientes propiedades del número e son equivalentes

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

$$\int_1^e \frac{dt}{t} = 1.$$

Se propone hacer un diagnóstico de la situación en que se encuentra la enseñanza y la comprensión por parte del estudiante de lo que es el número e y la función exponencial en la Facultad de Ciencias. Partiendo del artículo mencionado, se piensa elaborar una propuesta didáctica que se adapte a los cursos básicos de Matemática de la Facultad de Ciencias.

CAPíTULO 1

El Problema.

En este capítulo se desarrolla el planteamiento del problema, luego se muestra la relevancia del mismo en el campo de la Educación Matemática y su formulación a los fines de la justificación y delimitación de la investigación. Por último se formulan los objetivos que motivan la búsqueda.

Planteamiento del problema

Son muchos los trabajos que atribuyen las deficiencias a una inadecuada enseñanza del cálculo, la cual es de carácter algorítmico, que se ocupa exclusivamente del dominio de reglas del cálculo, sin atender a preguntas del tipo ¿por qué?, ¿que significa? (Artigue, M. y Viennot, L. (1987))

En los últimos años, se han venido haciendo múltiples críticas en cuanto a la forma como se ha venido conduciendo el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, tanto a nivel básico, como a nivel universitario, tales críticas tratan sobre el bajo nivel académico de los docentes en ejercicio, la poca motivación sobre los logros y el hecho educativo por parte de los profesores y escasa familiarización de los mismos docentes con la literatura reciente sobre las nuevas tendencias de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática (Mora, D. (1998)).

Todo esto ha traído como consecuencia la necesidad de explorar diferentes alternativas que ayuden a mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje, como el uso de la tecnología para la enseñanza de la matemática, tomar en cuenta la realidad sociocultural de los estudiantes y profesores (Bishop, A. (1988), D'Ambrosio, U. (1985)), buscar aplicaciones de la matemática que sirvan de motivación para los estudiantes así como también, formas distintas de representación de los conceptos matemáticos, que se adapten a la realidad del estudiante de hoy en día.

Partiendo de la observación informal de los programas de cálculo básico de la Licenciatura en Matemática, se puede notar que los temas relacionados con el número e y la función exponencial están dentro de otros tópicos, es decir no aparece un tema dedicado solamente a la función exponencial, la logarítmica y el número e, lo cual hace que se les asigne poco tiempo y por lo tanto no se logra un aprendizaje significativo por parte de los estudiantes.

El estudio en profundidad de la función exponencial, la función logarítmica y del número e requieren el desarrollo de una gran cantidad de herramientas y de mucho conocimiento previo. Por diversas exigencias de los distintos planes de estudio, en los contenidos programáticos de los cursos de matemática básica, estos temas se planifican y se propone su estudio en lapsos de tiempo muy breves, lo cual trae como consecuencia una comprensión pobre del tema y persistencia de confusiones posteriores.

El motivo de plantear una alternativa para la enseñanza y comprensión del número e, específicamente en la Licenciatura en Matemática de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, radica principalmente en que se ha sido testigo de las deficiencias que presentan los estudiantes que llegan a los cursos más avanzados de la Licenciatura. Estas deficiencias se deben a que en los cursos básicos de Matemática, no les han quedado claros los conceptos relacionados con el tema, esto se debe en gran parte a lo riguroso que es el planteamiento de las definiciones y el poco tiempo con que se cuenta para cubrirlas.

El problema específico a abordar es “Dada la problemática que existe con la enseñanza del número e en el cálculo elemental, será posible elaborar y aplicar una propuesta didáctica que se adapte a las condiciones de aprendizaje de los estudiantes de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela”.

Objetivo general

Formular una propuesta didáctica para el aprendizaje del número e adaptada a las condiciones de la Facultad de Ciencias que permita mejorar la enseñanza del número e y la función exponencial.

Objetivos específicos

(1) Diagnosticar la situación en que se encuentra la enseñanza y la comprensión por parte de los estudiantes de la definición y las propiedades básicas del número e, la función exponencial y la función logarítmica en la Facultad de Ciencias.
(2) Determinar los requerimientos didácticos para la intervención.
(3) Diseño de la intervención didáctica.
(4) Validar la intervención realizada.

Justificación

En el campo de la enseñanza y aprendizaje de los tópicos matemáticos son muchas las investigaciones que se han hecho (Goodman, T.N.T. (1986)), en las cuales se han llegado a conclusiones que favorecen la idea de saldar las dificultades que presentan los educandos en cuanto a aprender los conceptos matemáticos. Estas dificultades deben ser discutidas y ante todo analizadas a partir de experiencias didácticas y sobre todo prácticas.

En el presente trabajo se ha querido desarrollar, partiendo de un resultado de Goodman, T.N.T. (1986), una propuesta muy innovadora para la enseñanza del número e, la cual puede constituirse en una alternativa de solución dentro de la problemática que presentan los estudiantes en la comprensión del número e y la función exponencial.

El comprender la definición de e y el por qué de sus diferentes representaciones es fundamental para entender la función exponencial y cada una de sus propiedades.

Para el éxito en asignaturas posteriores es de gran importancia un buen entendimiento de esta parte de la materia. Es claro que la verdadera comprensión del número e y la función exponencial no se logra completamente, ya sea por falta de tiempo para cubrir los contenidos, falta de interés en los alumnos o simplemente porque no se le da al tema la importancia que le corresponde. Por esta y otras razones surge la inquietud de abordar el problema con el cuidado y dedicación que merece.

Una revisión bibliográfica en revistas especializadas, incluyendo principalmente al American Mathematical Monthly mostró la pertinencia del tema, ya que Goodman, T.N.T. (1986) planteó inquietudes alrededor del tema.

Delimitación del problema

La propuesta se utilizó sólo en los contenidos referentes al número e y la función exponencial de los cursos de cálculo elemental.

Por factores económicos y de tiempo sólo se tomó un grupo de estudiantes del cuarto semestre, específicamente de la materia de Análisis I de la Licenciatura en Matemática de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela.

Hubo deficiencias por parte de los estudiantes en los contenidos que forman parte de los prerrequisitos para entender el tema relacionado con el número e y la función exponencial.

La intervención didáctica en el aula se hizo a través de una sesión de clase, con una duración de 90 minutos. Esto impidió en cierta forma la profundización y sistematización de la experiencia.

La propuesta está dirigida a estudiantes universitarios, sin embargo se le puede aplicar a estudiantes de Educación Media y Diversificada.

Desde el punto de vista didáctico la propuesta es factible, ya que se sugiere una manera más sencilla se enseñar el número e usando sólo las herramientas básicas del cálculo elemental, por lo que el manejo de conceptos matemáticos es más accesible a los estudiantes.

El docente organiza su enseñanza basada en un enfoque constructivista, donde usa los fundamentos lógicos para estructurar las situaciones de la vida diaria. Esto es, que el mismo docente sabe cuales son los pasos que debe seguir para lograr en el estudiante un aprendizaje significativo y comprensión de los temas que va a impartir.

CAPíTULO 2

Marco Teórico.

En este capítulo se presentan los lineamientos teóricos en los que se apoya la investigación que se reporta en este informe. En la primera parte se desarrolla de manera breve el origen de la palabra “Cálculo”. En segundo lugar se presentan algunas investigaciones psicológicas del aprendizaje de la matemática que deben ser consideradas, ya que las mismas influyen considerablemente en el proceso de enseñanza y aprendizaje, independientemente de las metodologías didácticas puestas en práctica. Finalmente, haciendo énfasis en la formalidad que requieren, se estudian las bases matemáticas que sustentan la investigación.

Antecedentes de la Investigación.

La palabra “cálculo” proviene del latín calculus, que significa piedra y los hombres muy primitivos contaban con piedras. Precisamente desde que el hombre ve la necesidad de contar, comienza la historia del cálculo, o de las matemáticas.

La creación del cálculo se atribuye a veces a dos hombres, Newton y Leibnitz. En realidad, es el producto de una larga evolución que ni iniciaron ni dieron fin, pero en la cual desempeñaron un papel decisivo (Courant, R. y Robins, H. (1967)).

La invención del cálculo supuso un importante salto cualitativo en el tipo y complejidad de problemas que pudieron abordarse desde entonces. No es extraño pues que el cálculo haya sido valorado como “el instrumento teórico más poderoso que haya sido construido jamás por los seres humanos a lo largo de su historia” (Rossi, P. (1997)).

Psicología del Aprendizaje de la Matemática.

Los conocimientos que tiene el individuo acerca de si mismo y del mundo, se almacenan de acuerdo a determinados principios que permiten la ordenación, la incorporación de nuevos conocimientos, la recuperación de anteriores almacenados y la manipulación de los mismos para generar nuevas ideas. En la medida que una persona tenga clara la estructura conceptual de lo que va a aprender, podrá asimilar los nuevos conocimientos que va adquiriendo, ya que esos nuevos conocimientos tendrán significado dentro de una estructura significativa mayor; la persona también asimilará la información mas rápidamente por el hecho de que el número de asociaciones que puede especificar con la información adquirida antes será mayor. (Ausubel D. (1968)).

En el aprendizaje y comprensión de los contenidos matemáticos, Skemp, R. (1980), señala que el problema principal radica en su gran abstracción y generalidad, lograda por generaciones sucesivas de individuos, cada uno de los cuales ha abstraído o generalizado los conceptos anteriores. El sujeto que aprende hoy en día no tiene que procesar datos brutos, sino sistemas de procesos de datos matemáticos existentes. Las matemáticas, no pueden aprenderse exclusivamente en un entorno cotidiano sino, muy a menudo y en ciertos niveles, sólo de manera indirecta desde otro entorno matemático.

En su afán por alcanzar los orígenes y los mecanismos de desarrollo de la inteligencia, las investigaciones psicogenéticas han logrado caracterizar verdaderos perfiles de comportamiento. Piaget se propuso formalizar estos perfiles apoyándose en nociones lógicas y matemáticas.

Se podría hablar de tres “momentos” importantes en cuanto al desarrollo intelectual se refiere, ya que se aprecian notables cambios en cuanto al comportamiento del sujeto, cuya verdadera significación se trata de establecer. El primer cambio ocurre cuando por efectos del desarrollo de la función semiótica, los esquemas propios de las acciones senso motoras característicos de los primeros años de vida, son redimencionados y reelaborados en el plano representativo, contribuyendo a terminar de consumar la diferencia entre el yo y el entorno.

Estos llamados “momentos” son instancias de un proceso continuo de integración en cada estructura de nuevos procesos, de nuevas conquistas y de reafirmación y perfeccionamiento de las anteriores, de suspensión de insuficiencias y limitaciones de forma tal que cada estructura se prefigura y prepara en la anterior.

Todos estos cambios formarán la base para diferenciar, en el curso del desarrollo, cuatro etapas secuencialmente ordenadas en el tiempo, así que en todo individuo normal, se repite el mismo orden de precedencia de estas etapas, aunque las edades en que cada individuo accede y permanece en determinado nivel de desarrollo, pueden experimentar variaciones considerables en virtud de la diversidad de factores que lo condicionan (Vivenes, J. (1993)).

Por otro lado, los nuevos conceptos no pueden comunicarse mediante una definición, sino preparando al sujeto para enfrentarse a una colección adecuada de ejemplos, de esta manera logrará la mayor y mejor retención del concepto que va a asimilar.

El estudio de las estructuras mismas es una parte importante de la matemática y el estudio de las maneras en que se construyen y funcionan, se encuentra en el verdadero núcleo de la psicología del aprendizaje de la matemática. Comprender algo significa asimilarlo dentro de un esquema adecuado: Un esquema es una estructura mental, es el instrumento principal de adaptabilidad. Esto explica la naturaleza subjetiva de la comprensión, y también aclara que esta no es corrientemente un "estado todo o nada". Antes de que pueda comprenderse una nueva experiencia, asimilarla a un esquema, el esquema mismo ha de acomodarse (Skemp, 1980).

El aprendizaje significativo.

Según Ausubel, el aprendizaje significativo comprende la adquisición de nuevos significados y, a la inversa, éstos son producto del aprendizaje significativo. Esto es, el surgimiento de nuevos significados en el estudiante refleja la consumación de un proceso de aprendizaje significativo.

