UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
POSTGRADO EN MATEMÁTICA

FUNCIONES COMPLETAMENTE POSITIVAS Y APLICACIONES A PROBLEMAS DE DILATACIÓN MULTIPARAMÉTRICOS.

Autora: MSc. Mayra Montilla.
Tutor: Dr. Ramón Bruzual.

Tesis Doctoral presentada ante la ilustre Universidad Central de Venezuela para optar al título de Doctor en Ciencias, Mención Matemática.

Caracas, Abril 2012

Agradecimientos

A DIOS, el ser más grande que me ayudó a conseguir esta alegría, porque antes de ser una Profesional quiero ser siempre tu hija, que es el mayor privilegio que puedo tener.

A mi madre que me enseñó el valor del estudio y a valorar lo que tengo.

A mis hermanos por su apoyo incondicional.

A mis familiares y amigos por apoyarme y ofrecerme su amistad sincera.

Con admiración y respeto, un especial agradecimiento al profesor Ramón Bruzual por guiarme en la elaboración de este trabajo, por su apoyo y sus apreciados consejos recibidos durante mi formación profesional.

A los jurados por sus valiosas sugerencias y la revisión detallada del trabajo.

" EL QUE AMA LA EDUCACIÓN AMA EL SABER."

Índice general

Resumen

Se demuestra que todo semigrupo de contracciones con dos parámetros racionales, o con un parámetro racional y otro natural, posee una dilatación unitaria. A partir de estos resultados, se obtiene una nueva demostración de la versión continua del teorema de levantamiento del conmutante y de un teorema de Slociński, que establece que todo semigrupo de contracciones con dos parámetros reales y fuertemente continuo en cero, posee una dilatación unitaria.

También se demuestra una extensión de un teorema de dilatación de Sz.Nagy y Foias, que permite obtener un resultado de dilatación para semigrupos multiparamétricos de operadores, que satisfacen cierta condición de positividad. A partir de este resultado de dilatación se obtiene una versión multiparamétrica del teorema de levantamiento del conmutante.

Introducción

Una técnica muy utilizada para estudiar operadores en espacios de Hilbert es la de representarlos como parte de un operador más simple, cuyo dominio es un espacio de Hilbert más grande. Esta técnica, esencialmente geométrica, es conocida como dilatación. En detalle, sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y

$$L(\mathcal{H}) = \{T : \mathcal{H} \to \mathcal{H} : T \quad \text{es un operador lineal y continuo}\}.$$

Se dice que un operador $V \in L(\mathcal{F})$ es una *dilatación* del operador $T \in L(\mathcal{H})$ si

$$T^n = P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}} V^n|_{\mathcal{H}} \quad (n = 0, 1, 2, 3...)$$

donde $\mathcal{F}$ es un espacio de Hilbert que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y $P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}$ es la proyección ortogonal de $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{H}$.

La notación anterior fue introducida por Sz.-Nagy en [**27**]. Se dice que la dilatación es *unitaria* si V es unitario.

En el año 1953, Sz.-Nagy [**25**] demostró que toda contracción posee una dilatación unitaria. Si se le añade una condición natural de minimalidad, esta dilatación es única, salvo isomorfismos. Los conceptos de dilatación y de minimalidad se extienden de manera natural a familias de operadores, incluyendo semigrupos de operadores.

En el año 1963, Ando [**1**] demostró que todo par de contracciones que conmutan posee una dilatación unitaria minimal, no necesariamente única. En 1968, Sz.-Nagy y Foias [**30**] demostraron el teorema de levantamiento del conmutante, el cual es equivalente al teorema de dilatación de Ando. Luego, en 1970, Parrott [**19**] mostró que el resultado de Ando no puede ser extendido a tres o más contracciones, es decir, en general tres contracciones que conmutan no poseen dilatación unitaria. Sin embargo, bajo ciertas condiciones de positividad, una familia conmutativa de contracciones posee dilatación unitaria, ver por ejemplo el Teorema 9.1 del Capítulo I del libro de Sz. Nagy y Foias [**29**] (Teorema 3.7 en la página 31 del presente trabajo).

Los resultados anteriormente señalados de Sz.-Nagy, Ando y Sz.-Nagy y Foias corresponden con familias de contracciones, con parámetro discreto (en los naturales). De estos teoremas se han dado versiones con parámetro continuo (en la recta real). Con más detalle, se tiene que:

En el año 1954, Sz. Nagy [**26**] demostró que todo semigrupo de contracciones con parámetro en los reales positivos y fuertemente continuo posee dilatación unitaria, lo cual es una versión continua de su primer teorema de dilatación.

En el año 1982, Slociński [**23**] demostró que todo semigrupo de contracciones con dos parámetros reales positivos y fuertemente continuo posee una dilatación unitaria, lo cual es una versión continua del teorema de dilatación de Ando. Para establecer este resultado utiliza el teorema de Ando para encontrar extensiones autoadjuntas y conmutativas de los cogeneradores de los semigrupos uniparamétricos asociados al semigrupo biparamétrico.

En el año 1989, Arocena [**3**] dio una versión continua del teorema del levantamiento del conmutante.

En el año 1985, Ptak [**21**] demostró un resultado de dilatación, que puede interpretarse como una versión continua del Teorema 9.1 del Capítulo I del libro de Sz. Nagy y Foias [**29**].

El presente trabajo está organizado de la siguiente manera:

El Capítulo 1 presenta una breve introducción a las álgebras C^* y aplicaciones completamente positivas, para más detalles sobre este tema se puede ver [**5**],[**11**],[**20**], [**22**].

El Capítulo 2 está dedicado a problemas de dilatación biparamétricos, se demuestra que todo semigrupo de contracciones con parámetro en $\mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_+$ ó $\mathbb{Q}_+ \times \mathbb{N}$, no necesariamente fuertemente continuo, posee dilatación unitaria. Esto permite dar una nueva demostración del teorema ya mencionado de Slociński. También permite demostrar que todo semigrupo de contracciones con parámetro en $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}$ posee dilatación unitaria minimal. Este último resultado puede interpretarse como una versión con un parámetro continuo y uno discreto del teorema de dilatación de Ando y permite dar una nueva demostración de la versión continua del teorema del levantamiento del conmutante dada por Arocena. Estos resultados aparecieron en la publicación [**9**], ver también [**15**].

Los capítulos 3 y 4 están dedicados a problemas de dilatación de familias multiparamétricas de contracciones. Tomando en cuenta el contraejemplo ya mencionado de Parrott, es de esperarse que la situación se complique bastante más en este caso y que se requieran algunas hipótesis adicionales sobre las familias de contracciones.

Para el caso multiparamétrico se considerarán conjuntos de operadores de la forma $\{T(s,r)\}_{(s,r)\in \mathbb{R}_{+\,o}^{\Delta_1}\times \mathbb{N}_o^{\Delta_2}} \subset L(\mathcal{H})$, que satisfacen:

(a) $T(0,0) = I$ (operador identidad),
(b) $T((s,r)+(s',r')) = T(s,r)T(s',r')$ para todo $(s,r),(s',r') \in \mathbb{R}_{+\,o}^{\Delta_1} \times \mathbb{N}_o^{\Delta_2}$,
(c) $\lim_{(s,r)\to(s_0,r_0)} \|T(s,r)h - T(s_0,r_0)h\| = 0$ para todo $h \in \mathcal{H}$, $(s_0,r_0) \in \mathbb{R}_{+\,o}^{\Delta_1} \times \mathbb{N}_o^{\Delta_2}$.

En lo anterior Δ_1 y Δ_2 son conjuntos no vacíos, $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ y $\mathbb{R}_{+\,o}^{\Delta_1}$ ($\mathbb{N}_o^{\Delta_2}$) es el conjunto de las funciones definidas en Δ_1 (Δ_2) a valores en $\mathbb{R}_+$ ($\mathbb{N}$), con soporte finito.

Un conjunto $\{T(s,r)\}_{(s,r)\in \mathbb{R}_{+\,o}^{\Delta_1}\times \mathbb{N}_o^{\Delta_2}}$ que satisface (a), (b) y (c) se denomina *semigrupo de operadores con parámetro en* $\mathbb{R}_{+\,o}^{\Delta_1}\times \mathbb{N}_o^{\Delta_2}$ *(o semigrupo multiparamétrico), fuertemente continuo.*

El Capítulo 3 contiene resultados básicos sobre dilataciones unitarias regulares de sistemas conmutativos de contracciones, cálculo funcional para estos sistemas, se extiende el Teorema 9.1 del Capítulo I del libro de Sz. Nagy-Foias [**29**] a sistemas conmutativos de operadores de la forma $\{\{A_w\}_{w\in\Delta_1}, \{\widehat{A}_\kappa\}_{\kappa\in\Delta_2}\}$ donde Δ_1 y Δ_2 son conjuntos no vacíos y se demuestran unos lemas que serán fundamentales para demostrar los resultados del próximo capítulo.

En el Capítulo 4 se obtiene un resultado general de dilatación para semigrupos de operadores con parámetro en $\mathbb{R}_{+\,o}^{\Delta_1}\times \mathbb{N}_o^{\Delta_2}$, que contiene al teorema de Ptak [**21**]. A partir de este último resultado se obtiene una versión continua de la extensión del teorema del levantamiento del conmutante dada por M*ü*ller en [**17**].

Es importante destacar que una de las principales herramientas utilizadas en este trabajo es la teoría de extensión y representación de funciones completamente positivas. El concepto de aplicaciones completamente positivas en álgebras C^* fue introducido por Stinespring en su trabajo [**24**]. El estudio de la relación entre este tipo de aplicaciones y la teoría de dilatación fue profundizado por Arveson (ver [**4**] y [**20**]) quien trabajó en subconjuntos de álgebras C^* denominados sistemas operadores y demostró que una aplicación completamente positiva, definida en un sistema operador y a valores operadores, puede ser extendida a una aplicación completamente positiva en toda el álgebra.

El esquema que se ha seguido para muchas de las demostraciones es el de asociar una aplicación completamente positiva, definida en un sistema operador, a una subfamilia adecuada de contracciones, aplicar el teorema de extensión de Arveson, el teorema de representación de Stinespring y utilizar argumentos adecuados de densidad y continuidad.

Capítulo 1

Álgebras C^* y aplicaciones completamente positivas.

Este capítulo es preliminar, se dan ciertas definiciones y se exponen resultados básicos que serán necesarios para la lectura de los próximos capítulos.

Como es usual $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ representan el conjunto de los números naturales, enteros, racionales, reales y complejos, respectivamente.

1. Álgebras C^*.

Definición 1.1. Un *álgebra* $\mathcal{A}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ en el que está definido un producto $\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ que satisface:

(i) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$,
(ii) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$,
(iii) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$,
(iv) $\lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b)$

para todo $a, b, c \in \mathcal{A}$ y para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra, una *involución* en $\mathcal{A}$ es una aplicación $a \mapsto a^*$ de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}$ que cumple con las siguientes propiedades:

(i) $a^{**} = a$,
(ii) $(\alpha a + \lambda b)^* = \overline{\alpha} a^* + \overline{\lambda} b^*$,
(iii) $(a \cdot b)^* = b^* \cdot a^*$.

para todo $a, b \in \mathcal{A}$ y para todo $\alpha, \lambda \in \mathbb{C}$.

El elemento a^* es llamado el *adjunto* de a.

Definición 1.2. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra con involución y $\mathcal{B}$ un subconjunto de $\mathcal{A}$, se dice que $\mathcal{B}$ es una *subálgebra con involución* de $\mathcal{A}$ cuando $\mathcal{B}$ es una variedad lineal y $a \cdot b, a^* \in \mathcal{B}$ para todo $a, b \in \mathcal{B}$.

Definición 1.3. Un *álgebra de Banach* $\mathcal{A}$ es un álgebra en la que está definida una norma $\|.\|_{\mathcal{A}}$, tal que $(\mathcal{A}, \|.\|_{\mathcal{A}})$ es un espacio de Banach y satisface:

$$\|a \cdot b\|_{\mathcal{A}} \leq \|a\|_{\mathcal{A}} \, \|b\|_{\mathcal{A}}$$

para todo $a, b \in \mathcal{A}$.

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach con involución y

$$\|a^* \cdot a\|_{\mathcal{A}} = \|a\|_{\mathcal{A}}^2$$

para todo $a \in \mathcal{A}$, se dice que $\mathcal{A}$ es un *álgebra C^**.

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra C^* y $a \in \mathcal{A}$, se cumple que

$$\|a\|_{\mathcal{A}} = \|a^*\|_{\mathcal{A}}.$$

Definición 1.4. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^*, se dice que:

(i) $\mathcal{A}$ *tiene unidad* cuando existe un elemento $e \in \mathcal{A}$ tal que

$$e \cdot a = a \cdot e = a$$

para todo $a \in \mathcal{A}$.

El elemento e es único. Es usual suponer que $\|e\|_{\mathcal{A}} = 1$ y se satisface que $e^* = e$.

(ii) $\mathcal{A}$ es *conmutativa* si el producto $\cdot$ es conmutativo.

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra C^* con unidad y $a \in \mathcal{A}$, se dice que a es *invertible* en $\mathcal{A}$ si existe $b \in \mathcal{A}$ tal que

$$a \cdot b = b \cdot a = e.$$

El elemento b se denotará por a^{-1}.

Observación 1.5. Si $\mathcal{A}$ es un álgebra C^* con unidad entonces la norma en $\mathcal{A}$ es única (ver [**5**, página 257, ejercicio 60.11]).

Definición 1.6. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con unidad e y $a \in \mathcal{A}$, se dice que:

(i) a es *normal* si $a \cdot a^* = a^* \cdot a$.

(ii) a es *autoadjunto* si $a = a^*$.

(iii) a es *unitario* si $a \cdot a^* = a^* \cdot a = e$.

Notación. Si $\mathcal{A}$ es un álgebra C^* con unidad y $a \in \mathcal{A}$, para $n \in \mathbb{N}$, a^n es el producto de a consigo mismo, n veces. Para $n = 0$ se define $a^0 = e$. Si a es invertible, se define $a^{-n} = (a^{-1})^n$.

A continuación se dan algunos ejemplos de álgebras C^* que son básicos en el presente trabajo.

Ejemplos.

a) $\mathbb{C}$ con el producto usual de números complejos, con elemento unidad $1 + i0 = 1$, con la norma dada por el valor absoluto y con involución: $z^* = \overline{z}$ para $z \in \mathbb{C}$, es un álgebra C^* conmutativa con unidad.

b) Sea X un espacio de Hausdorff compacto, $X \neq \emptyset$ y

$$\mathcal{C}(X, \mathbb{C}) = \{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ es continua en } X\}.$$

Con las siguientes convenciones se obtiene que $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ es un álgebra C^* conmutativa con unidad.

- Para $f, g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$, se define el producto

$$(f \cdot g)(x) = f(x)\, g(x) \quad \text{para todo} \quad x \in X.$$

- El elemento unidad es la función constantemente igual a uno,

$$1(x) = 1 \quad \text{para todo} \quad x \in X.$$

- Para $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$, la norma está dada por:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)| = \max_{x \in X} |f(x)| \quad \text{(norma uniforme)}.$$

- Para $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$, el adjunto de f está dado por

$$f^*(x) = \overline{f}(x) = \overline{f(x)} \quad \text{para todo} \quad x \in X.$$

c) Sea

$$\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) = \{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} : f \text{ es continua y acotada}\}.$$

Con las siguientes convenciones se obtiene que $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ es un álgebra C^* conmutativa con unidad.

- Para $f, g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$, se define el producto

$$(f \cdot g)(x, y) = f(x, y)\, g(x, y) \quad \text{para todo} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- El elemento unidad es la función constantemente igual a uno,

$$1(x, y) = 1 \text{ para todo} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- Para $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$, la norma está dada por:

$$\|f\| = \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} |f(x, y)|.$$

- Para $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$, el adjunto de f está dado por

$$f^*(x, y) = \overline{f}(x, y) = \overline{f(x, y)} \quad \text{para todo} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

d) Si $\mathcal{A}$ es un álgebra C^*, toda subálgebra con involución y cerrada en $\mathcal{A}$ es un álgebra C^*.

e) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo (sin considerar el espacio trivial $\mathcal{H} = \{0\}$) y

$$L(\mathcal{H}) = \{T : \mathcal{H} \to \mathcal{H} : T \,\text{es un operador lineal y acotado}\,\}.$$

Con las siguientes convenciones se obtiene que $L(\mathcal{H})$ es un álgebra C^* no conmutativa con unidad.

- Se define el producto como la composición de operadores.
- El elemento unidad es el operador identidad $I_{\mathcal{H}}$, definido por

$$I_{\mathcal{H}}(h) = h \quad \text{para todo}\, h \in \mathcal{H}.$$

- Para $T \in L(\mathcal{H})$, la norma está dada por:

$$\|T\|_{L(\mathcal{H})} = \sup_{\|h\|=1} \|T(h)\|.$$

- Para $T \in L(\mathcal{H})$, el adjunto de T es el operador $T^* \in L(\mathcal{H})$ tal que

$$\langle T(h), h' \rangle_{\mathcal{H}} = \langle h, T^*(h') \rangle_{\mathcal{H}}$$

para todo $h, h' \in \mathcal{H}$.

En lo que sigue, al referirnos a espacios de Hilbert se trata de espacios de Hilbert complejos.

Definición 1.7. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Sea $T \in L(\mathcal{H})$, se dice que T es:

(i) una *contracción* si $\|Th\|_{\mathcal{H}} \leq \|h\|_{\mathcal{H}}$ para todo $h \in \mathcal{H}$.
(ii) una *isometría* si $\|Th\|_{\mathcal{H}} = \|h\|_{\mathcal{H}}$ para todo $h \in \mathcal{H}$.

Observación 1.8. Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T \in L(\mathcal{H})$.

(i) T es una isometría si y sólo si $T^*T = I_{\mathcal{H}}$.
(ii) De acuerdo a la Definición 1.6, T es unitario si y sólo si $T^*T = TT^* = I_{\mathcal{H}}$. Es importante destacar que T es unitario si y sólo si T es una isometría sobreyectiva.

