UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
POSTGRADO EN MATEMÁTICA

Dilataciones unitarias de semigrupos biparamétricos de contracciones.

Autora: Lic. Mayra Montilla.
Tutor: Dr. Ramón Bruzual.

Trabajo de Grado de Maestría presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela para optar al título de Magister Scientiarium, Mención Matemática .

Caracas, Venezuela
Julio-2007

Agradecimientos

A DIOS.

A mis padres y hermanos por su compañía y apoyo incondicional.

A mis familiares y amigos por apoyarme.

Al profesor Ramón Bruzual por guiarme en la elaboración de este trabajo y sus apreciados consejos.

A las profesoras Marisela Domínguez y María Morán por sus valiosas sugerencias y la revisión detallada del trabajo.

Índice general

Resumen

Basándose en el teorema de Ando, el teorema de extensión de Arveson y el teorema de representación de Stinespring, se prueba que todo semigrupo de contracciones, no necesariamente fuertemente continuo, con parámetro en $\mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_+$ posee una dilatación unitaria. A partir de este resultado se obtiene una nueva demostración del teorema de Slocínski, que establece que todo semigrupo de contracciones fuertemente continuo, con parámetro en $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ posee una dilatación unitaria.

Introducción

Una técnica muy usada para estudiar operadores en espacios de Hilbert es la de representarlos como parte de un operador más simple, cuyo dominio es un espacio de Hilbert más grande. Esta técnica, esencialmente geométrica, es conocida como dilatación. Es decir, si T es un operador lineal y acotado definido en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, escribir

$$T = P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}} V|_{\mathcal{H}}$$

donde, $\mathcal{F}$ es un espacio de Hilbert que contiene a $\mathcal{H}$ y $P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}, V$ son operadores lineales y acotados definidos en $\mathcal{F}$; el operador $P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}$ es la proyección ortogonal de $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{H}$.

La notación anterior fue introducida por Sz.-Nagy [**19**]. Para Halmos [**8**], T es una compresión de V y V es una dilatación de T. Nagy habla sobre proyección en lugar de compresión.

Se dice que la dilatación es unitaria si V es unitario.

W. Stinespring [**16**] con el objetivo de estudiar la existencia de dilataciones, introduce el concepto de aplicaciones completamente positivas en álgebras C^*. Demostró que una condición necesaria y suficiente para que una aplicación definida en un álgebra C^*, a valores operadores en un espacio de Hilbert, sea escrita como compresión de homomorfismos* es que la aplicación sea completamente positiva. Posteriormente, el estudio de la relación entre este tipo de aplicaciones y la teoría de dilatación fue profundizado por W. Arveson [**2**], quien trabajó en subconjuntos de álgebras C^* denominados sistemas operadores y demostró que una aplicación completamente positiva definida en un sistema operador, a valores operadores, puede ser extendida a una aplicación completamente positiva en toda el álgebra.

En el año 1963, T. Ando [**1**] demostró que todo par conmutativo de contracciones posee una dilatación unitaria. En el año 1970, S. Parrott [**10**] mostró que el resultado de Ando no puede ser extendido a tres o más contracciones. Posteriormente, comienzan los trabajos con conjuntos de operadores de la forma $\{T(s,t)\}_{(s,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+}$, definidos en un espacio de Hilbert, que satisfacen:

a) $T(0,0) = I$ (operador identidad),
b) $T((s,t)+(s',t')) = T(s,t)T(s',t')$ para todo $(s,t),(s',t') \in \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$,
c) $\|T(s,t)\| \leq 1$ para todo $(s,t) \in \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$,

d) $\lim_{(s,t)\to(0^+,0^+)} T(s,t)h = h$ para todo h elemento del espacio de Hilbert, donde $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$.

El conjunto $\{T(s,t)\}_{(s,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+}$ se denomina semigrupo de contracciones con parámetro en $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ (o semigrupo biparamétrico de contracciones), fuertemente continuo en cero.

En el año 1974, M. Slocínski [**14**] usó el teorema de dilatación espectral de una medida semi-espectral para demostrar que todo semigrupo de contracciones con parámetro en $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$, fuertemente continuo en cero, posee una dilatación unitaria. En el año 1982 dió una nueva demostración de este resultado. En esta nueva demostración utiliza el teorema de Ando para encontrar extensiones autoadjuntas y conmutativas de los cogeneradores de los semigrupos uniparamétricos asociados al semigrupo biparamétrico [**15**]. El resultado de Slocínski puede interpretarse como una versión continua del resultado de Ando.

El propósito de este Trabajo de Grado de Maestría es obtener una nueva demostración del resultado de Slocínski. Para ésto se seguirá el siguiente esquema: se le asociará una aplicación completamente positiva, definida en un sistema operador, a un semigrupo de contracciones con parámetro en $\mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_+$, para aplicar el teorema de extensión de Arveson, el teorema de representación de Stinespring y usar la propiedad de que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.

El Capítulo 1 presenta una breve introducción sobre álgebras C^* y aplicaciones completamente positivas [**3**], [**11**].

El Capítulo 2 contiene detalladamente el enunciado del teorema de Ando y un contraejemplo de Parrott [**21**], propiedades y resultados básicos sobre semigrupos de operadores con parámetro en un grupo métrico y dilataciones unitarias [**5**], [**12**], [**21**].

Finalmente, en el Capítulo 3 se obtiene un resultado nuevo, que dice que todo semigrupo de contracciones con parámetro en $\mathbb{Q}_+\times\mathbb{Q}_+$ (no necesariamente fuertemente continuo) posee una dilatación unitaria (Teorema 3.2). A partir de este resultado se obtiene el resultado de Slocínski (Teorema 3.4).

CAPíTULO 1

Álgebras C^* y aplicaciones completamente positivas.

Este capítulo es preliminar, se dan ciertas definiciones y se exponen resultados básicos que serán necesarios para la lectura de los próximos capítulos.

Como es usual $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ representan el conjunto de los números naturales, enteros, racionales, reales y complejos, respectivamente.

1. Álgebras C^*.

Definición 1.1. Un *álgebra* $\mathcal{A}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ en el que está definido un producto $\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ que satisface:

(i) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$,
(ii) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$,
(iii) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, y
(iv) $\lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b)$

para todo $a, b, c \in \mathcal{A}$ y para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra, una *involución* en $\mathcal{A}$ es una aplicación $a \mapsto a^*$ de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}$ que cumple con las siguientes propiedades:

(i) $a^{**} = a$,
(ii) $(\alpha a + \lambda b)^* = \overline{\alpha} a^* + \overline{\lambda} b^*$, y
(iii) $(a \cdot b)^* = b^* \cdot a^*$.

para todo $a, b \in \mathcal{A}$ y para todo $\alpha, \lambda \in \mathbb{C}$.

El elemento a^* es llamado el *adjunto* de a.

Definición 1.2. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra con involución y $\mathcal{B}$ un subconjunto de $\mathcal{A}$, se dice que $\mathcal{B}$ es una *subálgebra con involución* de $\mathcal{A}$ cuando $\mathcal{B}$ es una variedad lineal y $a \cdot b, a^* \in \mathcal{B}$ para todo $a, b \in \mathcal{B}$.

Definición 1.3. Un *álgebra de Banach* $\mathcal{A}$ es un álgebra en la que está definida una norma $\|.\|_{\mathcal{A}}$, tal que $(\mathcal{A}, \|.\|_{\mathcal{A}})$ es un espacio de Banach y satisface:

$$\|a \cdot b\|_{\mathcal{A}} \leq \|a\|_{\mathcal{A}} \|b\|_{\mathcal{A}}$$

para todo $a, b \in \mathcal{A}$.

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach con involución y

$$\|a^* \cdot a\|_{\mathcal{A}} = \|a\|_{\mathcal{A}}^2$$

para todo $a \in \mathcal{A}$, se dice que $\mathcal{A}$ es un *álgebra C^**.

Observación 1.4. Si $\mathcal{A}$ es un álgebra C^*, la desigualdad

$$\|a \cdot b\|_{\mathcal{A}} \leq \|a\|_{\mathcal{A}} \|b\|_{\mathcal{A}}$$

hace del producto una operación continua en $\mathcal{A}$, es decir, si $\{a_n\}_{n\geq 1}$, $\{b_n\}_{n\geq 1}$ son sucesiones en $\mathcal{A}$ y $a, b \in \mathcal{A}$ son tales que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b.$$

Esta igualdad se obtiene usando:

$$a_n \cdot b_n - a \cdot b = (a_n - a) \cdot b_n + a \cdot (b_n - b),$$

y el hecho de que una sucesión convergente es acotada.

Si $a \in \mathcal{A}$, también se cumple que

$$\|a\|_{\mathcal{A}} = \|a^*\|_{\mathcal{A}}.$$

Definición 1.5. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^*, se dice que:

(i) $\mathcal{A}$ tiene *unidad* cuando existe un elemento $e \in \mathcal{A}$ tal que

$$e \cdot a = a \cdot e = a$$

para todo $a \in \mathcal{A}$.

En este caso es usual suponer que $\|e\|_{\mathcal{A}} = 1$ y se satisface que $e^* = e$.

(ii) $\mathcal{A}$ es *conmutativa* si el producto $\cdot$ es conmutativo.

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra C^* con unidad y $a \in \mathcal{A}$, se dice que a es *invertible* en $\mathcal{A}$ si existe $b \in \mathcal{A}$ tal que

$$a \cdot b = b \cdot a = e.$$

Denotaremos b por a^{-1}.

Observación 1.6. Si $\mathcal{A}$ es un álgebra C^* con unidad entonces la norma en $\mathcal{A}$ es única (ver [**3**, página 257, ejercicio 60.11]).

Definición 1.7. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con unidad e y $a \in \mathcal{A}$, se dice que:

(i) a es *normal* si $a \cdot a^* = a^* \cdot a$.

(ii) a es *autoadjunto* si $a = a^*$.

(iii) a es *unitario* si $a \cdot a^* = a^* \cdot a = e$.

Notación. Si $\mathcal{A}$ es un álgebra C^* con unidad y $a \in \mathcal{A}$, para $n \in \mathbb{N}$, a^n es el producto de a con ella misma , n veces. Para $n = 0$ se define $a^0 = e$.

A continuación se dan algunos ejemplos de álgebras C^* que son básicos en el presente trabajo.

Ejemplos.

a) $\mathbb{C}$ con el producto usual de números complejos, con elemento unidad $1 + i0 = 1$, con la norma dada por el valor absoluto y con involución: $z^* = \overline{z}$ para $z \in \mathbb{C}$, es un álgebra C^* conmutativa con unidad.

b) Sea X un espacio de Hausdorff compacto, $X \neq \emptyset$ y

$$\mathcal{C}(X, \mathbb{C}) = \{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ es continua en } X\}.$$

Con las siguientes convenciones se obtiene que $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ es un álgebra C^* conmutativa con unidad.

- Para $f, g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$, se define el producto

$$f \cdot g(x) = f(x)g(x) \text{ para todo } x \in X.$$

- El elemento unidad es la función constantemente igual a uno,

$$1(x) = 1 \text{ para todo } x \in X.$$

- Para $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$, la norma está dada por:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)| = \max_{x \in X} |f(x)|.$$

- Para $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$, el adjunto de f está dado por

$$f^*(x) = \overline{f}(x) = \overline{f(x)} \text{ para todo } x \in X.$$

c) Sea

$$\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) = \{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} : f \text{ es continua y acotada}\}.$$

Con las siguientes convenciones se obtiene que $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ es un álgebra C^* conmutativa con unidad.