La esencia del proceso del aprendizaje significativo reside en que ideas expresadas simbólicamente son relacionadas de modo no arbitrario y sustancial con lo que el estudiante ya sabe. El aprendizaje significativo presupone tanto que el estudiante manifiesta una actitud de aprendizaje significativo, es decir, una disposición para relacionar sustancial y no arbitrariamente el nuevo material con su estructura cognoscitiva, como que el material que aprende es potencialmente significativo para él, es decir, relacionable con su estructura de conocimiento sobre una base no arbitraria y no al pie de la letra (Ausubel, D. 1961). Así, si la intención del estudiante consiste en memorizar arbitraria y literalmente, tanto el proceso de aprendizaje como los resultados del mismo serán mecánicos y carentes de significado. De igual manera, a la inversa, sin importar lo significativa que sea la actitud del estudiante, ni el proceso ni el resultado del aprendizaje serán posiblemente significativos si la tarea de aprendizaje no lo es potencialmente, y si tampoco es relacionable, intencionada y sustancialmente, con su estructura cognoscitiva.

Esto lo ilustra la memorización mecánica de definiciones de conceptos o proposiciones sin el reconocimiento del significado de las palabras de la definición.

Una razón por la cual se desarrolla en los estudiantes una propensión hacia el aprendizaje repetitivo en relación con la materia potencialmente significativa, es que éstos aprenden por triste experiencia, que las respuestas sustancialmente correctas que carecen de correspondencia literal con lo que les han enseñado no son válidas para algunos profesores. Otra razón consiste en que por un nivel elevado de ansiedad, o por experiencias de fracasos crónicos en un tema dado, carecen de confianza en sus capacidades para aprender significativamente, de ahí que no encuentren otra alternativa que el pánico. Esto último le es muy familiar a los profesores de matemáticas por el difundido predomino del impacto del número o de la ansiedad del número. Los profesores suelen olvidarse de que los alumnos pueden inclinarse marcadamente al uso de términos abstractos que den la apariencia de propiedad cuando tienen que hacerlo aunque la comprensión de los conceptos fundamentales de hecho no existan.

Tipos de aprendizaje significativo.

Existen varios tipos de aprendizaje significativo, se hará referencia sólo a los siguientes tipos: el aprendizaje por recepción y el aprendizaje de conceptos.

El aprendizaje por recepción, se puede decir que es importante en educación porque es el mecanismo humano por excelencia que se utiliza para adquirir y almacenar la vasta cantidad de ideas e información, representada por cualquier campo del conocimiento. Este tipo de aprendizaje es un proceso activo porque requiere del tipo de análisis cognoscitivo necesario para averiguar cuáles aspectos de la estructura cognoscitiva existente son más pertinentes al nuevo material potencialmente significativo, también requiere de cierto grado de reconciliación con las ideas existentes en la estructura cognoscitiva, esto no es más que aprehender las similitudes y las diferencias, y resolver las contradicciones reales o aparentes entre los conceptos y proposiciones nuevos y los ya establecidos, y la reformulación del material de aprendizaje en términos de los antecedentes intelectuales, idiosincráticos y el vocabulario del alumno particular.

Por otro lado en **el aprendizaje de conceptos,** los mismos constituyen un aspecto importante en la teoría de la asimilación debido a que la comprensión y la resolución de problemas dependen en gran parte de la disponibilidad en la estructura cognoscitiva del estudiante, tanto de conceptos supraordinados (en la adquisición inclusiva de conceptos) como de conceptos subordinados (en la adquisición supraordinada de conceptos).

Los conceptos en sí consisten en los atributos de criterios abstractos que son comunes a una categoría dada de objetos, eventos o fenómenos, a pesar de la diversidad a lo largo de las dimensiones diferentes de las que caracterizan a los atributos de criterio compartidos por todos los miembros de la categoría.

Skemp (1993) ilustra el modo en que aprendemos conceptos con el ejemplo de un adulto nacido ciego y que mediante una operación logra el sentido de la vista; el autor dice que no existe modo alguno de enseñar (y aprender) el concepto de rectángulo por medio de una definición, solamente señalando objetos con esa forma el sujeto aprenderá por sí mismo la propiedad que es común a todos esos objetos.

En esa misma obra Skemp dice que el aprendizaje de conceptos también se logra con no-ejemplos o contraejemplos; así los objetos, las formas y las figuras que no contrastan con la idea de rectángulo ayudarían a aclarar el concepto. Como se ha intentado decir, los estudiantes no siempre aprenden los conceptos por definiciones, pero es útil hacerse de un buen diccionario de matemática o una enciclopedia de matemática, principalmente el profesor, y si es posible también los estudiantes, para entrenar el repertorio de conceptos propios del lenguaje matemático. Los conceptos de función, variable e identidad en trigonometría son difíciles de aprender y quizá la mejor forma de enseñarlos es por el empleo de funciones (por ejemplo), sin tratar de definir su significado de un modo abstracto (Orton, 1996).

Algunas ideas o conceptos pueden ser más abstractos que otros y por lo tanto más difíciles; Skemp (1993) indica al respecto hay conceptos mucho más difíciles de lo que se ha creído, como también los hay de naturaleza fácil. Por ello, es importante tener cuidado al tratar sobre ideas matemáticas abstractas. El principal responsable de una definición en matemática es el profesor, porque él comunica el conocimiento matemático.

Importancia del aprendizaje significativo en la adquisición del conocimiento.

El conocimiento nuevo se vincula intencionada y sustancialmente con los conceptos y proposiciones existentes en la estructura cognoscitiva. Cuando, por otra parte, el material de aprendizaje se relaciona arbitrariamente con la estructura cognoscitiva, no puede hacerse empleo directo del conocimiento establecido para internalizar la tarea de aprendizaje.

Cuando por otra parte, el material de aprendizaje se relaciona arbitrariamente con la estructura cognoscitiva, no puede hacerse empleo directo del conocimiento establecido para internalizar la tarea de aprendizaje. En el mejor de los casos, los componentes ya significativos de la tarea de aprendizaje pueden relacionarse con las ideas unitarias que existen en la estructura cognoscitiva (con lo que se facilita indirectamente el aprendizaje por repetición de la tarea en su conjunto); pero esto no hace de ninguna manera que las asociaciones arbitrarias recién internalizadas sean por sí mismas relacionables como un todo con el contenido establecido de la estructura cognoscitiva, ni tampoco las hace útiles para adquirir nuevos conocimientos.

Bases Matemáticas.

A continuación se presentan algunas definiciones y demostraciones que son la base fundamental del aspecto matemático de este trabajo.

En el cálculo elemental se usan propiedades y hechos básicos sin pasar por lo riguroso de las demostraciones que usualmente se utilizan en los cursos de Análisis. A continuación se consideran algunos aspectos básicos del cálculo elemental.

Introducción al número e.

El número e es un número real trascendente, esto quiere decir que no es raíz de ningún polinomio con coeficientes racionales. Su valor aproximado es de 2,718281828459045..., por ser irracional su desarrollo decimal no es periódico.

Es usual definir e como el límite cuando n tiende a infinito de la sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, o sea:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Otra definición equivalente del número e es la sumatoria desde 0 hasta infinito de $\dfrac{1}{n!}$, es decir:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$

El número e primero fue estudiado por el matemático Leonhard Euler en el año 1720, quien además fue el primero en utilizar la letra e para esta constante en el año 1727. También calculó e hasta 23 decimales exactos en el año 1748 utilizando la fórmula de la sumatoria.

Se puede dar otra definición equivalente del número e en términos de área. Esta definición, de naturaleza geométrica es la que se utilizará en este trabajo y se enuncia de manera muy precisa más adelante (ver Definición 2.8).

La ventaja de esta definición es que, por su naturaleza gráfica, puede ser retenida con mayor facilidad por los alumnos. Es usual que cuando se menciona el número π, que es otro número trascendente y muy importante, inmediatamente viene a la mente la idea del área de un círculo de radio 1.

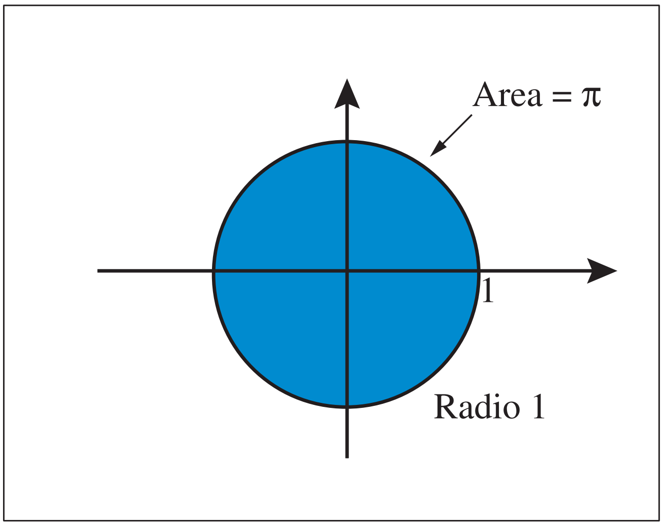

FIGURA 2.1. Definición geométrica de π

Aplicaciones del número e.

El número e tiene diversas aplicaciones dentro de las ciencias naturales y en la estadística, entre otras.

Antes de formalizar los conceptos correspondientes, se presentan a manera de motivación algunas aplicaciones en las que aparecen el número e y las funciones exponencial y logarítmica.

- **Intervención del número e en la criminalística:** Una aplicación del número e es poder determinar el momento de la muerte después de un asesinato. Es necesario aplicar la ley de Newton sobre el enfriamiento, que establece que la velocidad a la que se enfría un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del objeto y la temperatura del entorno. Esto quiere decir que cuando un objeto está mucho más caliente que el aire exterior, su velocidad de enfriamiento es alta, de manera que se enfría muy rápidamente; cuando un cuerpo está un poco más caliente que su entorno, su velocidad de enfriamiento es baja y se enfría lentamente.

Una persona viva no se enfría continuamente. El metabolismo humano asegura el mantenimiento de la temperatura del cuerpo alrededor de los 36ºC (98,6º F). Pero una persona muerta deja de producir calor y, por lo tanto, comienza a enfriarse siguiendo la ley de Newton que se aplica con la fórmula matemática siguiente:

$$T = T_a + \frac{(T_o – T_a)}{e^{kt}},$$

donde t es el tiempo transcurrido, T_a es la temperatura del aire (que supondremos constante), T_o es la temperatura del cuerpo en el instante inicial y T es la temperatura del cuerpo en el instante t.

Aplicaremos esta fórmula para determinar el instante en que fue asesinada una persona. Supongamos que la temperatura del cadáver a la medianoche era de 85º F y la temperatura del aire era de 68º F. Dos horas después la temperatura del cuerpo había disminuido hasta los 74º F. A partir de esto nos interesa determinar cuando murió esta persona.

Tomemos como instante inicial ($t = 0$) la medianoche, entonces tenemos que

$$T(2) = T_a + \frac{(T_o – T_a)}{e^{2k}},$$

es decir

$$74 = 68 + \frac{(85–68)}{e^{2k}}.$$

Despejando k de esta ecuación obtenemos

$$k = 0,5027.$$

Si t es el instante de la muerte, entonces t satisface la ecuación

$$98,6 = 68 + \frac{85 - 68}{e^{(0,5207)t}},$$

de donde

$$e^{(0,5207)t} = \frac{17}{30,6} = 0,5556,$$

luego

$$t = \frac{\ln(0,5556)}{0,5207} \text{ horas} = -1,13 \text{ horas} .$$

Por lo tanto se puede concluir que el fallecimiento ocurrió 1,13 horas = 68 minutos antes de la medianoche, es decir a las 22:52 h.

- **En ingeniería:** Cuando se cuelga una cadena o un cable por los extremos, tiende a adoptar una forma que se relaciona con el número e. La forma es similar al gráfico de la función:

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- **El carbono 14 (determinación de la edad de un fósil):** Para determinar de una manera aproximada la antigüedad de un objeto que está formado por materia orgánica, se mide la cantidad de carbono 14 que contiene. Los seres vivos tienen una cantidad de carbono 14 constante. Cuando un ser vivo muere esta cantidad se va desintegrando. La función que regula la desintegración se determina con la siguiente fórmula:

$$Q = Q_o.e^{-0{,}000124\Delta t}$$

  Dónde Q es la cantidad de carbono 14 final, Q_o es la cantidad de carbono 14 inicial, t es el tiempo.