2. El álgebra $M_{n\times n}(\mathcal{A})$.

Sean $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con unidad, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $M_{n\times n}(\mathcal{A})$ el conjunto de las matrices $n \times n$ con entradas en $\mathcal{A}$. Con el producto usual de matrices y la involución dada por

$$([a_{ij}]_{i,j=1}^n)^* = [a_{ji}^*]_{i,j=1}^n$$

para $[a_{ij}]_{i,j=1}^n \in M_{n\times n}(\mathcal{A})$, se obtiene que $M_{n\times n}(\mathcal{A})$ es un álgebra con involución.

A continuación se va a probar que es posible definir una norma en $M_{n\times n}(\mathcal{A})$ con la cual adquiere estructura de álgebra C^*. Por la Observación 1.5, esta norma es única y por lo tanto no es ambiguo referirse a $M_{n\times n}(\mathcal{A})$ como un álgebra C^*.

Por el teorema de Gelfand-Naimark-Segal (ver [**5**, Teorema 62.1]) existe un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tal que $\mathcal{A}$ es isométricamente isomorfa a una subálgebra con involución y cerrada $\mathcal{B}$ de $L(\mathcal{H})$. Entonces, se puede identificar $M_{n\times n}(\mathcal{A})$ con $M_{n\times n}(\mathcal{B}) \subset M_{n\times n}(L(\mathcal{H}))$.

Si $[T_{ij}]_{i,j=1}^n \in M_{n\times n}(\mathcal{B})$, escribiendo:

$$[T_{ij}](h_1, \ldots, h_n) = (T_{11}(h_1) + \cdots + T_{1n}(h_n), \ldots, T_{n1}(h_1) + \cdots + T_{nn}(h_n))$$

para todo $h_k \in \mathcal{H}\,(k = 1, \ldots, n)$ y considerando la norma

$$\|(h_1, ..., h_n)\|_{\mathcal{H}^n}^2 = \|h_1\|_{\mathcal{H}}^2 + ... + \|h_n\|_{\mathcal{H}}^2$$

en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}^n = \mathcal{H} \oplus \cdot\overset{n}{\cdot}\cdot \oplus \mathcal{H}$, se obtiene que la matriz $[T_{ij}]_{i,j=1}^n \in L(\mathcal{H}^n)$.

Esta identificación induce una norma $\|.\|_{n\times n}$ en $M_{n\times n}(\mathcal{A})$ (ver el Ejemplo (e) de álgebras C^*). Con esta norma, $M_{n\times n}(\mathcal{A})$ es un álgebra C^*.

Luego, $M_{n\times n}(\mathcal{A})$ es un álgebra C^* con unidad, que en general no es conmutativa.

Ejemplo.

Sean $\mathcal{A} = \mathbb{C}$ y $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n \in M_{n\times n}(\mathcal{A})$, escribiendo:

$$Az = (a_{11}z_1 + \cdots + a_{1n}z_n, \ldots, a_{n1}z_1 + \cdots + a_{nn}z_n)$$

para $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, usando el producto interno

$$\langle z, w\rangle_n = \sum_{k=1}^n z_k\overline{w_k}$$

donde $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ y la norma

$$\|z\|_n^2 = \langle z, z\rangle_n,$$

entonces

$$\|A\|_{n\times n} = \sup_{\|z\|_n=1} \|Az\|_n.$$

En particular, si $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$, entonces

$$\|A\|_{2\times 2} = \sup_{|z_1|^2+|z_2|^2=1} |z_2| = 1.$$

3. Cálculo funcional para funciones continuas.

En esta sección se da una breve introducción a la teoría de Gelfand para álgebras C^* conmutativas y su relación con el cálculo funcional.

Definición 1.9. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad. Sea $a \in \mathcal{A}$, el *espectro* de a es:

$$\sigma_{\mathcal{A}}(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda e \text{ no es invertible } \}.$$

Observación 1.10. Si el álgebra $\mathcal{A}$ es una subálgebra de un álgebra $\mathcal{B}$, puede ocurrir que algún elemento $a \in \mathcal{A}$ no es invertible en $\mathcal{A}$ pero es invertible en $\mathcal{B}$. Por lo tanto, el espectro de a depende del álgebra.

Siempre se cumple que $\sigma_{\mathcal{B}}(a) \subset \sigma_{\mathcal{A}}(a)$.

Si $\mathcal{B}$ es un álgebra C^* con unidad e y $\mathcal{A}$ es una subálgebra con involución y cerrada de $\mathcal{B}$ tal que $e \in \mathcal{A}$, entonces

$$\sigma_{\mathcal{A}}(a) = \sigma_{\mathcal{B}}(a)$$

para todo $a \in \mathcal{A}$.

Se tiene que $\sigma_{\mathcal{A}}(a)$ es un espacio de Hausdorff compacto no vacío (ver, por ejemplo, [**11**, página 41]).

A continuación se dan algunos ejemplos de espectros.

Ejemplos.

a) Para $\mathcal{A} = \mathbb{C}$, sea $z \in \mathbb{C}$ entonces

$$\sigma_{\mathcal{A}}(z) = \{z\}.$$

b) Para $\mathcal{A} = M_{n\times n}(\mathbb{C})$, sea $A \in \mathcal{A}$ entonces

$$\sigma_{\mathcal{A}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(A - \lambda I) = 0\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ es autovalor de } A\}.$$

c) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\mathcal{A} = L(\mathcal{H})$. Sea $T \in L(\mathcal{H})$, entonces

$$\sigma_{\mathcal{A}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ no es invertible}\}.$$

El elemento $T - \lambda I$ no es invertible si $T - \lambda I$ no es acotado inferiormente o $\text{Rango}(T - \lambda I) \neq \mathcal{H}$.

d) Sea X un espacio de Hausdorff compacto, $X \neq \emptyset$ y $\mathcal{A} = \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$. Sea $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$, entonces

$$\sigma_{\mathcal{A}}(f) = \{f(x) : x \in X\}.$$

e) Si $\mathcal{A} = \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ y $f \in \mathcal{A}$, entonces

$$\sigma_{\mathcal{A}}(f) = \overline{\{f(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}}.$$

Definición 1.11. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras C^* con unidades $e_{\mathcal{A}}, e_{\mathcal{B}}$, respectivamente.

Una aplicación $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un *homomorfismo unital* * si:

(i) ψ es un homomorfismo de álgebras,

(ii) ψ es unital, es decir, $\psi(e_{\mathcal{A}}) = e_{\mathcal{B}}$,

(iii) ψ es una aplicación *, es decir, $\psi(a^*) = \psi(a)^*$ para todo $a \in \mathcal{A}$.

Se dice que $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es una *aplicación isométrica* si

$$\|\psi(a)\|_{\mathcal{B}} = \|a\|_{\mathcal{A}} \text{ para todo } a \in \mathcal{A}.$$

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra C^* conmutativa con unidad y

$$\mathcal{M}_{\mathcal{A}} = \{\psi : \mathcal{A} \to \mathbb{C} : \psi \text{ es un homomorfismo unital}\},$$

entonces, $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ es un espacio de Hausdorff no vacío, compacto con la topología débil*. La demostración de esta propiedad puede encontrarse en [**22**, páginas 277 y 280].

Por el teorema de Gelfand-Naimark (ver [**22**, página 289] y [**11**, página 92]), la *transformada de Gelfand*, que es la aplicación $\Gamma : \mathcal{A} \to \mathcal{C}(\mathcal{M}_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})$ dada por

$$\Gamma(a)(\psi) = \psi(a)$$

para todo $a \in \mathcal{A}$ y $\psi \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$, es un isomorfismo isométrico *.

Para el caso particular en que $\mathcal{A} = L(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, esta transformada da origen a un cálculo funcional, para funciones continuas, de la siguiente manera: Si $T \in L(\mathcal{H})$ es normal y $f \in \mathcal{C}(\sigma(T), \mathbb{C})$, entonces

$$f(T) = \Gamma^{-1}(f \circ \Gamma(T)).$$

Ejemplos.

1) Si $f(z) = z^n \quad (z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N})$, entonces $f(T) = T^n$.

2) Sea $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Si $U \in L(\mathcal{H})$ es unitario entonces $\sigma(U) \subset \mathbb{T}$. Si $f(z) = z^n \quad (z \in \mathbb{T}, n \in \mathbb{Z})$, entonces $f(U) = U^n$.

4. Aplicaciones completamente positivas.

Definición 1.12. Sean $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con unidad y $a \in \mathcal{A}$, se dice que a es *positivo* si $a = a^*$ y $\sigma_{\mathcal{A}}(a) \subset [0, \infty)$, o equivalentemente, si existe $b \in \mathcal{A}$ tal que $a = b^* \cdot b$.

En este caso se escribirá $a \geq 0$.

Ejemplo.

Sea $T \in L(\mathcal{H})$, se obtiene que T es positivo si y sólo si $\langle T(h), h\rangle_{\mathcal{H}} \geq 0$ para todo $h \in \mathcal{H}$.

Se puede probar que T es una contracción si y sólo si $I - T^*T \geq 0$.

Definición 1.13. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras C^* con unidad y $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ una aplicación lineal, se dice que φ es una *aplicación positiva* si $\varphi(a) \geq 0$ para todo $a \in \mathcal{A}$, $a \geq 0$.

Para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sea φ_n la aplicación de $M_{n\times n}(\mathcal{A})$ a $M_{n\times n}(\mathcal{B})$ dada por:

$$\varphi_n(A) = [\varphi(a_{ij})]_{i,j=1}^n$$

para $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n \in M_{n\times n}(\mathcal{A})$.

Se tiene que φ_n es una aplicación lineal debido al hecho de que φ es una aplicación lineal y por las propiedades de suma de matrices y el producto de una matriz por un escalar.

Se dice que φ es *completamente positiva* si para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n \in M_{n\times n}(\mathcal{A})$, $A \geq 0$ se tiene que $\varphi_n(A) = [\varphi(a_{ij})]_{i,j=1}^n \geq 0$.

Observación 1.14. Claramente toda aplicación completamente positiva es positiva. A continuación se da un ejemplo de una aplicación positiva que no es completamente positiva.

El conjunto $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ es un álgebra C^* (ya que se identifica con el espacio $L(\mathbb{C}^2)$). Sea $\varphi : M_{2\times 2}(\mathbb{C}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ la aplicación definida por

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \overline{z}_{11} & \overline{z}_{21} \\ \overline{z}_{12} & \overline{z}_{22} \end{bmatrix}.$$

Se tiene que φ es positiva ya que una matriz es positiva si y sólo si su transpuesta conjugada lo es (ver la Definición 1.12).

Se va a probar que φ no es completamente positiva, para esto basta ver que φ_2 no es positiva. Usando la identificación natural entre $M_{2\times 2}(M_{2\times 2}(\mathbb{C}))$ y $M_{4\times 4}(\mathbb{C})$ se tiene que la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es positiva porque sus autovalores son positivos, pero

$$\varphi_2\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y la matriz del lado derecho de la igualdad no es positiva porque tiene un autovalor negativo.

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. En general, un teorema de dilatación es un resultado que caracteriza alguna clase de aplicaciones en $L(\mathcal{H})$ como compresiones (o proyecciones) a $\mathcal{H}$ de aplicaciones en $L(\mathcal{F})$ con mejores propiedades, donde $\mathcal{F}$ es un espacio de Hilbert que contiene a $\mathcal{H}$.

Uno de los teoremas de dilatación más generales es el teorema de representación de Stinespring (ver [**24**],[**20**]) el cual caracteriza las aplicaciones completamente positivas de un álgebra C^* en $L(\mathcal{H})$, como proyecciones de homomorfismos*.

Teorema 1.15 (Stinespring [**24**])**.** *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con unidad e, sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\varphi : \mathcal{A} \to L(\mathcal{H})$ una aplicación lineal*. Una condición necesaria y suficiente para que φ tenga la forma:*

$$\varphi(a) = J^*\psi(a)J$$

para todo $a \in \mathcal{A}$, donde $J : \mathcal{H} \to \mathcal{F}$ es un operador lineal y acotado, $\mathcal{F}$ es un espacio de Hilbert y $\psi : \mathcal{A} \to L(\mathcal{F})$ es un homomorfismo unital *, es que φ sea completamente positiva.

Observación 1.16. En el teorema anterior como $\varphi(e) = J^*J$, si φ es unital entonces J es una isometría. Luego, $J : \mathcal{H} \to J(\mathcal{H})$ es un isomorfismo isométrico y como $J(\mathcal{H}) \subset \mathcal{F}$, se puede identificar $\mathcal{H}$ con el subespacio cerrado $J(\mathcal{H})$. Con esta identificación,

$$J^* = P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}$$

donde $P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}$ es la proyección ortogonal de $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{H}$, de donde

$$\varphi(a) = P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}\psi(a)|_{\mathcal{H}}$$

para todo $a \in \mathcal{A}$.

Definición 1.17. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* y S un subconjunto de $\mathcal{A}$, se define

$$S^* = \{a \in \mathcal{A} : a^* \in S\}.$$

Se dice que S es *autoadjunto* si $S = S^*$.

Definición 1.18. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con unidad e. Se dice que S es un *sistema operador* en $\mathcal{A}$ si S es una variedad lineal de $\mathcal{A}$, es autoadjunto y contiene la unidad e.

Si $a \in \mathcal{A}$, se dice que a es un elemento positivo de S si $a \in S$ y a es positivo en $\mathcal{A}$.

Ejemplo. El conjunto

$$S_{\mathbb{T}^2} = \left\{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^2, \mathbb{C}) : f(z,w) = \sum_{k,j=0}^{N} (a_{kj} z^k w^j + b_{kj} z^{-k} w^{-j}); N \in \mathbb{N}; a_{kj}, b_{kj} \in \mathbb{C} \right\}$$

es un sistema operador en $\mathcal{C}(\mathbb{T}^2, \mathbb{C})$.

Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son álgebras C^* con unidad y S es un sistema operador en $\mathcal{A}$, la definición de aplicación completamente positiva $\varphi : S \to \mathcal{B}$ es análoga a la Definición 1.13.

El teorema de extensión de Arveson (ver [**4**],[**20**]) dice que, bajo ciertas condiciones, una aplicación completamente positiva definida en un sistema operador se puede extender a una aplicación completamente positiva en toda el álgebra. En detalle,

Teorema 1.19 (Arveson [**4**])**.** *Sean $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con unidad, $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $S \subset \mathcal{A}$ un sistema operador.*

Si $\phi : S \to L(\mathcal{H})$ es una aplicación completamente positiva, entonces existe una aplicación completamente positiva $\varphi : \mathcal{A} \to L(\mathcal{H})$ que extiende a ϕ.

Capítulo 2

Problemas de dilatación biparamétricos y aplicaciones.

En este capítulo se exponen resultados relacionados con problemas de dilatación biparamétricos. Algunos de los resultados y ejemplos que se dan motivan lo expuesto en los próximos capítulos.

Notación. Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{F}$ espacios de Hilbert. Si $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ y $\mathcal{T} \subset L(\mathcal{H})$, se denotará por $\bigvee_{A\in\mathcal{T}} A(\mathcal{H})$ el subespacio cerrado de $\mathcal{F}$ generado por los elementos de la forma $A(h)$, donde $A \in \mathcal{T}, h \in \mathcal{H}$. Es decir,

$$\bigvee_{A\in\mathcal{T}} A(\mathcal{H}) = \overline{\left\{\sum_{k=1}^{N} A_k(h_k) : N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}; A_k \in \mathcal{T}; h_k \in \mathcal{H}; k = 1, ..., N\right\}}. \tag{2.1}$$

1. Representaciones unitarias y semigrupos de operadores.

En lo que sigue, sea $(\Gamma, +, 0)$ un grupo abeliano con elemento neutro 0.

Definición 2.1. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Una *representación de* Γ en $L(\mathcal{H})$ es una aplicación $U : \Gamma \to L(\mathcal{H})$, tal que:

(i) $U(s_1 + s_2) = U(s_1)U(s_2)$ para todo $s_1, s_2 \in \Gamma$,

(ii) $U(0) = I_{\mathcal{H}}$.

Se dice que $\{U(s)\}_{s\in\Gamma} \subset L(\mathcal{H})$ es una *representación unitaria* si cada operador $U(s)$ es unitario.

En este caso $U(-s) = U(s)^*$ para todo $s \in \Gamma$.

Definición 2.2. Si Γ es un grupo topológico y $\{U(s)\}_{s\in\Gamma} \subset L(\mathcal{H})$ es una representación se dice que $\{U(s)\}_{s\in\Gamma}$ es

(i) *fuertemente continua* (*fuertemente continua en* 0) si, para cada $h \in \mathcal{H}$, la aplicación $s \mapsto U(s)h$ de Γ en $\mathcal{H}$ es continua en todo Γ (continua en 0),

(ii) *débilmente continua* (*débilmente continua en* 0) si, para cada $h, h' \in \mathcal{H}$, la aplicación $s \mapsto \langle U(s)h, h'\rangle_{\mathcal{H}}$ de Γ en $\mathbb{C}$ es continua en todo Γ (continua en 0),

(iii) *uniformemente fuertemente continua* si, para cada $h \in \mathcal{H}$, la aplicación $s \mapsto U(s)h$ de Γ en $\mathcal{H}$ es uniformemente continua en Γ.

Ejemplo.

Sea $A \in L(\mathcal{H})$ autoadjunto. Para $s \in \mathbb{R}$ sea $U(s) = e^{isA}$. Entonces, $\{U(s)\}_{s\in\mathbb{R}}$ es una representación unitaria de $\mathbb{R}$ en $L(\mathcal{H})$, fuertemente continua en 0.