- Para $f, g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$, se define el producto

$$f \cdot g(x,y) = f(x,y)g(x,y) \;\text{ para todo}\,(x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

- El elemento unidad es la función constantemente igual a uno,

$$1(x,y) = 1\,\text{para todo}\,(x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

- Para $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$, la norma está dada por:

$$\|f\| = \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} |f(x,y)|.$$

- Para $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$, el adjunto de f está dado por

$$f^*(x,y) = \overline{f}(x,y) = \overline{f(x,y)} \;\text{ para todo}\,(x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

d) Si $\mathcal{A}$ es un álgebra C^*, toda subálgebra con involución y cerrada en $\mathcal{A}$ es un álgebra C^*.

e) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo (excluimos el espacio trivial $\mathcal{H} = \{0\}$) y

$$L(\mathcal{H}) = \{T : \mathcal{H} \to \mathcal{H} : T\,\text{es un operador lineal y acotado}\,\}.$$

Con las siguientes convenciones se obtiene que $L(\mathcal{H})$ es un álgebra C^* no conmutativa con unidad.

- Se define el producto como la composición de operadores.
- El elemento unidad es el operador identidad I, definido por

$$I(h) = h \;\text{ para todo}\,h \in \mathcal{H}.$$

- Para $T \in L(\mathcal{H})$, la norma está dada por:

$$\|T\|_{L(\mathcal{H})} = \sup_{\|h\|=1} \|T(h)\|.$$

- Para $T \in L(\mathcal{H})$, el adjunto de T es el operador $T^* \in L(\mathcal{H})$ tal que

$$\langle T(h), h' \rangle_{\mathcal{H}} = \langle h, T^*(h') \rangle_{\mathcal{H}}$$

para todo $h, h' \in \mathcal{H}$.

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo. Para elementos del álgebra $L(\mathcal{H})$ se definen:

Definición 1.8. Sea $T \in L(\mathcal{H})$, se dice que T es:

(i) una *contracción* si $\|Th\|_{\mathcal{H}} \leq \|h\|_{\mathcal{H}}$ para todo $h \in \mathcal{H}$.

(ii) una *isometría* si $\|Th\|_{\mathcal{H}} = \|h\|_{\mathcal{H}}$ para todo $h \in \mathcal{H}$.

(iii) *unitario* si es una isometría sobreyectiva.

(iv) *autoadjunto* si $T = T^*$.

OBSERVACIÓN 1.9. Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(\mathcal{H})$.

(i) T es una isometría si y sólo si $T^*T = I_{\mathcal{H}}$.
(ii) T es unitario si y sólo si $T^*T = TT^* = I_{\mathcal{H}}$.

DEFINICIÓN 1.10. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras C^* con unidades $e_{\mathcal{A}}, e_{\mathcal{B}}$, respectivamente. Una aplicación $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un *homomorfismo unital* * si:

(i) ϕ es un homomorfismo de álgebras.
(ii) ϕ es unital, es decir, $\phi(e_{\mathcal{A}}) = e_{\mathcal{B}}$.
(iii) ϕ es una aplicación *, es decir, $\phi(a^*) = \phi(a)^*$ para todo $a \in \mathcal{A}$.

Se dice que $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es una *aplicación isométrica* si

$$\|\phi(a)\|_{\mathcal{B}} = \|a\|_{\mathcal{A}} \text{ para todo } a \in \mathcal{A}.$$

2. El álgebra $M_{n\times n}(\mathcal{A})$.

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con unidad, $n \in \mathbb{N}$ y $M_{n\times n}(\mathcal{A})$ el conjunto de las matrices $n \times n$ con entradas en $\mathcal{A}$. Con el producto usual de matrices y la involución dada por

$$([a_{ij}]_{i,j=1}^n)^* = [a_{ji}^*]_{i,j=1}^n$$

para $[a_{ij}]_{i,j=1}^n \in M_{n\times n}(\mathcal{A})$, se obtiene que $M_{n\times n}(\mathcal{A})$ es un álgebra con involución.

A continuación veremos que es posible definir una norma en $M_{n\times n}(\mathcal{A})$ con la cual adquiere estructura de álgebra C^*. Por la Observación 1.6, esta norma es única y por lo tanto no es ambiguo referirse a $M_{n\times n}(\mathcal{A})$ como un álgebra C^*.

Por el teorema de Gelfand-Naimark-Segal (ver [**3**, Teorema 62.1]) existe un espacio de Hilbert complejo $\mathcal{H}$ tal que $\mathcal{A}$ es isométricamente isomorfa a una subálgebra con involución y cerrada $\mathcal{U}$ de $L(\mathcal{H})$. Entonces, se puede identificar $M_{n\times n}(\mathcal{A})$ con $M_{n\times n}(\mathcal{U}) \subset M_{n\times n}(L(\mathcal{H}))$.

Si $[T_{ij}]_{i,j=1}^n \in M_{n\times n}(\mathcal{U})$, escribiendo:

$$[T_{ij}](h_1, \ldots, h_n) = (T_{11}(h_1) + \cdots + T_{1n}(h_n), \ldots, T_{n1}(h_1) + \cdots + T_{nn}(h_n))$$

para todo $h_k \in \mathcal{H}\,(k = 1, \ldots, n)$ y considerando la norma

$$\|(h_1, ..., h_n)\|^2_{\mathcal{H}^n} = \|h_1\|^2_{\mathcal{H}} + ... + \|h_n\|^2_{\mathcal{H}}$$

en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}^n = \mathcal{H} \oplus \cdot \overset{n}{\cdot} \cdot \oplus \mathcal{H}$, se obtiene que la matriz $[T_{ij}]_{i,j=1}^n \in L(\mathcal{H}^n)$

Esta identificación induce una norma $\|.\|_{n\times n}$ en $M_{n\times n}(\mathcal{A})$ (ver el Ejemplo e de álgebras C^*). Con esta norma, $M_{n\times n}(\mathcal{A})$ es un álgebra C^*.

Luego, $M_{n\times n}(\mathcal{A})$ es un álgebra C^* no conmutativa con unidad.

Ejemplo.

Sean $\mathcal{A} = M_{n\times n}(\mathbb{C})$ y $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n \in \mathcal{A}$, escribiendo:

$$Az = (a_{11}z_1 + \cdots + a_{1n}z_n, \ldots, a_{n1}z_1 + \cdots + a_{nn}z_n)$$

para $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, usando el producto interno

$$\langle z, w\rangle_n = \sum_{k=1}^{n} z_k\overline{w_k}$$

donde $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ y la norma

$$\|Az\|_n^2 = \langle Az, Az\rangle_n,$$

entonces

$$\|A\|_{n\times n} = \sup_{\|z\|_n=1} \|Az\|_n.$$

En particular, si $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$, entonces

$$\|A\|_{2\times 2} = \sup_{|z_1|^2+|z_2|^2=1} |z_2| = 1.$$

3. Cálculo funcional para funciones continuas.

En esta sección se da una breve introducción a la teoría de Gelfand para álgebras C^* conmutativas y su relación con el cálculo funcional.

Definición 1.11. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad. Sea $a \in \mathcal{A}$, el *espectro* de a es:

$$\sigma_{\mathcal{A}}(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda e \text{ no es invertible } \}.$$

Observación 1.12. Si el álgebra $\mathcal{A}$ es una subálgebra de un álgebra $\mathcal{B}$, puede ocurrir que algún elemento $a \in \mathcal{A}$ no es invertible en $\mathcal{A}$ pero es invertible en $\mathcal{B}$. Por lo tanto, el espectro de a depende del álgebra.

Siempre se cumple que $\sigma_{\mathcal{B}}(a) \subset \sigma_{\mathcal{A}}(a)$.

Si $\mathcal{B}$ es un álgebra C^* con unidad e y $\mathcal{A}$ es una subálgebra con involución y cerrada de $\mathcal{B}$ tal que $e \in \mathcal{A}$, entonces

$$\sigma_{\mathcal{A}}(a) = \sigma_{\mathcal{B}}(a)$$

para todo $a \in \mathcal{A}$.

En [**7**, página 41] se prueba que $\sigma_{\mathcal{A}}(a)$ es un espacio de Hausdorff compacto no vacío.

A continuación veamos algunos ejemplos de espectros.

EJEMPLOS.

a) Para $\mathcal{A} = \mathbb{C}$, sea $z \in \mathbb{C}$ entonces

$$\sigma_{\mathcal{A}}(z) = \{z\}.$$

b) Para $\mathcal{A} = M_{n\times n}(\mathbb{C})$, sea $A \in \mathcal{A}$ entonces

$$\sigma_{\mathcal{A}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(A - \lambda I) = 0\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ es autovalor de } A\}.$$

c) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $\mathcal{A} = L(\mathcal{H})$. Sea $T \in L(\mathcal{H})$, entonces

$$\sigma_{\mathcal{A}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ no es invertible}\}.$$

El elemento $T - \lambda I$ no es invertible si $T - \lambda I$ no es acotado inferiormente o Rango$(T - \lambda I) \neq \mathcal{H}$.

d) Sea X un espacio de Hausdorff compacto, $X \neq \emptyset$ y $\mathcal{A} = \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$. Sea $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$, entonces

$$\sigma_{\mathcal{A}}(f) = \{f(x) : x \in X\}.$$

e) Si $\mathcal{A} = \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ y $f \in \mathcal{A}$, entonces

$$\sigma_{\mathcal{A}}(f) = \overline{\{f(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\}}.$$

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra C^* conmutativa con unidad y

$$\mathcal{M}_{\mathcal{A}} = \{\psi : \mathcal{A} \to \mathbb{C} : \psi \text{ es un homomorfismo unital}\},$$

entonces, $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ es un espacio de Hausdorff compacto no vacío. La demostración de esta propiedad puede encontrarse en [**13**, páginas 277 y 280].

Por el teorema de Gelfand-Naimark (ver [**13**, página 289] y [**7**, página 92]), la *transformada de Gelfand*, que es la aplicación $\Gamma : \mathcal{A} \to \mathcal{C}(\mathcal{M}_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})$ dada por

$$\Gamma(a)(\psi) = \psi(a)$$

para todo $a \in \mathcal{A}$ y $\psi \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$, es un isomorfismo isométrico *.

Para el caso particular en que $\mathcal{A} = L(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert complejo, esta transformada da origen a un cálculo funcional, para funciones continuas, de la siguiente manera: Si $T \in L(\mathcal{H})$ es normal y $f \in \mathcal{C}(\sigma(T), \mathbb{C})$, entonces

$$f(T) = \Gamma^{-1}(f \circ \Gamma(T)).$$

EJEMPLO.

Si $f(z) = z^n \quad (z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N})$, entonces $f(T) = T^n$.

3.1. Cálculo funcional para un par de operadores unitarios que conmutan.

NOTACIÓN. Sea

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Un polinomio en dos variables definido en $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$ es una función de la forma:

$$p(z,w) = \sum_{k,j=-N}^{N} a_{kj} z^k w^j \quad (N \in \mathbb{N};\, a_{kj} \in \mathbb{C};\, z, w \in \mathbb{T}). \tag{1.1}$$

OBSERVACIÓN 1.13. Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert complejo y $U \in L(\mathcal{H})$ es unitario, entonces $\sigma(U) \subset \mathbb{T}$.