- **Crecimiento exponencial:** Una de las numerosas aplicaciones en biología del número e es el crecimiento exponencial. Este tipo de crecimiento surge cuando no hay factores que limiten el crecimiento. Pueden experimentar un crecimiento exponencial las especies pioneras que llegan, por ejemplo, a zonas despobladas como una superfície boscosa en recuperación después de un incendio. Para este tipo de crecimiento se aplica la siguiente fórmula:

$$N = N_o e^t$$

  Esto permite predecir cual será la población N en un tiempo t a partir de la población inicial N_o.

La función logarítimica.

La definición de *logaritmo natural* o *logaritmo neperiano* que se da a continuación es fundamental para el desarrollo de este trabajo.

DEFINICIÓN 2.1. Sea $x > 0$, el *logaritmo neperiano* se define como sigue a continuación

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Tomando en cuenta la interpretación geométrica de la integral como el área bajo una curva, se tiene la siguiente interpretación geométrica de la función logarítmica.

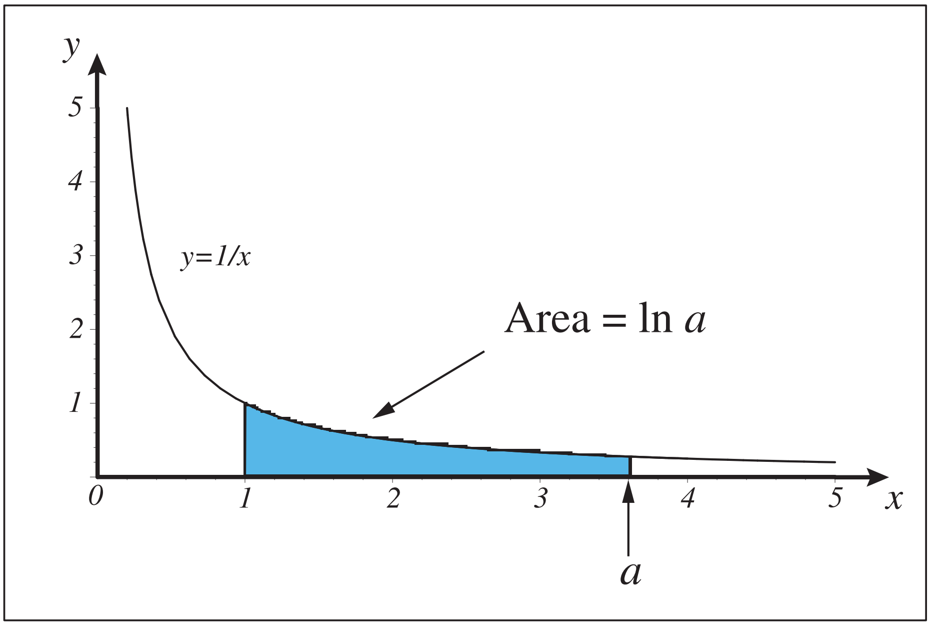

FIGURA 2.2. Interpretación geométrica de la función ln

A continuación se enuncia una versión sencilla del Teorema Fundamental del Cálculo, que se adecúa a las necesidades de este trabajo.

TEOREMA 2.2 (Teorema Fundamental del Cálculo). *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua y $x \in [a, b]$ entonces la función*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

es diferenciable en $[a, b]$ y se cumple que

$$F'(x) = f(x)$$

para todo $x \in [a, b]$.

En forma abreviada, se suele escribir

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x).$$

A continuación se dan, a manera de proposiciones, las propiedades más importantes de la función logarítmica y se hacen sus respectivas deducciones. Estas propiedades se usarán a menudo en las demostraciones que aparecerán más adelante en el desarrollo del tema.

Proposición 2.3.
$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ *para todo* $x, y > 0$

Demostración. Sea $f(x) = \ln(xy)$, derivando esta función se obtiene

$$f'(x) = \frac{1}{xy}\,y = \frac{1}{x}.$$

Por lo tanto $\ln(xy)$ tiene la misma derivada que $\ln(x)$ para todo $x > 0$, de donde se deduce que estas funciones difieren en una constante, es decir

$$\ln(xy) = \ln(x) + C.$$

Tomando $x = 1$ y sustituyendo en la expresión, se tiene,

$$\ln(1y) = \ln(1) + C.$$

Como $\ln(1) = 0$ se obtiene que el valor de C es $\ln(y)$.
Luego

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

$\square$

Proposición 2.4.

$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$ *para todo* $x, y > 0$

Demostración. Por la Proposición 2.3 se tiene que

$$\ln(yz) = \ln(y) + \ln(z)$$

si $y, z > 0$. Al substituir $z = \dfrac{1}{y}$ se obtiene

$$\ln(1) = \ln\left(\frac{1}{y}\,y\right) = \ln\left(\frac{1}{y}\right) + \ln(y)$$

Como $\ln(1) = 0$, entonces,

$$0 = \ln\left(\frac{1}{y}\right) + \ln(y),$$

de donde

$$\ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln(y),$$

finalmente

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x\,\frac{1}{y}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y).$$

□

Proposición 2.5.

$\ln(x^n) = n\ln(x)$ *para todo entero* n *y para todo* $x > 0$

Demostración. Supongamos primero que n es positivo. Se procederá por inducción. El resultado se cumple para el caso $n = 1$ ya que

$$\ln(x^1) = \ln(x) = 1\ln(x)$$

Supóngase que el resultado es cierto para el caso $n = k$, es decir

$$\ln(x^k) = k\ln(x),$$

entonces

$$\begin{aligned}\ln(x^{k+1}) &= \ln(x^k\,x) = \ln(x^k) + \ln(x)\\ &= (k+1)\ln(x).\end{aligned}$$

Utilizando este resultado y la Proposición 2.4 se obtiene el resultado para n negativo.

□

Proposición 2.6.

Se tiene que ln *es una función estrictamente creciente y*

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty.$$

Demostración. Sean x_1 y x_2 números reales tales que $x_1 < x_2$.

Entonces

$$\ln(x_2) = \int_1^{x_2} \frac{dt}{t} = \int_1^{x_1} \frac{dt}{t} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{dt}{t},$$

como $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \frac{dt}{t} > 0$ tenemos que

$$\ln(x_1) < \ln(x_2).$$

Por lo tanto, ln es una función estrictamente creciente.

Para demostrar que $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ lo primero es notar que

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(2^n) = \lim_{n\to+\infty} n \ln(2) = +\infty,$$

ya que $\ln(2) > 0$. Este hecho, junto con el hecho de que la función logaritmo es creciente implican que

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty.$$

Finalmente, para probar que $\lim_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$ se procede de manera análoga, usando

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(2^{-n}) = -\lim_{n\to+\infty} n \ln(2) = -\infty.$$

□

Observación 2.7. Otra manera de demostrar que la función ln es estrictamente creciente es usando que su derivada, la función $g(x) = 1/x$ es positiva para todo $x > 0$.

Definición del número e.

En la sección anterior se probó que la función ln es estrictamente creciente, que tiende a $+\infty$ si x tiende a $+\infty$ y que tiende a $-\infty$ si x tiende a 0^+.

De la continuidad de la función ln y el teorema de los valores intermedios se puede concluir que el rango de la función ln es $(-\infty, +\infty)$. Por lo tanto existe un número real positivo en el que la función ln toma el valor 1, por ser ln estrictamente creciente es inyectiva y por lo tanto este número es único.

Definición 2.8. Se define e como el único número real positivo tal que $\ln(e) = 1$.

Observación 2.9. Es importante notar que e es el único número real positivo tal que

$$\int_1^e \frac{dt}{t} = 1.$$

La siguiente figura ilustra el significado geométrico de e.

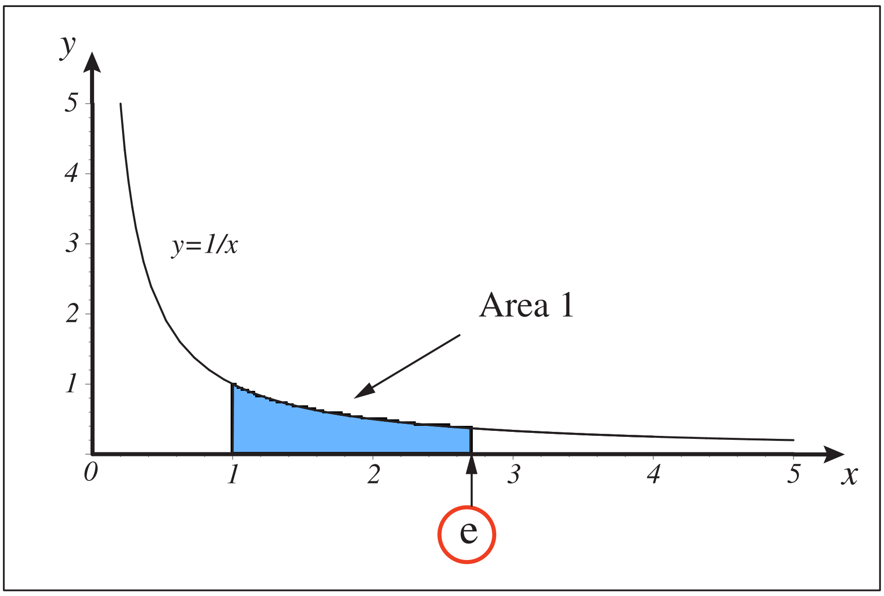

Figura 2.3. Interpretación geométrica de e

La función exponencial.

Tal como se dijo anteriormente la función logarítmica es una función estrictamente creciente, diferenciable, con dominio $(0, +\infty)$ y rango $(-\infty, +\infty)$. Por lo tanto tiene una inversa con dominio $(-\infty, +\infty)$ y rango $(0, +\infty)$, que también es estrictamente creciente y diferenciable. Esa inversa es la función exponencial, más precisamente:

Definición 2.10. La función exponencial, que denotaremos por exp es la inversa de la función logaritmo neperiano, es decir si $x \in \mathbb{R}$ entonces $\exp(x) = y$ si y sólo si $\ln(y) = x$.

Lema 2.11. *Se tiene que* $\exp'(x) = \exp(x)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Demostración. En el cálculo elemental se estudia que si f es una función diferenciable y estrictamente creciente entonces su inversa f^{-1} también es diferenciable y

$$\left(f^{-1}\right)'(f(y)) = \frac{1}{f'(y)}$$

Considerando la fórmula anterior para $x = f(y) = \ln(y)$ se obtiene que $y = \exp(x)$, $f'(y) = 1/y$ y

$$\exp'(x) = \exp'(\ln(y)) = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = \exp(x)$$

□

Observación 2.12. Es importante notar que como $\ln(e) = 1$ entonces $e = \exp(1)$ y como $\ln(1) = 0$ entonces $\exp(0) = 1$.

Además de las propiedades del logaritmo se deduce que

$$\exp(x + y) = \exp(x)\ \exp(y)$$

para todo par de números reales x, y y

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

para todo número real x.

Lema 2.13. *Se tiene que* $2 < e < 4$.