Observación 2.3. Si Γ es un grupo topológico y $\{U(s)\}_{s\in\Gamma} \subset L(\mathcal{H})$ es una representación unitaria débilmente continua entonces también es fuertemente continua en 0. Esta propiedad se obtiene usando que, si $h \in \mathcal{H}$ y $s \in \Gamma$ entonces

$$\|U(s)h - h\|^2_{\mathcal{H}} \leq 2\|h\|^2_{\mathcal{H}} - 2Re\langle U(s)h, h\rangle_{\mathcal{H}}.$$

Supóngase que d es una métrica en Γ que es invariante por traslaciones, es decir

$$d(s + s_o, s' + s_o) = d(s, s')$$

para todo $s, s', s_o \in \Gamma$, entonces Γ es un grupo topológico con la topología inducida por d.

En este caso, las representaciones unitarias tienen las siguientes propiedades que se obtienen fácilmente a partir de la Definición 2.2.

Proposición 2.4. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, Γ un grupo topológico con la topología inducida por d y $\{U(s)\}_{s\in\Gamma}$ una representación unitaria de Γ en $L(\mathcal{H})$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\{U(s)\}_{s\in\Gamma}$ *es débilmente continua en 0.*
(b) $\{U(s)\}_{s\in\Gamma}$ *es débilmente continua.*
(c) $\{U(s)\}_{s\in\Gamma}$ *es fuertemente continua.*
(d) $\{U(s)\}_{s\in\Gamma}$ *es uniformemente fuertemente continua.*

Si Γ_1 es un semigrupo y $T : \Gamma_1 \to L(\mathcal{H})$ es una aplicación que satisface (i) para $s_1, s_2 \in \Gamma_1$ y (ii) de la Definición 2.1, se dice que $\{T(s)\}_{s\in\Gamma_1} \subset L(\mathcal{H})$ es un *semigrupo de operadores con parámetro en* Γ_1.

Ejemplos.

1) Sea $A \in L(\mathcal{H})$. Para $n \in \mathbb{N}$ sea $T(n) = A^n$. Entonces, $\{T(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un semigrupo de operadores con parámetro en $\mathbb{N}$.
2) Sea $\{A_1, A_2\} \subset L(\mathcal{H})$ un par de contracciones que conmutan. Para $n, m \in \mathbb{N}$ sea $T(n, m) = A_1^n A_2^m$. Entonces, $\{T(n, m)\}_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ es un semigrupo biparamétrico de operadores.

La definición de semigrupo fuertemente (débilmente) continuo es análoga a la parte (i) y (ii) de la Definición 2.2.

En lo que sigue, sea $(\Gamma_1, +)$ un sub-semigrupo del grupo $(\Gamma, +)$.

Definición 2.5. Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{F}$ espacios de Hilbert, sean $\{T(s)\}_{s\in\Gamma_1} \subset L(\mathcal{H})$ un semigrupo de operadores con parámetro en Γ_1 y $\{U(s)\}_{s\in\Gamma} \subset L(\mathcal{F})$ una representación de Γ en $L(\mathcal{F})$.

Se dice que $\{U(s)\}_{s\in\Gamma}$ es una *dilatación unitaria* de $\{T(s)\}_{s\in\Gamma_1}$ si $\mathcal{F}$ contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado, la representación $\{U(s)\}_{s\in\Gamma}$ es unitaria y

$$T(s) = P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}} U(s)|_{\mathcal{H}} \quad (s \in \Gamma_1)$$

donde $P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}$ es la proyección ortogonal de $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{H}$.

Si además

$$\mathcal{F} = \bigvee_{s\in\Gamma} U(s)(\mathcal{H}),$$

se dice que la dilatación es *minimal*.

De manera análoga se define la *dilatación isométrica minimal*.

Observación 2.6. Si $\{U(s)\}_{s\in\Gamma} \subset L(\mathcal{F})$ es dilatación unitaria de $\{T(s)\}_{s\in\Gamma_1} \subset L(\mathcal{H})$, entonces $\{U(s)^*\}_{s\in\Gamma} \subset L(\mathcal{F})$ es dilatación unitaria de $\{T(s)^*\}_{s\in\Gamma_1} \subset L(\mathcal{H})$.

Observación 2.7. Si un semigrupo de operadores posee una dilatación unitaria, entonces posee una dilatación unitaria minimal. Más precisamente, si $\{U(s)\}_{s\in\Gamma} \subset L(\mathcal{F})$ es dilatación unitaria de $\{T(s)\}_{s\in\Gamma_1} \subset L(\mathcal{H})$, el subespacio

$$\mathcal{F}' = \bigvee_{s\in\Gamma} U(s)(\mathcal{H})$$

es invariante por $U(s)$ para cada $s \in \Gamma$ (porque el conjunto $\{U(s)(\mathcal{H})\}_{s\in\Gamma}$ es invariante por $U(s)$) y contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado. Así, $\{U(s)|_{\mathcal{F}'}\}_{s\in\Gamma}$ es dilatación unitaria de $\{T(s)\}_{s\in\Gamma_1}$, que además es minimal, es decir,

$$\mathcal{F}' = \bigvee_{s\in\Gamma} U(s)|_{\mathcal{F}'}(\mathcal{H}).$$

Observación 2.8. Si un semigrupo de operadores posee una dilatación unitaria, entonces posee una dilatación isométrica minimal: Si $\{U(s)\}_{s\in\Gamma} \subset L(\mathcal{F})$ es dilatación unitaria de $\{T(s)\}_{s\in\Gamma_1} \subset L(\mathcal{H})$ y $V(s) = U(s)_{|\mathcal{G}}$ para $s \in \Gamma_1$ donde $\mathcal{G} = \bigvee_{s\in\Gamma_1} U(s)(\mathcal{H})$ entonces $\{V(s)\}_{s\in\Gamma_1}$ es dilatación isométrica minimal de $\{T(s)\}_{s\in\Gamma_1} \subset L(\mathcal{H})$.

Definición 2.9. Sean $\mathcal{V} = \{V(s)\}_{s\in\Gamma} \subset L(\mathcal{F})$ y $\mathcal{V}' = \{V'(s)\}_{s\in\Gamma} \subset L(\mathcal{F}')$ dos dilataciones de $\{T(s)\}_{s\in\Gamma_1} \subset L(\mathcal{H})$, se dice que $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}'$ son *isomorfas* si existe un operador unitario $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ tal que:

(i) $\varphi(h) = h$ para todo $h \in \mathcal{H}$,

(ii) $V'(s) = \varphi V(s) \varphi^{-1}$ para todo $s \in \Gamma$.

2. Semigrupos de contracciones con parámetro en $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

En esta sección se introducen resultados importantes de la teoría de operadores, entre ellos, el teorema de dilatación de Sz.-Nagy (caso discreto), el teorema de dilatación de Ando y un contraejemplo de Parrott.

El teorema de dilatación de Sz.-Nagy (ver [**25**] y [**29**, página 13]) corresponde con el caso $\Gamma = \mathbb{Z}$ y $\Gamma_1 = \mathbb{N}$ y establece que toda contracción posee una única dilatación unitaria minimal. En detalle,

Teorema 2.10 (B. Sz.-Nagy [**25**]). *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $A \in L(\mathcal{H})$ una contracción. Entonces, existe un espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y un operador unitario $U \in L(\mathcal{F})$, tal que*

$$A^n = P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}} U^n|_{\mathcal{H}} \quad (n = 0, 1, 2, ...)$$

donde $P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}$ es la proyección ortogonal de $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{H}$.

Si se pide la condición de minimalidad

$$\mathcal{F} = \bigvee_{n\in\mathbb{Z}} U^n(\mathcal{H}),$$

entonces U es único, salvo isomorfismo.

Otro de los teoremas de dilatación importante en el análisis funcional es el teorema de Ando (ver [**1**] y [**29**, página 23]) que corresponde con $\Gamma = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ y $\Gamma_1 = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ y establece que todo par de contracciones que conmutan posee una dilatación unitaria, más precisamente

Teorema 2.11 (Ando [**1**]). *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\{A_1, A_2\} \subset L(\mathcal{H})$ contracciones que conmutan. Entonces, existe un espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y dos operadores unitarios que conmutan $\{U_1, U_2\} \subset L(\mathcal{F})$, tales que*

$$A_1^n A_2^m = P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}} U_1^n U_2^m|_{\mathcal{H}} \quad (n, m = 0, 1, 2...)$$

donde $P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}$ es la proyección ortogonal de $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{H}$.

Si se pide la condición

$$\mathcal{F} = \bigvee_{n,m\in\mathbb{Z}} U_1^n U_2^m(\mathcal{H}),$$

entonces la dilatación es minimal.

Observación 2.12. Contrario al caso del teorema de Sz.-Nagy, en el teorema de Ando no se puede afirmar que la dilatación unitaria minimal es única.

Parrott (ver [**19**]) mostró que el resultado de Ando no puede ser extendido a tres o más contracciones.

A continuación se construye un conjunto de contracciones que conmutan, $\{A_1, A_2, A_3\} \subset L(\mathcal{H})$, para el cual no se puede encontrar un conjunto de operadores unitarios que conmutan, $\{U_1, U_2, U_3\} \subset L(\mathcal{F})$, tales que

$$A_i = P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}} U_i|_{\mathcal{H}} \quad (i = 1, 2, 3). \tag{2.2}$$

Esta construcción aparece en [**29**, página 24] y es una simplificación del primer ejemplo de Parrott.

Sean $\mathcal{K}$ un espacio de Hilbert y $\{S_1, S_2, S_3\} \subset L(\mathcal{K})$ un conjunto de operadores unitarios, tales que

$$S_1 S_2^{-1} S_3 \neq S_3 S_2^{-1} S_1. \tag{2.3}$$

(Por ejemplo, se pueden considerar $S_2 = I_{\mathcal{K}}$ y $S_1, S_3 \in L(\mathcal{K})$ operadores unitarios que no conmutan).

Sean $\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}$ y $A_i \in L(\mathcal{H})\,(i = 1, 2, 3)$ los operadores definidos por

$$A_i(h, h') = (0, S_i(h)) \quad (h, h' \in \mathcal{K}).$$

Se tiene que:

(i) $\|A_i\| = \|S_i\| = 1 \quad (i = 1, 2, 3)$,
(ii) $A_i A_j = 0 = A_j A_i \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j)$.

Así, $\{A_1, A_2, A_3\}$ es un conjunto de contracciones que conmutan.

Supóngase que existe un conjunto de operadores unitarios que conmutan $\{U_1, U_2, U_3\} \subset L(\mathcal{F})$, tales que cumplen (2.2), entonces

$$P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}} U_i(h, 0) = A_i(h, 0) = (0, S_i(h)) \quad (h \in K;\ i = 1, 2, 3). \tag{2.4}$$

Como U_i y S_i son isometrías, se tiene que

$$\|U_i(h, 0)\|_{\mathcal{H}} = \|(h, 0)\|_{\mathcal{H}} = \|h\|_{\mathcal{K}} = \|S_i(h)\|_{\mathcal{K}} = \|(0, S_i(h))\|_{\mathcal{H}}.$$

Por (2.4),

$$U_i(h, 0) = (0, S_i(h)) \quad (h \in \mathcal{K}).$$

De donde,

$$U_j^{-1} U_i(h, 0) = U_j^{-1}(0, S_i(h)) = U_j^{-1}(0, S_j(S_j^{-1} S_i)(h)) = (S_j^{-1} S_i(h), 0)$$

y

$$U_k U_j^{-1} U_i(h, 0) = U_k(S_j^{-1} S_i(h), 0) = (0, S_k S_j^{-1} S_i(h)).$$

Como U_1, U_2, U_3 conmutan dos a dos, entonces

$$S_k S_j^{-1} S_i = S_i S_j^{-1} S_k \quad (i, j, k = 1, 2, 3).$$

Contradicción a (2.3). Por lo tanto, no existen operadores unitarios que conmutan $\{U_1, U_2, U_3\} \subset L(\mathcal{F})$ tales que se cumple (2.2).

2.1. Aplicación completamente positiva asociada a un par de contracciones que conmutan.

Como es usual sea $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Definición 2.13. Un *polinomio* en $\mathbb{T}^2$ es una función $p : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{C}$ de la forma:

$$p(z, w) = \sum_{k,j=-N}^{N} a_{kj} z^k w^j \quad (N \in \mathbb{N};\ a_{kj} \in \mathbb{C};\ z, w \in \mathbb{T}). \tag{2.5}$$

Observación 2.14. Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\{U_1, U_2\} \subset L(\mathcal{F})$ operadores unitarios que conmutan, si $p : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{C}$ es un polinomio en $\mathbb{T}^2$ se define

$$p(U_1, U_2) = \sum_{k,j=-N}^{N} a_{kj} U_1^k U_2^j.$$

Lema 2.15. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\{U_1, U_2\} \subset L(\mathcal{H})$ operadores unitarios que conmutan. Entonces:*

(a) *Los operadores $U_i, U_j^* (i, j = 1, 2)$ conmutan.*
(b) *Existe un homomorfismo unital *, $\phi : \mathcal{C}(\mathbb{T}^2, \mathbb{C}) \to L(\mathcal{H})$, tal que*

$$\phi(p) = p(U_1, U_2)$$

si p es un polinomio definido en $\mathbb{T}^2$.

Demostración.
(a) Como U_1 y U_2 son operadores que conmutan, entonces

$$U_1 U_2 = U_2 U_1.$$

Por definición de involución, se tiene que

$$U_2^* U_1^* = U_1^* U_2^*.$$

Como U_1 es unitario, haciendo el producto por la derecha y por la izquierda, en cada término de esta igualdad, por U_1, se obtiene que

$$U_1 U_2^* = U_2^* U_1.$$

Por definición de involución, $U_2 U_1^* = U_1^* U_2$.

(b) Sea $\mathcal{C}^*(U_1, U_2)$ el álgebra C^* generada por $\{U_1, U_2\}$, por la parte (a) se tiene que $\mathcal{C}^*(U_1, U_2)$ es un álgebra C^* conmutativa. Por el teorema de Gelfand-Naimark esta álgebra es isométricamente isomorfa* a $\mathcal{C}(\mathcal{M}_{\mathcal{C}^*(U_1,U_2)}, \mathbb{C})$.

Sea $\chi \in \mathcal{M}_{\mathcal{C}^*(U_1,U_2)}$, entonces

$$|\chi(U_i)|^2 = \chi(U_i)\chi(U_i^*) = \chi(U_iU_i^*) = \chi(I_{\mathcal{H}}) = 1, \quad (i = 1, 2).$$

Por lo tanto, para cualquier polinomio $p(z, w)$ definido en $\mathbb{T}^2$, se tiene que

$$\begin{aligned} \|p(U_1, U_2)\| &= \sup_{\chi\in\mathcal{M}_{\mathcal{C}^*(U_1,U_2)}} |\chi(p(U_1, U_2))| \\ &= \sup_{\chi\in\mathcal{M}_{\mathcal{C}^*(U_1,U_2)}} |p(\chi(U_1), \chi(U_2))| \\ &\leq \sup_{|z|=|w|=1} |p(z, w)| \\ &= \|p\|_\infty. \end{aligned}$$

Por el teorema de Stone-Weierstrass el conjunto de los polinomios de la forma (2.5) es denso en $\mathcal{C}(\mathbb{T}^2, \mathbb{C})$ y por lo tanto la aplicación

$$p \mapsto p(U_1, U_2)$$

se extiende a un homomorfismo unital *, ϕ, de $\mathcal{C}(\mathbb{T}^2, \mathbb{C})$ en $L(\mathcal{H})$. □

Observación 2.16. Como es natural, en las mismas condiciones del lema anterior, para $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^2, \mathbb{C})$ se define

$$f(U_1, U_2) = \phi(f).$$

Así se obtiene, para el par de operadores $\{U_1, U_2\}$, un cálculo funcional para funciones continuas en dos variables.

Lema 2.17. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\{A_1, A_2\} \subset L(\mathcal{H})$ contracciones que conmutan. Sea $S_{\mathbb{T}^2}$ el sistema operador en $\mathcal{C}(\mathbb{T}^2, \mathbb{C})$ definido por*

$$S_{\mathbb{T}^2} = \left\{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^2, \mathbb{C}) : f(z, w) = \sum_{k,j=0}^{N} (a_{kj}z^k w^j + b_{kj}z^{-k}w^{-j}); N \in \mathbb{N}; a_{kj}, b_{kj} \in \mathbb{C} \right\}.$$

Entonces, la aplicación $\mathbf{F} : S_{\mathbb{T}^2} \to L(\mathcal{H})$ definida por

$$\mathbf{F}(f) = f(A_1, A_2) \quad (f \in S_{\mathbb{T}^2})$$

es completamente positiva.