LEMA 1.14. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $U_1, U_2 \in L(\mathcal{H})$ operadores unitarios que conmutan. Entonces:*

(a) *Cada par de operadores U_1, U_2, U_1^*, U_2^* conmutan.*
(b) *Existe un homomorfismo unital *, $\phi : \mathcal{C}(\mathbb{T} \times \mathbb{T}, \mathbb{C}) \to L(\mathcal{H})$, tal que*

$$\phi(p) = p(U_1, U_2)$$

si p es un polinomio en dos variables definido en $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$.

DEMOSTRACIÓN.

(a) Como U_1 y U_2 son operadores que conmutan, entonces $U_1U_2 = U_2U_1$. Por definición de involución, se tiene que $U_2^*U_1^* = U_1^*U_2^*$, haciendo el producto por la derecha y por la izquierda, en cada término de esta igualdad, por U_1, se obtiene que $U_1U_2^* = U_2^*U_1$, porque U_1 es unitario.

Por definición de involución, $U_2U_1^* = U_1^*U_2$.

(b) Sea $\mathcal{C}^*(U_1, U_2)$ el álgebra C^* generada por U_1 y U_2, por la parte (a) se tiene que $\mathcal{C}^*(U_1, U_2)$ es un álgebra C^* conmutativa. Por el teorema de Gelfand-Naimark esta álgebra es isométricamente isomorfa* a $\mathcal{C}(\mathcal{M}_{\mathcal{C}^*(U_1,U_2)}, \mathbb{C})$.

Sea $\chi \in \mathcal{M}_{\mathcal{C}^*(U_1,U_2)}$, entonces

$$|\chi(U_i)|^2 = \chi(U_i)\chi(U_i^*) = \chi(U_iU_i^*) = \chi(I_{\mathcal{H}}) = 1, \quad (i = 1, 2).$$

Por lo tanto, para cualquier polinomio $p(z, w)$ definido en $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \|p(U_1, U_2)\| &= \sup_{\chi \in \mathcal{M}_{\mathcal{C}^*(U_1,U_2)}} |\chi(p(U_1, U_2))| \\ &= \sup_{\chi \in \mathcal{M}_{\mathcal{C}^*(U_1,U_2)}} |p(\chi(U_1), \chi(U_2))| \\ &\leq \sup_{|z|=|w|=1} |p(z, w)| \\ &= \|p\|_\infty. \end{aligned}$$

Por el teorema de Stone-Weierstrass el conjunto de los polinomios de la forma (1.1) es denso en $\mathcal{C}(\mathbb{T} \times \mathbb{T}, \mathbb{C})$ y por lo tanto la aplicación

$$p \mapsto p(U_1, U_2)$$

se extiende a un homomorfismo unital *, ϕ, de $\mathcal{C}(\mathbb{T} \times \mathbb{T}, \mathbb{C})$ en $L(\mathcal{H})$.

$\square$

Observación 1.15. Como es natural, en las mismas condiciones del lema anterior, para $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T} \times \mathbb{T}, \mathbb{C})$ se define

$$f(U_1, U_2) = \phi(f).$$

Así se obtiene, para el par de operadores U_1, U_2, un cálculo funcional para funciones continuas en dos variables.

Observación 1.16. La parte (a) del lema anterior es un caso particular del teorema de Flugede-Putnam-Rosenblum, cuya demostración puede encontrarse en [**13**, página 315], que dice lo siguiente:

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo y sean $T, J, V \in L(\mathcal{H})$ tales que J y V son operadores normales y

$$TJ = VT,$$

entonces

$$TJ^* = V^*T.$$

4. Aplicaciones completamente positivas.

DEFINICIÓN 1.17. Sean $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con unidad y $a \in \mathcal{A}$, se dice que a es *positivo* si $a = a^*$ y $\sigma_{\mathcal{A}}(a) \subset [0, \infty)$.

En este caso escribimos $a \geq 0$.

OBSERVACIÓN 1.18. Si $\mathcal{A}$ es un álgebra C^* con unidad y $a \in \mathcal{A}$, a es positivo si y sólo si existe $b \in \mathcal{A}$ tal que $a = b^* \cdot b$.

DEFINICIÓN 1.19. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras C^* con unidad y $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ una aplicación lineal, se dice que φ es una *aplicación positiva* si $\varphi(a) \geq 0$ para todo $a \in \mathcal{A}$, positivo.

Para $n \in \mathbb{N}$, sea φ_n la aplicación de $M_{n\times n}(\mathcal{A})$ a $M_{n\times n}(\mathcal{B})$ dada por:

$$\varphi_n(A) = [\varphi(a_{ij})]_{i,j=1}^n$$

para $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n \in M_{n\times n}(\mathcal{A})$.

Se tiene que φ_n es una aplicación lineal debido al hecho de que φ es una aplicación lineal y por las propiedades de suma de matrices y el producto de una matriz por un escalar.

Se dice que φ es *completamente positiva* si para cada $n \in \mathbb{N}$ y $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n \in M_{n\times n}(\mathcal{A})$, $A \geq 0$ se tiene que $\varphi_n(A) = [\varphi(a_{ij})]_{i,j=1}^n \geq 0$.

OBSERVACIÓN 1.20. Claramente toda aplicación completamente positiva es positiva. A continuación veremos un ejemplo de una aplicación positiva que no es completamente positiva.

El conjunto $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ es un álgebra C^* (ya que se identifica con el espacio $L(\mathbb{C}^2)$). Sea $\varphi : M_{2\times 2}(\mathbb{C}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ la aplicación definida por

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \overline{z}_{11} & \overline{z}_{21} \\ \overline{z}_{12} & \overline{z}_{22} \end{bmatrix}.$$

Se tiene que φ es positiva ya que una matriz es positiva si y sólo si su transpuesta conjugada lo es (ver la Observación 1.18).

Veamos que φ no es completamente positiva, para ésto basta ver que φ_2 no es positiva. Usando la identificación natural entre $M_{2\times 2}(M_{2\times 2}(\mathbb{C}))$ y $M_{4\times 4}(\mathbb{C})$ se tiene que la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es positiva porque sus autovalores son positivos, pero

$$\varphi_2\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

no es positiva porque tiene un autovalor negativo.

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo. En general, un teorema de dilatación es un resultado que caracteriza alguna clase de aplicaciones en $L(\mathcal{H})$ como compresiones (o proyecciones) a $\mathcal{H}$ de aplicaciones en $L(\mathcal{F})$ con mejores propiedades, donde $\mathcal{F}$ es un espacio de Hilbert complejo que contiene a $\mathcal{H}$.

Uno de los teoremas de dilatación más generales es el teorema de representación de Stinespring (ver [**16**],[**11**]) el cual caracteriza las aplicaciones completamente positivas de un álgebra C^* en $L(\mathcal{H})$, como compresiones de homomorfismos*.

Teorema 1.21 (Stinespring [**16**]). *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con unidad e, sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $\varphi : \mathcal{A} \to L(\mathcal{H})$ una aplicación lineal*. Una condición necesaria y suficiente para que φ tenga la forma:*

$$\varphi(a) = J^*\psi(a)J$$

para todo $a \in \mathcal{A}$, donde $J : \mathcal{H} \to \mathcal{F}$ es un operador lineal y acotado, $\mathcal{F}$ es un espacio de Hilbert complejo y $\psi : \mathcal{A} \to L(\mathcal{F})$ es un homomorfismo unital *, es que φ sea completamente positiva.

Observación 1.22. En el teorema anterior como $\varphi(e) = J^*J$, si φ es unital entonces J es una isometría. Luego, $J : \mathcal{H} \to J(\mathcal{H})$ es un isomorfismo isométrico y como $J(\mathcal{H}) \subset \mathcal{F}$, podemos identificar $\mathcal{H}$ con el subespacio cerrado $J(\mathcal{H})$. Con esta identificación,

$$J^* = P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}$$

de donde,

$$\varphi(a) = P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}\psi(a)|_{\mathcal{H}}$$

para todo $a \in \mathcal{A}$.

Definición 1.23. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* y S un subconjunto de $\mathcal{A}$, se define

$$S^* = \{a \in \mathcal{A} : a^* \in S\}.$$

Se dice que S es *autoadjunto* si $S = S^*$.

DEFINICIÓN 1.24. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con unidad e. Se dice que S es un *sistema operador* en $\mathcal{A}$ si S es una variedad lineal de $\mathcal{A}$, es autoadjunto y contiene la unidad e.

Si $a \in \mathcal{A}$, se dice que a es un elemento positivo de S si $a \in S$ y a es positivo en $\mathcal{A}$.

EJEMPLO.

El conjunto

$$S_{\mathbb{T}\times\mathbb{T}} = \left\{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}\times\mathbb{T},\mathbb{C}) : f(z,w) = \sum_{k,j=0}^{N} a_{kj} z^k w^j + \sum_{k,j=0}^{N} b_{kj} z^{-k} w^{-j}; N \in \mathbb{N}; a_{kj}, b_{kj} \in \mathbb{C} \right\}$$

es un sistema operador en $\mathcal{C}(\mathbb{T}\times\mathbb{T},\mathbb{C})$.

Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son álgebras C^* con unidad y S es un sistema operador en $\mathcal{A}$, la definición de aplicación completamente positiva $\varphi : S \to \mathcal{B}$ es análoga a la Definición 1.19.

El teorema de extensión de Arveson (ver [**2**],[**11**]) dice que, bajo ciertas condiciones, una aplicación completamente positiva definida en un sistema operador, se puede extender a una aplicación completamente positiva en toda el álgebra.

TEOREMA 1.25 (Arveson [**2**]). *Sean $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con unidad, $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $S \subset \mathcal{A}$ un sistema operador.*

Si $\phi : S \to L(\mathcal{H})$ es una aplicación completamente positiva, entonces existe una aplicación completamente positiva $\varphi : \mathcal{A} \to L(\mathcal{H})$ que extiende a ϕ.

CAPíTULO 2

Dilataciones unitarias de semigrupos de contracciones.

En lo que sigue al referirnos a espacios de Hilbert se trata de espacios de Hilbert complejos.

1. Dilatación unitaria minimal de un par de contracciones conmutativas.

En esta sección se introducen resultados importantes de la teoría de operadores, entre ellos, el teorema de dilatación de Sz.-Nagy (caso discreto), el teorema de dilatación de Ando y un contraejemplo de Parrott.

NOTACIÓN. Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{F}$ espacios de Hilbert. Si $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ y $\mathcal{T} \subset L(\mathcal{H})$, denotaremos por $\bigvee_{T\in\mathcal{T}} T(\mathcal{H})$ el subespacio cerrado de $\mathcal{F}$ generado por los elementos de la forma $T(h)$, donde $T \in \mathcal{T}, h \in \mathcal{H}$. Es decir,

$$\bigvee_{T\in\mathcal{T}} T(\mathcal{H}) = \overline{\left\{ \sum_{k=1}^{N} T_k(h_k) : N \in \mathbb{N}; T_k \in \mathcal{T}; h_k \in \mathcal{H}; k = 1, ..., N \right\}}. \tag{2.1}$$

DEFINICIÓN 2.1. Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{F}$ espacios de Hilbert, $\{T_1, ..., T_n\} \subset L(\mathcal{H})$ y $\{V_1, ..., V_n\} \subset L(\mathcal{F})$ conjunto de operadores cuyos elementos conmutan dos a dos. Se dice que $\{V_1, ..., V_n\}$ es *dilatación* de $\{T_1, ..., T_n\}$ si $\mathcal{F}$ contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y

$$T_1^{m_1}...T_n^{m_n} = P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}} V_1^{m_1}...V_n^{m_n}|_{\mathcal{H}} \quad (m_i = 0, 1, 2, ...; i = 1, ..., n)$$

donde, $P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}}$ es la proyección ortogonal de $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{H}$.