Demostración. Por la definición de ln se tiene que

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

Considerando la suma inferior para

$$\int_1^4 \frac{1}{t} dt,$$

con respecto a la partición $\{1, 2, 3, 4\}$ (ver Figura 2.4) se obtiene que

$$\ln(4) > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} > 1.$$

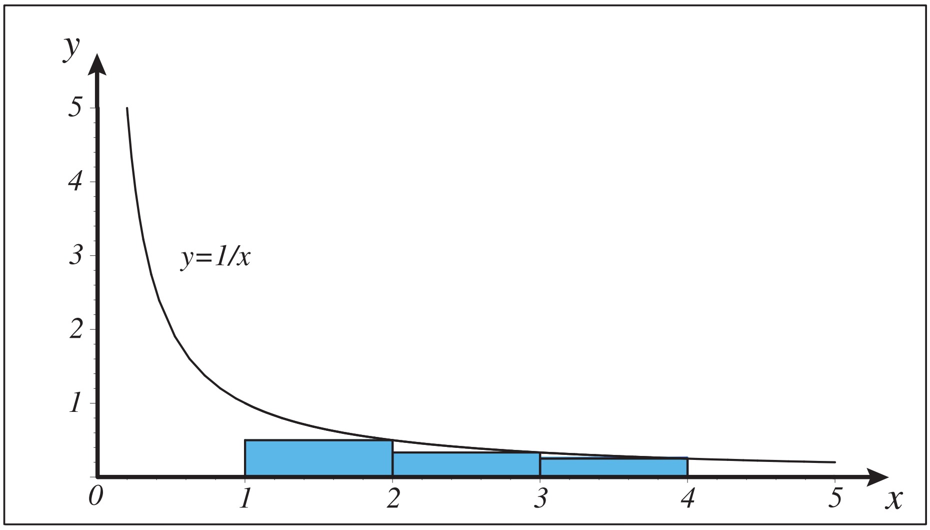

Figura 2.4. Suma inferior para $1/t$ en el intervalo $[1, 4]$

Por lo tanto

$$4 > \exp(1) = e.$$

Considerando la suma superior en el mismo intervalo $[1, 2]$, con respecto a la partición $\{1, 2\}$ (ver Figura 2.5), se obtiene

$$\ln(2) < 1.$$

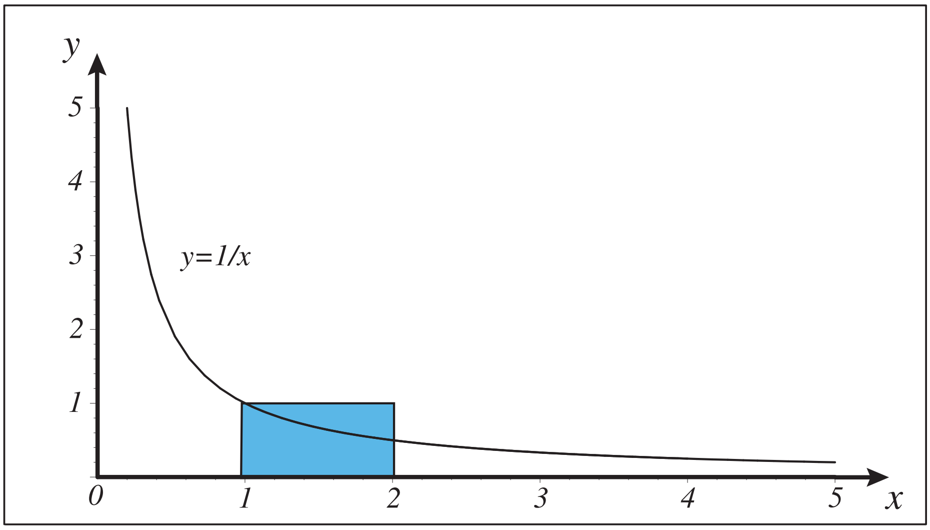

FIGURA 2.5. Suma superior para $1/t$ en el intervalo $[1,4]$

Por lo tanto

$$2 < \exp(1) = e.$$

$\square$

TEOREMA 2.14. *Sea x es un número real, entonces*

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

DEMOSTRACIÓN. Como $\ln(1) = 0$ se tiene que $\exp(0) = 1$, como la derivada de la función exponencial es ella misma, tenemos que $\exp^{(k)}(0) = 1$ para todo entero no negativo k. Luego, por la fórmula de Maclaurin

$$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots + \frac{\exp^{(k+1)}(c)x^{k+1}}{(k+1)!},$$

donde c está entre 0 y x, además $\exp^{(k+1)}(c) = \exp(c)$.

Sea $N \in \mathbb{N}$ y supongamos $|x| \leq N$, entonces $|c| \leq N$ y por lo tanto $c \leq N$. Tomando exponencial

$$\exp(c) \leq \exp(N) = \exp(1 + \cdots + 1) = \exp(1)^N \leq 4^N$$

Como la exponencial toma valores positivos se tiene que el resto R_k satisface

$$|R_k| \leq \frac{4^N N^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Notando que $N^{k+1} = N^2 \cdots N^2\, N^j$, donde j es igual a 0 ó 1 según n sea impar o par y que $(k+1)! = (k+1)\, k \cdots 2 \cdot 1$ se prueba que R_k tiende a 0 cuando k tiende a ∞, por lo tanto la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

converge uniformemente a $\exp(x)$ en el intervalo $[-N, N]$.

Como N puede ser cualquier entero positivo el resultado queda probado.

□

Observación 2.15. Aplicando el resultado anterior para $x = 1$ se obtiene

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Es posible probar directamente (ver Rudin, W. (1953)) que esta serie es igual a

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

de donde se concluye que

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Esta última igualdad es un resultado muy importante y la experiencia muestra que su demostración no le queda clara a los estudiantes. Una de las razones por las que esto sucede es porque hay que dar una gran cantidad de pasos lógicos, que quedan implícitos, desde la definición de e hasta llegar a la demostración de esta última igualdad. Aparte de todo esto se debe utilizar el teorema de Taylor, que es algo que no se estudia con profundidad ni suele quedar muy claro en los cursos de cálculo elemental. El esquema que hemos seguido hasta aquí es lo que llamaremos *método tradicional.*

Sugerencia para una demostración elemental de que $\mathbf{e} = \lim_{\mathbf{n}\to\infty}\left(\mathbf{1}+\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right)^{\mathbf{n}}$.

Es importante recordar que el número e se ha definido como el único número real tal que

$$\int_1^e \frac{dt}{t} = 1.$$

A continuación se presenta una propuesta que permite establecer que $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ de una manera muy directa y usando solamente técnicas sencillas de cálculo elemental. Esta propuesta se debe a Goodman, T.N.T. (1986) y apareció publicada en la sección "classroom notes" de la revista American Mathematical Montlhy. Vol. 93, N° 8, páginas 638-639.

Tomando en cuenta las observaciones anteriores resulta natural pensar en el valor didáctico de esta propuesta.

TEOREMA 2.16 (Goodman, T.N.T (1986)). *Si n es un entero positivo, entonces se cumple que*

$$\frac{e}{1+\dfrac{1}{n}} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e.$$

DEMOSTRACIÓN.

Si n es un entero positivo, se define

$$f_n(t) = t\ln\left(\frac{ne}{t}\right), \quad \text{para } t > 0.$$

Derivando se obtiene que

$$f_n'(t) = \ln\left(\frac{ne}{t}\right) - 1,$$

por lo tanto la derivada de f_n se anula si y sólo si

$$\ln\left(\frac{ne}{t}\right) = 1,$$

como ln es una función inyectiva y $\ln e = 1$, tenemos que f_n' se anula si y sólo si

$$\frac{ne}{t} = e,$$

es decir si

$$t = n.$$

Por otra parte, por ser ln una función creciente, se tiene que si $t < n$ entonces $f_n'(t) > 0$ y si $t > n$ entonces $f_n'(t) < 0$, por lo tanto f_n alcanza un máximo en $t = n$.

Para demostrar la primera desigualdad se procede de la siguiente manera:

Como f_n alcanza su valor máximo para $t = n$ se tiene que

$$f_n(n+1) < f_n(n),$$

por lo tanto

$$\ln\left(\frac{ne}{n+1}\right)^{n+1} < \ln\left(e^n\right),$$

como la función ln es creciente se tiene que

$$\left(\frac{ne}{n+1}\right)^{n+1} < e^n,$$

luego

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} e < 1.$$

A partir de esta última desigualdad, usando que

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{1+\dfrac{1}{n}}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{1+\dfrac{1}{n}}\right)^{n}\left(\frac{1}{1+\dfrac{1}{n}}\right),$$

se obtiene que

$$\frac{e}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Para demostrar la segunda desigualdad, se procede de manera análoga, pero usando que

$$f_{n+1}(n) < f_{n+1}(n+1),$$

ya que f_{n+1} alcanza su máximo en $t = n + 1$.

Por esta desigualdad se tiene que

$$\left(\frac{(n+1)e}{n}\right)^n < \left(\frac{(n+1)e}{(n+1)}\right)^{n+1},$$

es decir

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n e^n < e^{n+1},$$

de donde

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e.$$

$\square$

Corolario 2.17.

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Demostración. Tomando límite en la desigualdad que se estableció en el teorema anterior se obtiene

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e}{1+\dfrac{1}{n}} \leq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \lim_{n\to\infty} e$$

Como en los extremos de la desigualdad el límite es igual a e, se tiene que

$$e \leq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e,$$

de donde se obtiene el resultado.

□

Observación 2.18. En el artículo ya mencionado (Goodman, T.N.T (1986)) también aparece una motivación de la demostración que se acaba de dar en términos de la desigualdad aritmético-geométrica, que dice que

$$a_1 \cdots a_n \leq \left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)^n,$$

si $a_1, \ldots, a_n$ son números reales positivos.

Exponer y desarrollar esta motivación está fuera de los alcances y objetivos de este trabajo, sin embargo la lectura de la misma puede ser interesante para las personas interesadas en el tema.

CAPíTULO 3

Marco Metodológico.

Para Balestrini, M. (2002) el marco metodológico, está referido al momento que alude al conjunto de procedimientos lógicos, tecno-operadores implícitos en todo proceso de investigación, con el objeto de ponerlos de manifiesto y sistematizarlos; a propósito de permitir descubrir y analizar los supuestos del estudio y de reconstruir los datos, a partir de los conceptos teóricos convencionalmente operacionalizados.

El marco metodológico es la instancia referida a los métodos, las diversas reglas, registros, técnicas, y protocolos con los cuales una teoría y su método calculan las magnitudes de lo real, de allí que se deberán plantear el conjunto de operaciones técnicas que se incorporarán en el despliegue de la investigación en el proceso de la obtención de los datos.

El fin esencial del marco metodológico, es el de situar en el lenguaje de investigación, los métodos e instrumentos que se emplearán en la investigación planteada, desde la ubicación acerca del tipo de estudio y el diseño de investigación; su universo o población, su muestra, los instrumentos de recolección de la información y la presentación de los datos.

Tipo de estudio

El presente informe tiene una modalidad de proyecto factible y presenta un diseño del tipo descriptivo, basado en una investigación de campo. La Universidad Pedagógica Experimental Libertador, en el documento titulado "Manual de Trabajos de Grado de Maestría y Tesis Doctorales" (UPEL, 1990), en la sección tercera, establece que: "El Proyecto Factible consiste en la elaboración de una propuesta de un modelo operativo viable, o una solución posible a un problema de tipo práctico, para satisfacer necesidades de una institución o grupo social".

Planificación de la intervención didáctica

Se planificó una intervención didáctica basada en:

Fase 1: Diagnóstico de la necesidad. El estudio del problema de la enseñanza del número e y las funciones exponencial y logarítmica, es pertinente en la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, ya que estos tópicos aparecen en varios de los programas de las asignaturas que se dictan en la misma (ver apéndice A). La observación de los resultados de las evaluaciones y los comentarios sobre el rendimiento estudiantil permiten inferir que existe una problemática asociada con la enseñanza del número e y las funciones exponencial y logarítmica. Más específicamente, el revisar los resultados de los exámenes escritos que se aplican en los cursos básicos, los comentarios de los docentes de asignaturas que tienen por requisito matemática básica (como Física I y II) y el bajo rendimiento estudiantil en cursos avanzados de la Licenciatura corrobora esta situación.

Una revisión bibliográfica permitió confirmar que este problema ya se ha presentado y se han propuesto soluciones en diferentes partes del mundo.

Fase 2: Levantamiento de información. Para precisar la situación en que se encuentra el proceso de enseñanza-aprendizaje del número e y las funciones exponencial y logarítmica en la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela se le aplicarán test y encuestas a los estudiantes.

Fase 3: Descripción de la intervención. Se hará un pre-test, se dará una clase magistral y se aplicará un post-test. Esta intervención se encuentra descrita en detalle más adelante.

Fase 4: Análisis de resultados. No se usarán métodos estadísticos rigurosos, el análisis será descriptivo, tomando en cuenta las encuestas y los resultados del pre-test y el post-test.

Fase 5: Planteamiento de la propuesta. Tomando en cuenta la aceptación y los comentarios de los estudiantes acerca de la intervención didáctica se harán sugerencias para mejorar la enseñanza del número e y las funciones exponencial y logarítmica.