DEMOSTRACIÓN. Sea $f \in S_{\mathbb{T}^2}$. Como A_1 y A_2 son contracciones que conmutan, por el teorema de Ando, existe un espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y dos operadores unitarios que conmutan $U_1, U_2 \in L(\mathcal{F})$, tales que

$$A_1^n\, A_2^m = P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}}\, U_1^n\, U_2^m|_{\mathcal{H}} \quad (n, m = 0, 1, 2, ...).$$

De donde,

$$A_1^{*n}\, A_2^{*m} = P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}}\, U_1^{*n}\, U_2^{*m}|_{\mathcal{H}} \quad (n, m = 0, 1, 2, ...).$$

Luego,

$$\mathbf{F}(f) = P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}}\,(f(U_1, U_2))|_{\mathcal{H}}.$$

Sea $\phi : \mathcal{C}(\mathbb{T}^2, \mathbb{C}) \to L(\mathcal{F})$ la aplicación dada por

$$\phi(g) = g(U_1, U_2) \quad (g \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^2, \mathbb{C})).$$

Por el Lema 2.15, ϕ es un homomorfismo unital*, además

$$\mathbf{F}(f) = P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}} \phi(f)|_{\mathcal{H}}.$$

Sea $\varphi : \mathcal{C}(\mathbb{T}^2, \mathbb{C}) \to L(\mathcal{H})$ la aplicación definida por

$$\varphi(g) = P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}} \phi(g)|_{\mathcal{H}} \quad (g \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^2, \mathbb{C})).$$

Como $P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}}$ es un operador lineal, acotado y autoadjunto, por el teorema de Stinespring, φ es completamente positiva y como φ extiende a $\mathbf{F}$, entonces $\mathbf{F} : S_{\mathbb{T}^2} \to L(\mathcal{H})$ es completamente positiva. $\square$

2.2. Caso de un parámetro continuo.

A continuación se enuncia el caso continuo del teorema de dilatación de Sz.-Nagy (ver [**29**, página 31]) que corresponde con el caso $\Gamma = \mathbb{R}$ y $\Gamma_1 = \mathbb{R}_+ = \{s \in \mathbb{R} : s \geq 0\}$. Este resultado establece que todo semigrupo de contracciones con parámetro en $\mathbb{R}_+$, fuertemente continuo en 0, posee una única dilatación unitaria minimal. En detalle,

Teorema 2.18 (Sz. Nagy [**26**]). *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\{T(s)\}_{s\geq 0} \subset L(\mathcal{H})$ un semigrupo de contracciones con parámetro en $\mathbb{R}_+$, fuertemente continuo en 0. Entonces, existe un espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y una representación unitaria $\{U(s)\}_{s\in\mathbb{R}} \subset L(\mathcal{F})$ de $\mathbb{R}$ en $L(\mathcal{F})$, fuertemente continua en 0, tal que*

$$T(s) = P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}} U(s)|_{\mathcal{H}} \quad (s \geq 0).$$

Si se pide la condición de minimalidad

$$\mathcal{F} = \bigvee_{s\in\mathbb{R}} U(s)(\mathcal{H}),$$

entonces $\{U(s)\}_{s\in\mathbb{R}}$ es único, salvo isomorfismo.

Para el caso de dos parámetros continuos Slociński [**23**] dio una versión continua del teorema de Ando, ver Teorema 2.22.

3. Semigrupos de contracciones con parámetro en $\mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_+$ ó $\mathbb{Q}_+ \times \mathbb{N}$.

En esta sección se considerarán $\Gamma = \mathbb{Q} \times \Lambda$ y $\Gamma_1 = \mathbb{Q}_+ \times \Lambda_1$ donde $\Lambda = \mathbb{Q}$ ó $\Lambda = \mathbb{Z}$. Si $\Lambda = \mathbb{Q}$ entonces $\Lambda_1 = \mathbb{Q}_+$. Si $\Lambda = \mathbb{Z}$ entonces $\Lambda_1 = \mathbb{N}$.

El caso $\Lambda = \mathbb{Q}$ fue tratado en [**15**] y el caso más general $\Lambda = \mathbb{Q}$ ó $\Lambda = \mathbb{Z}$ apareció en [**9**].

Lema 2.19. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, sean $\{T(s,t)\}_{(s,t)\in\mathbb{Q}_+\times\Lambda_1} \subset L(\mathcal{H})$ un semigrupo de contracciones y $S_{\mathbb{Q}\times\Lambda}$ el sistema operador en $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^2,\mathbb{C})$ dado por los elementos de la forma:*

$$f(x,y) = \sum_{k,j=0}^{N} (a_{kj}e^{i\alpha_k x}e^{i\beta_j y} + b_{kj}\, e^{i\gamma_k x}e^{i\theta_j y})$$

donde $N \in \mathbb{N}$; $a_{kj}, b_{kj} \in \mathbb{C}$;$\alpha_k \in \mathbb{Q}_+$; $\beta_j \in \Lambda_1$; $\gamma_k \in \mathbb{Q}_-$;$\theta_j \in -\Lambda_1$; $k,j = 0,...,N$.

Entonces, la aplicación $\mathbf{L} : S_{\mathbb{Q}\times\Lambda} \to L(\mathcal{H})$ definida por

$$\mathbf{L}(f) = \sum_{k,j=0}^{N} a_{kj}T(\alpha_k,\beta_j) + b_{kj}T(-\gamma_k,-\theta_j)^*$$

es completamente positiva.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Sea $\Theta = [\, f_{\xi\eta}\,]_{\xi,\eta=1}^n$ un elemento positivo de $M_{n\times n}(S_{\mathbb{Q}\times\Lambda})$. Se va a probar que $\mathbf{L}_n\left([\, f_{\xi\eta}\,]_{\xi,\eta=1}^n\right)$ es un elemento positivo de $L(\mathcal{H}^n)$.

Para $\xi,\eta = 1,...,n$ se escribe

$$f_{\xi\eta}(x,y) = \sum_{k,j=0}^{N_\Theta} \left(a_{kj}^{(\xi\eta)}e^{i\alpha_k^{(\xi\eta)}x}e^{i\beta_j^{(\xi\eta)}y} + b_{kj}^{(\xi\eta)}\, e^{i\gamma_k^{(\xi\eta)}x}e^{i\theta_j^{(\xi\eta)}y}\right)$$

donde $a_{kj}, b_{kj} \in \mathbb{C}$;$\alpha_k^{(\xi\eta)} \in \mathbb{Q}_+$; $\beta_j^{(\xi\eta)} \in \Lambda_1$; $\gamma_k^{(\xi\eta)} \in \mathbb{Q}_-$;$\theta_j^{(\xi\eta)} \in -\Lambda_1$; $k,j = 0,...,N_\Theta$.

Sea $d \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ el mínimo común múltiplo de los denominadores de $\alpha_k^{(\xi\eta)}, \beta_j^{(\xi\eta)}, \gamma_k^{(\xi\eta)}, \theta_j^{(\xi\eta)}$, entonces

$$f_{\xi\eta}(x,y) = \sum_{k,j=0}^{N_\Theta} \left(a_{kj}^{(\xi\eta)}\, e^{i\frac{s_k^{(\xi\eta)}}{d}x}\, e^{i\frac{t_j^{(\xi\eta)}}{d}y} + b_{kj}^{(\xi\eta)}\, e^{-i\frac{\lambda_k^{(\xi\eta)}}{d}x}\, e^{-i\frac{\tau_j^{(\xi\eta)}}{d}y}\right)$$

donde, $s_k^{(\xi\eta)}, t_j^{(\xi\eta)}, \lambda_k^{(\xi\eta)}, \tau_j^{(\xi\eta)} \in \mathbb{N}$; $k,j = 0,...,N_\Theta$; $\xi,\eta = 1,...,n$.

Sean $A_1 = T(1/d,0)$ y $A_2 = T(0,1/d)$. Por definición de $\mathbf{L}_n, \mathbf{L}$ y semigrupo de operadores, se tiene que

$$\mathbf{L}_n\left([\, f_{\xi\eta}\,]_{\xi,\eta=1}^n\right) = [\mathbf{L}(f_{\xi\eta})]_{\xi,\eta=1}^n = \left[\sum_{k,j=0}^{N_\Theta} a_{kj}^{(\xi\eta)} A_1^{s_k^{(\xi\eta)}}\, A_2^{t_j^{(\xi\eta)}} + b_{kj}^{(\xi\eta)} A_1^{*\lambda_k^{(\xi\eta)}}\, A_2^{*\tau_j^{(\xi\eta)}}\right]_{\xi,\eta=1}^n .$$

Sea $\widetilde{f}_{\xi\eta} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{C}$ definida por

$$\widetilde{f}_{\xi\eta}(z,w) = \sum_{k,j=0}^{N_\Theta} a_{kj}^{(\xi\eta)}\, z^{s_k^{(\xi\eta)}} w^{t_j^{(\xi\eta)}} + b_{kj}^{(\xi\eta)}\, z^{-\lambda_k^{(\xi\eta)}} w^{-\tau_j^{(\xi\eta)}}.$$

Como A_1 y A_2 son par de contracciones que conmutan, por el Lema 2.17 la aplicación $\mathbf{F} : S_{\mathbb{T}^2} \to L(\mathcal{H})$ definida por

$$\mathbf{F}(g) = g(A_1, A_2) \quad (g \in S_{\mathbb{T}^2})$$

es completamente positiva.

Como $[f_{\xi\eta}]_{\xi,\eta=1}^n \geq 0$, entonces $\left[\widetilde{f}_{\xi\eta}\right]_{\xi,\eta=1}^n$ es un elemento positivo de $M_{n\times n}(S_{\mathbb{T}^2})$, así

$$\mathbf{L}_n\left([f_{\xi\eta}]_{\xi,\eta=1}^n\right) = \mathbf{F}_n\left(\left[\widetilde{f}_{\xi\eta}\right]_{\xi,\eta=1}^n\right) \geq 0.$$

De donde, $\mathbf{L}_n\left([f_{\xi\eta}]_{\xi,\eta=1}^n\right)$ es un elemento positivo de $L(\mathcal{H}^n)$. □

A continuación se prueba que todo semigrupo de contracciones con parámetro en $\mathbb{Q}_+ \times \Lambda_1$, posee dilatación unitaria minimal. En detalle,

Teorema 2.20. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\{T(s,t)\}_{(s,t)\in\mathbb{Q}_+\times\Lambda_1} \subset L(\mathcal{H})$ un semigrupo de contracciones. Entonces, existe un espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y una representación unitaria $\{U(s,t)\}_{(s,t)\in\mathbb{Q}\times\Lambda} \subset L(\mathcal{F})$ de $\mathbb{Q}\times\Lambda$ en $L(\mathcal{F})$, tal que*

$$T(s,t) = P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}} U(s,t)|_{\mathcal{H}} \quad ((s,t) \in \mathbb{Q}_+ \times \Lambda_1)$$

donde $P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}}$ es la proyección ortogonal de $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{H}$.

Se puede suponer que se cumple la condición de minimalidad

$$\mathcal{F} = \bigvee_{(s,t)\in\mathbb{Q}\times\Lambda} U(s,t)(\mathcal{H}).$$

Demostración. Sean $S_{\mathbb{Q}\times\Lambda}$ el sistema operador en $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^2,\mathbb{C})$ y $\mathbf{L} : S_{\mathbb{Q}\times\Lambda} \to L(\mathcal{H})$ la aplicación completamente positiva dados en el Lema 2.19. Por el teorema de Arveson, existe una aplicación completamente positiva $\widetilde{\mathbf{L}} : \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^2,\mathbb{C}) \to L(\mathcal{H})$ que extiende a $\mathbf{L}$.

Por el teorema de Stinespring, existe un espacio de Hilbert $\mathcal{G}$, un homomorfismo unital* $\phi : \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^2,\mathbb{C}) \to L(\mathcal{G})$ y un operador acotado $V : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$, tal que

$$\widetilde{\mathbf{L}}(g) = V^*\phi(g)V \quad \text{para todo } g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^2,\mathbb{C}).$$

Como $\widetilde{\mathbf{L}}$ extiende a $\mathbf{L}$, se tiene que

$$\mathbf{L}(f) = V^*\phi(f)V \quad \text{para todo } f \in S_{\mathbb{Q}\times\Lambda}.$$

Como ϕ y $\mathbf{L}$ son unitales (ver la Observación 1.16), se puede escribir

$$\mathbf{L}(f) = P^{\mathcal{G}}_{\mathcal{H}}\phi(f)|_{\mathcal{H}} \quad \text{para todo } f \in S_{\mathbb{Q}\times\Lambda}.$$

Sea

$$h_{st}(x,y) = e^{isx}\, e^{ity} \in S_{\mathbb{Q}\times\Lambda}.$$

Se tiene que

$$T(s,t) = \mathbf{L}(h_{st}) = P^{\mathcal{G}}_{\mathcal{H}}\phi(h_{st})|_{\mathcal{H}} \quad \text{si}\,(s,t) \in \mathbb{Q}_+ \times \Lambda_1. \tag{2.6}$$

Sea $U_0(s,t) : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ el operador dado por

$$U_0(s,t) = \phi(h_{st}) \quad ((s,t) \in \mathbb{Q} \times \Lambda).$$

Como ϕ es un homomorfismo unital * y

$$e^{isx}e^{ity}.e^{is'x}e^{it'y} = e^{i(s+s')x}e^{i(t+t')y}$$

para todo $(s,t),(s',t') \in \mathbb{Q} \times \Lambda$, se tiene que

(i) $U_0(0,0) = I_{\mathcal{F}}$,
(ii) $U_0((s,t)+(s',t')) = U_0(s,t)U_0(s',t')$ para todo $(s,t),(s',t') \in \mathbb{Q}^2$,
(iii) $U_0(s,t)^* = U_0(-s,-t)$,
(iv) $U_0(s,t)$ es unitario para todo $(s,t) \in \mathbb{Q} \times \Lambda$.

De donde, $\{U_0(s,t)\}_{(s,t)\in\mathbb{Q}\times\Lambda} \subset L(\mathcal{G})$ es una representación unitaria de $\mathbb{Q}\times\Lambda$ en $L(\mathcal{G})$.

Sea $\mathcal{F} = \bigvee_{(s,t)\in\mathbb{Q}\times\Lambda} U_0(s,t)(\mathcal{H})$. Se considera $U(s,t) = U_0(s,t)|_{\mathcal{F}}$, por (2.6) se tiene que $\{U(s,t)\}_{(s,t)\in\mathbb{Q}\times\Lambda}$ es una dilatación unitaria minimal de $\{T(s,t)\}_{(s,t)\in\mathbb{Q}_+\times\Lambda_1}$. □

Observación 2.21. Es importante destacar que en el resultado anterior no es necesario suponer la continuidad fuerte del semigrupo.

4. Semigrupos de contracciones con parámetro en $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ ó $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}$.

En esta sección se considerarán $\Gamma = \mathbb{R}\times\Omega$ y $\Gamma_1 = \mathbb{R}_+ \times \Omega_1$ donde $\Omega = \mathbb{R}$ ó $\Omega = \mathbb{Z}$. Si $\Omega = \mathbb{R}$ entonces $\Omega_1 = \mathbb{R}_+$. Si $\Omega = \mathbb{Z}$ entonces $\Omega_1 = \mathbb{N}$.

El siguiente resultado contiene el teorema de dilatación de Slociński [**23**]. Ver también [**9**].

Teorema 2.22. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\{T(s,t)\}_{(s,t)\in\mathbb{R}_+\times\Omega_1} \subset L(\mathcal{H})$ un semigrupo de contracciones fuertemente continuo. Entonces, existe un espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y una representación unitaria $\{U(s,t)\}_{(s,t)\in\mathbb{R}\times\Omega} \subset L(\mathcal{F})$ de $\mathbb{R}\times\Omega$ en $L(\mathcal{F})$, fuertemente continua, tal que*

$$T(s,t) = P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}U(s,t)|_{\mathcal{H}} \quad ((s,t) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega_1)$$

donde $P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}$ es la proyección ortogonal de $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{H}$.

Se puede suponer que se cumple la condición de minimalidad

$$\mathcal{F} = \bigvee_{(s,t)\in\mathbb{R}\times\Omega} U(s,t)(\mathcal{H}).$$

Demostración. Por el Teorema 2.20, el semigrupo $\{T(s,t)\}_{(s,t)\in\mathbb{Q}_+\times\Lambda_1}$ posee una dilatación unitaria minimal $\{U_o(s,t)\}_{(s,t)\in\mathbb{Q}\times\Lambda} \subset L(\mathcal{F})$. De la Proposición 2.1 y el Lema 2.2 de [**21**](ver también el Lema 2.23 de [**15**]) sigue que este semigrupo es uniformemente fuertemente continuo y por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ se deduce que existe una representación unitaria, fuertemente continua, $\{U(s,t)\}_{(s,t)\in\mathbb{R}\times\Omega} \subset L(\mathcal{F})$ tal que $U(\cdot,\cdot)_{|\mathbb{Q}\times\Lambda} = U_o(\cdot,\cdot)$.

Por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ y la continuidad se obtiene el resultado.

□

5. Una versión continua del teorema de levantamiento del conmutante.

Sz.-Nagy y Foias [**30**] demostraron el teorema de levantamiento del conmutante, el cual es equivalente al teorema de dilatación de Ando [**1**]. Arocena [**3**] demostró una versión continua del teorema de levantamiento del conmutante.

A partir del Teorema 2.22 y siguiendo la misma idea que se usa para obtener el teorema de levantamiento a partir del teorema de Ando, se obtiene una nueva demostración de la versión continua dada por Arocena. En detalle,

Teorema 2.23. *Para $\alpha = 1, 2$ sean $\mathcal{H}_\alpha$ espacios de Hilbert y sean $\{A_\alpha(s)\}_{s\in\mathbb{R}_+} \subset L(\mathcal{H}_\alpha)$ dos semigrupos de contracciones con parámetro en $\mathbb{R}_+$, fuertemente continuos. Sea $\{V_\alpha(s)\}_{s\in\mathbb{R}_+} \subset L(\mathcal{F}_\alpha)$ la dilatación isométrica minimal de $\{A_\alpha(s)\}_{s\in\mathbb{R}_+}$. Sea $X \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ tal que $XA_1(s) = A_2(s)X$ para todo $s \in \mathbb{R}_+$. Entonces, existe $Y \in L(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ tal que*

(i) $YV_1(s) = V_2(s)Y$ *para todo* $s \in \mathbb{R}_+$,
(ii) $P^{\mathcal{F}_2}_{\mathcal{H}_2} Y = XP^{\mathcal{F}_1}_{\mathcal{H}_1}$,
(iii) $\|Y\| = \|X\|$.

Demostración. Se puede suponer que $\|X\| = 1$.

Primero se considerará el caso $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ y $A_1(s) = A_2(s)$.

Para $(s,n) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}$ sea $T(s,n) = X^n A_1(s)$, entonces $\{T(s,n)\}_{(s,n)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{N}} \subset L(\mathcal{H})$ es un semigrupo de contracciones con parámetro en $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}$, fuertemente continuo. Por el Teorema 2.22 existe un espacio de Hilbert $\mathcal{G}$ que contiene a $\mathcal{H}_1$ como subespacio cerrado, un operador unitario $Z \in L(\mathcal{G})$ y un grupo de operadores unitarios fuertemente continuo, $\{U(s)\}_{s\in\mathbb{R}} \subset L(\mathcal{G})$, tal que

(1) $ZU(s) = U(s)Z$ para todo $s \in \mathbb{R}$,

(2) $X^n A_1(s) = P^{\mathcal{G}}_{\mathcal{H}_1} Z^n U(s)|_{\mathcal{H}_1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$; $s \in \mathbb{R}_+$,

(3) $\mathcal{G} = \bigvee_{(s,n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{Z}} Z^n U(s)(\mathcal{H}_1)$.