La dilatación es *unitaria* si cada operador del conjunto $\{V_1, ..., V_n\}$ es unitario.

Si además

$$\mathcal{F} = \bigvee_{m_1,...,m_n\in\mathbb{Z}} V_1^{m_1}...V_n^{m_n}(\mathcal{H})$$

se dice que la dilatación es *minimal*.

DEFINICIÓN 2.2. Sean $V \in L(\mathcal{F})$ y $V' \in L(\mathcal{F}')$ dos dilataciones de $T \in L(\mathcal{H})$, se dice que V y V' son *isomorfas* si existe un operador unitario $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ tal que:

(i) $\varphi(h) = h$ para todo $h \in \mathcal{H}$,

(ii) $V' = \varphi V \varphi^{-1}$.

El teorema de dilatación de Sz.-Nagy (ver [**17**] y [**21**, página 13]) establece que toda contracción posee una única dilatación unitaria minimal, en detalle

Teorema 2.3 (B. Sz.-Nagy, [**17**]). *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T \in L(\mathcal{H})$ una contracción. Entonces, existe un espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y un operador unitario $U \in L(\mathcal{F})$, tal que*

$$T^n = P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}} U^n|_{\mathcal{H}} \quad (n = 0, 1, 2, ...)$$

donde $P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}$ es la proyección ortogonal de $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{H}$.

Si se pide la condición de minimalidad,

$$\mathcal{F} = \bigvee_{n \in \mathbb{Z}} U^n(\mathcal{H})$$

entonces U es único, salvo isomorfismo.

Otro de los teoremas de dilatación importante en el análisis funcional es el teorema de Ando (ver [**1**] y [**21**, página 23]) que establece que todo par de contracciones que conmutan posee una dilatación unitaria, más precisamente

Teorema 2.4 (Ando [**1**]). *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T_1, T_2 \in L(\mathcal{H})$ contracciones que conmutan. Entonces, existe un espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y dos operadores unitarios que conmutan $U_1, U_2 \in L(\mathcal{F})$, tales que:*

$$T_1^n T_2^m = P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}} U_1^n U_2^m|_{\mathcal{H}} \quad (n, m = 0, 1, 2...)$$

donde $P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}$ es la proyección ortogonal de $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{H}$.

Si se pide la condición

$$\mathcal{F} = \bigvee_{n,m \in \mathbb{Z}} U_1^n U_2^m(\mathcal{H}),$$

entonces la dilatación es minimal.

Observación 2.5. Contrario al caso de una sola contracción (teorema de Sz.-Nagy) en el teorema anterior no se puede afirmar que la dilatación unitaria minimal es única.

Combinando el teorema de Ando con el Lema 1.14 se obtiene la siguiente generalización de la desigualdad de Von Neumann (ver [**4**, página 99]).

Corolario 2.6. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T_1, T_2 \in L(\mathcal{H})$ contracciones que conmutan. Si*

$$p(z, w) = \sum_{k,j=0}^{N} a_{kj} z^k w^j \quad (a_{kj} \in \mathbb{C})$$

entonces,

$$\|p(T_1, T_2)\| \leq \sup_{|z|=|w|=1} |p(z, w)|.$$

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema de Ando, existe un espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y dos operadores unitarios que conmutan $U_1, U_2 \in L(\mathcal{F})$, tales que

$$T_1^n T_2^m = P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}} U_1^n U_2^m|_{\mathcal{H}} \quad (n, m = 0, 1, 2, ...).$$

De donde,

$$p(T_1, T_2) = P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}} p(U_1, U_2)|_{\mathcal{H}}.$$

Por la parte (a) y la demostración de la parte (b) del Lema 1.14, se tiene que

$$\|p(U_1, U_2)\| \leq \sup_{|z|=|w|=1} |p(z, w)|.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \|p(T_1, T_2)\| &= \|P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}} p(U_1, U_2)|_{\mathcal{H}}\| \\ &\leq \|p(U_1, U_2)\| \\ &\leq \sup_{|z|=|w|=1} |p(z, w)|. \end{aligned}$$

□

Parrott (ver [**10**] y [**21**, página 24]) mostró que el resultado de Ando no puede ser extendido a tres o más contracciones.

A continuación se construye un conjunto de contracciones que conmutan $\{T_1, T_2, T_3\} \subset L(\mathcal{H})$ para el cual no se puede encontrar un conjunto de operadores unitarios que conmutan $\{U_1, U_2, U_3\} \subset L(\mathcal{F})$, tales que

$$T_i = P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}} U_i|_{\mathcal{H}} \quad (i = 1, 2, 3). \tag{2.2}$$

Sean $\mathcal{K}$ un espacio de Hilbert y $\{S_1, S_2, S_3\} \subset L(\mathcal{K})$ un conjunto de operadores unitarios, tales que

$$S_1 S_2^{-1} S_3 \neq S_3 S_2^{-1} S_1. \tag{2.3}$$

(Por ejemplo, se pueden considerar $S_2 = I_{\mathcal{K}}$ y $S_1, S_3 \in L(\mathcal{K})$ operadores unitarios que no conmutan).

Sean $\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}$ y $T_i \in L(\mathcal{H}) \quad (i = 1, 2, 3)$ los operadores definidos por

$$T_i(h, h') = (0, S_i(h)) \quad (h, h' \in \mathcal{K}).$$

Se tiene que:

(i) $\|T_i\| = \|S_i\| = 1 \quad (i = 1, 2, 3)$,

(ii) $T_iT_j = 0 = T_jT_i \quad (i, j = 1, 2, 3)$.

Así, $\{T_1, T_2, T_3\}$ es un conjunto de contracciones que conmutan.

Supongamos que existe un conjunto de operadores unitarios que conmutan $\{U_1, U_2, U_3\} \subset L(\mathcal{F})$, tales que cumplen con (2.2), entonces

$$P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}} U_i(h, 0) = T_i(h, 0) = (0, S_i(h)) \quad (h \in K;\ i = 1, 2, 3). \tag{2.4}$$

Como U_i y S_i son isometrías, se tiene que

$$\|U_i(h, 0)\|_{\mathcal{H}} = \|(h, 0)\|_{\mathcal{H}} = \|h\|_{\mathcal{K}} = \|S_i(h)\|_{\mathcal{K}} = \|(0, S_i(h))\|_{\mathcal{H}}.$$

Por (2.4),

$$U_i(h, 0) = (0, S_i(h)) \quad (h \in \mathcal{K}).$$

De donde,

$$U_j^{-1}U_i(h, 0) = U_j^{-1}(0, S_i(h)) = U_j^{-1}(0, S_j(S_j^{-1}S_i)(h)) = (S_j^{-1}S_i(h), 0)$$

y

$$U_kU_j^{-1}U_i(h, 0) = U_k(S_j^{-1}S_i(h), 0) = (0, S_kS_j^{-1}S_i(h)).$$

Como U_1, U_2, U_3 conmutan dos a dos (ver el Lema 1.14, parte (a)), entonces

$$S_kS_j^{-1}S_i = S_iS_j^{-1}S_k \quad (i, j, k = 1, 2, 3).$$

Contradicción a (2.3). Por lo tanto, no existen operadores unitarios $\{U_1, U_2, U_3\} \subset L(\mathcal{F})$ que conmutan, tales que se cumple (2.2).

Observación 2.7. Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T \in L(\mathcal{H})$, si $p(z)$ es una función dada por

$$p(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^k + \sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k}$$

se define

$$p(T) = \sum_{k=0}^{N} a_k T^k + \sum_{k=0}^{N} b_k T^{*k}.$$

Análogamente, si $T_1, T_2 \in L(\mathcal{H})$ y

$$p(z, w) = \sum_{k,j=0}^{N} a_{kj} z^k w^j + \sum_{k,j=0}^{N} b_{kj} z^{-k} w^{-j}$$

se define

$$p(T_1, T_2) = \sum_{k,j=0}^{N} a_{kj} T_1^k T_2^j + \sum_{k,j=0}^{N} b_{kj} T_1^{*k} T_2^{*j}.$$

LEMA 2.8. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T_1, T_2 \in L(\mathcal{H})$ contracciones que conmutan. Sea $S_{\mathbb{T}\times\mathbb{T}}$ el sistema operador en $\mathcal{C}(\mathbb{T}\times\mathbb{T}, \mathbb{C})$ dado en el ejemplo de la Definición 1.24. Entonces, la aplicación $\mathbf{F} : S_{\mathbb{T}\times\mathbb{T}} \to L(\mathcal{H})$ definida por*

$$\mathbf{F}(f) = f(T_1, T_2) \quad (f \in S_{\mathbb{T}\times\mathbb{T}})$$

es completamente positiva.

DEMOSTRACIÓN. Sea $f \in S_{\mathbb{T}\times\mathbb{T}}$. Como T_1 y T_2 son contracciones que conmutan, por el teorema de Ando, existe un espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y dos operadores unitarios que conmutan $U_1, U_2 \in L(\mathcal{F})$, tales que

$$T_1^n\, T_2^m = P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}} U_1^n\, U_2^m|_{\mathcal{H}} \quad (n, m = 0, 1, 2, ...).$$

De donde,

$$T_1^{*n}\, T_2^{*m} = P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}} U_1^{*n}\, U_2^{*m}|_{\mathcal{H}} \quad (n, m = 0, 1, 2, ...).$$

Luego,

$$\mathbf{F}(f) = P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}}(f(U_1, U_2))|_{\mathcal{H}}.$$

Sea $\phi : \mathcal{C}(\mathbb{T}\times\mathbb{T}, \mathbb{C}) \to L(\mathcal{F})$ la aplicación dada por

$$\phi(g) = g(U_1, U_2) \quad (g \in \mathcal{C}(\mathbb{T}\times\mathbb{T}, \mathbb{C})).$$

Entonces,

$$\mathbf{F}(f) = P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}}\phi(f)|_{\mathcal{H}}.$$

Sea $\varphi : \mathcal{C}(\mathbb{T}\times\mathbb{T}, \mathbb{C}) \to L(\mathcal{H})$ la aplicación definida por

$$\varphi(g) = P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}}\phi(g)|_{\mathcal{H}} \quad (g \in \mathcal{C}(\mathbb{T}\times\mathbb{T}, \mathbb{C})).$$

Por el Lema 1.14, se tiene que ϕ es un homomorfismo unital * y como $P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}}$ es un operador lineal, acotado y autoadjunto, por el teorema de Stinespring, φ es completamente positiva y como φ extiende a $\mathbf{F}$, entonces $\mathbf{F} : S_{\mathbb{T}\times\mathbb{T}} \to L(\mathcal{H})$ es completamente positiva. $\square$

2. Representaciones unitarias.

Definición 2.9. Un *grupo abeliano topológico* es un grupo $(\Omega, +)$, en el que está definida una topología Hausdorff, tal que las operaciones del grupo:

$$\begin{array}{ccc} \Omega \times \Omega \to \Omega & \qquad & \Omega \to \Omega \\ (\omega, \omega') \mapsto \omega + \omega' & \qquad & \omega \mapsto -\omega \end{array}$$

son continuas.