La experiencia y el juicio de expertos validará la propuesta.

Población y Muestra.

Se trabajó en La Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela ubicada en Caracas, Distrito Capital. En la misma se tomó una muestra de 26 alumnos que conformaban un grupo que había aprobado el curso de Análisis I, una de las materias del pensum de la carrera de Matemática. La finalidad de esta investigación no es hacer un estudio profundo desde el punto de vista cuantitativo de la propuesta planteada acerca de la enseñanza del número e. En tal sentido no se han aplicado procedimientos de muestreo rigurosos, la factibilidad de la propuesta se valida con un grupo pequeño de alumnos del nivel escogido.

Es por tal razón que la selección de la población de estudio fue la que se describió anteriormente.

Descripción de la intervención didáctica.

Se realizó una actividad especial, que contó con una duración de dos (2) horas, la misma se dividió en tres secciones: La primera fué diagnóstica y duró quince (20) minutos, la segunda parte fué la experiencia didáctica que duró noventa (75) minutos y la tercera fue un post-test, que duró quince minutos (15).

En la primera parte se aplicó un pre-test (ver Apéndice B) a los estudiantes con el objetivo de hacer un diagnóstico de cómo están los conocimientos previos acerca del número e y la funciones exponencial y logarítmica. El pre-test contenía preguntas acerca de la definiciones que deberían estar claras sobre el tema. Se eligió un grupo que había aprobado el curso de Análisis I (Cálculo Diferencial e Integral) de la Licenciatura en Matemática de la Facultad de Ciencias de la Universidad central de Venezuela, al cual se les invitó a participar en el experimento, al mismo asistieron 26 alumnos.

Este grupo de estudiantes ya había estudiado el tema en los cursos de Matemática I, Matemática II, Matemática III y Análisis I (los programas se anexan en el Apéndice A). Entre las causas de la falta de comprensión del tema por parte de los alumnos destaca que hay que dar una gran cantidad de pasos lógicos para llegar desde la definición de e hasta que $e = \lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n$ y uno de estos pasos lógicos incluye el teorema de Taylor. El teorema de Taylor es un resultado bastante profundo y complicado que no se llega a comprender cabalmente por parte de los estudiantes en los cursos elementales.

En la segunda sección se les dictó una clase de tipo magistral acerca del número e y las funciones exponencial y logarítmica, que se describe en la próxima parte de este trabajo.

Para esta clase los alumnos deberían tener claros lo conceptos básicos de integral, interpretación de integral como área bajo una curva, el teorema fundamental del cálculo y nociones muy básicas de cálculo diferencial.

Por último se aplicó un post-test (ver Apéndice B), para ver cómo les había parecido el nuevo método, y si para ellos valdría la pena que se diera de esa manera en los cursos de cálculo.

Intervención Didáctica.

A la clase se le colocó el siguiente título:

$$\textbf{¿Por qué si } \int_{\mathbf{1}}^{\mathbf{e}} \frac{\mathbf{dt}}{\mathbf{t}} = \mathbf{1} \textbf{ entonces } \mathbf{e} = \lim_{\mathbf{n}\to\infty} \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right)^{\mathbf{n}} \textbf{ ?}$$

La clase se dividió en tres partes.

Parte I: A los estudiantes se les expuso un resumen de la definición de la función logarítmica, la función exponencial, sus propiedades básicas y la definición de e. Esta fue expuesto de acuerdo a lo presentado en las secciones *Introducción al número e*, *La función logarítmica*, *Definición del número e* y la primera parte de *La función exponencial* del Capítulo 2

Parte II: A los estudiantes se les presentó un esquema de la demostración tradicional de que

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

presentado de acuerdo a lo establecido en el Lema 2.13, el Teorema 2.14 y la Observación 2.15.

Parte III: En esta última parte de la clase se les planteó la forma mucho más sencilla de demostrar y comprender por qué

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

presentado de acuerdo a lo establecido en el Teorema 2.16 y en el Corolario 2.17.

El propósito del diseño de esta intervención era contrastar las dos formas de enseñanza del número e, y se observó que la forma tradicional como se enseña el número e en los cursos de matemática elemental es mucho más rigurosa que la que usa Goodman, T.N.T. (1986) en el artículo tomado como referencia.

CAPíTULO 4

Análisis de los resultados.

Una vez realizada la observación directa, encuestas abiertas orales y escritas y una encuesta escrita a un grupo de alumnos (ver Apéndice B). En estas encuestas la mayoría de los estudiantes dieron como definición de e una de las expresiones que aparece en la pregunta 2 y la respuesta a esta pregunta fue muy pobre. El levantamiento de la información sugiere que los temas relacionados al número e se enseñan enunciando reglas que aparecen en la bibliografía de matemática que usualmente se emplea para la enseñanza del tema y por tanto predomina el aprendizaje memorístico de los mismos por parte de los estudiantes.

Producto de la la lectura detallada, se decidió programar una clase que se dividió en tres partes, cuya duración fue de ciento diez (110) minutos. La misma se llevó a cabo atendiendo a los requerimientos didácticos necesarios para lograr la eficacia de dicha intervención, los requisitos se fueron descubriendo en la medida que se realizaba la revisión bibliográfica y comparando la presentación de las distintas formas de enseñar el número e. Los principales requerimientos fueron conocimientos muy básicos de cálculo diferencial e integral, incluyendo el teorema fundamental del cálculo e interpretación de la integral como área. Fue necesario aplicar un pre-test y luego un post-test para recopilar información acerca de la situación en la que se encontraba la enseñanza y comprensión del número e y la función exponencial antes y después de la intervención didáctica.

La intervención resultó productiva ya que a los estudiantes les pareció interesante la forma como se les explicó desde otra perspectiva el número e y la función exponencial.

Tal como ya indicamos el método tradicional corresponde con lo establecido en el Lema 2.13, el Teorema 2.14 y la Observación 2.15. Este método conlleva una gran cantidad de pasos lógicos e incluye el teorema de Taylor, mientras que el método propuesto es directo e intuitivo.

La aplicación de un pre-test, complementando con las encuestas abiertas sirvieron para corroborar, en primera instancia, la sospecha que se tenía de que existe una fuerte problemática en la enseñanza de los temas relacionados con el número e y la función exponencial. Por citar algunos ejemplos, al preguntar "¿Que entiende por número e de acuerdo a lo que ha estudiado?" algunas de las repuesta fueron "e es racional porque es periódico", "el número e es como π", "lo he estudiado en cursos de cálculo y análisis, pero no tengo claro su significado", "$e = 2,72$".

En el post-test se reflejó claramente que a los estudiantes les pareció buena la propuesta planteada, finalmente para terminar de validar la misma, se les mostró a varios docentes e investigadores el modelo planteado por Goodman, T.N.T. (1986) en su artículo, recibiendo aceptación de ésta por parte de los profesores.

Análisis del pre-test.

En la siguiente página se muestra una tabla que resume las respuestas dadas por los alumnos en el pre-test.

La leyenda correspondiente es:

A = Respuesta acertada.

B= Respuesta regular.

C= Respuesta no acertada.

D= No contestó.

En la tabla se observa un predominio de respuestas no acertadas y preguntas no contestadas, evidenciándose así la necesidad de mejorar la enseñanza del número e y las funciones exponencial y logarítmica.

Aunque estaban previstos 10 minutos para la realización de esta prueba, en la práctica no se le impuso ninguna limitación de tiempo a los participantes, dándoles tiempo para pensar, razonar y explicar.

Estudiantes	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4
1	A	B	C	D
2	C	C	C	C
3	A	A	B	B
4	B	D	C	D
5	B	C	D	C
6	C	D	D	B
7	B	D	D	C
8	C	D	D	D
9	C	B	B	D
10	C	D	D	C
11	C	C	C	D
12	C	D	D	C
13	C	D	D	C
14	B	D	D	C
15	A	D	D	D
16	A	B	C	C
17	B	C	C	D
18	D	D	D	D
19	D	D	D	D
20	D	D	D	D
21	D	D	D	D
22	D	D	D	D
23	D	D	D	D
24	D	D	D	D
25	D	D	D	D
26	D	D	D	D

Tabla 1. Respuestas al pre-test

Análisis del post-test.

La gran mayoría respondió “si” a la pregunta 1.

Todos respondieron “si” a la pregunta 2 y la razón, en general, es que lo consideran más comprensible que lo han estudiado en cursos anteriores.

A la gran mayoría les pareció muy buena la calidad de la exposición.

En conclusión el resultado del post-test valida el método y sugiere buena calidad docente de la expositora.

CAPíTULO 5

Conclusiones y Recomendaciones.

Las respuestas expresadas en el pre-test por los estudiantes reflejaron claramente la necesidad de buscar alternativas que ayuden a mejorar la enseñanza de los tópicos que forman parte del cálculo elemental.

Una vez planteada la propuesta, la mayoría de los estudiantes se sintieron identificados con la alternativa planteada, pues la misma les resulta ser más amigable, tanto por lo comprensible de los pasos, como por lo simplificado de la herramientas matemáticas que se utilizan para llegar al resultado deseado, que no es más que lograr una mejor comprensión del número e y la función exponencial.

Dentro de los aspectos positivos que predominan en el desarrollo de todo el proceso investigativo se encuentran:

(a) El interés presentando por los estudiantes en cuanto a la propuesta.

(b) Lo factible que es la propuesta en el campo de la enseñanza, comprensión y aprendizaje de la matemática, por poseer las características que se adaptan a los requerimientos didácticos del proceso de enseñanza-aprendizaje y a las necesidades académicas de los estudiantes.

(c) Existe interés por parte de los docentes e investigadores en estudiar de manera más detallada la alternativa planteada.

La sencillez que tiene desde el punto de vista didáctico la propuesta planteada en este trabajo de investigación, puede permitir la creación de nuevas vías o maneras para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de contenidos matemáticos, tanto en la tercera etapa de educación básica, media diversificada y profesional, como en la universitaria.

A una gran parte de los estudiantes, acostumbrados a lo riguroso y formal de la demostración que normalmente se usa en los cursos de matemática básica, al principio, les pareció que lo que se les estaba explicando era muy evidente y hasta algunos se notaron incrédulos, pero a medida que fueron conociendo la propuesta, se identificaron con ésta, solicitando que se incorporase en los programas de cálculo de la Licenciatura en Matemática de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela.

En cuanto a las técnicas y métodos usados en la intervención didáctica, se puede concluir que los mismos fueron los apropiados, de manera que la información suministrada tuvo su apoyo bibliográfico pertinente, logrando cubrir los requerimientos didácticos, tanto de la intervención como de los estudiantes, y así como también la satisfacción del docente.

Las recomendaciones generales que se pueden hacer son:

- Continuar en la línea de investigación, buscando nuevas alternativas en cuanto a los tópicos de cálculo referentes a la enseñanza del número e y la función exponencial.

- Tratar de incluir el esquema de la clase correspondiente a la intervención didáctica en los cursos de cálculo, específicamente en los contenidos referentes al número e de la licenciatura en matemática de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela.

- Elaborar material didáctico acerca de la enseñanza del número e y la función exponencial, que pueda servir de ayuda tanto a profesores y alumnos. Este material podría ser interactivo, de manera tal que se pueda colocar en internet a través de la elaboración de una páginas web.

- Adaptar esta propuesta a los dos últimos años de Educación Media y Diversificada, ya que serviría para dar una introducción de los nuevos conceptos, así como afianzar los ya estudiados.

Bibliografía

[1] Apostol, T. (1973). **Calculus** Volumen 1. Editorial Reverté.

[2] Artigue, M. y Viennot, L. (1987). **Some aspects of students' conceptions and difficulties about differentials. Second International Seminar Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics,** Cornell (vol. III). Ithaca: Cornell University.

[3] Ausubel, D. (1961). **In defense of verbal learning,** Education Theory, 11, 1961, 15-25

[4] Ausubel, D. (1982). **Psicología Educativa.** Editorial Trillas, México.

[5] Ausubel, D. (1990). **Psicología Educativa.** Editorial Trillas, México.

[6] Bishop, A. (1988). **Mathematical Enculturation: A Cultural Perpective on Mathematics Education. Dordrech**

[7] Balestrini, M. (2002). **Como se elabora el Proyecto de Investigación.** BL Consultores Asociados. Servicio Editorial. Sexta Edición.