Si $\mathcal{F} = \bigvee_{s\in\mathbb{R}_+} U(s)\mathcal{H}_1$ y $V_1(s) = U(s)|_{\mathcal{F}}$ entonces $\{V_1(s)\}_{s\in\mathbb{R}_+}$ es la dilatación isométrica minimal de $\{A_1(s)\}_{s\in\mathbb{R}_+}$.

Sea $Y : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ el operador definido por

$$Y = P^{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}} Z|_{\mathcal{F}}.$$

La prueba se realizará en 3 pasos:

Paso 1: $YV_1(s) = V_1(s)Y$ para todo $s \in \mathbb{R}_+$.

Basta probar que

$$\langle YV_1(s)V_1(s_o)h_o, V_1(s_1)h_1\rangle_{\mathcal{F}} = \langle V_1(s)YV_1(s_o)h_o, V_1(s_1)h_1\rangle_{\mathcal{F}}$$

para todo $h_o, h_1 \in \mathcal{H}_1,\ s_o, s_1 \geq 0$.

Si $s_1 \geq s$

$$\begin{aligned}
\langle YV_1(s)V_1(s_o)h_o, V_1(s_1)h_1\rangle_{\mathcal{F}} &= \langle P^{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}} ZV_1(s)V_1(s_o)h_o, V_1(s_1)h_1\rangle_{\mathcal{F}} \\
&= \langle ZV_1(s)V_1(s_o)h_o, V_1(s_1)h_1\rangle_{\mathcal{F}} \\
&= \langle ZU(s)U(s_o)h_o, U(s_1)h_1\rangle_{\mathcal{G}} \\
&= \langle U(s)ZU(s_o)h_o, U(s_1)h_1\rangle_{\mathcal{G}} \\
&= \langle ZU(s_o)h_o, U(s_1 - s)h_1\rangle_{\mathcal{G}} \\
&= \langle P^{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}} ZU(s_o)h_o, U(s_1 - s)h_1\rangle_{\mathcal{G}} \\
&= \langle U(s)P^{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}} ZU(s_o)h_o, U(s_1)h_1\rangle_{\mathcal{G}} \\
&= \langle V_1(s)YV_1(s_o)h_o, V_1(s_1)h_1\rangle_{\mathcal{F}}.
\end{aligned}$$

El caso $s_1 \leq s$ es análogo al anterior.

Paso 2: $P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}_1} Y = XP^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}_1}$.

Como

$$X = P^{\mathcal{G}}_{\mathcal{H}_1} Z|_{\mathcal{H}_1} = P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}_1} P^{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}} Z|_{\mathcal{H}_1} = P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}_1} Y|_{\mathcal{H}_1},$$

basta probar que $P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}_1} Yf = 0$ para $f \in \mathcal{F} \ominus \mathcal{H}_1$.

Se tiene que

$$\mathcal{F} \ominus \mathcal{H}_1 = \bigvee_{s\geq 0} (U(s) - A_1(s))\mathcal{H}_1.$$

Si $s_o \geq 0$, $h_o, h \in \mathcal{H}_1$ entonces

$$\begin{aligned}
\langle Y(U(s_o) - A_1(s_o))h_o, h\rangle_{\mathcal{F}} &= \langle P^{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}} Z(U(s_o) - A_1(s_o))h_o, h\rangle_{\mathcal{F}} \\
&= \langle P^{\mathcal{G}}_{\mathcal{H}_1} Z(U(s_o) - A_1(s_o))h_o, h\rangle_{\mathcal{H}_1} \\
&= \langle P^{\mathcal{G}}_{\mathcal{H}_1} ZU(s_o)h_o, h\rangle_{\mathcal{H}_1} - \langle P^{\mathcal{G}}_{\mathcal{H}_1} ZA_1(s_o)h_o, h\rangle_{\mathcal{H}_1} \\
&= \langle XA_1(s_o)h_o, h\rangle_{\mathcal{H}_1} - \langle XA_1(s_o)h_o, h\rangle_{\mathcal{H}_1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Paso 3: $\|Y\| = \|X\|$.

Como Z es operador unitario, $\|Y\| \leq 1$ y

$$1 = \|X\| \leq \|P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}_1} Y\| \leq \|Y\|.$$

Finalmente, para el caso general se puede considerar el siguiente producto de matrices

$$\begin{bmatrix} A_1(s) & 0 \\ 0 & A_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ X & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ X & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(s) & 0 \\ 0 & A_2(s) \end{bmatrix}.$$

$\square$

Observación 2.24. Una versión análoga al Teorema 2.23 se puede obtener para semigrupos de contracciones con parámetro en $\mathbb{Q}_+$, sin considerar la continuidad fuerte.

Capítulo 3

Aplicación completamente positiva asociada a un sistema conmutativo de contracciones.

De acuerdo a lo estudiado en el Capítulo 2 surgen, para el caso $n \geq 3$, dos preguntas importantes:

1. ¿Bajo que condiciones una n-tupla de contracciones posee dilatación unitaria?
2. ¿Se pueden dar otras extensiones del teorema de levantamiento del conmutante?

En este capítulo y el siguiente se dan algunas respuestas a las preguntas anteriores y se generalizan algunas definiciones y resultados dados en el Capítulo 2.

Definición 3.1. Sean Δ un conjunto no vacío y Υ un grupo abeliano con elemento neutro 0. Si $s \in \Upsilon^\Delta$ entonces soporte$(s) = \{w \in \Delta : s(w) \neq 0\}$. Se define Υ_o^Δ el conjunto de las funciones definidas en Δ a valores en Υ, con soporte finito. Los elementos $s \in \Upsilon_o^\Delta$ son de la forma $s = (s_w)_{w\in\Delta}$ donde $s_w \in \Upsilon$ y $s_w \neq 0$ en un subconjunto finito de Δ.

En el presente trabajo $\Upsilon = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ó $\mathbb{R}$.

Si $s \in \Upsilon_o^\Delta$, se definen $s^+ : \Delta \to \Upsilon$ y $s^- : \Delta \to \Upsilon$ como

$$s^+(w) = \text{máx}\{s(w), 0\}$$

$$s^-(w) = -\,\text{mín}\{s(w), 0\}.$$

Observación 3.2. Sea Δ un conjunto no vacío. Se tiene que Υ_o^Δ es un grupo abeliano topológico con respecto a la suma de funciones (o adición de componentes), elemento neutro la función cero 0 (cada componente es cero) y con métrica dada por la norma uniforme. Con orden parcial $\succ$ definido de la siguiente manera

$$s = (s_w)_{w\in\Delta} \succ 0 \Leftrightarrow s_w \geq 0 \quad (w \in \Delta)$$

donde $\geq$ es el orden usual en $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ó $\mathbb{R}$ y para $s, s' \in \Upsilon_o^\Delta$

$$s \succ s' \Leftrightarrow s - s' \succ 0.$$

Sean $\Gamma = \Upsilon_o^\Delta$ y $\Gamma_1 = \Upsilon_{+o}^\Delta = \{s \in \Upsilon_o^\Delta : \ s_w \geq 0 \,\text{para todo}\, w \in \Delta\}$, entonces $(\Gamma_1, +)$ es un sub-semigrupo del grupo $(\Gamma, +)$.

Definición 3.3. Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{F}$ espacios de Hilbert, sean $\{T(s)\}_{s\in\Gamma_1} \subset L(\mathcal{H})$ un semigrupo de operadores con parámetro en Γ_1 y $\{U(s)\}_{s\in\Gamma} \subset L(\mathcal{F})$ una representación de Γ en $L(\mathcal{F})$.

Se dice que $\{U(s)\}_{s\in\Gamma}$ es *dilatación unitaria regular* de $\{T(s)\}_{s\in\Gamma_1}$ si $\mathcal{F}$ contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado, la representación $\{U(s)\}_{s\in\Gamma}$ es unitaria y

$$T(s^-)^* T(s^+) = P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}} U(s)_{|\mathcal{H}} \quad (s \in \Gamma)$$

donde $P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}$ es la proyección ortogonal de $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{H}$.

Si además

$$\mathcal{F} = \bigvee_{s\in\Gamma} U(s)(\mathcal{H}),$$

se dice que la dilatación es *minimal*.

El concepto de dilatación unitaria regular fue introducida por Brehmer en [**7**] para el caso discreto.

Observación 3.4. Si un semigrupo de operadores posee una dilatación unitaria regular, entonces posee una dilatación unitaria regular minimal (ver la Observación 2.7).

1. Dilatación unitaria regular de un sistema conmutativo de contracciones.

Definición 3.5. Sean Δ un conjunto no vacío y $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Un *sistema conmutativo de contracciones* es un subconjunto $\{A_w\}_{w\in\Delta} \subset L(\mathcal{H})$ de contracciones tal que

$$A_w A_{w'} = A_{w'} A_w \quad (w, w' \in \Delta, w \neq w').$$

Ejemplo.

Sean X un espacio de Hausdorff compacto, $X \neq \emptyset$ y $x_o \in X$. Sea

$$\Delta = \{f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C}) : |f(x_o)| \leq 1\}.$$

Sea $A_f : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definido por:

$$A_f(h) = f(x_o)h \quad (h \in \mathcal{H}).$$

Se tiene que $\{A_f\}_{f\in\Delta} \subset L(\mathcal{H})$ es un sistema conmutativo de contracciones.

En esta sección se introduce un resultado importante de la teoría de dilataciones regulares, y es el Teorema 9.1 del Capítulo I del libro de Sz. Nagy-Foias [**29**]. Este teorema corresponde con el caso $\Gamma = \mathbb{Z}_o^\Delta$ para Δ un conjunto no vacío y establece que todo sistema conmutativo de contracciones, bajo cierta condición de positividad, posee una dilatación unitaria regular minimal determinada salvo isomorfismo.

Observación 3.6. Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\{A_w\}_{w\in\Delta} \subset L(\mathcal{H})$ un sistema conmutativo de contracciones. Se define

$$A^n = \prod_{w\in\Delta} A_w^{n_w} \quad \text{si} \quad n = (n_w)_{w\in\Delta} \in \mathbb{Z}_o^\Delta, n \succ 0.$$

Encontrar la dilatación unitaria de $\{A_w\}_{w\in\Delta}$ es equivalente a encontrar una extensión de la función $n \mapsto A^n$ a una función definida positiva $T : \mathbb{Z}_o^\Delta \to L(\mathcal{H})$.

El caso de una contracción corresponde a un teorema de Sz.-Nagy.

El caso de dos contracciones corresponde con el teorema de Ando.

Para sistemas conmutativos de más de dos contracciones, en general, no existen extensiones definidas positivas de A^n, tal como se vio en el capítulo anterior. Sin embargo, se tiene un caso particular en el cual tales extensiones existen. En detalle,

Teorema 3.7 (Teorema 9.1 [**29**])**.** *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\{A_w\}_{w\in\Delta} \subset L(\mathcal{H})$ un sistema conmutativo de contracciones. Entonces, existe un espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y un sistema conmutativo de operadores unitarios $\{U_w\}_{w\in\Delta} \subset L(\mathcal{F})$, tal que*

$$(A^{n^-})^* A^{n^+} = P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}} U^n_{|\mathcal{H}} \quad \textit{para todo} \quad n = (n_w)_{w\in\Delta} \in \mathbb{Z}_o^\Delta$$

donde $P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}}$ es la proyección ortogonal de $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{H}$,

$$U^n = \prod_{w\in\Delta} U_w^{n_w} \quad \textit{para todo} \quad n \in \mathbb{Z}_o^\Delta$$

$$A^n = \prod_{w\in\Delta} A_w^{n_w} \quad \textit{para todo} \quad n \succ 0,$$

si y sólo si

$$B(\mathcal{U}) := \sum_{V\subset\mathcal{U}} (-1)^{|V|} \left(A^{e(V)}\right)^* A^{e(V)} \geq 0 \quad \textit{(condición de positividad)}$$

para todo subconjunto finito $\mathcal{U} \subset \Delta$, donde

$$e(V) = (e_w(V)) \quad y \quad e_w(V) = \begin{cases} 1 & si \quad w \in V \\ 0 & si \quad w \in \Delta \setminus V. \end{cases}$$

$$|V| \quad \textit{denota el número de elementos de} V.$$

Si se pide la condición de minimalidad

$$\mathcal{F} = \bigvee_{n\in\mathbb{Z}_o^\Delta} U^n(\mathcal{H}),$$

entonces la dilatación unitaria regular $\{U_w\}_{w\in\Delta}$ está determinada salvo isomorfismo.

Observación 3.8. Si $\Delta = \{1, 2\}$ y $\{A_1, A_2\} \subset L(\mathcal{H})$ son par de contracciones que conmutan, entonces

$$B(\emptyset) = I \geq 0,$$

$$B(\{1\}) = I - A_1^* A_1 \geq 0,$$

$$B(\{2\}) = I - A_2^* A_2 \geq 0.$$

Se tiene que $B(\{1, 2\}) \geq 0$ si y sólo si $I - A_1^* A_1 - A_2^* A_2 + (A_1 A_2)^* A_1 A_2 \geq 0$.

Ejemplos. (Ver [**2**])

1) Si $\Delta = \{1, 2\}$ y $\{A_1, A_2\} \subset L(\mathcal{H})$ son par de contracciones que conmutan y satisfacen que

$$I - A_1^* A_1 - A_2^* A_2 \geq 0$$

entonces $\{A_1, A_2\}$ posee una dilatación unitaria regular porque $(A_1 A_2)^* A_1 A_2 \geq 0$.

En particular, $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix}$ y $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \end{bmatrix}$ satisfacen que

$$I - A_1^* A_1 - A_2^* A_2 \geq 0.$$

2) Si se considera el sistema conmutativo de contracciones $\{A, A\}$ donde $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ entonces el sistema no posee dilatación unitaria regular. En efecto,

$$B(\mathcal{U}) = I - A^* A - A^* A + (AA)^* AA.$$

Como $AA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ entonces

$$B(\mathcal{U}) = I - 2A^* A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y esta matriz tiene un autovalor negativo.

De otra manera, suponiendo que $\{A, A\}$ posee dilatación unitaria regular, como $AA = 0$ se tendría que

$$0 = (A^2)^* A^2 = P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}} (U^2)^* U^2_{|\mathcal{H}} = P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}} I_{\mathcal{F}|\mathcal{H}} = I_{\mathcal{H}},$$

lo que es una contradicción.

Observación 3.9. Para la demostración del Teorema 3.7 se considera la aplicación $T : \mathbb{Z}_o^\Delta \to L(\mathcal{H})$ definida por

$$T(n) = (A^{n^-})^* A^{n^+} \quad \text{(extensión regular)}.$$

La cual satisface la condición

$$T(-n) = T(n)^*.$$

Se demuestra que $T(n)$ es definida positiva, es decir,

$$\sum_{n \succ 0} \sum_{m \succ 0} \langle T(n-m)h(n), h(m) \rangle \geq 0 \tag{3.1}$$

para toda $h : \mathbb{Z}_o^{\Delta} \to \mathcal{H}$, tal que $h(n) \neq 0$ para un subconjunto finito de $\mathbb{Z}_o^{\Delta}$ y $n \succ 0$. Luego se aplica el teorema de Neumark (Teorema 7.1 del Capítulo I de [**29**]). Para más detalles ver [**29**, página 33].

Si Δ_1 y Δ_2 son conjuntos no vacíos y $\Gamma = \Upsilon_o^{\Delta_1} \times \mathbb{Z}_o^{\Delta_2}$, para $(s,r), (s',r') \in \Gamma$ se definen

$$(s,r) \succ 0 \Leftrightarrow s \succ 0, r \succ 0$$

$$(s,r) \succ (s',r') \Leftrightarrow s \succ s', r \succ r'.$$

Si $\Gamma_1 = \Upsilon_{+o}^{\Delta_1} \times \mathbb{N}_o^{\Delta_2}$, entonces $(\Gamma_1, +)$ es un sub-semigrupo del grupo $(\Gamma, +)$.

En este caso, si $\{T(s,r)\}_{(s,r)\in\Gamma_1} \subset L(\mathcal{H})$ es un semigrupo de operadores con parámetro en Γ_1 la definición de dilatación unitaria regular es análoga a la Definición 3.3 escribiendo

$$T(s^-, r^-)^* T(s^+, r^+) = P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}} U(s,r)_{|\mathcal{H}} \quad ((s,r) \in \Gamma)$$

donde $P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}}$ es la proyección ortogonal de $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{H}$.

A partir del Teorema 3.7 y considerando sistemas de contracciones de la forma $\{\{A_w\}_{w\in\Delta_1}, \{\widehat{A}_\kappa\}_{\kappa\in\Delta_2}\} \subset L(\mathcal{H})$, donde Δ_1 y Δ_2 son conjuntos no vacíos, se obtiene fácilmente el siguiente resultado.