Si $(\Omega, +)$ un grupo abeliano y d es una métrica en Ω, que es invariante por traslaciones, es decir

$$d(\omega + \omega_o, \omega' + \omega_o) = d(\omega, \omega')$$

para todo $\omega, \omega', \omega_o \in \Omega$ entonces Ω es un grupo topológico con la topología inducida por d.

En lo que sigue, salvo que se indique expresamente lo contrario, $(\Omega, +)$ es un grupo abeliano con una métrica d invariante por traslaciones y elemento neutro 0.

Definición 2.10. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Una *representación* de Ω en $L(\mathcal{H})$ es una aplicación $U : \Omega \to L(\mathcal{H})$, que satisface:

(i) $U(\omega_1 + \omega_2) = U(\omega_1)U(\omega_2)$ para todo $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$,
(ii) $U(0) = I_{\mathcal{H}}$ (operador identidad).

Se dice que la representación es *unitaria* si $U(\omega)$ es un operador unitario para todo $\omega \in \Omega$. En este caso, $U(\omega)^* = U(-\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$.

Definición 2.11. Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\{U(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ una representación de Ω en $L(\mathcal{H})$, se dice que $\{U(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ es:

(i) *fuertemente continua* (*fuertemente continua en* 0) si, para cada $h \in \mathcal{H}$, la aplicación $\omega \mapsto U(\omega)h$ de Ω en $\mathcal{H}$ es continua en todo Ω (continua en 0),
(ii) *débilmente continua* (*débilmente continua en* 0) si, para cada $h, h' \in \mathcal{H}$, la aplicación $\omega \mapsto \langle U(\omega)h, h'\rangle_{\mathcal{H}}$ de Ω en $\mathbb{C}$ es continua en todo Ω (continua en 0),
(iii) *uniformemente fuertemente continua* si, para cada $h \in \mathcal{H}$, la aplicación $\omega \mapsto U(\omega)h$ de Ω en $\mathcal{H}$ es uniformemente continua en Ω.

Ejemplo.

Sea $A \in L(\mathcal{H})$ autoadjunto. Para $t \in \mathbb{R}$ sea $U(t) = e^{itA}$. Entonces, $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ es una representación unitaria de $\mathbb{R}$ en $L(\mathcal{H})$, fuertemente continua en 0.

Proposición 2.12. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\{U(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ una representación unitaria de Ω en $L(\mathcal{H})$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\{U(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ *es débilmente continua en 0.*

(b) $\{U(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ *es débilmente continua.*

(c) $\{U(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ *es fuertemente continua en 0.*

(d) $\{U(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ *es fuertemente continua.*

(e) $\{U(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ *es uniformemente fuertemente continua.*

Demostración.

(a)$\Rightarrow$(b):

Sean $\varepsilon > 0$; $\omega_0 \in \Omega$ y $h, h' \in \mathcal{H}$, veamos que existe $\delta_{\omega_0,\varepsilon} > 0$ tal que si $\omega \in \Omega$ y $d(\omega, \omega_0) < \delta_{\omega_0,\varepsilon}$, entonces

$$|\langle U(\omega)h, h'\rangle_{\mathcal{H}} - \langle U(\omega_0)h, h'\rangle_{\mathcal{H}}| < \varepsilon.$$

Por (a), existe $\delta_{0,\varepsilon} > 0$ tal que si $d(\tau, 0) < \delta_{0,\varepsilon}$, entonces

$$|\langle U(\tau)h_1 - h_1, h_2\rangle_{\mathcal{H}}| < \varepsilon \quad (h_1, h_2 \in \mathcal{H}).$$

Sea $\delta_{\omega_0,\varepsilon} = \delta_{0,\varepsilon}$, si $\omega \in \Omega, d(\omega, \omega_0) < \delta_{0,\varepsilon}$ y $\tau = \omega - \omega_0$, entonces

$$d(\tau, 0) = d(\omega - \omega_0, 0) = d(\omega - \omega_0, \omega_0 - \omega_0) = d(\omega, \omega_0) < \delta_{0,\varepsilon}.$$

Así,

$$\begin{aligned} |\langle U(\omega)h, h'\rangle_{\mathcal{H}} - \langle U(\omega_0)h, h'\rangle_{\mathcal{H}}| &= |\langle U(\omega - \omega_0)h - h, U(\omega_0)^*h'\rangle_{\mathcal{H}}| \\ &= |\langle U(\tau)h - h, U(\omega_0)^*h'\rangle_{\mathcal{H}}| < \varepsilon. \end{aligned}$$

(b)$\Rightarrow$ (c):

Por (b), se tiene que $\{U(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ es débilmente continua en 0. Si $h \in \mathcal{H}$ y $\omega \in \Omega$, como

$$\|U(\omega)h - h\|^2_{\mathcal{H}} \leq 2\|h\|^2_{\mathcal{H}} - 2Re\langle U(\omega)h, h\rangle_{\mathcal{H}}$$

se obtiene el resultado.

(c)$\Rightarrow$ (d):

Sean $\varepsilon > 0$; $\omega_0 \in \Omega$ y $h, h' \in \mathcal{H}$, veamos que existe $\delta_{\omega_0,\varepsilon} > 0$ tal que si $\omega \in \Omega$ y $d(\omega, \omega_0) < \delta_{\omega_0,\varepsilon}$, entonces

$$\|U(\omega)h - U(\omega_0)h\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon.$$

Por (c), existe $\delta_{0,\varepsilon} > 0$ tal que si $d(\tau, 0) < \delta_{0,\varepsilon}$, entonces

$$\|U(\tau)h_1 - h_1\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon \quad (h_1 \in \mathcal{H}).$$

Sea $\delta_{\omega_0,\varepsilon} = \delta_{0,\varepsilon}$, si $\omega \in \Omega; d(\omega, \omega_0) < \delta_{0,\varepsilon}$ y $\tau = \omega - \omega_0$, entonces

$$d(\tau, 0) = d(\omega, \omega_0) < \delta_{0,\varepsilon}.$$

Así,

$$\begin{aligned}\|U(\omega)h - U(\omega_0)h\|_{\mathcal{H}} &= \|U(\omega_0)(U(\omega - \omega_0)h - h)\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq \|U(\tau)h - h\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon.\end{aligned}$$

(d)$\Rightarrow$ (e):

Por (d), se tiene que $\{U(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ es fuertemente continuo en 0. Sea $\varepsilon > 0$, por definición existe $\delta_{0,\varepsilon} > 0$ tal que si $d(\tau, 0) < \delta_{0,\varepsilon}$, entonces

$$\|U(\tau)h - h\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon \quad (h \in \mathcal{H}).$$

Sean $h \in \mathcal{H}$ y $\omega, \omega' \in \Omega$, si $d(\omega, \omega') < \delta_{0,\varepsilon}$, entonces

$$\begin{aligned}\|U(\omega)h - U(\omega')h\|_{\mathcal{H}} &= \|U(\omega')(U(\omega - \omega')h - h\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq \|U(\omega - \omega')h - h\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq \varepsilon.\end{aligned}$$

(e)$\Rightarrow$ (a):

Sean $h, h' \in \mathcal{H}$, como la aplicación $\omega \mapsto U(\omega)h$ es uniformemente continua en Ω, entonces es continua en 0.

Por la desigualdad de Cauchy-Schawrz, la aplicación $\omega \mapsto \langle U(\omega)h, h'\rangle_{\mathcal{H}}$ es continua en 0. □

3. Semigrupos de contracciones.

Sea $\Delta \subset \Omega$ un *subsemigrupo*, es decir, Δ es estable con respecto a la suma y $0 \in \Delta$.

Definición 2.13. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Un *semigrupo de operadores con parámetro en* Δ es un conjunto $\{T(\omega)\}_{\omega\in\Delta} \subset L(\mathcal{H})$, tal que:

(i) $T(\omega_1 + \omega_2) = T(\omega_1)T(\omega_2)$ para todo $\omega_1, \omega_2 \in \Delta$,
(ii) $T(0) = I_{\mathcal{H}}$.

Se dice que el semigrupo es de *contracciones* si cada operador $T(\omega)$ es una contracción.

Si $\{T(\omega)\}_{\omega\in\Delta} \subset L(\mathcal{H})$ es un semigrupo, también el conjunto de los operadores adjuntos $\{T(\omega)^*\}_{\omega\in\Delta}$ es un semigrupo y se denomina *semigrupo adjunto* de $\{T(\omega)\}_{\omega\in\Delta}$.

Se define $T(\omega) = T(-\omega)^*$ si $-\omega \in \Delta$.

OBSERVACIÓN 2.14. Si $\{T(\omega)\}_{\omega\in\Delta}$ es un semigrupo de contracciones débilmente continuo en 0, también el semigrupo $\{T(\omega)^*\}_{\omega\in\Delta}$ es de contracciones y débilmente continuo en 0.

PROPOSICIÓN 2.15. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\{T(\omega)\}_{\omega\in\Delta} \subset L(\mathcal{H})$ un semigrupo de contracciones débilmente continuo en 0. Supongamos que $\Omega = \Delta \cup (-\Delta)$, entonces $\{T(\omega)\}_{\omega\in\Delta}$ es fuertemente continuo en Δ.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $h \in \mathcal{H}$ y $\omega_1, \omega_0 \in \Delta$, tales que $\omega = \omega_1 - \omega_0 \in \Delta$. De la siguiente relación:

$$\begin{aligned}\|T(\omega_1)h - T(\omega_0)h\|_{\mathcal{H}}^2 &= \|T(\omega_0)(T(\omega_1-\omega_0)h - h)\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leq \|T(\omega)h - h\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &= \|T(\omega)h\|_{\mathcal{H}}^2 - 2Re\langle T(\omega)h, h\rangle_{\mathcal{H}} + \|h\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leq 2\|h\|_{\mathcal{H}}^2 - 2Re\langle T(\omega)h, h\rangle_{\mathcal{H}},\end{aligned}$$

se obtiene el resultado.

Análogamente, si $\omega = \omega_0 - \omega_1 \in \Delta$ (ó $-\omega = \omega_1 - \omega_0 \in -\Delta$), se tiene que

$$\|T(\omega_0)h - T(\omega_1)h\|_{\mathcal{H}}^2 = \|T(\omega_1)(T(\omega_0-\omega_1)h - h)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq 2\|h\|_{\mathcal{H}}^2 - 2Re\langle T(\omega)h, h\rangle_{\mathcal{H}}.$$

□

DEFINICIÓN 2.16. Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{F}$ espacios de Hilbert, sean $\{T(\omega)\}_{\omega\in\Delta} \subset L(\mathcal{H})$ un semigrupo de operadores y $\{U(\omega)\}_{\omega\in\Omega} \subset L(\mathcal{F})$ una representación de Ω en $L(\mathcal{F})$.

Se dice que $\{U(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ es una *dilatación* de $\{T(\omega)\}_{\omega\in\Delta}$ si $\mathcal{F}$ contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y

$$T(\omega) = P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}} U(\omega)|_{\mathcal{H}} \quad (\omega \in \Delta)$$

donde $P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}}$ es la proyección ortogonal de $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{H}$.

Se dice que la dilatación es *unitaria* si la representación $\{U(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ es unitaria.