[8] Courant, R. y Robins, H. (1967). **Qué es la Matemática?** Editorial Aguilar. Quinta Edición.

[9] D'Ambrosio, U. (1990). **Ethnomatemática.** Sao Paulo.

[10] Goodman, T.N.T. (1986) **Maximum Products and** $\mathbf{lim}\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right)^{\mathbf{n}}$. American Mathematical Monthly. Vol. 93, N^{o} 8, 638-639. 2

[11] Microsoft Encarta, Biblioteca de Consulta 2003. ©1993-2002 Microsoft Corporation.

[12] Mora, C. (1999). **Concepción Integral para el Aprendizaje de la Matemática en los diferentes niveles del Sistema Educativo.** Paradigma XX (1), 55-80.

[13] Mosquera, J. (1990). **El Experimento Didáctico y la Formación de Profesores de Matemáticas.** Manuscrito, Caracas.

[14] Orton, A. (1996). **Didáctica de las Matemáticas.** Ediciones Morata. Madrid. Segunda Edición

[15] Phillips, J. **Los Orígenes del Intelecto según Piaget.** Editorial Fontanella, S.A. Barcelona-España.

[16] Purcell, E.; Varberg, D.; Rigdon, S. (2001). **Cálculo.** Editorial Prentice Hall.

[17] Rossi, P. (1997). El nacimiento de la ciencia moderna en Europa. Disponible en http://ticat.ua.es/curie/materials/tesis/rlglv-2.pdf

[18] Rudin, W. (1953). **Principles of Mathematical Analysis.** Editorial Mc Graw-Hill.

[19] Skemp, R. (1980). **Psicología del Aprendizaje de las Matemáticas.** Ediciones Morata. Madrid.

[20] Skemp, R. (1993). **Psicología del Aprendizaje de las Matemáticas.** Ediciones Morata. Madrid. Segunda Edición.

[21] Spivak, M. (1981). **Calculus.** Editorial Reverté.

[22] Swokowski, E. **Cálculo con Geómetría Analítica.** Editorial Iberoamérica, México.

[23] UPEL. (1990) **Manual de Trabajos de Grado de Maestría y Tesis Doctorales.**

[24] Vivenes, J. (1993). **Didáctica Total.** Editorial Alfa.Venezuela.

[25] Vivenes, J. (1993). **Matemática, Aprendizaje y Evaluación.** Editorial Alfa.Venezuela.

APÉNDICE A

Programas.

A continuación se presentan los programas de las asignaturas Matemática I, Matemática II, Matemática III y Análisis I de la Licenciatura en Matemática de la Universidad Central de Venezuela.

En el programa de Matemática I, se estudia la función exponencial y logarítmica específicamente en el Tema 8.

Luego en el programa de Matemática II, se estudian algunas de las aplicaciones del número e en el Tema 5.

Más adelante en el contenido de Matemática III, en el Tema I, se vuelven a nombrar las aplicaciones del número e, continuando en el Tema 2 con la noción más formal de algunas expresiones de este número.

Por último en el Tema 3 del curso de Análisis I, se estudia con más detalle el número e.

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática

Matemática I

Licenciaturas en Biología, Computación, Física, Geoquímica, Matemática, Química

Código: 8206	
Créditos: 6	Requisitos: No tiene
Horas de teoría: 4	Horas de práctica: 4
Vigente desde 2000-2	

Objetivos

En este curso el estudiante recibe una introducción al cálculo diferencial en una variable. El objetivo de este curso es que el estudiante:

Aprenda a manipular correctamente los números, las funciones básicas y sus gráficas.

Adquiera una buena base de geometría analítica del plano.

Aprenda a resolver inecuaciones y trabajar con aproximaciones.

Comprenda las nociones de límite y continuidad. Calcule límites. Reconozca puntos de discontinuidad de una función.

Comprenda el concepto de derivada, su significado geométrico y físico y esté en capacidad de aplicarlo a la resolución de problemas.

Aprenda las reglas de derivación y sepa derivar funciones polinómicas, racionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y sus combinaciones y composiciones.

Trace gráficos precisos de funciones, sabiendo precisar sus características usando límites y derivadas.

Contenido

Tema 1: Los números.

Números naturales, enteros, racionales, reales. Propiedades básicas. Identificación del conjunto de los números reales con la recta. Relación de orden. Intervalos.

Tema 2: Curvas, fórmulas, funciones y gráficas.

Pares ordenados y plano Cartesiano.

Curvas que representan gráficas de funciones. Estudio descriptivo. Manipulaciones geométricas con las curvas. Curva inversa y composición de curvas.

Fórmulas y uso de la calculadora. Manipulaciones con fórmulas. Fórmulas inversas.

Relación entre fórmulas y curvas.

Tema 3: Funciones básicas.

Estudio y gráficos de algunas funciones:

(i) Identidad, cuadrado, raíz cuadrada, potencial, raíz enésima.
(ii) Valor absoluto, parte entera.
(iii) Exponencial y logarítmica, logaritmo neperiano y logaritmo en base 10, cambio de base.
(iv) Funciones polinómicas y funciones racionales.

Trigonometría: círculo trigonométrico, funciones trigonométricas, ángulos notables, fórmulas trigonométricas básicas, funciones trigonométricas inversas, representación gráfica.

Representación gráfica de funciones que se pueden expresar como suma, producto o inversa numérica de las funciones básicas, en particular polinomios y algunas funciones racionales sencillas. Escala logarítmica y semilograrítmica.

Estudio de la noción de ecuación y su interpretación en el cuadro funcional y gráfico. Funciones definidas mediante fórmulas. Dominio y rango de una función.

Tema 4: Geometría analítica plana.

Estudio de las rectas, parábolas e hipérbolas como familia de curvas. Interpretación geométrica de los coeficientes (estudio detallado del binomio de segundo grado). Distancia entre dos puntos del plano. Circunferencia. Elipse. Distancia de un punto a una recta.

Tema 5: Inecuaciones y aproximaciones.

Resolución de inecuaciones (método gráfico). Cálculo de soluciones de ecuaciones por aproximación. Errores. Cifras significativas.

Tema 6: Composición de funciones.

Composición de funciones. Representación gráfica de funciones que se pueden expresar como composición de funciones básicas. En particular considerar: $a\,\mathrm{sen}(bx+c)$, $\exp(-x^2)$, $\exp(-kx)$, $|f(x)|$, etc.

Tema 7: Límites.

Límites. Discusión intuitiva. Interpretación gráfica del concepto de límite. Límites laterales. Límites infinitos y límites en el infinito. Cálculo de límites de funciones definidas mediante fórmulas. Límites indeterminados sencillos.

Tema 8: Derivadas.

Definición de derivada y su interpretación geométrica y física. Reglas de derivación y su justificación. Suma, resta, producto, cociente. Regla de la cadena y derivada de la función inversa. Cálculo de derivadas de funciones dadas por fórmulas.

Derivadas de las funciones polinómicas, racionales, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.

Uso de la derivada para hallar la tangente a una curva en un punto dado.

Tema 9: Continuidad.

Noción de continuidad. Interpretación geométrica. Distintos tipos de discontinuidades.

Tema 10: Aplicaciones.

Uso de los límites y la derivada para precisar aspectos de una curva. Cálculo de máximos y mínimos de una función. Trazado de gráfico de funciones.

Aplicaciones a problemas de Matemática, Biología, Física y Química.

Bibliografía

[1] Alson, Pedro *Métodos de graficación.* Editorial Erro.

[2] Deminovich, B. *Problemas y ejercicios de Análisis Matemático.* Editorial Paraninfo.

[3] Edwards, C. H. y Penney D. E. *Geometría Analítica y Cálculo.* Editorial Prentice Hall Hispanoamericana.

[4] Leithold, L. *Matemáticas previas al Cálculo.* Editorial Harla.

[5] Miranda, Guillermo *Matemática I - Física.* Fac. Ciencias. UCV.

[6] Swokowsky, E. W. *Cálculo con Geometría Analítica.* Grupo Editorial Iberoamericana.

Comentarios

(1) La última parte del curso, que corresponde con introducción al cálculo diferencial y aplicaciones, tiene un carácter introductorio. Este tema será estudiado con mayor profundidad en el curso de Matemática II.

(2) Los libros

Calculus de M. Spivack (editorial reverté)

Calculus Volumen 1 de T. Apostol (editorial reverté)

son excelentes, pero se encuentran por encima del nivel de este curso. Sin embargo, es deseable incentivar a los estudiantes para que comiencen a iniciarse en este tipo de literatura.

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática

Matemática II

Licenciaturas en Biología, Computación, Física, Geoquímica, Matemática, Química

Código: 8207	
Créditos: 6	Requisitos: Matemática I
Horas de teoría: 4	Horas de práctica: 4
Vigente desde 2000-2	

Objetivos

Este es un curso de cálculo diferencial e integral en una variable, al que el estudiante llega con una base de un primer curso de introducción al cálculo diferencial. Los conceptos y resultados de cálculo diferencial introducidos en Matemática I son tratados con mayor rigor y profundidad.

El objetivo de este curso es que el estudiante:

Domine las técnicas de derivación de funciones.

Use las técnicas del cálculo diferencial para calcular límites, trazar gráficos de funciones y resolver problemas de máximos y mínimos.

Comprenda el concepto de sucesión y límite de sucesión, sea capaz de calcular el límite de una amplia variedad de sucesiones.

Entienda el enunciado del teorema de Taylor, esté en capacidad de aproximar funciones y estimar el error. Use el método de la tangente de Newton para aproximar ceros de funciones.

Aprenda a calcular la antiderivada (primitiva) de una amplia variedad de funciones.

Resuelva ecuaciones diferenciales de primer orden, que se resuelven por integración y comprenda algunas aplicaciones elementales.

Comprenda el concepto de integral definida y el teorema fundamental del cálculo. Aplique las técnicas de cálculo integral para resolver una amplia variedad de problemas que incluyen cálculo de volúmenes, longitud de arco, centro de gravedad, etc.

Esté en capacidad de aproximar integrales definidas usando la regla de los trapecios y la de Simpson.

Contenido

Tema 1: Cálculo diferencial en una variable.

Repaso de los conceptos básicos del cálculo diferencial.

Teoremas del valor medio: Rolle, Lagrange y Cauchy. Interpretación geométrica y aplicaciones. Funciones crecientes y decrecientes. Criterio de la primera derivada.

Máximos y mínimos. Convexidad. Criterio de la segunda derivada (tanto para convexidad como para máximos y mínimos). Aplicación al trazado de gráficos de funciones. Regla de L'Hopital. Asíntotas horizontales, verticales y oblícuas. Gráficos de funciones. Aplicaciones de máximos y mínimos.

Tema 2: Sucesiones numéricas.

Concepto de sucesión y ejemplos. Límite de una sucesión. Propiedades del límite. Cálculo de límites de sucesiones.

Tema 3: Teorema de Taylor y aproximaciones.

Fórmula de Taylor con resto. Acotación del resto y aplicaciones: Cálculo aproximado de funciones y desigualdades. Cálculo de ceros de funciones: Método de los intervalos encajados. Método de la tangente de Newton.

Tema 4: La integral indefinida.

Integral indefinida y métodos de integración: Cambio de variables, integración por partes, integrales trigonométricas, fórmulas de reducción para las integrales de $\operatorname{sen}^n x$ y $\cos^n x$, integración de funciones racionales. La sustitución $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Integración de algunas funciones irracionales.

Tema 5: Ecuaciones diferenciales.

Aplicación de los métodos de integración para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias sencillas. Ecuaciones con variables separables. Ecuaciones que se reducen a ecuaciones con variables separables ($y' = f(x, y)$ donde f es homogénea de grado cero, $y' = \frac{ax+by+c}{rx+sy+t}$, etc.). Ecuación lineal de primer orden, ecuación de Bernoulli. Aplicaciones: ley de enfriamiento de Newton, crecimiento de bacterias, desintegración radioactiva, crecimiento logístico.

Tema 6: La integral definida.