Teorema 3.10. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\{\{A_w\}_{w\in\Delta_1}, \{\widehat{A}_\kappa\}_{\kappa\in\Delta_2}\} \subset L(\mathcal{H})$ un sistema conmutativo de contracciones. Entonces, existe un espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y un sistema conmutativo de operadores unitarios $\{\{U_w\}_{w\in\Delta_1}, \{\widehat{U}_\kappa\}_{\kappa\in\Delta_2}\} \subset L(\mathcal{F})$, tal que*

$$(\widehat{A}^{m^-})^*(A^{n^-})^* A^{n^+} \widehat{A}^{m^+} = P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}} U^n \widehat{U}^m_{|\mathcal{H}} \quad \textit{para todo} \quad n = (n_w)_{w\in\Delta_1} \in \mathbb{Z}_o^{\Delta_1}, m = (m_\kappa)_{\kappa\in\Delta_2} \in \mathbb{Z}_o^{\Delta_2}$$

donde $P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}}$ es la proyección ortogonal de $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{H}$, si y sólo si

$$B(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2) := \sum_{V_1 \subset \mathcal{U}_1} \sum_{V_2 \subset \mathcal{U}_2} (-1)^{|V_1|+|V_2|} \left(\widehat{A}^{e(V_2)}\right)^* \left(A^{e(V_1)}\right)^* A^{e(V_1)} \widehat{A}^{e(V_2)} \geq 0$$

para todos subconjuntos finitos $\mathcal{U}_1 \subset \Delta_1$, $\mathcal{U}_2 \subset \Delta_2$ donde para $i = 1, 2$

$$e(V_i) = (e_w(V_i)) \quad y \quad e_w(V_i) = \begin{cases} 1 & si \quad w \in V_i \\ 0 & si \quad w \in \Delta_i \setminus V_i. \end{cases}$$

$$|V_i| \quad \textit{denota el número de elementos de} \, V_i.$$

Si se pide la condición de minimalidad

$$\mathcal{F} = \bigvee_{(n,m)\in\mathbb{Z}_o^{\Delta_1}\times\mathbb{Z}_o^{\Delta_2}} U^n \widehat{U}^m(\mathcal{H}),$$

entonces la dilatación unitaria regular $\{\{U_w\}_{w\in\Delta_1}, \{\widehat{U}_\kappa\}_{\kappa\in\Delta_2}\}$ *está determinada salvo isomorfismo.*

2. Aplicación completamente positiva asociada a un sistema conmutativo de contracciones.

La siguiente definición es una generalización de la Definición 2.13.

Definición 3.11. Sean Δ_1, Δ_2 conjuntos no vacíos. Un *polinomio* en $\mathbb{T}^{\Delta_1}\times\mathbb{T}^{\Delta_2}$ es una función $p : \mathbb{T}^{\Delta_1}\times\mathbb{T}^{\Delta_2} \to \mathbb{C}$, de la forma:

$$p(z,w) = \sum_{k\in\{-N,...,N\}_o^{\Delta_1}} \sum_{j\in\{-N,...,N\}_o^{\Delta_2}} a_{kj} w^{-j^-} z^{-k^-} z^{k^+} w^{j^+} \tag{3.2}$$

donde $N \in \mathbb{N}$; $a_{kj} \in \mathbb{C}$ son cero salvo para una cantidad finita de elementos a_{kj}; $z = (z_w)_{w\in\Delta_1} \in \mathbb{T}^{\Delta_1}$; $w = (w_\kappa)_{\kappa\in\Delta_2} \in \mathbb{T}^{\Delta_2}$; $k = (k_w)_{w\in\Delta_1} \in \{-N,...,N\}_o^{\Delta_1}$; $j = (j_\kappa)_{\kappa\in\Delta_2} \in \{-N,...,N\}_o^{\Delta_2}$; $z^k = \prod_{w\in\Delta_1} z_w^{k_w}$.

Observación 3.12. Sean Δ_1, Δ_2 conjuntos no vacíos. Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $\{\{U_w\}_{w\in\Delta_1}, \{\widehat{U}_\kappa\}_{\kappa\in\Delta_2}\} \subset L(\mathcal{H})$ un sistema conmutativo de operadores unitarios y $\{\{A_w\}_{w\in\Delta_1}, \{\widehat{A}_\kappa\}_{\kappa\in\Delta_2}\} \subset L(\mathcal{H})$ un sistema conmutativo de contracciones.

Si $k \in \{-N,...,N\}_o^{\Delta_1}$; $j \in \{-N,...,N\}_o^{\Delta_2}$ y $p : \mathbb{T}^{\Delta_1}\times\mathbb{T}^{\Delta_2} \to \mathbb{C}$ es un polinomio en $\mathbb{T}^{\Delta_1}\times\mathbb{T}^{\Delta_2}$ se definen

$$p(\{\{U_w\}_{w\in\Delta_1}, \{\widehat{U}_\kappa\}_{\kappa\in\Delta_2}\}) = \sum_{k\in\{-N,...,N\}_o^{\Delta_1}} \sum_{j\in\{-N,...,N\}_o^{\Delta_2}} a_{kj} U^k \widehat{U}^j.$$

$$p(\{\{A_w\}_{w\in\Delta_1}, \{\widehat{A}_\kappa\}_{\kappa\in\Delta_2}\}) = \sum_{k\in\{-N,...,N\}_o^{\Delta_1}} \sum_{j\in\{-N,...,N\}_o^{\Delta_2}} a_{kj} (\widehat{A}^{j^-})^*(A^{k^-})^* A^{k^+} \widehat{A}^{j^+}.$$

El siguiente resultado es una generalización del Lema 2.15 y se demuestra de manera análoga. Ver también Lema 4.3 de [**16**].

Lema 3.13. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\{\{U_w\}_{w\in\Delta_1}, \{\widehat{U}_\kappa\}_{\kappa\in\Delta_2}\} \subset L(\mathcal{H})$ un sistema conmutativo de operadores unitarios. Entonces:*

(a) *Cada par de operadores $U_i, U_j^*, (i,j \in \Delta_1)$ y $\widehat{U}_i, \widehat{U}_j^*, (i,j \in \Delta_2)$ conmutan.*

(b) *Existe un homomorfismo unital* *, $\phi : \mathcal{C}(\mathbb{T}^{\Delta_1} \times \mathbb{T}^{\Delta_2}, \mathbb{C}) \to L(\mathcal{H})$, *tal que*

$$\phi(p) = p(\{\{U_w\}_{w\in\Delta_1}, \{\widehat{U}_\kappa\}_{\kappa\in\Delta_2}\})$$

si p *es un polinomio definido en* $\mathbb{T}^{\Delta_1} \times \mathbb{T}^{\Delta_2}$.

Observación 3.14. Como es natural, en las mismas condiciones del lema anterior, para $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^{\Delta_1} \times \mathbb{T}^{\Delta_2}, \mathbb{C})$ se define

$$f(\{\{U_w\}_{w\in\Delta_1}, \{\widehat{U}_\kappa\}_{\kappa\in\Delta_2}\}) = \phi(f).$$

Así se obtiene, para el sistema conmutativo de operadores $\{\{U_w\}_{w\in\Delta_1}, \{\widehat{U}_\kappa\}_{\kappa\in\Delta_2}\}$ un cálculo funcional para funciones continuas en múltiples variables.

El siguiente resultado guarda relación con el Lema 2.17, para su demostración se aplica el Teorema 3.10 en vez del teorema de Ando. Ver también Lema 4.5 de [**16**].

Lema 3.15. *Sean* $\mathcal{H}$ *un espacio de Hilbert y* $\{\{A_w\}_{w\in\Delta_1}, \{\widehat{A}_\kappa\}_{\kappa\in\Delta_2}\} \subset L(\mathcal{H})$ *un sistema conmutativo de contracciones, tal que*

$$B(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2) = \sum_{V_1\subset\mathcal{U}_1} \sum_{V_2\subset\mathcal{U}_2} (-1)^{|V_1|+|V_2|} (\widehat{A}^{e(V_2)})^* (A^{e(V_1)})^* A^{e(V_1)} \widehat{A}^{e(V_2)} \geq 0$$

para todos subconjuntos finitos $\mathcal{U}_1 \subset \Delta_1$, $\mathcal{U}_2 \subset \Delta_2$.

Sea $S_{\mathbb{T}^{\Delta_1}\times\mathbb{T}^{\Delta_2}}$ *el sistema operador en* $\mathcal{C}(\mathbb{T}^{\Delta_1} \times \mathbb{T}^{\Delta_2}, \mathbb{C})$ *dado por los elementos de la forma*

$$p(z, w) = \sum_{k\in\{-N,\dots,N\}_o^{\Delta_1}} \sum_{j\in\{-N,\dots,N\}_o^{\Delta_2}} a_{kj} w^{-j^-} z^{-k^-} z^{k^+} w^{j^+}$$

donde $N \in \mathbb{N}$; $a_{kj} \in \mathbb{C}$ *son cero salvo para una cantidad finita de elementos* a_{kj}. *Entonces la aplicación* $\mathbf{F} : S_{\mathbb{T}^{\Delta_1}\times\mathbb{T}^{\Delta_2}} \to L(\mathcal{H})$ *definida por*

$$\mathbf{F}(p) = p(\{\{A_w\}_{w\in\Delta_1}, \{\widehat{A}_\kappa\}_{\kappa\in\Delta_2}\}) \quad (p \in S_{\mathbb{T}^{\Delta_1}\times\mathbb{T}^{\Delta_2}})$$

es completamente positiva.

Capítulo 4

Dilatación unitaria regular de semigrupos multiparamétricos de contracciones.

Para el caso de parámetro continuo, es natural preguntarse ¿bajo que condiciones un semigrupo multiparamétrico de operadores posee dilatación unitaria?.

A continuación se enuncia una extensión al caso continuo del Teorema 9.1 de [**29**] (Teorema 3.7), dada por Ptak [**21**], este corresponde con el caso $\Gamma = \mathbb{R}_o^\Delta$ para Δ un conjunto no vacío y establece que todo semigrupo de operadores con parámetro en $\mathbb{R}_{+\,o}^\Delta$, fuertemente continuo, bajo cierta condición de positividad, posee una dilatación unitaria regular minimal determinada salvo isomorfismo. En detalle,

Teorema 4.1 (M. Ptak [**21**])**.** *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\{T(s)\}_{s\in\mathbb{R}_{+\,o}^\Delta} \subset L(\mathcal{H})$ un semigrupo de operadores fuertemente continuo. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\{T(s)\}_{s\in\mathbb{R}_{+\,o}^\Delta}$ *posee una dilatación unitaria regular* $\{U(s)\}_{s\in\mathbb{R}_o^\Delta} \subset L(\mathcal{F})$,

(b) *Existe una sucesión de números reales no negativos* $\{d_k\}_{k\geq 1}$ *convergente a* 0 *tal que para todo* k *y todo subconjunto finito* $\mathcal{U} \subset \Delta$

$$W_{(d_k)}(\mathcal{U}) := \sum_{V\subset\mathcal{U}} (-1)^{|V|} T\left(d_k e(V)\right)^* T\left(d_k e(V)\right) \geq 0.$$

Más aún, tal dilatación $\{U(s)\}_{s\in\mathbb{R}_o^\Delta}$ puede ser escogida minimal. En este caso la dilatación regular es fuertemente continua y determinada salvo isomorfismo.

Observación 4.2. Para la prueba de la implicación (a)$\Rightarrow$ (b) Ptak usa el Teorema 3.7, y para la implicación (b)$\Rightarrow$ (a) usa la extensión regular de la función $T : \mathbb{R}_{+\,o}^\Delta \to L(\mathcal{H})$ que es

$$T(s) = T(s^-)^* T(s^+) \quad (s \in \mathbb{R}_o^\Delta).$$

Luego prueba que es definida positiva y aplica el teorema de Neumark.

Sea Δ un conjunto no vacío. Sea

$$\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_o^\Delta, \mathbb{C}) = \{f : \mathbb{R}_o^\Delta \to \mathbb{C} : f \text{ es continua y acotada}\}.$$

Con las siguientes convenciones se obtiene que $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_o^\Delta, \mathbb{C})$ es un álgebra C^* conmutativa con unidad.

- Para $f, g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}_o^{\Delta}, \mathbb{C})$, se define el producto

$$(f \cdot g)(s) = f(s)\, g(s) \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}_o^{\Delta}.$$

- El elemento unidad es la función constantemente igual a uno,

$$1(s) = 1 \text{ para todo } s \in \mathbb{R}_o^{\Delta}.$$

- Para $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}_o^{\Delta}, \mathbb{C})$, la norma está dada por:

$$\|f\| = \sup_{s \in \mathbb{R}_o^{\Delta}} |f(s)|.$$

- Para $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}_o^{\Delta}, \mathbb{C})$, el adjunto de f está dado por

$$f^*(s) = \overline{f}(s) = \overline{f(s)} \quad \text{para todo}\, s \in \mathbb{R}_o^{\Delta}.$$

1. Semigrupos de operadores con parámetro en $\mathbb{Q}_{+\,o}^{\Delta_1} \times \mathbb{N}_o^{\Delta_2}$.

El siguiente resultado guarda relación con el Lema 2.19, considerando cierta condición de positividad.

Lema 4.3. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, sea $\{T(s,r)\}_{(s,r)\in \mathbb{Q}_{+\,o}^{\Delta_1} \times \mathbb{N}_o^{\Delta_2}} \subset L(\mathcal{H})$ un semigrupo de operadores, tal que para cualquier $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y todos subconjuntos finitos $\mathcal{U}_1 \subset \Delta_1$, $\mathcal{U}_2 \subset \Delta_2$,*

$$W_{(d)}(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2) := \sum_{V_1 \subset \mathcal{U}_1} \sum_{V_2 \subset \mathcal{U}_2} (-1)^{|V_1|+|V_2|} T\left(\frac{1}{d} e(V_1), e(V_2)\right)^* T\left(\frac{1}{d} e(V_1), e(V_2)\right) \geq 0.$$

Sea $S_{\mathbb{Q}_o^{\Delta_1} \times \mathbb{Z}_o^{\Delta_2}}$ el sistema operador en $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_o^{\Delta_1} \times \mathbb{R}_o^{\Delta_2}, \mathbb{C})$ dado por los elementos de la forma

$$f(x,y) = \sum_{k,j=0}^{N} a_{kj} e^{i\alpha_k x} e^{i\beta_j y} \quad (a_{kj} \in \mathbb{C}; N \in \mathbb{N}; (\alpha_k, \beta_j) \in \mathbb{Q}_o^{\Delta_1} \times \mathbb{Z}_o^{\Delta_2}).$$

Entonces la aplicación $\mathbf{L} : S_{\mathbb{Q}_o^{\Delta_1} \times \mathbb{Z}_o^{\Delta_2}} \to L(\mathcal{H})$ definida por

$$\mathbf{L}(f) = \sum_{k,j=0}^{N} a_{kj} T({\alpha_k}^-, {\beta_j}^-)^* T({\alpha_k}^+, {\beta_j}^+)$$

es completamente positiva.

Demostración. Sea $q \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Sea $\Theta = [\, f_{\xi\eta}\,]_{\xi,\eta=1}^{q}$ un elemento positivo de $M_{q\times q}(S_{\mathbb{Q}_o^{\Delta_1} \times \mathbb{Z}_o^{\Delta_2}})$. Se va a probar que $\mathbf{L}_q\left([\, f_{\xi\eta}\,]_{\xi,\eta=1}^{q}\right)$ es un elemento positivo de $L(\mathcal{H}^q)$.

Para $\xi, \eta = 1, ..., q$ se escribe

$$f_{\xi\eta}(x,y) = \sum_{k,j=0}^{N_\Theta} a_{kj}^{(\xi\eta)} e^{i\alpha_k^{(\xi\eta)} x} e^{i\beta_j^{(\xi\eta)} y}$$

donde $a_{kj}^{(\xi\eta)} \in \mathbb{C}$; $\alpha_k^{(\xi\eta)} \in \mathbb{Q}_o^{\Delta_1}$; $k = 0, ..., N_\Theta$; $\beta_j^{(\xi\eta)} \in \mathbb{Z}_o^{\Delta_2}$; $j = 0, ..., N_\Theta$.

Sea $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ el mínimo común múltiplo de los denominadores de $\alpha_k^{(\xi\eta)}$, entonces

$$f_{\xi\eta}(x,y) = \sum_{k,j=0}^{N_\Theta} a_{kj}^{(\xi\eta)} e^{i\frac{s_k^{(\xi\eta)}}{d}x} e^{i\beta_j^{(\xi\eta)}y}$$

donde $s_k^{(\xi\eta)} = \left(s_{kw}^{(\xi\eta)}\right)_{w\in\Delta_1} \in \mathbb{Z}_o^{\Delta_1}$; $k = 0, ..., N_\Theta$.

Sean $A_w = T\left(\frac{1}{d}e_{\{w\}}, 0\right)$ para cada $w \in \Delta_1$ y $\widehat{A}_\kappa = T\left(0, e_{\{\kappa\}}\right)$ para cada $\kappa \in \Delta_2$.

Por definición de $\mathbf{L}_q, \mathbf{L}$ y semigrupo de operadores, se tiene que

$$\begin{aligned}
&\mathbf{L}_q\left([\, f_{\xi\eta}\,]_{\xi,\eta=1}^q\right) = [\mathbf{L}(f_{\xi\eta})]_{\xi,\eta=1}^q = \\
&\quad = \left[\sum_{k,j=0}^{N_\Theta} a_{kj}^{(\xi\eta)} T\left(\frac{s_k^{(\xi\eta)}-}{d}, \beta_j^{(\xi\eta)-}\right)^* T\left(\frac{s_k^{(\xi\eta)}+}{d}, \beta_j^{(\xi\eta)+}\right)\right]_{\xi,\eta=1}^q = \\
&\quad = \left[\sum_{k,j=0}^{N_\Theta} a_{kj}^{(\xi\eta)} \prod_{\kappa\in\Delta_2} \widehat{A}_\kappa^{*\beta_{j\kappa}^{(\xi\eta)}-} \prod_{w\in\Delta_1} A_w^{*s_{kw}^{(\xi\eta)}-} \prod_{w\in\Delta_1} A_w^{s_{kw}^{(\xi\eta)}+} \prod_{\kappa\in\Delta_2} \widehat{A}_\kappa^{\beta_{j\kappa}^{(\xi\eta)}+}\right]_{\xi,\eta=1}^q .
\end{aligned}$$

Sea $\widetilde{f}_{\xi\eta} : \mathbb{T}^{\Delta_1} \times \mathbb{T}^{\Delta_2} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\widetilde{f}_{\xi\eta}(z,w) = \sum_{k,j=0}^{N_\Theta} a_{kj}^{(\xi\eta)} w^{-\beta_j^{(\xi\eta)-}} z^{-s_k^{(\xi\eta)-}} z^{s_k^{(\xi\eta)+}} w^{\beta_j^{(\xi\eta)+}}.$$

Como $\{\{A_w\}_{w\in\Delta_1}, \{\widehat{A}_\kappa\}_{\kappa\in\Delta_2}\}$ es un sistema conmutativo de contracciones $(W_{(d)}(\{w\},\emptyset) \geq 0$ y $W_{(d)}(\emptyset,\{\kappa\}) \geq 0)$ y por hipótesis $B(\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2) \geq 0$ para todos subconjuntos finitos $\mathcal{U}_1 \subset \Delta_1$, $\mathcal{U}_2 \subset \Delta_2$, por el Lema 3.15 la aplicación $\mathbf{F} : S_{\mathbb{T}^{\Delta_1}\times\mathbb{T}^{\Delta_2}} \to L(\mathcal{H})$ definida por

$$\mathbf{F}(g) = g(\{\{A_w\}_{w\in\Delta_1}, \{\widehat{A}_\kappa\}_{\kappa\in\Delta_2}\}) \quad (g \in S_{\mathbb{T}^{\Delta_1}\times\mathbb{T}^{\Delta_2}})$$

es completamente positiva.