Si además

$$\mathcal{F} = \bigvee_{\omega\in\Omega} U(\omega)(\mathcal{H}),$$

se dice que la dilatación es *minimal*.

OBSERVACIÓN 2.17. Si $\{U(\omega)\}_{\omega\in\Omega} \subset L(\mathcal{F})$ es dilatación unitaria de $\{T(\omega)\}_{\omega\in\Delta} \subset L(\mathcal{H})$, entonces $\{U(\omega)^*\}_{\omega\in\Omega} \subset L(\mathcal{F})$ es dilatación unitaria de $\{T(\omega)^*\}_{\omega\in\Delta} \subset L(\mathcal{H})$.

Observación 2.18. Si un semigrupo de operadores posee una dilatación unitaria, entonces posee una dilatación unitaria minimal. Más precisamente, si $\{U(\omega)\}_{\omega\in\Omega} \subset L(\mathcal{F})$ es dilatación unitaria de $\{T(\omega)\}_{\omega\in\Delta} \subset L(\mathcal{H})$, el subespacio

$$\mathcal{F}' = \bigvee_{\omega\in\Omega} U(\omega)(\mathcal{H})$$

es invariante por $U(\omega)$ para cada $\omega \in \Omega$ (porque el conjunto $\{U(\omega)(\mathcal{H})\}_{\omega\in\Omega}$ es invariante por $U(\omega)$) y contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado. Así, $\{U(\omega)|_{\mathcal{F}'}\}_{\omega\in\Omega}$ es dilatación unitaria de $\{T(\omega)\}_{\omega\in\Delta}$, que además es minimal, es decir,

$$\mathcal{F}' = \bigvee_{\omega\in\Omega} U(\omega)|_{\mathcal{F}'}(\mathcal{H}).$$

Definición 2.19. Sean $\mathcal{B} = \{V(\omega)\}_{\omega\in\Omega} \subset L(\mathcal{F})$ y $\mathcal{B}' = \{V'(\omega)\}_{\omega\in\Omega} \subset L(\mathcal{F}')$ dos dilataciones de $\{T(\omega)\}_{\omega\in\Delta} \subset L(\mathcal{H})$. Se dice que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son *isomorfos* si existe un operador unitario $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ tal que:

(i) $\varphi(h) = h$ para todo $h \in \mathcal{H}$,
(ii) $V'(\omega) = \varphi V(\omega)\varphi^{-1}$ para todo $\omega \in \Omega$.

A continuación se enuncia el caso continuo del teorema de dilatación de Sz.-Nagy (ver [**21**, página 31]) que corresponde con el caso $\Omega = \mathbb{R}$ y $\Delta = \mathbb{R}_+ = \{s \in \mathbb{R} : s \geq 0\}$. Este resultado establece que todo semigrupo de contracciones con parámetro en $\mathbb{R}_+$, fuertemente continuo en 0, posee una única dilatación unitaria minimal. En detalle,

Teorema 2.20 (Sz. Nagy, [**18**]). *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\{T(s)\}_{s\geq 0} \subset L(\mathcal{H})$ un semigrupo uniparamétrico de contracciones fuertemente continuo en 0. Entonces, existe un espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y una representación unitaria $\{U(s)\}_{s\in\mathbb{R}} \subset L(\mathcal{F})$ de $\mathbb{R}$ en $L(\mathcal{F})$, fuertemente continua en 0, tal que:*

$$T(s) = P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}} U(s)|_{\mathcal{H}} \quad (s \geq 0).$$

Si se pide la condición de minimalidad

$$\mathcal{F} = \bigvee_{s\in\mathbb{R}} U(s)(\mathcal{H}),$$

entonces $\{U(s)\}_{s\in\mathbb{R}}$ es único, salvo isomorfismo.

El siguiente resultado muestra que si un semigrupo de contracciones posee una dilatación unitaria entonces, bajo ciertas condiciones, la continuidad del semigrupo implica la continuidad de la dilatación unitaria minimal.

PROPOSICIÓN 2.21. *Sean* $\mathcal{H}$ *un espacio de Hilbert y* $\{T(\omega)\}_{\omega\in\Delta} \subset L(\mathcal{H})$ *un semigrupo de contracciones débilmente continuo en 0, que posee dilatación unitaria.*

Si $\{U(\omega)\}_{\omega\in\Omega} \subset L(\mathcal{F})$ *es una dilatación unitaria minimal de* $\{T(\omega)\}_{\omega\in\Delta}$ *y* $\Omega = \Delta\cup(-\Delta)$, *entonces* $\{U(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ *es fuertemente continuo.*

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 2.12, basta probar que $\{U(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ es débilmente continuo en 0.

Como $U(\omega)$ tiene cota independiente de $\omega \in \Omega$ (en efecto, $\|U(\omega)\| = 1$) y el conjunto de las combinaciones lineales finitas de elementos de la forma $U(\omega_1)h \quad (\omega_1 \in \Omega, h \in \mathcal{H})$ es denso en $\mathcal{F}$, es suficiente probar que la aplicación

$$\omega \mapsto \langle U(\omega)U(\omega_1)h, U(\omega_2)h'\rangle_{\mathcal{F}}$$

es continua en 0, para cualquier $h, h' \in \mathcal{H}$; $\omega_1, \omega_2 \in \Omega \quad$ (fijos).

Por definición de dilatación unitaria, se tiene que

$$\begin{aligned}\langle U(\omega)U(\omega_1)h, U(\omega_2)h'\rangle_{\mathcal{F}} &= \langle U(\omega + \omega_1 - \omega_2)h, h'\rangle_{\mathcal{F}}\\ &= \langle P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}} U(\omega + \omega_1 - \omega_2)h, h'\rangle_{\mathcal{H}}\\ &= \langle T(\omega + \omega_1 - \omega_2)h, h'\rangle_{\mathcal{H}}, \quad \text{si}\, \omega + \omega_1 - \omega_2 \in \Delta.\end{aligned}$$

Análogamente, si $\omega + \omega_1 - \omega_2 \in -\Delta$ (ó $\omega_2 - \omega_1 - \omega \in \Delta$), entonces

$$\langle U(\omega)U(\omega_1)h, U(\omega_2)h'\rangle_{\mathcal{F}} = \langle T(-\omega - \omega_1 + \omega_2)^* h, h'\rangle_{\mathcal{H}}.$$

Como $\{T(\omega)\}_{\omega\in\Delta}$ y $\{T(\omega)^*\}_{\omega\in\Delta}$ son débilmente continuos en 0, se obtiene el resultado. □

4. Semigrupos biparamétricos de contracciones.

En lo que sigue, Ω_1 y Ω_2 son grupos métricos, con métricas invariantes por traslaciones d_1, d_2, respectivamente, y elementos neutros $0_1, 0_2$, respectivamente.

LEMA 2.22. *Para* $i = 1, 2$, *sean* $\Delta_i \subset \Omega_i$ *dos subsemigrupos, tales que*

$$\Omega_i = \Delta_i \cup (-\Delta_i).$$

Sean $\mathcal{H}$ *un espacio de Hilbert y* $\{T(s,t)\}_{(s,t)\in\Delta_1\times\Delta_2} \subset L(\mathcal{H})$ *un semigrupo biparamétrico de contracciones débilmente continuo en* $0 = (0_1, 0_2)$, *que posee dilatación unitaria.*

Si $\{U(s,t)\}_{(s,t)\in\Omega_1\times\Omega_2} \subset L(\mathcal{F})$ *es una dilatación unitaria minimal de* $\{T(s,t)\}_{(s,t)\in\Delta_1\times\Delta_2}$, *entonces* $\{U(s,t)\}_{(s,t)\in\Omega_1\times\Omega_2}$ *es fuertemente continuo, y por lo tanto uniformemente fuertemente continuo.*

Demostración. Sean

$$U_1(s) = U(s, 0_2) \quad \text{para}\, s \in \Omega_1,$$

$$U_2(t) = U(0_1, t) \quad \text{para}\, t \in \Omega_2,$$

$$\mathcal{F}_1 = \bigvee_{s \in \Omega_1} U_1(s)(\mathcal{H}) \quad \text{y} \quad \mathcal{F}_2 = \bigvee_{t \in \Omega_2} U_2(t)(\mathcal{H}).$$

Se tiene que $\{U_1(s)\}_{s\in\Omega_1} \subset L(\mathcal{F}_1)$ y $\{U_2(t)\}_{t\in\Omega_2} \subset L(\mathcal{F}_2)$ son dilataciones unitarias minimales de $\{T(s, 0_2)\}_{s\in\Delta_1}$ y $\{T(0_1, t)\}_{t\in\Delta_2}$, respectivamente. Por la Proposición 2.21, se tiene que $\{U_1(s)\}_{s\in\Omega_1}$ y $\{U_2(t)\}_{t\in\Omega_2}$ son fuertemente continuos en 0_1 y 0_2, respectivamente.

Para ver que $\{U(s,t)\}_{(s,t)\in\Omega_1\times\Omega_2}$ es fuertemente continuo, por la Proposición 2.12, es suficiente probar que es fuertemente continuo en 0. Como $\mathcal{F} = \bigvee_{(s,t)\in\Omega_1\times\Omega_2} U(s,t)(\mathcal{H})$, sea $f \in \mathcal{F}$ de la forma $f = U(s_0, t_0)h$ para algún $h \in \mathcal{H}$ y $(s_0, t_0) \in \Omega_1 \times \Omega_2$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|U(s,t)f - f\|_{\mathcal{F}} &= \|U(s, 0_2)U(0_1, t)f - f\|_{\mathcal{F}} \\
&= \|U(s, 0_2)U(0_1, t)f - U(s, 0_2)f + U(s, 0_2)f - f\|_{\mathcal{F}} \\
&= \|U(s, 0_2)(U(0_1, t)f - f) + (U(s, 0_2)f - f)\|_{\mathcal{F}} \\
&\leq \|U(s_0, t_0)U(0_1, t)h - U(s_0, t_0)h\|_{\mathcal{F}} + \|U(s_0, t_0)U(s, 0_2)h - U(s_0, t_0)h\|_{\mathcal{F}} \\
&\leq \|U_2(t)h - h\|_{\mathcal{F}_2} + \|U_1(s)h - h\|_{\mathcal{F}_1}.
\end{aligned}$$

Como $\{U_1(s)\}_{s\in\Omega_1}$ y $\{U_2(t)\}_{t\in\Omega_2}$ son fuertemente continuos en 0_1 y 0_2, respectivamente, se obtiene el resultado. □

Lema 2.23. *Sean $\Lambda_1 \subset \Omega_1$ y $\Lambda_2 \subset \Omega_2$ dos subgrupos densos, para $i = 1, 2$, sean $\Delta_i \subset \Lambda_i$ dos subsemigrupos, tales que*

$$\Lambda_i = \Delta_i \cup (-\Delta_i).$$

Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\{T(s,t)\}_{(s,t)\in\overline{\Delta}_1\times\overline{\Delta}_2} \subset L(\mathcal{H})$ un semigrupo biparamétrico de contracciones débilmente continuo en 0.

Si $\{T(s,t)\}_{(s,t)\in\Delta_1\times\Delta_2}$ posee una dilatación unitaria, entonces $\{T(s,t)\}_{(s,t)\in\overline{\Delta}_1\times\overline{\Delta}_2}$ también posee una dilatación unitaria y por lo tanto, tiene una dilatación unitaria minimal fuertemente continua.

Demostración. Sea $\{U_0(s,t)\}_{(s,t)\in\Lambda_1\times\Lambda_2} \subset L(\mathcal{F})$ una dilatación unitaria minimal de $\{T(s,t)\}_{(s,t)\in\Delta_1\times\Delta_2}$. Por el Lema 2.22, se tiene que $\{U_0(s,t)\}_{(s,t)\in\Lambda_1\times\Lambda_2}$ es uniformemente fuertemente continua.

Como Λ_i es denso en $\Omega_i \quad (i = 1, 2)$ y la aplicación $(s,t) \mapsto U_0(s,t)f$ de $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ en $\mathcal{F}$ es uniformemente continua, entonces existe una única aplicación continua $(s,t) \mapsto U(s,t)f$ de $\Omega_1 \times \Omega_2$ en $\mathcal{F}$, tal que

$$U(s,t)f = U_0(s,t)f$$

para todo $(s,t) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2$ y $f \in \mathcal{F}$.

Si $(s,t) \in \Omega_1 \times \Omega_2$, existen sucesiones $\{\omega_n\}_{n\geq 1} \subset \Lambda_1$, $\{\nu_n\}_{n\geq 1} \subset \Lambda_2$, tales que

$$\lim_{n\to\infty} \omega_n = s \quad \text{en}\,(\Omega_1, d_1) \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \nu_n = t \quad \text{en}\,(\Omega_2, d_2).$$

Se cumple que

$$U(s,t)f = \lim_{n\to\infty} U_0(\omega_n, \nu_n)f \tag{2.5}$$

para todo $f \in \mathcal{F}$.

Se tiene que:

a) $U(s,t)$ es un operador lineal y acotado para todo $(s,t) \in \Omega_1 \times \Omega_2$.

b) Si $f \in \mathcal{F}$, se cumple que

  i) $U(0,0)f = I_{\mathcal{F}}f$.

  ii) $U(s,t)U(s',t')f = U((s,t) + (s',t'))f \quad ((s,t),(s',t') \in \Omega_1 \times \Omega_2)$.

  iii) $U(s,t)^*f = U(-s,-t)f$, así se obtiene que $U(s,t)$ es unitario.

Veamos la prueba de ii). Sean $(s,t),(s',t') \in \Omega_1 \times \Omega_2$, entonces existen sucesiones $\{\omega_n\}_{n\geq 1}, \{\omega'_n\}_{n\geq 1} \subset \Lambda_1$, $\{\nu_n\}_{n\geq 1}, \{\nu'_n\}_{n\geq 1} \subset \Lambda_2$, tales que

$$\lim_{n\to\infty} \omega_n = s \quad \text{en}\,\Omega_1, \qquad \lim_{n\to\infty} \nu_n = t \quad \text{en}\,\Omega_2$$

$$\lim_{n\to\infty} \omega'_n = s' \quad \text{en}\,\Omega_1, \qquad \lim_{n\to\infty} \nu'_n = t' \quad \text{en}\,\Omega_2.$$

Se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} U_0(\omega_n,\nu_n)U_0(\omega'_n,\nu'_n)f = \lim_{n\to\infty} U_0((\omega_n,\nu_n) + (\omega'_n,\nu'_n))f = U((s,t)+(s',t'))f.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\|U_0(\omega_n,\nu_n)U_0(\omega'_n,\nu'_n)f - U(s,t)U(s',t')f\|_{\mathcal{F}} &\leq \|U_0(\omega'_n,\nu'_n)f - U(s',t')f\|_{\mathcal{F}} \\ &\quad + \|U(s',t')(U_0(\omega_n,\nu_n)f - U(s,t)f)\|_{\mathcal{F}}.\end{aligned}$$

De donde se obtiene el resultado.

Luego, $\{U(s,t)\}_{(s,t)\in\Omega_1\times\Omega_2}$ es una representación unitaria de $\Omega_1 \times \Omega_2$ en $L(\mathcal{F})$, fuertemente continua.

Si $(s,t) \in \overline{\Delta}_1 \times \overline{\Delta}_2$ existen sucesiones $\{s_n\}_{n\geq 1} \subset \Delta_1, \{t_n\}_{n\geq 1} \subset \Delta_2$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \quad \text{en}\, \Omega_1 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} t_n = t \quad \text{en}\, \Omega_2.$$

De donde,

$$\lim_{n\to\infty} (s_n, t_n) = (s,t) \quad \text{en}\, \Omega_1 \times \Omega_2.$$

Sea $h \in \mathcal{H}$, como $\{U_0(s,t)\}_{(s,t)\in\Lambda_1\times\Lambda_2}$ es dilatación unitaria de $\{T(s,t)\}_{(s,t)\in\Delta_1\times\Delta_2}$, entonces

$$P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}} U_0(s_n,t_n)h = T(s_n,t_n)h.$$

Por la Proposición 2.15, se tiene que $\{T(s,0_2)\}_{s\in\overline{\Delta}_1}$ y $\{T(0_1,t)\}_{t\in\overline{\Delta}_2}$ son fuertemente continuos, entonces

$$\lim_{n\to\infty} T(s_n,0_2)h = T(s,0_2)h,$$

$$\lim_{n\to\infty} T(0_1,t_n)h = T(0_1,t)h.$$

De donde,

$$\lim_{n\to\infty} T(s_n,t_n)h = T(s,t)h.$$

Luego,

$$\lim_{n\to\infty} P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}} U_0(s_n,t_n)h = T(s,t)h.$$

Consideremos la sucesión $\{U_0(s_n,t_n)h\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}$, por (2.5) y como $P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}$ es un operador continuo, entonces

$$P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}} U(s,t)h = T(s,t)h \quad ((s,t) \in \overline{\Delta}_1 \times \overline{\Delta}_2).$$

$\square$

CAPíTULO 3

Dilataciones unitarias de semigrupos de contracciones con parámetro en $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

1. Semigrupos de contracciones con parámetro en $\mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_+$.

NOTACIÓN. Si $\Omega = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{Q}$, sea

$$\Delta = \mathbb{R}_+ \text{ ó } \mathbb{Q}_+ = \{s \in \Omega : s \geq 0\},$$

$$-\Delta = \mathbb{R}_- \text{ ó } \mathbb{Q}_- = \{s \in \Omega : s \leq 0\}.$$

Para demostrar el teorema principal de este trabajo serán necesarios dos resultados preliminares, que se dan a continuación

LEMA 3.1. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, sean $\{T(s,t)\}_{(s,t)\in\mathbb{Q}_+\times\mathbb{Q}_+} \subset L(\mathcal{H})$ un semigrupo biparamétrico de contracciones y S el sistema operador en $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ dado por los elementos de la forma: $p + \overline{q}$ donde,*

$$p(x,y) = \sum_{k,j=0}^{N} a_{kj} e^{i\alpha_k x} e^{i\beta_j y} \quad (a_{kj} \in \mathbb{C};\ \alpha_k, \beta_j \in \mathbb{Q}_+;\ k,j = 0,...,N)$$

$$\overline{q}(x,y) = \sum_{k,j=0}^{N} b_{kj}\, e^{i\gamma_k x} e^{i\theta_j y} \quad (b_{kj} \in \mathbb{C};\ \gamma_k, \theta_j \in \mathbb{Q}_-;\ k,j = 0,...,N).$$

Entonces, la aplicación $\mathbf{L} : S \to L(\mathcal{H})$ definida por

$$\mathbf{L}(p + \overline{q}) = \sum_{k,j=0}^{N} a_{kj} T(\alpha_k, \beta_j) + \sum_{k,j=0}^{N} b_{kj} T(-\gamma_k, -\theta_j)^*$$

es completamente positiva.

DEMOSTRACIÓN. Sea $n \in \mathbb{N}$. Sea $[\, f_{\xi\eta} \,]_{\xi,\eta=1}^n$ un elemento positivo de $M_{n\times n}(S)$. Veamos que $\mathbf{L}_n \left([\, f_{\xi\eta} \,]_{\xi,\eta=1}^n \right)$ es un elemento positivo de $L(\mathcal{H}^n)$.

Para cada $\xi, \eta = 1, ..., n$, sean

$$f_{\xi\eta}(x,y) = p_{\xi\eta}(x,y) + \overline{q}_{\xi\eta}(x,y)$$

donde,

$$p_{\xi\eta}(x,y) = \sum_{k,j=0}^{N} a_{kj}^{(\xi\eta)} e^{i\alpha_k^{(\xi\eta)}x} e^{i\beta_j^{(\xi\eta)}y} \quad \left(a_{kj}^{(\xi\eta)} \in \mathbb{C};\ \alpha_k^{(\xi\eta)}, \beta_j^{(\xi\eta)} \in \mathbb{Q}_+;\ k,j = 0,...,N\right)$$

$$\overline{q}_{\xi\eta}(x,y) = \sum_{k,j=0}^{N} b_{kj}^{(\xi\eta)}\, e^{i\gamma_k^{(\xi\eta)}x} e^{i\theta_j^{(\xi\eta)}y} \quad \left(b_{kj}^{(\xi\eta)} \in \mathbb{C};\ \gamma_k^{(\xi\eta)}, \theta_j^{(\xi\eta)} \in \mathbb{Q}_-;\ k,j = 0,...,N\right).$$

Sea $d \in \mathbb{N}$ el mínimo común múltiplo de los denominadores de $\alpha_k^{(\xi\eta)}, \beta_j^{(\xi\eta)}, \gamma_k^{(\xi\eta)}, \theta_j^{(\xi\eta)}$, se puede escribir

$$f_{\xi\eta}(x,y) = \sum_{k,j=0}^{N} a_{kj}^{(\xi\eta)}\, e^{i\frac{s_k^{(\xi\eta)}}{d}x}\, e^{i\frac{t_j^{(\xi\eta)}}{d}y} + \sum_{k,j=0}^{N} b_{kj}^{(\xi\eta)}\, e^{-i\frac{\lambda_k^{(\xi\eta)}}{d}x}\, e^{-i\frac{\tau_j^{(\xi\eta)}}{d}y}$$

donde, $s_k^{(\xi\eta)}, t_j^{(\xi\eta)}, \lambda_k^{(\xi\eta)}, \tau_j^{(\xi\eta)} \in \mathbb{Z}_+;\ k,j = 0,...,N;\ \xi,\eta = 1,...,n.$

Por definición de $\mathbf{L}_n, \mathbf{L}$ y semigrupo de operadores, se tiene que

$$\mathbf{L}_n\left([\, f_{\xi\eta}\,]_{\xi,\eta=1}^n\right) = [\mathbf{L}(f_{\xi\eta})]_{\xi,\eta=1}^n =$$
$$= \left[\sum_{k,j=0}^{N} a_{kj}^{(\xi\eta)} T(1/d,0)^{s_k^{(\xi\eta)}}\, T(0,1/d)^{t_j^{(\xi\eta)}} + \sum_{k,j=0}^{N} b_{kj}^{(\xi\eta)} T(1/d,0)^{*\lambda_k^{(\xi\eta)}}\, T(0,1/d)^{*\tau_j^{(\xi\eta)}}\right]_{\xi,\eta=1}^n.$$

Sean

$$\widetilde{f}_{\xi\eta}(z,w) = \sum_{k,j=0}^{N} a_{kj}^{(\xi\eta)}\, z^{s_k^{(\xi\eta)}} w^{t_j^{(\xi\eta)}} + \sum_{k,j=0}^{N} b_{kj}^{(\xi\eta)}\, z^{-\lambda_k^{(\xi\eta)}} w^{-\tau_j^{(\xi\eta)}}$$

donde, $z, w \in \mathbb{T};\ \xi,\eta = 1,...,n$ (es decir, $z = e^{iv_z}, w = e^{iv_w};\ v_z, v_w \in [0,2\pi]$).

Como $[f_{\xi\eta}]_{\xi,\eta=1}^n \geq 0$, entonces $\left[\widetilde{f}_{\xi\eta}\right]_{\xi,\eta=1}^n$ es un elemento positivo de $M_{n\times n}(S_{\mathbb{T}\times\mathbb{T}})$.

Sean $T_1 = T(1/d,0)$ y $T_2 = T(0,1/d)$, se tiene que T_1 y T_2 son contracciones que conmutan. Por el Lema 2.8 la aplicación $\mathbf{F} : S_{\mathbb{T}\times\mathbb{T}} \to L(\mathcal{H})$ definida por

$$\mathbf{F}(g) = g(T_1, T_2) \quad (g \in S_{\mathbb{T}\times\mathbb{T}})$$

es completamente positiva.

Como $\left[\widetilde{f}_{\xi\eta}\right]_{\xi,\eta=1}^n \geq 0$, entonces

$$\mathbf{L}_n\left([f_{\xi\eta}]_{\xi,\eta=1}^n\right) = \mathbf{F}_n\left(\left[\widetilde{f}_{\xi\eta}\right]_{\xi,\eta=1}^n\right) \geq 0.$$

De donde, $\mathbf{L}_n\left([f_{\xi\eta}]_{\xi,\eta=1}^n\right)$ es un elemento positivo de $L(\mathcal{H}^n)$. □

A continuación se prueba que todo semigrupo de contracciones con parámetro en $\mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_+$, posee dilatación unitaria minimal. En detalle, TEOREMA 3.2. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\{T(s,t)\}_{(s,t)\in\mathbb{Q}_+\times\mathbb{Q}_+} \subset L(\mathcal{H})$ un semigrupo biparamétrico de contracciones. Entonces, existe un espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y una representación unitaria $\{U(s,t)\}_{(s,t)\in\mathbb{Q}^2} \subset L(\mathcal{F})$ de $\mathbb{Q}^2$ en $L(\mathcal{F})$, tal que*

$$T(s,t) = P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}} U(s,t)|_{\mathcal{H}} \quad ((s,t) \in \mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_+)$$

donde $P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}$ es la proyección ortogonal de $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{H}$.

Si se pide la condición

$$\mathcal{F} = \bigvee_{(s,t)\in\mathbb{Q}^2} U(s,t)(\mathcal{H})$$

entonces la dilatación es minimal.

DEMOSTRACIÓN. Sean S el sistema operador en $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^2,\mathbb{C})$ y $\mathbf{L} : S \to L(\mathcal{H})$ la aplicación completamente positiva dados en el Lema 3.1. Por el teorema de Arveson, existe una aplicación completamente positiva $\widetilde{\mathbf{L}} : \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^2,\mathbb{C}) \to L(\mathcal{H})$ que extiende a $\mathbf{L}$.

Por el teorema de Stinespring, existe un espacio de Hilbert $\mathcal{G}$, un homomorfismo unital * $\phi : \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^2,\mathbb{C}) \to L(\mathcal{G})$ y un operador acotado $V : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$, tal que

$$\widetilde{\mathbf{L}}(f) = V^*\phi(f)V \quad \text{para todo } f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^2,\mathbb{C}).$$

Como $\widetilde{\mathbf{L}}$ extiende a $\mathbf{L}$, se tiene que

$$\mathbf{L}(p+\overline{q}) = V^*\phi(p+\overline{q})V \quad \text{para todo } p+\overline{q} \in S.$$

Como ϕ y $\mathbf{L}$ son unitales (ver la Observación 1.22), se puede escribir

$$\mathbf{L}(p+\overline{q}) = P^{\mathcal{G}}_{\mathcal{H}}\phi(p+\overline{q})|_{\mathcal{H}} \quad \text{para todo } p+\overline{q} \in S.$$

Sea

$$h_{st}(x,y) = e^{isx}\, e^{ity} \in S.$$

Se tiene que

$$P^{\mathcal{G}}_{\mathcal{H}}\phi(h_{st})|_{\mathcal{H}} = \mathbf{L}(h_{st}) = T(s,t) \quad \text{si } (s,t) \in \mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_+. \tag{3.1}$$

Sea $U_0(s,t) : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ el operador dado por

$$U_0(s,t) = \phi(h_{st}) \quad ((s,t) \in \mathbb{Q}^2).$$

Como ϕ es un homomorfismo unital * y

$$e^{isx}e^{ity}.e^{is'x}e^{it'y} = e^{i(s+s')x}e^{i(t+t')y}$$

para todo $(s,t),(s',t') \in \mathbb{Q}^2$, se tiene que

(i) $U_0(0,0) = I_{\mathcal{F}}$.
(ii) $U_0((s,t)+(s',t')) = U_0(s,t)U_0(s',t')$ para todo $(s,t),(s',t') \in \mathbb{Q}^2$.
(iii) $U_0(s,t)^* = U_0(-s,-t)$.
(iv) $U_0(s,t)$ es unitario para todo $(s,t) \in \mathbb{Q}^2$.

De donde, $\{U_0(s,t)\}_{(s,t)\in\mathbb{Q}^2} \subset L(\mathcal{G})$ es una representación unitaria de $\mathbb{Q}^2$ en $L(\mathcal{G})$.

Sea $\mathcal{F} = \bigvee_{(s,t)\in\mathbb{Q}^2} U_0(s,t)(\mathcal{H})$. Consideremos $U(s,t) = U_0(s,t)|_{\mathcal{F}}$, por (3.1) se tiene que $\{U(s,t)\}_{(s,t)\in\mathbb{Q}^2}$ es una dilatación unitaria minimal de $\{T(s,t)\}_{(s,t)\in\mathbb{Q}_+\times\mathbb{Q}_+}$.

□

OBSERVACIÓN 3.3. El resultado anterior es original, es importante destacar que en el mismo no es necesario suponer la continuidad fuerte del semigrupo.

2. Demostración del teorema de dilatación de Slocínski.

El teorema de Slocínski ([**14**],[**15**]) es la versión continua del resultado de Ando y su enunciado es el siguiente,

TEOREMA 3.4 (Slocínski, [**15**]). *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\{T(s,t)\}_{(s,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+} \subset L(\mathcal{H})$ un semigrupo biparamétrico de contracciones fuertemente continuo en 0. Entonces, existe un espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y una representación unitaria $\{U(s,t)\}_{(s,t)\in\mathbb{R}^2} \subset L(\mathcal{F})$ de $\mathbb{R}^2$ en $L(\mathcal{F})$, fuertemente continua en 0, tal que*

$$T(s,t) = P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}} U(s,t)|_{\mathcal{H}} \quad ((s,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$$

donde $P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}$ es la proyección ortogonal de $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{H}$.

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 3.2, el semigrupo $\{T(s,t)\}_{(s,t)\in\mathbb{Q}_+\times\mathbb{Q}_+}$ posee una dilatación unitaria. Como $\{T(s,t)\}_{(s,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+}$ es un semigrupo biparamétrico de contracciones débilmente continuo en 0, por el Lema 2.23, tomando $\Omega_i = \mathbb{R}$; $\Lambda_i = \mathbb{Q}$ y $\Delta_i = \mathbb{Q}_+$ (i=1,2), se obtiene que $\{T(s,t)\}_{(s,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+}$ posee una dilatación unitaria minimal fuertemente continua. □

Bibliografía

[1] T. Ando, On a pair of conmutative contractions, *Acta Sci. Math.* **24** (1963), 88-90. Citado en la(s) página(s): 2, 17

[2] W. Arveson, Subalgebras of C^*-algebras, *Acta Math.* **123** (1969), 142-224. Citado en la(s) página(s): 2, 15

[3] S. Berberian, Lectures in Functional Analysis and Operator Theory, Springer Verlag, 1974, (GTM 15). Citado en la(s) página(s): 3, 5, 8

[4] T. Bhattacharyya, Dilation of contractive tuples: a survey, *Proc. Centre Math. Appl. Austral. Nat. Univ.* **40** (2002), 89-126. Citado en la(s) página(s): 17

[5] R. Bruzual, M. Domínguez, Dilatación, Extensión y Representación de Formas Definidas Positivas, 30 Aniversario del Postgrado en Matemática de la UCV, Caracas, 2006. Citado en la(s) página(s): 3

[6] J. Dixmier, C^*-algebras, North Holland, Amsterdand,1977.

[7] R. G. Douglas, Banach Algebra Techniques in Operator Theory, Academic Press, New York, 1972. Citado en la(s) página(s): 9, 10

[8] P. R. Halmos, Normal dilations and extensions of operators, *Summa Brasil Math.* **2** (1950), 125-134. Citado en la(s) página(s): 2

[9] E. Hille, R. Phillips, Functional Analysis and Semi-Groups, AMS, 1957.

[10] S. Parrott, Unitary dilations for communting contractions, *Pac. J. Math.* **34** (1970), 481-490. Citado en la(s) página(s): 2, 18

[11] V. Paulsen, Completely Bounded Maps and Dilations, Pitman Research Notes in Mathematics Series, **146**, 1986. Citado en la(s) página(s): 3, 14, 15

[12] M. Ptak, Unitary dilations of multi-parameter semi-groups of operators, *Ann. Polon. Math.* **45** (1985), 237-243. Citado en la(s) página(s): 3

[13] W. Rudin, Functional Analysis, 2d ed., McGraw-Hill, Boston, 1991. Citado en la(s) página(s): 10, 12

[14] M. Slocínski, Unitary dilation of two-parameter semi-groups of contractions I, *Bull. Acad. Polon. Sci.* **22** (1974), 1011-1014. Citado en la(s) página(s): 3, 33

[15] M. Slocínski, Unitary dilation of two-parameter semi-groups of contractions II, Zesz. Nauk. Uniw. Jagiellon, *Pr. Mat.* **23** (1982), 191-194. Citado en la(s) página(s): 3, 33

[16] W. F. Stinespring, Positive functions on C^*-algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* **6** (1955), 211-216. Citado en la(s) página(s): 2, 14

[17] B. Sz.-Nagy, Sur les contractions de l'espace de Hilbert, *Acta Sci. Math.* , **15** (1953), 87-92. Citado en la(s) página(s): 17

[18] B. Sz.-Nagy, Transformations de l'espace de Hilbert, fonctions de type positif sur un groupe, *Acta Sci. Math. Szeged.*, **15** (1954), 104-114. Citado en la(s) página(s): 25

[19] B. Sz.-Nagy, Extensions of Linear Transformations in Hilbert Space which Extend Beyond this Space, Appendix to F. Riesz and B. Sz.-Nagy: Functional Analysis, New York, 1960. Citado en la(s) página(s): 2

[20] B. Sz.-Nagy, C. Foias, Dilatation des conmutants d'operateurs, *C. R. Acad. Sci.*,Paris, Serie A, **266** (1968), 493-495.

[21] B. Sz.-Nagy, C. Foias, Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space, North Holland Publishing Co., 1970. Citado en la(s) página(s): 3, 17, 18, 25