Area bajo el gráfico de una función. Area como límite de una sucesión. Integral de Riemann. Primitivas y teorema fundamental del cálculo. Regla de Barrow. Teoremas del valor medio para integrales. Cambio de variables e integración por partes para integrales definidas.

Tema 7: Cálculo aproximado de integrales.

Cálculo aproximado de integrales definidas y estimación del error. Aproximación de áreas por rectángulos, regla de los trapecios y regla de Simpson.

Tema 8: Aplicaciones del cálculo integral.

Cálculo de áreas de regiones planas. Longitud de arco de una curva dada en la forma $y = f(x)$. Volumen de un sólido cuando se conoce el área de su sección transversal (ejemplo: pirámide). Volumen de un sólido de revolución. Centro de gravedad. Area de una superficie de revolución. Integrales impropias en intervalos del tipo (a, ∞) y $(-\infty, a)$.

Bibliografía

[1] Alson, Pedro *Cálculo Básico.* Editorial Erro.
[2] Batschelet, E. *Introduction to Mathematics for Life Scientist.* Springer Verlag.
[3] Deminovich, B. *Problemas y ejercicios de Análisis Matemático.* Editorial Paraninfo.
[4] Edwards, C. H. y Penney D. E. *Ecuaciones diferenciales elementales con aplicaciones.* Editorial Prentice Hall Hispanoamericana.
[5] Edwards, C. H. y Penney D. E. *Geometría Analítica y Cálculo.* Editorial Prentice Hall Hispanoamericana.
[6] Miranda, Guillermo *Matemática II - Física.* Fac. Ciencias. UCV.
[6] Swokowsky, E. W. *Cálculo con Geometría Analítica.* Grupo Editorial Iberoamericana.

Comentarios

(1) El estudiante llega a este curso con una pequeña base de cálculo diferencial, dada en el curso de Matemática I.

(2) Los libros

Calculus de M. Spivack (editorial reverté)

Calculus Volumen 1 de T. Apostol (editorial reverté)

se encuentran por encima del nivel de este curso. Sin embargo, es deseable incentivar a los estudiantes para que comiencen a iniciarse en este tipo de literatura.

(3) Por limitaciones de tiempo, el profesor deberá escoger una de las aplicaciones mencionadas en el Tema de Ecuaciones Diferenciales y desarrollarla con cierto detalle. Es recomendable hacer alguna mención de las aplicaciones restantes.

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática

Matemática III

Licenciaturas en Biología, Computación, Física, Matemática, Química.

Código: 8208	
Créditos: 6	Requisitos: Matemática II
Horas de teoría: 4	Horas de práctica: 4
Vigente desde 2001-1	

Objetivos

Este es un curso básico de cálculo, que contiene ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden, sistemas lineales de dos ecuaciones diferenciales, series numéricas, una introducción al álgebra lineal y una introducción al cálculo diferencial e integral en dos y tres variables.

El estudiante deberá:

Aprender a resolver ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, así como una amplia variedad de ecuaciones diferenciales que se reducen a éstas.

Aprender a resolver ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes en una variedad amplia de casos.

Aprender a resolver sistemas de dos ecuaciones diferenciales lineales.

Ser capaz de aplicar los conocimientos adquiridos sobre ecuaciones diferenciales para modelar situaciones que se presentan en Física, Biología y Química, tales como problemas de enfriamiento, desintegración radioactiva, problemas de movimiento, crecimiento de especies, etc.

Comprender el concepto de serie, dominar los criterios básicos de convergencia para series de términos positivos. Entender y aplicar el criterio de Leibnitz para series alternadas.

Adquirir las nociones básicas de geometría plana, del espacio y álgebra lineal, necesarias para comprender el cálculo diferencial e integral en dos y tres variables.

Comprender e interpretar desde el punto de vista físico los conceptos de curva y trayectoria, ser capaz de parametrizar una amplia variedad de curvas, comprender e interpretar el concepto de integral de línea. Ser capaz de calcular una amplia variedad de integrales de línea.

Comprender el concepto de campo escalar y los conceptos de límite y continuidad de campos escalares.

Entender el concepto de diferenciabilidad de un campo escalar, reconocer campos escalares diferenciables, saber calcular derivadas parciales usando las reglas usuales de derivación de funciones, saber aplicar la regla de la cadena para la composición de un campo escalar con una curva.

Interpretar geométricamente el gradiente, saber hallar el plano tangente a una superficie, resolver problemas de máximos y mínimos en dos y tres variables sin restricciones y con restricciones.

Comprender los conceptos de integral doble y triple de un campo escalar, saber colocar los límites de integración en regiones no triviales, saber cambiar de coordenadas cartesianas a polares, cilíndricas y esféricas. Saber calcular áreas, volúmenes, centros de masas, etc usando integrales dobles y triples.

Contenido

Tema 1: Ecuaciones diferenciales.

Ecuaciones diferenciales de primer orden. Revisión de los métodos ya estudiados en Matemática II. Ecuaciones con variables separables y reducibles a estas.

Aplicaciones de la ecuación diferencial de primer orden: Crecimiento de poblaciones (exponencial, logístico, limitado). Epidemias. Desintegración radioactiva. Enfriamiento.

Ecuaciones diferenciales lineales de orden 2 con coeficientes constantes. Solución general de la ecuación homogénea. Solución general de la ecuación $ay'' + by' + cy = f(x)$ en los casos en que f es un polinomio, $f(x) = a^x$ y $f(x) = k_1 \operatorname{sen} x + k_2 \cos x$. Aplicaciones: Caída libre, equilibrio de poblaciones, caída libre en un medio resistente.

Sistemas de dos ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Aplicación: competencia entre especies.

Tema 2: Series numéricas.

Series: Definición y ejemplos. Criterios de convergencia para series de términos positivos: comparación, límites, raíz, razón, integral. Series alternadas: criterio de Leibnitz.

Fórmula de Stirling y producto de Wallis.

Tema 3: Nociones de geometría plana, del espacio y álgebra lineal.

Subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Vectores. Producto escalar y vectorial. Ecuación paramétrica de la recta. Representación de subconjuntos definidos mediante ecuaciones y desigualdades sencillas. Superficies en $\mathbb{R}^3$: plano, esfera, elipsoide, cilindro, cono, paraboloide, hiperboloide. Bolas abiertas y bolas cerradas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Idea de abierto, cerrado y frontera.

Distintos sistemas de coordenadas en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$: polares, cilíndricas y esféricas. Transformación de coordenadas. Parametrización de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ y de $\mathbb{R}^3$ en estas coordenadas.

Concepto de transformación lineal (considerar los casos $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, con $n, m \leq 3$). Concepto de base. Matrices. Matriz asociada a una transformación lineal. Producto de matrices. Inversa de una matriz. Autovectores y autovalores. Determinantes 2×2 y 3×3. Diagonalización de matrices. Sistemas de Ecuaciones Lineales.

Tema 4: Curvas en el plano y en el espacio.

Funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$ y de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$. Ejemplos y motivación: movimiento circular uniforme, parabólico, etc. Vector tangente a una curva en términos de las funciones coordenadas. Recta tangente a una curva en términos del vector tangente a dicha curva. Reparametrización y longitud de arco. Trayectoria y forma de la trayectoria de una partícula en movimiento. (Interpretar la reparametrización de una curva como una forma de movimiento a lo largo de esa curva). Integrales de línea. Interpretación como trabajo mecánico.

Tema 5: Campos escalares.

Funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ y de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$ (tales como $f(x+y)$, $f(xy)$, $f(x^2+y^2)$, $f(x/y)$, donde f es identidad, seno, coseno, ln). Dominio y rango de funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ y de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$. Gráfico y representación gráfica de funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$. Curvas y superficies de nivel. Límite a lo largo de una curva de una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$. Introducción al concepto de límite en un punto a través del concepto de límite a lo largo de una curva. Noción de continuidad. Límites iterados. Diferenciabilidad de un campo escalar en un punto. Derivadas parciales y direccionales. Concepto de gradiente. Condición suficiente de diferenciabilidad. Regla de la cadena para la composición de un campo escalar con una aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$ y de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$. Diferenciación de funciones definidas en froma implícita.

Tema 6: Gradiente de un campo escalar y aplicaciones, máximos y mínimos.

Interpretación geométrica del gradiente: Dirección de máximo crecimiento para una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$. Plano tangente a una superficie dada en la forma: (a) $F(x, y, z) = 0$ y (b) $z = f(x, y)$. Ecuación del plano tangente en cada uno de estos casos en términos de las derivadas parciales de F y f.

Máximos y mínimos. Desarrollo de Taylor y criterio del Hessiano en dos variables. Método de los multiplicadores de Lagrange.

Tema 7: Integrales dobles y triples.

Integrales dobles y triples de funciones sencillas, haciendo énfasis en la determinación de los límites de integración en regiones no triviales. Cambio de coordenadas cartesianas a polares, cilíndricas y esféricas. Aplicación a cálculo de áreas, volúmenes, centros de masa, etc. Cálculo de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$.

Bibliografía

[1] Apostol, T. *Calculus Volumen 2.* Editorial Reverté.
[2] Batschelet, E. *Introduction to Mathematics for Life Scientist.* Springer Verlag.
[3] Deminovich, B. *Problemas y ejercicios de Análisis Matemático.* Editorial Paraninfo.
[4] Edwards, C. H. y Penney D. E. *Ecuaciones diferenciales elementales con aplicaciones.* Editorial Prentice Hall Hispanoamericana.
[5] Kiseliov, A., Krasnov, M. y Makarenko, G. *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.* Editorial MIR.
[6] Kreider, D., Kuller, R., Ostberg, D. y Perkins, F. *Introducción an análisis lineal, Parte 1.* Editorial fondo educativo interamericano.
[7] Marsden, J. y Tromba, A. *Cálculo Vectorial.* Editorial Addison-Wesley Iberoamericana
[8] Miranda, Guillermo *Matemática III - Física* Fac. Ciencias. UCV.
[9] Swokowsky, E. W. *Cálculo con Geometría Analítica.* Grupo Editorial Iberoamericana.
[10] Williamson,R., Crowell, R. y Trotter, H. *Cálculo de funciones vectoriales.* Editorial Prentice Hall.

Comentarios

(1) Siempre se debe comenzar el curso por la primera parte del Tema 1 (Ecuaciones Diferenciales de primero y segundo orden) ya que se requiere de inmediato en otras asignaturas de algunas Licenciaturas. Antes de comenzar la segunda parte del Tema 1 (Sistemas de dos ecuaciones diferenciales), a juicio del profesor, se puede adelantar algo de álgebra lineal para una mejor comprensión por parte de los estudiantes.

(2) En el Tema 1 se deben estudiar ejemplos de Física, Química y Biología. En lo que se refiere a los ejemplos de Biología se debe destacar la parte de dinámica de poblaciones, se recomienda el libro de Batschelet ([2]), capítulo 11 para esta parte.

(3) Se recomienda distribuir el tiempo de acuerdo a la siguiente tabla:

Tema 1	tres semanas
Tema 2	dos semanas y media
Tema 3	dos semanas y media
Tema 4	una semana y media
Tema 5	dos semanas y media
Tema 6	dos semanas
Tema 7	dos semanas

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Análisis I

Código: 8401	Código anterior: 22T1
Créditos: 6	Requisitos: Matemática III
Horas de teoría: 4	Horas de práctica: 4
Vigente desde 1993-1	

Contenido

Tema 1: Los números reales.

Axiomas. Propiedades de orden. Supremo. Completitud. Numerabilidad.

Tema 2: Topología de la recta.

Intervalos. Conjuntos abiertos y cerrados. Puntos de acumulación. Teorema de Bolzano-Weierstrass. Conjuntos compactos. Teorema de Heine-Borel. Conjuntos conexos.

Tema 3: Sucesiones.

Convergencia. Sucesiones monótonas. Subsucesiones. Límites superior e inferior de una sucesión. El número e. Sucesiones de Cauchy.

Tema 4: Límites y continuidad de funciones.

Funciones continuas en abiertos y cerrados. Condiciones necesarias y suficientes para continuidad. Continuidad y compacidad. Continuidad uniforme y el teorema de Heine (f continua sobre compacto implica f uniformemente continua). Discontinuidades. Funciones monótonas.

Tema 5: Derivada.