Como $[f_{\xi\eta}]_{\xi,\eta=1}^q \geq 0$, entonces $\left[\widetilde{f}_{\xi\eta}\right]_{\xi,\eta=1}^q$ es un elemento positivo de $M_{q\times q}(S_{\mathbb{T}^{\Delta_1}\times\mathbb{T}^{\Delta_2}})$, así

$$\mathbf{L}_q\left([f_{\xi\eta}]_{\xi,\eta=1}^q\right) = \mathbf{F}_q\left(\left[\widetilde{f}_{\xi\eta}\right]_{\xi,\eta=1}^q\right) \geq 0.$$

De donde, $\mathbf{L}_q\left([f_{\xi\eta}]_{\xi,\eta=1}^q\right)$ es un elemento positivo de $L(\mathcal{H}^q)$.

□

El siguiente resultado tiene cierta similitud con el Teorema 2.20 y establece que todo semigrupo de contracciones con parámetro en $\mathbb{Q}_{+o}^{\Delta_1} \times \mathbb{N}_o^{\Delta_2}$, que satisface cierta condición de positividad, posee dilatación unitaria regular minimal. En detalle,

Teorema 4.4. *Sea* $\{T(s,r)\}_{(s,r)\in\mathbb{Q}_{+o}^{\Delta_1}\times\mathbb{N}_o^{\Delta_2}} \subset L(\mathcal{H})$ *un semigrupo de operadores, tal que para cualquier* $d \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ *y todos subconjuntos finitos* $\mathcal{U}_1 \subset \Delta_1$, $\mathcal{U}_2 \subset \Delta_2$

$$W_{(d)}(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2) \geq 0.$$

Entonces $\{T(s,r)\}_{(s,r)\in\mathbb{Q}_{+o}^{\Delta_1}\times\mathbb{N}_o^{\Delta_2}}$ *posee una dilatación unitaria regular minimal.*

Demostración. Sean $S_{\mathbb{Q}_o^{\Delta_1}\times\mathbb{Z}_o^{\Delta_2}}$ el sistema operador en $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_o^{\Delta_1} \times \mathbb{R}_o^{\Delta_2}, \mathbb{C})$ y $\mathbf{L} : S_{\mathbb{Q}_o^{\Delta_1}\times\mathbb{Z}_o^{\Delta_2}} \to L(\mathcal{H})$ la aplicación completamente positiva dados en el Lema 4.3. Por el teorema de Arveson, existe una aplicación completamente positiva $\widetilde{\mathbf{L}} : \mathcal{C}_b(\mathbb{R}_o^{\Delta_1}\times\mathbb{R}_o^{\Delta_2}, \mathbb{C}) \to L(\mathcal{H})$ que extiende a $\mathbf{L}$.

Por el teorema de Stinespring, existe un espacio de Hilbert $\mathcal{G}$, un homomorfismo unital* $\phi : \mathcal{C}_b(\mathbb{R}_o^{\Delta_1} \times \mathbb{R}_o^{\Delta_2}, \mathbb{C}) \to L(\mathcal{G})$ y un operador acotado $V : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$, tal que

$$\widetilde{\mathbf{L}}(g) = V^*\phi(g)V \quad \text{para todo } g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}_o^{\Delta_1} \times \mathbb{R}_o^{\Delta_2}, \mathbb{C}).$$

Como $\widetilde{\mathbf{L}}$ extiende a $\mathbf{L}$, se tiene que

$$\mathbf{L}(f) = V^*\phi(f)V \quad \text{para todo } f \in S_{\mathbb{Q}_o^{\Delta_1}\times\mathbb{Z}_o^{\Delta_2}}.$$

Como ϕ y $\mathbf{L}$ son unitales (ver la Observación 1.16), se puede escribir

$$\mathbf{L}(f) = P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}\phi(f)|_{\mathcal{H}} \quad \text{para todo } f \in S_{\mathbb{Q}_o^{\Delta_1}\times\mathbb{Z}_o^{\Delta_2}}.$$

Sea

$$h_{s,r}(x,y) = e^{isx}e^{iry} \in S_{\mathbb{Q}_o^{\Delta_1}\times\mathbb{Z}_o^{\Delta_2}}.$$

Se tiene que

$$T(s^-,r^-)^*T(s^+,r^+) = \mathbf{L}(h_{s,r}) = P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}\phi(h_{s,r})|_{\mathcal{H}} \quad \text{si } (s,r) \in \mathbb{Q}_o^{\Delta_1} \times \mathbb{Z}_o^{\Delta_2}. \tag{4.1}$$

Sea $U_0(s,r) : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ el operador dado por

$$U_0(s,r) = \phi(h_{s,r}) \quad ((s,r) \in \mathbb{Q}_o^{\Delta_1} \times \mathbb{Z}_o^{\Delta_2}).$$

Se tiene que $\{U_0(s,r)\}_{(s,r)\in\mathbb{Q}_o^{\Delta_1}\times\mathbb{Z}_o^{\Delta_2}} \subset L(\mathcal{G})$ es una representación unitaria de $\mathbb{Q}_o^{\Delta_1} \times \mathbb{Z}_o^{\Delta_2}$ en $L(\mathcal{G})$.

Sea $\mathcal{F} = \bigvee_{(s,r)\in\mathbb{Q}_o^{\Delta_1}\times\mathbb{Z}_o^{\Delta_2}} U_0(s,r)(\mathcal{H})$. Se considera $U(s,r) = U_0(s,r)|_{\mathcal{F}}$, por (4.1) se tiene que $\{U(s,r)\}_{(s,r)\in\mathbb{Q}_o^{\Delta_1}\times\mathbb{Z}_o^{\Delta_2}}$ es una dilatación unitaria regular minimal de $\{T(s,r)\}_{(s,r)\in\mathbb{Q}_{+o}^{\Delta_1}\times\mathbb{N}_o^{\Delta_2}}$.
□

Observación 4.5. Es importante destacar que en el resultado anterior no es necesario suponer la continuidad fuerte del semigrupo.

Las demostraciones de los siguientes resultados son sencillas, ver Lema 4.9 y Lema 4.10 de [**16**].

Lema 4.6. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\{T(s,r)\}_{(s,r)\in\mathbb{Q}_{+o}^{\Delta_1}\times\mathbb{N}_o^{\Delta_2}} \subset L(\mathcal{H})$ un semigrupo de contracciones fuertemente continuo en (0,0) entonces la aplicación*

$$(s,r) \mapsto \langle T(s^-,r^-)^* T(s^+,r^+)h, h'\rangle_{\mathcal{H}} \quad (h,h' \in \mathcal{H})$$

de $\mathbb{Q}_o^{\Delta_1} \times \mathbb{Z}_o^{\Delta_2}$ en $\mathbb{C}$ es continua en (0,0).

Lema 4.7. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\{T(s,r)\}_{(s,r)\in\mathbb{Q}_{+o}^{\Delta_1}\times\mathbb{N}_o^{\Delta_2}} \subset L(\mathcal{H})$ un semigrupo de contracciones fuertemente continuo que posee una dilatación unitaria regular.*

Si $\{U(s,r)\}_{(s,r)\in\mathbb{Q}_o^{\Delta_1}\times\mathbb{Z}_o^{\Delta_2}} \subset L(\mathcal{F})$ es una dilatación unitaria regular minimal de $\{T(s,r)\}_{(s,r)\in\mathbb{Q}_{+o}^{\Delta_1}\times\mathbb{N}_o^{\Delta_2}}$, entonces $\{U(s,r)\}_{(s,r)\in\mathbb{Q}_o^{\Delta_1}\times\mathbb{Z}_o^{\Delta_2}}$ es fuertemente continuo, y por lo tanto uniformemente fuertemente continuo.

2. Semigrupos de operadores con parámetro en $\mathbb{R}_{+o}^{\Delta_1} \times \mathbb{N}_o^{\Delta_2}$.

Lema 4.8. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\{T(s,r)\}_{(s,r)\in\mathbb{R}_{+o}^{\Delta_1}\times\mathbb{N}_o^{\Delta_2}} \subset L(\mathcal{H})$ un semigrupo de contracciones fuertemente continuo.*

Si $\{T(s,r)\}_{(s,r)\in\mathbb{Q}_{+o}^{\Delta_1}\times\mathbb{N}_o^{\Delta_2}}$ posee una dilatación unitaria regular, entonces $\{T(s,r)\}_{(s,r)\in\mathbb{R}_{+o}^{\Delta_1}\times\mathbb{N}_o^{\Delta_2}}$ también posee una dilatación unitaria regular y por lo tanto, tiene una dilatación unitaria regular minimal fuertemente continua.

Demostración. Sea $\{U_0(s,r)\}_{(s,r)\in\mathbb{Q}_o^{\Delta_1}\times\mathbb{Z}_o^{\Delta_2}} \subset L(\mathcal{F})$ una dilatación unitaria regular minimal de $\{T(s,r)\}_{(s,r)\in\mathbb{Q}_{+o}^{\Delta_1}\times\mathbb{N}_o^{\Delta_2}}$. Por el Lema 4.7, se tiene que $\{U_0(s,r)\}_{(s,r)\in\mathbb{Q}_o^{\Delta_1}\times\mathbb{Z}_o^{\Delta_2}}$ es uniformemente fuertemente continua.

Como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ y la aplicación $(s,r) \mapsto U_0(s,r)f$ de $\mathbb{Q}_o^{\Delta_1} \times \mathbb{Z}_o^{\Delta_2}$ en $\mathcal{F}$ es uniformemente continua, entonces existe una única aplicación continua $(s,r) \mapsto U(s,r)f$ de $\mathbb{R}_o^{\Delta_1} \times \mathbb{Z}_o^{\Delta_2}$ en $\mathcal{F}$, tal que

$$U(s,r)f = U_0(s,r)f \quad \text{para todo}\,(s,r) \in \mathbb{Q}_o^{\Delta_1} \times \mathbb{Z}_o^{\Delta_2} \text{ y } f \in \mathcal{F}.$$

Si $(s,r) \in \mathbb{R}_o^{\Delta_1} \times \mathbb{Z}_o^{\Delta_2}$, existe una sucesión $\{s_m\}_{m\geq 1} \subset \mathbb{Q}_o^{\Delta_1}$ tal que

$$\lim_{m\to\infty} (s_m, r) = (s,r) \quad \text{en} \quad \mathbb{R}_o^{\Delta_1} \times \mathbb{Z}_o^{\Delta_2}.$$

Se cumple que

$$U(s,r)f = \lim_{m\to\infty} U_0(s_m,r)f$$

para todo $f \in \mathcal{F}$.

Al igual que en la prueba del Lema 4.11 de [**16**] se tiene que $\{U(s,r)\}_{(s,r)\in\mathbb{R}_o^{\Delta_1}\times\mathbb{Z}_o^{\Delta_2}}$ es una representación unitaria de $\mathbb{R}_o^{\Delta_1} \times \mathbb{Z}_o^{\Delta_2}$ en $L(\mathcal{F})$, fuertemente continua y

$$P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}} U(s,r)h = T(s^-,r^-)^* T(s^+,r^+)h \quad ((s,r) \in \mathbb{R}_o^{\Delta_1} \times \mathbb{Z}_o^{\Delta_2}).$$

$\square$

El siguiente resultado general de dilatación contiene al teorema de Ptak y además permite obtener una nueva demostración del mismo.

Teorema 4.9. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\{T(s,r)\}_{(s,r)\in\mathbb{R}_{+o}^{\Delta_1}\times\mathbb{N}_o^{\Delta_2}} \subset L(\mathcal{H})$ un semigrupo fuertemente continuo. Entonces $\{T(s,r)\}_{(s,r)\in\mathbb{R}_{+o}^{\Delta_1}\times\mathbb{N}_o^{\Delta_2}}$ posee una dilatación unitaria regular mininal, si y sólo si para cualquier $d \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ y todos subconjuntos finitos $\mathcal{U}_1 \subset \Delta_1$, $\mathcal{U}_2 \subset \Delta_2$*

$$W_{(d)}(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2) \geq 0.$$

Tal dilatación unitaria regular $\{U(s,r)\}_{(s,r)\in\mathbb{R}_o^{\Delta_1}\times\mathbb{Z}_o^{\Delta_2}}$ es fuertemente continua y determinada salvo isomorfismo isométrico.

Demostración.

($\Leftarrow$) Por el Teorema 4.4, el semigrupo $\{T(s,r)\}_{(s,r)\in\mathbb{Q}_{+o}^{\Delta_1}\times\mathbb{N}_o^{\Delta_2}}$ posee una dilatación unitaria regular.

Si $(s,r) \in \mathbb{Q}_{+o}^{\Delta_1} \times \mathbb{N}_o^{\Delta_2}$, existe $d_s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que

$$T(s,r) = T\left(\frac{\alpha_s}{d_s}, r\right) = \prod_{w\in\Delta_1} T\left(\frac{1}{d_s} e_{\{w\}}, 0\right)^{\alpha_{sw}} \prod_{\kappa\in\Delta_2} T\left(0, e_{\{\kappa\}}\right)^{r_\kappa}$$

donde $\alpha_s = (\alpha_{sw})_{w\in\Delta_1} \in \mathbb{N}_o^{\Delta_1}, r = (r_\kappa)_{\kappa\in\Delta_2} \in \mathbb{N}_o^{\Delta_2}$.

Como $W_{(d_s)}(\{w\}, \emptyset) \geq 0$ y $W_{(d_s)}(\emptyset, \{\kappa\}) \geq 0$ entonces $T(\frac{1}{d_s} e_{\{w\}}, 0)$ y $T(0, e_{\{\kappa\}})$ son contracciones, por lo tanto $T(s,r)$ es una contracción. Como $\{T(s,r)\}_{(s,r)\in\mathbb{R}_{+o}^{\Delta_1}\times\mathbb{N}_o^{\Delta_2}} \subset L(\mathcal{H})$ es fuertemente continuo y $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ entonces $\{T(s,r)\}_{(s,r)\in\mathbb{R}_{+o}^{\Delta_1}\times\mathbb{N}_o^{\Delta_2}}$ es un semigrupo de contracciones. Por el Lema 4.8 $\{T(s,r)\}_{(s,r)\in\mathbb{R}_{+o}^{\Delta_1}\times\mathbb{N}_o^{\Delta_2}}$ posee una dilatación unitaria regular minimal fuertemente continua $\{U(s,r)\}_{(s,r)\in\mathbb{R}_o^{\Delta_1}\times\mathbb{Z}_o^{\Delta_2}} \subset L(\mathcal{F})$.

Extendiendo $T(s,r)$ a todo $\mathbb{R}_o^{\Delta_1} \times \mathbb{Z}_o^{\Delta_2}$, el isomorfismo de la dilatación unitaria regular es una consecuencia de la relación

$$\begin{aligned}\langle U(s,r)h, U(s',r')h'\rangle_{\mathcal{F}} &= \langle U(s',r')^* U(s,r)h, h'\rangle_{\mathcal{F}} = \langle U(-s',-r')U(s,r)h, h'\rangle_{\mathcal{F}} \\ &= \langle U((s,r)-(s',r'))h, h'\rangle_{\mathcal{F}} = \langle T((s,r)-(s',r'))h, h'\rangle_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

La cual prueba que el producto escalar de los elementos de $\mathcal{F} = \bigvee_{(s,r)\in\mathbb{R}_o^{\Delta_1}\times\mathbb{Z}_o^{\Delta_2}} U(s,r)(\mathcal{H})$ de la forma $U(s,r)h$, $U(s',r')h'$ $((s,r),(s',r') \in \mathbb{R}_o^{\Delta_1} \times \mathbb{Z}_o^{\Delta_2}, h, h' \in \mathcal{H})$ no dependen de la particular elección de la dilatación unitaria regular $U(s,r)$.

($\Rightarrow$) Sean $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $h \in \mathcal{H}$, $\mathcal{U}_1$ un subconjunto finito de Δ_1 y $\mathcal{U}_2$ un subconjunto finito de Δ_2. Se puede escribir $\mathcal{U}_1 = \{w_1, ..., w_a\} \subset \Delta_1$ y $\mathcal{U}_2 = \{\kappa_1, ..., \kappa_b\} \subset \Delta_2$.

Sea $A_{w_k} = T\left(\frac{1}{d}e_{\{w_k\}}, 0\right)$, así $A^{e(V_1)} = \prod_{w\in V_1} A_w$ para $V_1 \subset \mathcal{U}_1$. Análogamente para $\widehat{A}_{\kappa_k} = T\left(0, e_{\{\kappa_k\}}\right)$. Como

$$\langle W_{(d)}(\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2)h,h\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle \sum_{V_1\subset\mathcal{U}_1}\sum_{V_2\subset\mathcal{U}_2}(-1)^{|V_1|+|V_2|}T\left(\frac{1}{d}e(V_1),e(V_2)\right)^* T\left(\frac{1}{d}e(V_1),e(V_2)\right)h,h\right\rangle_{\mathcal{H}}$$

$$= \left\langle \sum_{V_1\subset\{w_1,\dots,w_a\}}\sum_{V_2\subset\{\kappa_1,\dots,\kappa_b\}}(-1)^{|V_1|+|V_2|}(\widehat{A}^{e(V_2)})^*(A^{e(V_1)})^*A^{e(V_1)}\widehat{A}^{e(V_2)}h,h\right\rangle_{\mathcal{H}}.$$

Por el Teorema 3.10, $W_{(d)}(\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2)\geq 0$. $\square$

Con el teorema anterior se demuestra una versión multiparamétrica del teorema de levantamiento del conmutante.

3. Versión multiparamétrica del teorema de levantamiento del conmutante.

En esta sección se obtendrá una extensión al caso continuo del teorema de levantamiento del conmutante para el grupo $\mathbb{R}^n (n\geq 2)$ con un orden parcial.

En el año 1994, V. Müller [**17**] demostró el teorema de levantamiento del conmutante para una n-tupla ($n\geq 2$) de contracciones que satisfacen cierta condición de conmutación.

Müller trabajó en $\mathbb{Z}^n$ ($n\geq 2$) con el orden parcial: Si $s=(s_1,...s_n)$, $t=(t_1,...,t_n)\in\mathbb{Z}^n$

$$s\prec t \Leftrightarrow s_i\leq t_i \, (i=1,...,n)$$

y dilataciones regulares. En detalle,

Teorema 4.10 (V. Müller [**17**]). *Sean $A=(A_1,...,A_n)\in L(\mathcal{H})^n$ y $A'=(A'_1,...,A'_n)\in L(\mathcal{H}')^n$ dos n-tuplas de contracciones que conmutan. Supóngase que A y A' poseen dilataciones unitarias regulares minimales $U=(U_1,...,U_n)\in L(\mathcal{G})^n$ y $U'=(U'_1,...,U'_n)\in L(\mathcal{G}')^n$, respectivamente.*

Sea $X\in L(\mathcal{H},\mathcal{H}')$ una contracción tal que

$$XA_i = A'_iX \qquad XA_i^* = A_i'^*X \quad (i=1,...,n).$$

Entonces, existe una contracción $Z\in L(\mathcal{G},\mathcal{G}')$ tal que

a) $ZU_i = U'_iZ \quad (i=1,...,n)$,
b) $P^{\mathcal{G}'}_{\mathcal{H}'}Z = XP^{\mathcal{G}}_{\mathcal{H}}$.

A continuación se presenta una extensión al caso continuo del teorema de Müller. Es un resultado para $\mathbb{R}^n$ ($n\geq 2$) con el orden parcial: Si $s=(s_1,...s_n)$, $t=(t_1,...,t_n)\in\mathbb{R}^n$

$$s\prec t \Leftrightarrow s_i\leq t_i \, (i=1,...,n).$$

Teorema 4.11. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $\{A(s)\}_{s\in\mathbb{R}^n_+} \subset L(\mathcal{H})$ un semigrupo de contracciones fuertemente continuo. Supóngase que $\{A(s)\}_{s\in\mathbb{R}^n_+}$ posee una dilatación isométrica regular minimal $\{V(s)\}_{s\in\mathbb{R}^n_+} \subset L(\mathcal{F})$ y una dilatación unitaria regular minimal $\{U(s)\}_{s\in\mathbb{R}^n} \subset L(\mathcal{G})$.*

Sea $X \in L(\mathcal{H})$ una contracción tal que

$$XA(s) = A(s)X, \qquad XA(s)^* = A(s)^*X \quad (s \in \mathbb{R}^n_+). \tag{4.2}$$

Entonces, existe $Y \in L(\mathcal{F})$ contracción tal que:

i) $YV(s) = V(s)Y$ *para todo* $s \in \mathbb{R}^n_+$,

ii) $YV(s)^* = V(s)^*Y$ *para todo* $s \in \mathbb{R}^n_+$,

iii) $P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}Y = XP^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}$.

Existe $Z \in L(\mathcal{G})$ contracción tal que:

i) $ZU(s) = U(s)Z$ *para todo* $s \in \mathbb{R}^n$,

ii) $Z(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$,

iii) $P^{\mathcal{G}}_{\mathcal{H}}Z_{|\mathcal{F}} = XP^{\mathcal{G}}_{\mathcal{H}}$.

Demostración. Como X es contracción, el operador $I - X^*X$ es positivo, es decir, $I - X^*X \geq 0$.

Para $(s,r) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{N}$ se define $T(s,r) = X^rA(s)$. Se tiene que $\{T(s,r)\}_{(s,r)\in\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{N}}$ es un semigrupo fuertemente continuo.

Sean $\mathcal{U}_1 \subset \{1,...,n\}$, $\mathcal{U}_2 \subset \{1\}$ y $d \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

Por definición de semigrupo, por (4.2), como $W_{(\frac{1}{d})}(\mathcal{U}_1) \geq 0$ y usando que la raíz cuadrada es límite de polinomios, se tiene que

$$\begin{aligned}
W_{(d)}(\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2) &= \sum_{V_1\subset\mathcal{U}_1}\sum_{V_2\subset\mathcal{U}_2}(-1)^{|V_1|+|V_2|}T\left(\frac{1}{d}e(V_1),e(V_2)\right)^*T\left(\frac{1}{d}e(V_1),e(V_2)\right)\\
&= \sum_{V_1\subset\mathcal{U}_1}\sum_{V_2\subset\mathcal{U}_2}(-1)^{|V_1|+|V_2|}(X^{e(V_2)})^*A\left(\frac{1}{d}e_{(V_1)}\right)^*A\left(\frac{1}{d}e_{(V_1)}\right)X^{e(V_2)}\\
&= \sum_{V_2\subset\mathcal{U}_2}(-1)^{|V_2|}(X^{e(V_2)})^*X^{e(V_2)}\sum_{V_1\subset\mathcal{U}_1}(-1)^{|V_1|}A\left(\frac{1}{d}e_{(V_1)}\right)^*A\left(\frac{1}{d}e_{(V_1)}\right)\\
&= (I-X^*X)\sum_{V_1\subset\mathcal{U}_1}(-1)^{|V_1|}A\left(\frac{1}{d}e_{(V_1)}\right)^*A\left(\frac{1}{d}e_{(V_1)}\right)\\
&= (I-X^*X)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{V_1\subset\mathcal{U}_1}(-1)^{|V_1|}A\left(\frac{1}{d}e_{(V_1)}\right)^*A\left(\frac{1}{d}e_{(V_1)}\right)\right)(I-X^*X)^{\frac{1}{2}} \geq 0.
\end{aligned}$$

Por el Teorema 4.9, $\{T(s,r)\}_{(s,r)\in\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{N}} \subset L(\mathcal{H})$ posee una dilatación unitaria regular minimal $\{\widehat{U}(s,r)\}_{(s,r)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{Z}} \subset L(\mathcal{K})$ tal que:

a) $\mathcal{K}$ contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado,
b) $T(s^-,r^-)^*T(s^+,r^+) = P^{\mathcal{K}}_{\mathcal{H}}\widehat{U}(s,r)_{|\mathcal{H}} \quad (s,r)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{Z}$,
c) $\mathcal{K} = \bigvee_{(s,r)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{Z}} \widehat{U}(s,m)(\mathcal{H})$.

De donde, si $(s,r)\in\mathbb{R}^n$ entonces

$$X^rA(s^-)^*A(s^+) = P^{\mathcal{K}}_{\mathcal{H}}\widehat{U}(0,1)^r\widehat{U}(s^-,0)^*\widehat{U}(s^+,0)_{|\mathcal{H}} \quad \text{si} \quad r\geq 0.$$

$$X^{*|r|}A(s^-)^*A(s^+) = P^{\mathcal{K}}_{\mathcal{H}}\widehat{U}(0,1)^{*|r|}\widehat{U}(s^-,0)^*\widehat{U}(s^+,0)_{|\mathcal{H}} \quad \text{si} \quad r< 0.$$

$$A(s^-)^*A(s^+) = P^{\mathcal{K}}_{\mathcal{H}}\widehat{U}(s^-,0)^*\widehat{U}(s^+,0)_{|\mathcal{H}} \quad \text{si} \quad r= 0.$$

Si $s=0$

$$P^{\mathcal{K}}_{\mathcal{H}}\widehat{U}(0,1)_{|\mathcal{H}} = X.$$

Si $\mathcal{F} = \bigvee_{(s,r)\in\mathbb{R}^n_+} \widehat{U}(s,0)(\mathcal{H})$ y $V(s) = \widehat{U}(s,0)_{|\mathcal{F}}$, como la dilatación isométrica regular minimal es única, salvo isomorfismo isométrico, entonces $\{V(s)\}_{s\in\mathbb{R}^n_+}$ es la dilatación isométrica regular minimal de $\{A(s)\}_{s\in\mathbb{R}^n_+}$.

Sea $Y:\mathcal{F}\to\mathcal{F}$ el operador definido por

$$Y = P^{\mathcal{K}}_{\mathcal{F}}\widehat{U}(0,1)_{|\mathcal{F}}.$$

Como $\widehat{U}(0,1)$ es unitario, entonces $\| Y \|\leq 1$.

Al igual que en la prueba del Teorema 2.23 se obtiene que $YV(s) = V(s)Y$ para todo $s\in\mathbb{R}^n_+$ y que $P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}Y = XP^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}$.

Usando el hecho de que $V(s)^*V(s) = I_{\mathcal{F}}$ y que $YV(s) = V(s)Y$ para todo $s\in\mathbb{R}^n_+$ se tiene que $YV(s)^* = V(s)^*Y$ para todo $s\in\mathbb{R}^n_+$.

Sea $Z:\mathcal{G}\to\mathcal{G}$ el operador definido por

$$Z = i^{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}}YP^{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}}$$

donde $i^{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}}$ es la inclusión de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$.

i) $ZU(s) = U(s)Z$ para todo $s \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
P^{\mathcal{G}}_{\mathcal{H}} Z U(s) U(t)_{|\mathcal{H}} = P^{\mathcal{G}}_{\mathcal{H}} i^{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}} Y P^{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}} U(s) U(t)_{|\mathcal{H}} &= P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}} Y P^{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}} U(s) U(t)_{|\mathcal{H}} \\
&= X P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}} P^{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}} U(s) U(t)_{|\mathcal{H}} \\
&= X P^{\mathcal{G}}_{\mathcal{H}} U(s) U(t)_{|\mathcal{H}} \\
&= X A(s^-)^* A(s^+) A(t) \\
&= X P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}} V(s^-)^* V(s^+) V(t)_{|\mathcal{H}} \\
&= P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}} Y V(s^-)^* V(s^+) V(t)_{|\mathcal{H}} \\
&= P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}} V(s^-)^* V(s^+) Y V(t)_{|\mathcal{H}} \\
&= P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}} V(s) Y V(t)_{|\mathcal{H}} \\
&= P^{\mathcal{G}}_{\mathcal{H}} U(s) Z U(t)_{|\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

ii) $Z(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$:

Se obtiene debido a que $Z_{|\mathcal{F}} = i^{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}} Y$.

iii) $P^{\mathcal{G}}_{\mathcal{H}} Z_{|\mathcal{F}} = X P^{\mathcal{G}}_{\mathcal{H}}$:

Sea $f \in \mathcal{F}$

$$\begin{aligned}
P^{\mathcal{G}}_{\mathcal{H}} Z_{|\mathcal{F}} f = P^{\mathcal{G}}_{\mathcal{H}} i^{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}} Y f &= P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}} P^{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}} i^{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}} Y f \\
&= P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}} P^{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}} Y f \\
&= P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}} Y f = X P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}} f \\
&= X P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}} P^{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}} f \\
&= X P^{\mathcal{G}}_{\mathcal{H}} f.
\end{aligned}$$

□

Observación 4.12. Se puede obtener una versión del Teorema 4.11 para semigrupos de contracciones con parámetro en $\mathbb{Q}^n_+$ sin considerar la continuidad fuerte del semigrupo.

Bibliografía

[1] T. Ando, On a pair of conmutative contractions, *Acta Sci. Math.* **24** (1963), 88-90. Citado en la(s) página(s): 2, 18, 26

[2] J. R. Archer, Positivity and the Existence of Unitary Dilations of Commuting Contractions, *Operator Theory: Advances and Applications* **171** (2006), 17-35. Citado en la(s) página(s): 32

[3] R. Arocena, Generalized Toeplitz kernels and dilations of intertwining operators II:the continuous case, *Acta Sci. Math.(Szeged)* **53** (1989), 123-137. Citado en la(s) página(s): 3, 26

[4] W. Arveson, Subalgebras of C^*-algebras, *Acta Math.* **123** (1969), 142-224. Citado en la(s) página(s): 4, 14

[5] S. Berberian, Lectures in Functional Analysis and Operator Theory, Springer Verlag, 1974, (GTM 15). Citado en la(s) página(s): 3, 6, 9

[6] T. Bhattacharyya, Dilation of contractive tuples: a survey, *Proc. Centre Math. Appl. Austral. Nat. Univ.* **40** (2002), 89-126.

[7] S. Brehmer, Uber vertauschbare kontraktionen des Hilbertschen raumes, *Acta Sci. Math.* **22** (1961), 106-111. Citado en la(s) página(s): 30

[8] R. Bruzual, M. Domínguez, Equivalence between the dilation and lifting properties of an ordered group through multiplicativa families of isometries. A version of the commutant lifting theorem on some lexicographic groups, *Integral Equations Oper. Theory* **40** (2001), 1-15.

[9] R. Bruzual, M. Domínguez, M. Montilla, On unitary dilations of two-parameter semigroups of contractions and continuous commutant lifting, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **77** (2011), 607-620. Citado en la(s) página(s): 3, 23, 25

[10] J. A. Deddens, On n-parameter discrete and continuous semigroups of operators, *Trans. Amer. Math. Soc.* **149** (1970), 379-390.

[11] R. G. Douglas, Banach Algebra Techniques in Operator Theory, Academic Press, New York, 1972. Citado en la(s) página(s): 3, 10, 11

[12] D. Gaspar, N. Suciu, On the geometric structure of regular dilation, *Operator Theory. Advances and Applications.* **103** (1998), 105-120.

[13] I. Halperin, Sz. Nagy-Brehmer dilations, *Acta Sci. Math.* **23** (1962), 279-289. Citado en la(s) página(s):

[14] E. Hille, R. Phillips, Functional Analysis and Semi-Groups, AMS, 1957.

[15] M. Montilla, Dilataciones Unitarias de Semigrupos Biparamétricos de Contracciones, Trabajo de Grado de Maestría, Universidad Central de Venezuela, Caracas, 2007.Citado en la(s) página(s): 3, 23, 26

[16] M. Montilla, Dilataciones Unitarias de Familias Multiparamétricas de Contracciones, Trabajo de Ascenso a Categoría Asistente, Universidad Central de Venezuela, Caracas, 2011.Citado en la(s) página(s): 34, 35, 39, 40

[17] V. Müller, Commutant lifting theorem for n-tuples of contractions, *Acta Sci. Math.*(Szeged) **59** (1994), 465-474. Citado en la(s) página(s): 4, 42

[18] M.A. Neumark, Positive definite operator functions on a commutative groups, Bulletin (Izvestiya) *Acad. Sci. URSS (sér math)* **7** (1943), 237-244. Citado en la(s) página(s):

[19] S. Parrott, Unitary dilations for communting contractions, *Pac. J. Math.* **34** (1970), 481-490. Citado en la(s) página(s): 2, 19

[20] V. Paulsen, Completely Bounded Maps and Dilations, Pitman Research Notes in Mathematics Series, **146**, 1986. Citado en la(s) página(s): 3, 4, 13, 14

[21] M. Ptak, Unitary dilations of multi-parameter semi-groups of operators, *Ann. Polon. Math.* **45** (1985), 237-243. Citado en la(s) página(s): 3, 4, 26, 36

[22] W. Rudin, Functional Analysis, 2d ed., McGraw-Hill, Boston, 1991. Citado en la(s) página(s): 3, 11

[23] M. Slociński, Unitary dilation of two-parameter semi-groups of contractions II, Zesz. Nauk. Uniw. Jagiellon, *Pr. Mat.* **23** (1982), 191-194. Citado en la(s) página(s): 3, 23, 25

[24] W. F. Stinespring, Positive functions on C^*-algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* **6** (1955), 211-216. Citado en la(s) página(s): 4, 13

[25] B. Sz.-Nagy, Sur les contractions de l'espace de Hilbert, *Acta Sci. Math.* , **15** (1953), 87-92. Citado en la(s) página(s): 2, 18

[26] B. Sz.-Nagy, Transformations de l'espace de Hilbert, fonctions de type positif sur un groupe, *Acta Sci. Math. Szeged.*, **15** (1954), 104-114. Citado en la(s) página(s): 3, 22

[27] B. Sz.-Nagy, Extensions of Linear Transformations in Hilbert Space which Extend Beyond this Space, Appendix to F. Riesz and B. Sz.-Nagy: Functional Analysis, New York, 1960. Citado en la(s) página(s): 2

[28] B. Sz.-Nagy, Bremerkungen zur vorstchenden arbeit des Herm. S. Brehmer, *Acta Sci. Math.*, **22** (1961), 112-114.

[29] B. Sz.-Nagy, C. Foias, Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space, North Holland Publishing Co., 1970. Citado en la(s) página(s): 2, 3, 4, 18, 19, 22, 30, 31, 33, 36

[30] B. Sz.-Nagy, C. Foias, Dilatation des conmutants d'operateurs, *C. R. Acad. Sci.*,Paris, Serie A, **266** (1968), 493-495. Citado en la(s) página(s): 2, 26