Derivada de una función real. Condición de Lipschitz. Teorema del valor medio. Funciones inversas. Derivadas de orden superior y el teorema de Taylor.

Tema 6: Integral de Riemann.

Definición, funciones integrables, integrales superior e inferior, condición de integrabilidad de Riemann, ejemplos de funciones no integrables. Teorema fundamental del Cálculo, integración por partes.

Tema 7: Series numéricas.

Series infinitas, convergencia absoluta y condicional, reordenamiento. Multiplicación de series.

Tema 8: Sucesiones y series de funciones.

Convergencia uniforme, relación con continuidad, diferenciación e integración. Convergencia de series de funciones. Condiciones suficientes. Teorema de Weierstrass.

Tema 9: Integrales impropias.

Integrales impropias del primer tipo. Valor principal de Cauchy, pruebas de convergencia, integrales y series. Integrales impropias del segundo tipo.

Tema 10: Series de potencia.

Intervalos de convergencia, derivadas. Teorema de Taylor. La función exponencial y las funciones trigonométricas. Series de Fourier.

Bibliografía

[1] APOSTOL,T. *Mathematical Analysis.* Addison-Wesley Publishing Company. (1977).

[2] BRUZUAL, R. Y DOMÍNGUEZ, M. *Cálculo diferencial en una variable.* Publicaciones del Laboratorio de Formas en Grupos, Facultad de Ciencias, UCV. http://euler.ciens.ucv. (Elaborada para Análisis I) (2004).

[3] BRUZUAL, R. Y DOMÍNGUEZ, M. *Cálculo integral en una variable.* Publicaciones del Laboratorio de Formas en Grupos, Facultad de Ciencias, UCV. http://euler.ciens.ucv.ve/ labfg (Elaborada para Análisis I) (2004).

[4] PROTTER, M. H. AND MORREY, C. B. *A First Course in Real Analysis.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag. XII, (1977).

[5] RUDIN, W. *Principles of Mathematical Analysis.*

[6] STROMBERG, H. *An Introduction to Classical Real Analysis.*

[7] WHITE, A. *Real Analysis, An Introduction.*

APÉNDICE B

Instrumentos de Evaluación.

A continuación, se presentan los instrumentos de recolección de información, las cuales se les aplicaron a la muestra elegida.

Los mismos fueron de carácter diagnóstico, donde solamente se recolectó la información para luego tener una idea de cual es la concepción del tema tratado por parte de los estudiantes de los cursos de cálculo básico, de la Licenciatura en Matemática de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela.

Pre-test

Trabajo de licenciatura, Opción Docente
Br. Marcia García
Tutor: Dr. Ramón Bruzual

Pre-test

¿Por qué si $\displaystyle\int_1^e \frac{dt}{t} = 1$ entonces $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$?

El siguiente pre-test es de carácter diagnóstico. Se le agradece ser sincero en sus respuestas, tiene 10 minutos para responder. **No es necesario que escriba su nombre**.

(1) ¿Qué entiende usted como el número e ?

(2) De acuerdo a la definición que usted dió anteriormente explique ¿por qué se cumplen cada una de las siguientes igualdades ?

(a) $\displaystyle e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

(b) $\displaystyle e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

(c) $\displaystyle\int_1^e \frac{dt}{t} = 1$.

Post-test

Trabajo de licenciatura, Opción Docente
Br. Marcia García
Tutor: Dr. Ramón Bruzual

Post-test

$$¿\text{Por qué si } \int_1^e \frac{dt}{t} = 1 \text{ entonces } \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\,?$$

(1) Después de oír esta clase ¿le quedó más claro el por qué si $\int_1^e \frac{dt}{t} = 1$ entonces $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$?

(2) ¿Piensa que se debe incorporar este método a los cursos elementales de Matemáticas II y Análisis I? ¿Por qué ?

(3) ¿Cómo le pareció la calidad de la exposición ?

(a) Muy buena.

(b) Buena.

(c) Regular.

(d) Deficiente.

Encuesta

El número e en la Licenciatura en Matemática
Primer Semestre 2004

El objetivo de esta encuesta es evaluar los conocimientos adquiridos acerca del número e en nuestra Licenciatura. Agradecemos su colaboración, responda de la manera más honesta posible, no es necesario que se identifique.

(1) ¿Qué recuerda cómo definición del número e?

(2) En base a la definición dada anteriormente, explique por qué:

(a) $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$,

(b) $e = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$,

(c) $\ln e = 1$.

APÉNDICE C

Copia del artículo base.

A continuación se presenta una copia del artículo titulado "Maximum Products and lim $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$" de T. Goodman publicado en la revista American Mathematical Monthly. Vol. 93, N° 8, 638-639

THE AMERICAN
MATHEMATICAL MONTHLY

Volume 93, Number 8 October 1986

Contents

(ISSN 0002-9890)

Volume 93, Number 8, October 1986, 593-680

afternoon constructing a non-zero polynomial over the quaternions all of whose values are zero (I think we had some help from Kaplansky), and asking exactly which skew fields it's possible to do this for. We also worked on the Riemann Hypothesis and the Poincaré Conjecture, without notable result.

(I fondly remember when Chris Croke proved the Poincaré Conjecture, modulo two facts that seemed plausible. He showed me the proof, we couldn't find anything wrong with it, and we went to ask Dick Lashof about the status of the two "facts". His response: "If those things were true, you could prove the Poincaré Conjecture".)

It's also true that each problem had an associated meta-problem: concoct a plausible scenario in which a mathematician would need to know the answer to this problem. It was generally our conviction that none of the meta-problems was solvable, but I remember a conversation in which Jon Alperin attacked them all with vigor. As I kept challenging him with more and more contrived and outlandish problems, he kept managing to argue that this, too, was a problem whose solution might someday be valuable. I finally stumped him with the Word Problem. He had to admit that it was inconceivable that this one could have any significance for anything. But I think he liked the problem, anyway.

References

1. R. Daniel Mauldin, ed., The Scottish Book: Mathematics Problems from the Scottish Café, Birkhauser, 1981.
2. Webster's Ninth New Collegiate Dictionary, Merriam-Webster, 1985.

MAXIMUM PRODUCTS AND $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

T. N. T. GOODMAN
Department of Mathematical Sciences, The University, Dundee DD1 4HN, Scotland

In a recent edition of this MONTHLY [1] there appears an article by C. W. Barnes entitled "Euler's constant and e" in which he deduces the existence of Euler's constant from the fact that $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ or, to be more precise, from the inequality

$$e\Big/\left(1+\frac{1}{n}\right) < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e. \tag{1}$$

He also gives a simple and 'natural' proof of (1), asserting that there is a dearth of such proofs in the textbook literature. We give here a very simple proof of (1) that has a motivation that we think is natural and interesting.

We first give the bare bones of the proof and later fill it out with the flesh of motivation. As in Professor Barnes' proof, the only properties we use of e and the logarithmic function are $\ln e = 1$, $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$, and $\ln x^n = n\ln x$ for $n = 1, 2, \ldots$.

Let $f_n(t) = t\ln(ne/t)$, $t > 0$. Then $f_n'(t) = \ln(ne/t) - 1$. So f_n has its maximum value at $t = n$. Thus

$$f_n(n+1) < f_n(n), \quad \text{i.e.,} \quad \left(\frac{ne}{n+1}\right)^{n+1} < \left(\frac{ne}{n}\right)^n, \quad \text{i.e.,} \quad e\Big/\left(1+\frac{1}{n}\right) < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Also

$$f_{n+1}(n) < f_{n+1}(n+1), \quad \text{i.e.,} \quad \left(\frac{(n+1)e}{n}\right)^n < \left(\frac{(n+1)e}{n+1}\right)^{n+1}, \quad \text{i.e.,} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e.$$

The motivation for this proof is the following problem: given a number $X > 1$, how can we maximize the number that can be gained as a product of positive numbers whose sum is X? We first recall the well-known arithmetic mean-geometric mean inequality, which says that for any positive numbers $a_1, \ldots, a_n$,

$$a_1 \cdots a_n \leqslant \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^n. \tag{2}$$

Thus the product will be a maximum when all the numbers are equal and so the problem reduces to finding an integer n that maximizes $(X/n)^n$. Now for $n > X$, $(X/n)^n < (X/1)^1$ and so there must be some integer m at which the maximum occurs. Then

$$(X/(m+1))^{m+1} \leqslant (X/m)^m$$

and so

$$X \leqslant (m+1)\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m.$$

Also

$$(X/(m-1))^{m-1} \leqslant (X/m)^m$$

and so

$$m\left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^{m-1} \leqslant X,$$

where we put

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = 1 \text{ if } n = 1.$$

Now applying (2) with

$$a_1 = \cdots = a_{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1}, a_n = 1,$$

gives

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

and so

$$n\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < (n+1)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{for } n = 1, 2, \ldots.$$

So for any $X > 1$ there is a unique integer m with

$$m\left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^{m-1} \leqslant X < (m+1)\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m. \tag{3}$$

To sum up, the solution to the problem is to divide X into m equal pieces, where m is the unique integer satisfying (3). (In the case $X = m\left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^{m-1}$ we can choose either m or $m-1$.) We note that the size of the pieces thus gained lies between $\left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^{m-1}$ and $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1}$ and so $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (assuming it exists) represents the limit of the size of the pieces as $X \to \infty$.

We have solved the problem using only elementary algebra, but in solving an optimization problem it seems natural to employ the calculus. Now maximizing $(X/n)^n$ is equivalent to maximizing $n\ln(X/n)$ and so we consider the function $f(t) = t\ln(X/t)$. Since $f'(t) = \ln(X/t) - 1$, f has its maximum at $t = X/e$. In general this is not an integer and so the calculus is of no avail in solving this problem. However, in the special case when X/e is an integer n, then n is the unique solution and so must coincide with m in (3). So we have

$$n\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < ne < (n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n},$$

the inequality being strict since the solution is unique. Since this is true for all $n = 1, 2, \ldots$, we have inequality (1).

Reference

1. C. W. Barnes, Euler's constant and e, this MONTHLY, 91(1984) 428-430.

ON CHARACTERIZATIONS OF ANALYTICITY

G. B. FOLLAND
Department of Mathematics, University of Washington, Seattle, WA 98195

For the purposes of this note we adopt the following definition:

DEFINITION. Let U be an open set in the complex plane $\mathbb{C}$. A function $f: U \to \mathbb{C}$ is *analytic* if its complex derivative f' exists and is continuous on U. Equivalently, f is analytic if f is of class C^1 on U (as a function of two real variables) and satisfies the Cauchy-Riemann equation

$$\bar\partial f = 0, \quad \text{where } \bar\partial f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right). \tag{1}$$

The condition that f' be continuous is of course superfluous, and most complex analysis textbooks omit it in defining analyticity. However, there is a pedagogical advantage in the present definition: it enables one to prove Cauchy's theorem, and hence to penetrate to the heart of the subject, with considerably less effort. (For example, one can obtain a version of Cauchy's theorem sufficiently general for most purposes as an immediate corollary of Green's theorem.) Moreover, in the further development of function theory, the continuity of f' is never an issue; it always falls out of the calculations quite automatically.

At some point, however, one may wish to step back and ask whether the hypotheses of the theory can be weakened. The fact that f' need not be assumed continuous is the standard answer to this question. But another answer, more interesting in that it is an instance of a general result about solutions of elliptic differential equations (see [1, Corollary 6.31]), is that any *distribution* solution of the Cauchy-Riemann equation is an analytic function. We now give a simple version of this result which can be presented in a complex analysis class as soon as one has proved Weierstrass's theorem that the uniform limit of analytic functions is analytic.

NOTATION. If U is an open subset of $\mathbb{C}$, $C_0^1(U)$ denotes the space of functions of class C^1 on $\mathbb{C}$ (in the real-variable sense) that vanish outside a compact subset of U. dA denotes the element of area on $\mathbb{C}$. $\bar\partial$ denotes the Cauchy-Riemann operator defined in (1).

DEFINITION. A function $f: U \to \mathbb{C}$ is *weakly analytic* if f is continuous and

$$\int f \cdot \bar\partial\varphi \, dA = 0 \quad \text{for all } \varphi \in C_0^1(U). \tag{2}$$

It is clear that if f is analytic, then f is weakly analytic, for one can integrate by parts: