UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Representación de funciones completamente positivas en álgebras C^*

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por la **Br. Mayra Montilla** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutor: Dr. Ramón Bruzual.

Caracas, Venezuela
Julio-2004

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado " **Representación de funciones completamente positivas en álgebras C^*** ", presentado por la **Br. Mayra Montilla** , titular de la Cédula de Identidad **14.274.922**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Dr. Ramón Bruzual
Tutor

Dra. Marisela Domínguez
Jurado

Dra. Glaysar Castro
Jurado

Agradecimientos

A Dios.

A mis familiares y amigos por apoyarme.

Al profesor Ramón Bruzual por guiarme en la elaboración de este trabajo.

A las profesoras Marisela Domínguez y Glaysar Castro por sus valiosas sugerencias y la revisión detallada del trabajo.

Al Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico de la Universidad Central de Venezuela por su colaboración en la edición de este trabajo.

CONTENIDO

Introducción

Un álgebra $\mathcal{A}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ (conjunto de los números complejos) tal que existe una aplicación $P : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ llamada producto, dada por

$$P(a, b) = a \cdot b$$

para todo $a, b \in \mathcal{A}$ y que verifica las propiedades asociativa y distributiva.

Un álgebra $\mathcal{A}$ tal que $(\mathcal{A}, \|.\|)$ es espacio de Banach y la norma satisface que:

$$\|a \cdot b\| \leq \|a\| \, \|b\|$$

para todo $a, b \in \mathcal{A}$, es denominado álgebra de Banach.

Para $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo, $L(\mathcal{H})$, el espacio de los operadores lineales y acotados $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, con la composición de operadores como producto y la norma usual, es un ejemplo de álgebra de Banach.

Con las álgebras conmutativas Gelfand comenzó el estudio de álgebras de Banach. Su motivación surge debido al hecho de que muchos de los ejemplos importantes de álgebras de Banach que se originaron en análisis son conmutativas. Entre ellos está el espacio de las funciones continuas y acotadas $f : X \to \mathbb{C}$, donde X es un espacio topológico, con el producto usual de funciones y la norma del supremo.

En un álgebra $\mathcal{A}$ es importante la presencia de una involución que es una aplicación de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}$ dada por

$$a \mapsto a^*$$

donde a^* es el adjunto de a. Aclaramos que el adjunto de a es el elemento de $\mathcal{A}$ tal que:

(i) $a^{**} = a$,

(ii) $(\alpha\, a + \beta\, b)^* = \overline{\alpha}\, a^* + \overline{\beta}\, b^*$, y

(iii) $(a \cdot b)^* = b^* \cdot a^*$,

para todo $a, b \in \mathcal{A}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

El cuerpo de escalares $\mathbb{C}$ tiene una involución natural que es la conjugación y muchas de las propiedades de ciertas álgebras de Banach dependen de la presencia de una involución.

Si $(\mathcal{A}, \|.\|)$ es un álgebra de Banach con involución y para todo $a \in \mathcal{A}$,

$$\|a^* \cdot a\| = \|a\|^2$$

se dice que $\mathcal{A}$ es un álgebra C^*. Un ejemplo de estas álgebras es $L(\mathcal{H})$, donde la involución está dada por el adjunto de un operador.

La transformada de Gelfand es una poderosa herramienta que nos permite conocer características de álgebras C^* (no necesariamente conmutativas) y de los elementos positivos de un álgebra C^*. Luego, estas propiedades son extendidas a funciones completamente positivas definidas en estas álgebras.

Una técnica muy usada para estudiar elementos de $L(\mathcal{H})$ es la de representarlos como parte de un operador más simple cuyo dominio es un espacio de Hilbert más grande. Esta técnica, esencialmente geométrica, es conocida como dilatación.

Las funciones completamente positivas en álgebras C^* fueron introducidas por Stinespring con el objetivo de estudiar la existencia de dilataciones. Posteriormente, el estudio de la relación entre las funciones completamente positivas y la teoría de dilatación fue profundizado por Arveson, quien desarrolló una teoría profunda alrededor de este tipo de funciones, incluyendo una versión a valores operadores del Teorema de Hahn-Banach.

Actualmente, las funciones completamente positivas juegan un papel central en el estudio del producto tensorial de álgebras C^*, en el análisis armónico no conmutativo y en los problemas de extensión y dilatación en espacios de Hilbert.

Debido a ello resulta muy relevante estudiar el artículo de Stinespring [**12**], donde se introduce el concepto de función completamente positiva, se demuestra un teorema de representación y se dan algunas condiciones para que una función positiva sea completamente positiva.

El propósito de este Trabajo de Grado es presentar un resultado que permita identificar a funciones completamente positivas en álgebras C^* por medio de una representación.

El Capítulo 1 presenta una breve introducción sobre los conceptos de espacios de Hilbert complejos [**5**],[**10**] y el producto tensorial algebraico de espacios vectoriales [**6**].

El Capítulo 2 contiene las propiedades básicas sobre álgebras de Banach, álgebras C^* y las funciones positivas en álgebras C^* [**4**],[**10**].

Finalmente, el Capítulo 3 presenta propiedades de las funciones completamente positivas y se prueba el teorema de representación de Stinespring (Teorema 3.10).

CAPíTULO 1

Espacios de Hilbert

1. Espacios de Hilbert

Como es usual denotaremos por $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$ los conjuntos de los números naturales y reales, respectivamente.

DEFINICIÓN 1.1. Un *espacio de Hilbert complejo* es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con producto interno, que es completo con respecto a la norma dada por el producto interno.

EJEMPLOS.

1. $\mathbb{C}$ con el producto usual de números complejos es un espacio de Hilbert complejo.
2. $\mathbb{C}^n$ con el producto interno dado por:
$$\langle z, w\rangle_n = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w}_k$$
para $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ y $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n$, es un espacio de Hilbert complejo.
3. El espacio
$$l^2(\mathbb{N}) = \left\{ \{x_n\}_{n\geq 1} : x_n \in \mathbb{C}\,(n \geq 1) \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$
es un espacio de Hilbert complejo con el producto interno dado por:
$$\langle \{x_n\}_{n\geq 1}, \{y_n\}_{n\geq 1}\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y}_n$$
para $\{x_n\}_{n\geq 1}, \{y_n\}_{n\geq 1} \in l^2(\mathbb{N})$.

OBSERVACIÓN 1.2. La completación de un espacio con producto interno es un espacio de Hilbert.

NOTACIÓN. Si $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ son espacios de Hilbert complejos, sea
$$L(\mathcal{H}, \mathcal{K}) = \{\, T : \mathcal{H} \to \mathcal{K} : T \text{ es un operador lineal y acotado}\}.$$
Denotaremos $L(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ por $L(\mathcal{H})$.

Definición 1.3. Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ espacios de Hilbert complejos y $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ un operador lineal, diremos que T es *acotado inferiormente* si existe $M > 0$ tal que

$$M \|x\|_{\mathcal{H}} \leq \|T(x)\|_{\mathcal{K}}$$

para todo $x \in \mathcal{H}$.

Definición 1.4. Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ espacios de Hilbert complejos y $T \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, diremos que T es *invertible* si existe $S \in L(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ tal que

$$ST = I_{\mathcal{H}} \quad \text{y} \quad TS = I_{\mathcal{K}}$$

donde $I_{\mathcal{H}}$ y $I_{\mathcal{K}}$ son los operadores identidad en $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$, respectivamente.

Recordemos los siguientes resultados que nos permiten discutir sobre la invertibilidad de operadores en espacios de Hilbert.

Proposición 1.5. *Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ espacios de Hilbert complejos y $T \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, entonces T es invertible, con inverso acotado si y sólo si T es sobreyectivo y acotado inferiormente.*

Proposición 1.6. *Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ espacios de Hilbert complejos, sea $T \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, si T y T^* son acotados inferiormente, entonces T es invertible. Donde T^* es el operador adjunto de T.*

2. Producto tensorial algebraico de espacios vectoriales

Definición 1.7. Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ y $\mathcal{V}$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$, diremos que la función $F : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{V}$ es *bilineal* cuando satisface las siguientes condiciones, para todo $x, x_1, x_2 \in \mathcal{X}$, $y, y_1, y_2 \in \mathcal{Y}$ y $\lambda, \alpha \in \mathbb{C}$,

(i) $F(\lambda x_1 + \alpha x_2, y) = \lambda F(x_1, y) + \alpha F(x_2, y)$,

(ii) $F(x, \lambda y_1 + \alpha y_2) = \lambda F(x, y_1) + \alpha F(x, y_2)$.

Si $\mathcal{V} = \mathbb{C}$ entonces F es llamado *funcional bilineal.*

Ejemplos.

1. Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ espacios de Hilbert complejos y $G : L(\mathcal{H}, \mathcal{K}) \times \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ la función dada por

$$G(T, x) = T(x)$$

para todo $T \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ y $x \in \mathcal{H}$.

Tenemos que G es una función bilineal.

2. Sea $\mathcal{Y}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ y $F : \mathbb{C} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ la función dada por

$$F(\lambda, y) = \lambda y$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ e $y \in \mathcal{Y}$.

Tenemos que F es una función bilineal.

Definición 1.8. Sean $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$ y $F : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{V}$ una función bilineal, donde $\mathcal{V}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Diremos que $(\mathcal{V}, F)$ es un *producto tensorial algebraico* de $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ si satisface las siguientes condiciones:

(i) Rango$(F) = \mathcal{V}$.

(ii) Si $G : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{E}$ es una función bilineal, donde $\mathcal{E}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ arbitrario, entonces existe una función lineal $f : \mathcal{V} \to \mathcal{E}$ tal que

$$G = f \circ F.$$

Esta condición es conocida como la propiedad de la factorización.

Notación. Si $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ son espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$ y $(\mathcal{V}, F)$ es un producto tensorial algebraico de $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$, denotaremos $\mathcal{V}$ por $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ y $F(x, y)$ por $x \otimes y$. Entonces la bilinealidad es expresada en la forma:

$$(\lambda x_1 + \alpha x_2) \otimes y = \lambda x_1 \otimes y + \alpha x_2 \otimes y = \lambda(x_1 \otimes y) + \alpha(x_2 \otimes y) \tag{1.1}$$

$$x \otimes (\lambda y_1 + \alpha y_2) = \lambda x \otimes y_1 + \alpha x \otimes y_2 = \lambda(x \otimes y_1) + \alpha(x \otimes y_2) \tag{1.2}$$

para todo $x, x_1, x_2 \in \mathcal{X},\ y, y_1, y_2 \in \mathcal{Y}$ y $\lambda, \alpha \in \mathbb{C}$.

Ejemplo. Sea $\mathcal{Y}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ y $F : \mathbb{C} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ la función bilineal dada en el Ejemplo 2 de la Definición 1.7.

Tenemos que $(\mathcal{Y}, F)$ es el producto tensorial algebraico de $\mathbb{C}$ e $\mathcal{Y}$. En efecto, ya que $\lambda y \in \mathcal{Y}$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ y si $y \in \mathcal{Y},\ y = 1y$, entonces

$$\text{Rango}(F) = \mathcal{Y}.$$

Consideremos una función bilineal G de $\mathbb{C} \times \mathcal{Y}$ a un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ arbitrario $\mathcal{E}$ y definamos la función $f : \mathcal{Y} \to \mathcal{E}$ por

$$f(y) = G(1, y)$$

para todo $y \in \mathcal{Y}$.

Tenemos que f es lineal porque G es una función bilineal.

Entonces,

$$f \circ F(\lambda, y) = f(\lambda y) = G(1, \lambda y) = \lambda G(1, y) = G(\lambda, y).$$

De donde,

$$\mathcal{Y} = \mathbb{C} \otimes \mathcal{Y}.$$

En particular, si $\mathcal{Y} = \mathbb{C}$ tenemos que $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C}$ con

$$\lambda \otimes \alpha = \lambda\alpha$$

para todo $\lambda, \alpha \in \mathbb{C}$.

Teorema 1.9 (Existencia y unicidad de productos tensoriales). *Sean $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$, entonces existe el producto tensorial algebraico de $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ ($\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$). Más aún, si $\mathcal{X} \widetilde{\otimes} \mathcal{Y}$ es otro producto tensorial algebraico de $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$, entonces $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ es isomorfo a $\mathcal{X} \widetilde{\otimes} \mathcal{Y}$.*

No demostraremos este teorema, sólo indicamos que su prueba se basa en el uso de la propiedad de la factorización y la proyección canónica. Una prueba puede encontrarse en [**6**], página 9.

Observación 1.10. Si $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ son espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$ y $x_0 \otimes y_0 \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$, entonces $x_0 \otimes y_0 \neq 0$ para $x_0 \neq 0$ e $y_0 \neq 0$. En efecto, si $x_0 \neq 0$ e $y_0 \neq 0$, entonces existen funcionales lineales $f : \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ y $g : \mathcal{Y} \to \mathbb{C}$ tales que

$$f(x_0) \neq 0 \quad \text{y} \quad g(y_0) \neq 0.$$

Consideremos el funcional bilineal

$$(x, y) \mapsto f(x)g(y).$$

Por la parte (ii) de la Definición 1.8, existe un funcional lineal $h : \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y} \to \mathbb{C}$ tal que

$$h(x \otimes y) = f(x)g(y).$$

Como el producto de dos números complejos no nulos es no nulo, tenemos que

$$h(x_0 \otimes y_0) = f(x_0)g(y_0) \neq 0,$$

de donde

$$x_0 \otimes y_0 \neq 0.$$

PROPOSICIÓN 1.11. *Sean $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$, sean $x_k \in \mathcal{X}$ para $k = 1, \ldots, n$ y sean $y_k \in \mathcal{Y}$ para $k = 1, \ldots, n$, vectores linealmente independientes. Si*

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k = 0 \tag{1.3}$$

entonces

$$x_k = 0 \ \text{ para todo } k = 1, \ldots, n.$$

DEMOSTRACIÓN. Ya que los vectores y_k son linealmente independientes, podemos elegir n funcionales lineales $g_i : \mathcal{Y} \to \mathbb{C}$ tales que

$$g_i(y_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases} \tag{1.4}$$

Consideremos el funcional bilineal

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, g_i(y)$$

donde $f_i : \mathcal{X} \to \mathbb{C}\, (i = 1, \ldots, n)$ son funcionales lineales arbitrarios.

Por la parte (ii) de la Definición 1.8, existe un funcional lineal $h : \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y} \to \mathbb{C}$ tal que

$$h(x \otimes y) = F(x, y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, g_i(y).$$

De (1.4) tenemos que

$$h\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f_i(x_k)\, g_i(y_k) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i).$$

De (1.3) y como h es lineal, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) = 0. \tag{1.5}$$

Sea $k\, (1 \leq k \leq n)$ un número entero arbitrario, si escogemos $f_i = 0$ para $i \neq k$, de (1.5) tenemos que

$$f_k(x_k) = 0.$$

Como f_k es una función arbitraria y k es un número entero arbitrario, entonces

$$x_k = 0 \ \text{ para todo } k = 1, \ldots, n.$$

$\square$

Observación 1.12. Sean $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$, asumiendo que $x \otimes y \neq 0$ para $x \in \mathcal{X}$ e $y \in \mathcal{Y}$, de (1.1),(1.2), la Observación 1.10 y la Proposición 1.11 tenemos que

$$x \otimes y = \widetilde{x} \otimes \widetilde{y}$$

si y sólo si

$$\widetilde{x} = \lambda x \quad \text{y} \quad \widetilde{y} = \frac{1}{\lambda} y$$

para $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$.

Observación 1.13. Sea $\mathcal{X}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, la función $\langle ., . \rangle_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ es un producto interno degenerado en $\mathcal{X}$, si de las condiciones de producto interno no se satisface que:

$$\langle x, x \rangle_{\mathcal{X}} = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Proposición 1.14. *Sean $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$, sea $\langle ., . \rangle_{\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}}$ un producto interno degenerado en $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ y*

$$\mathcal{N} = \{\xi \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y} : \langle \xi, \xi \rangle_{\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}} = 0\}.$$

Entonces:

(a) *$\mathcal{N}$ es una variedad lineal de $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$.*
(b) *Si $L : \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y} \to \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ es una transformación lineal tal que*

$$\langle L(\xi), L(\xi) \rangle_{\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}} \leq M \langle \xi, \xi \rangle_{\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}}$$

para todo $\xi \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ y para algún $M > 0$, entonces $\mathcal{N}$ es invariante bajo L, es decir, $L(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N}$.

Demostración.

(a) Sean $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{N}$ y $\lambda, \alpha \in \mathbb{C}$, veamos que

$$\lambda \xi_1 + \alpha \xi_2 \in \mathcal{N}.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y como $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{N}$, tenemos que

$$0 \leq |\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}}| \leq \langle \xi_1, \xi_1 \rangle_{\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}}^{\frac{1}{2}} \cdot \langle \xi_2, \xi_2 \rangle_{\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}}^{\frac{1}{2}} = 0$$

de donde

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}} = 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\langle \lambda\xi_1+\alpha\xi_2,\lambda\xi_1+\alpha\xi_2\rangle_{\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}} &= |\lambda|^2\langle\xi_1,\xi_1\rangle_{\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}}+\lambda\overline{\alpha}\langle\xi_1,\xi_2\rangle_{\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}}+\alpha\overline{\lambda}\,\overline{\langle\xi_1,\xi_2\rangle}_{\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}}+|\alpha|^2\langle\xi_2,\xi_2\rangle_{\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{N}$ es una variedad lineal de $\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}$.

(b) Sea $L:\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}\to\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}$ una transformación lineal tal que

$$\langle L(\xi),L(\xi)\rangle_{\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}} \le M\,\langle\xi,\xi\rangle_{\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}} \tag{1.6}$$

para todo $\xi\in\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}$ y para algún $M>0$.

Sea $\eta\in L(\mathcal{N})$, entonces existe $\xi\in\mathcal{N}$ tal que $\eta=L(\xi)$.

Por (1.6) y como $\xi\in\mathcal{N}$ tenemos que

$$\langle\eta,\eta\rangle_{\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}}=\langle L(\xi),L(\xi)\rangle_{\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}}=0$$

de donde

$$\eta\in\mathcal{N}$$

y así

$$L(\mathcal{N})\subset\mathcal{N}.$$

□

Consideremos el espacio cociente $\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}/\mathcal{N}$ y sea $\langle.,.\rangle_{\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}/\mathcal{N}}$ el funcional en $\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}/\mathcal{N}\times\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}/\mathcal{N}$ definido por

$$\langle[\xi]_{\mathcal{N}},[\eta]_{\mathcal{N}}\rangle_{\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}/\mathcal{N}}=\langle\xi,\eta\rangle_{\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}}$$

para todo $[\xi]_{\mathcal{N}},[\eta]_{\mathcal{N}}\in\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}/\mathcal{N}$.

Si $\xi\in\mathcal{N}$ o $\eta\in\mathcal{N}$, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz $\langle\xi,\eta\rangle_{\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}}=0$, por lo tanto la función $\langle.,.\rangle_{\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}/\mathcal{N}}$ está bien definida, es decir, depende sólo de $[\xi]_{\mathcal{N}}$ y no de ξ, similarmente, depende sólo de $[\eta]_{\mathcal{N}}$ y no de η.

Tenemos que la función $\langle.,.\rangle_{\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}/\mathcal{N}}$ es un producto interno en $\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}/\mathcal{N}$ y así $\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}/\mathcal{N}$ es un pre-espacio de Hilbert.

CAPíTULO 2

Algebras C^*

1. Algebras de Banach

Definición 2.1. Un *álgebra* $\mathcal{A}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ tal que existe una aplicación $P : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ llamada *producto*, que denotaremos mediante $P(a, b) = a \cdot b$ para todo $a, b \in \mathcal{A}$ y que verifica las siguientes propiedades, para $a, b, c \in \mathcal{A}$ y para todo $\lambda \in \mathbb{C}$

(i) $\lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b$,
(ii) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$,
(iii) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, y
(iv) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Ejemplos.

1. $\mathbb{C}$ con el producto usual de números complejos.
2. Sea $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ el conjunto de las matrices $n \times n$ con entradas en $\mathbb{C}$. Con el producto usual de matrices $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ es un álgebra.
3. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo (excluimos el espacio trivial $\mathcal{H} = \{0\}$). Con la composición de operadores como producto $L(\mathcal{H})$ es un álgebra.
4. Sea X un espacio de Hausdorff compacto, $X \neq \emptyset$ y
$$\mathcal{C}(X, \mathbb{C}) = \{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ es continua en } X\}.$$
Para $f, g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$, con el producto definido mediante
$$f \cdot g(x) = f(x)g(x)$$
para todo $x \in X$, tenemos que $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ es un álgebra.
5. Sea
$$\mathcal{C}_l(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f \text{ es continua y } \lim_{|x|\to\infty} |f(x)| \text{ existe} \right\}.$$
Para $f, g \in \mathcal{C}_l(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, con el producto definido mediante
$$f \cdot g(x) = f(x)g(x)$$
para todo $x \in \mathbb{R}$, tenemos que $\mathcal{C}_l(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ es un álgebra.

6. Sea

$$\mathcal{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{C}) = \left\{ f:\mathbb{R}\to\mathbb{C} : f \text{ es continua y } \lim_{|x|\to\infty} |f(x)| = 0 \right\}.$$

Para $f, g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$, con el producto definido mediante

$$f \cdot g(x) = f(x)g(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, tenemos que $\mathcal{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ es un álgebra.

Definición 2.2. Un álgebra $\mathcal{A}$ tiene *unidad* cuando existe un elemento $e \in \mathcal{A}$ tal que $e \cdot a = a \cdot e = a$ para todo $a \in \mathcal{A}$.

Observación 2.3. Si existe la unidad de un álgebra entonces es única.

Ejemplos.

1. En $\mathbb{C}$ el elemento unidad es $1 + i(0) = 1$.
2. En $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ el elemento unidad es la matriz $I = [\delta_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$, donde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

(El símbolo δ_{ij} es el delta de Kronecker).

3. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo, en $L(\mathcal{H})$ el elemento unidad es el operador identidad I, definido por

$$I(x) = x$$

para todo $x \in \mathcal{H}$.

4. Sea X un espacio de Hausdorff compacto, $X \neq \emptyset$, en $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ y $\mathcal{C}_l(\mathbb{R},\mathbb{C})$ el elemento unidad es la función constantemente igual a uno.
5. $\mathcal{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ No tiene elemento unidad.

Notación. Si $\mathcal{A}$ es un álgebra con unidad y $a \in \mathcal{A}$, para $n \geq 1$ (entero) a^n es el producto de a con ella misma , n veces. Para $n = 0$ definamos $a^0 = e$.

DEFINICIÓN 2.4. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra y $\mathcal{B}$ un subconjunto de $\mathcal{A}$, decimos que $\mathcal{B}$ es una *subálgebra* de $\mathcal{A}$ cuando $\mathcal{B}$ es una variedad lineal y $a \cdot b \in \mathcal{B}$ para todo $a, b \in \mathcal{B}$.

EJEMPLOS.

1. Sea X un espacio de Hausdorff compacto, $X \neq \emptyset$ y sea $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$, un polinomio en f es un elemento de $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ de la forma
$$p(f) = a_0 1 + a_1 f + \cdots + a_n f^n$$
para algunos $a_k \in \mathbb{C}$ $(k = 0, \ldots, n)$, donde $1 : X \to \mathbb{C}$ es la función constantemente igual a uno.

   Sea
$$\mathcal{P}_f(X, \mathbb{C}) = \{g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C}) : g = p(f) \text{ para algún polinomio } p\}.$$
   Entonces $\mathcal{P}_f(X, \mathbb{C})$ es una subálgebra de $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$.

   En particular, si $X = [0, 1]$ y $f(x) = x$ para $x \in [0, 1]$, entonces
$$\mathcal{P}_f(X, \mathbb{C}) = \{g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C}) : g \text{ es un polinomio en } x \text{ con coeficientes complejos}\}.$$

2. $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ es una subálgebra de $\mathcal{C}_l(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

DEFINICIÓN 2.5. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra con unidad. Sea $a \in \mathcal{A}$, diremos que a es *invertible* en $\mathcal{A}$ si existe $b \in \mathcal{A}$ tal que
$$a \cdot b = b \cdot a = e.$$
Denotaremos b por a^{-1}.

EJEMPLO. Si $X = [0, 1]$ y $f(x) = x$ para $x \in [0, 1]$, en $\mathcal{P}_f(X, \mathbb{C})$ los elementos invertibles son las funciones constantes no nulas.

OBSERVACIÓN 2.6. Si existe la inversa de un elemento de $\mathcal{A}$ entonces es única. En efecto, sea $a \in \mathcal{A}$ y supongamos que $b, c \in \mathcal{A}$ son tales que
$$a \cdot b = b \cdot a = e$$
y
$$a \cdot c = c \cdot a = e$$
entonces
$$b = b \cdot e = b \cdot (a \cdot c) = (b \cdot a) \cdot c = e \cdot c = c.$$

Además si a y b son elementos invertibles en $\mathcal{A}$, entonces $a \cdot b$ es invertible en $\mathcal{A}$ y

$$(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$$

porque

$$(a \cdot b) \cdot (b^{-1} \cdot a^{-1}) = e = (b^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot (a \cdot b).$$

Y si $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, también λa es invertible en $\mathcal{A}$ y

$$(\lambda a)^{-1} = \frac{1}{\lambda} a^{-1}.$$

Definición 2.7. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras con unidad. Sea φ una función de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, diremos que φ es un *homomorfismo* cuando:

(i) φ es lineal.
(ii) $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ para todo $a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{A}$.
(iii) $\varphi(e_{\mathcal{A}}) = e_{\mathcal{B}}$, donde $e_{\mathcal{A}}$ y $e_{\mathcal{B}}$ son los elementos unidad de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, respectivamente.

Ejemplos.

1. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra con unidad. La función $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ definida por:

$$\varphi(a) = a$$

para $a \in \mathcal{A}$, es un homomorfismo.

2. Sean X un espacio de Hausdorff compacto, $X \neq \emptyset$, $\mathcal{A} = \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ y $\mathcal{B} = \mathbb{C}$. Sea $x \in X$, la función $\psi_x : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ dada por:

$$\psi_x(f) = f(x)$$

es un homomorfismo.

Definición 2.8. Un *álgebra de Banach* $\mathcal{A}$ es un álgebra en la que está definida una norma $\|.\|$ tal que $(\mathcal{A}, \|.\|)$ es un espacio de Banach y satisface:

$$\|a \cdot b\| \leq \|a\| \|b\|$$

para todo $a, b \in \mathcal{A}$.

Si $\mathcal{A}$ tiene unidad requerimos que $\|e\| = 1$.

Ejemplos.

1. $\mathbb{C}$ con el producto dado en el Ejemplo 1 de la Definición 2.1 y con la norma dada por el valor absoluto es un álgebra de Banach.

2. En $M_{n\times n}(\mathbb{C})$, sea $A = [a_{ij}]_{1\le i,j\le n} \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, escribiendo:

$$Az = (a_{11}z_1 + \cdots + a_{1n}z_n, \ldots, a_{n1}z_1 + \cdots + a_{nn}z_n)$$

para $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ $\quad(\mathbb{C}^n = \mathbb{C} \oplus \cdot \overset{n}{\cdot} \oplus \mathbb{C})$, usando el producto interno

$$\langle z, w\rangle_n = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w_k}$$

donde $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ y la norma

$$\|Az\|_n^2 = \langle Az, Az\rangle_n,$$

entonces $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ con el producto dado en el Ejemplo 2 de la Definición 2.1 y la norma dada por:

$$\|A\|_{n\times n} = \sup_{\|z\|_n=1} \|Az\|_n,$$

es un álgebra de Banach.

3. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo, $L(\mathcal{H})$ con el producto dado en el Ejemplo 3 de la Definición 2.1 y con la norma dada por:

$$\|T\|_{L(\mathcal{H})} = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|$$

para $T \in L(\mathcal{H})$, es un álgebra de Banach.

Si $\dim(\mathcal{H}) = n < \infty$, entonces $L(\mathcal{H})$ es isomorfo a $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ debido a el isomorfismo entre $\mathcal{H}$ y $\mathbb{C}^n$ y el Ejemplo 2.

4. Sea X un espacio de Hausdorff compacto, $X \neq \emptyset$, $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ con el producto dado en el Ejemplo 4 de la Definición 2.1 y con la norma dada por:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)| = \max_{x\in X} |f(x)|$$

para $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$, es un álgebra de Banach.

5. $\mathcal{C}_l(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ con el producto dado en el Ejemplo 5 de la Definición 2.1 y con la norma dada por:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$$

para $f \in \mathcal{C}_l(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, es un álgebra de Banach.

6. $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ con el producto dado en el Ejemplo 6 de la Definición 2.1 y con la norma dada por:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$$

para $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, es un álgebra de Banach.

7. Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach con unidad y $\mathcal{B}$ es una subálgebra cerrada de $\mathcal{A}$ tal que $e \in \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{B}$ es un álgebra de Banach con unidad.

OBSERVACIÓN 2.9. En un álgebra de Banach $\mathcal{A}$, la desigualdad

$$\|a \cdot b\| \leq \|a\| \|b\|$$

hace del producto una operación continua en $\mathcal{A}$, es decir, si $\{a_n\}_{n\geq 1}, \{b_n\}_{n\geq 1}$ son sucesiones en $\mathcal{A}$ y $a, b \in \mathcal{A}$ son tales que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b.$$

Esta igualdad se obtiene usando:

$$a_n \cdot b_n - a \cdot b = (a_n - a) \cdot b_n + a \cdot (b_n - b),$$

y el hecho de que una sucesión convergente es acotada.

OBSERVACIÓN 2.10. Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach sin unidad, ésta se puede extender a una con unidad.

Sea

$$\mathcal{A}_1 = \{(a, \lambda) : a \in \mathcal{A} \text{ y } \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Si para todo $a, b \in \mathcal{A}$ y para todo $\lambda, \alpha \in \mathbb{C}$ definimos en $\mathcal{A}_1$:

(i) $(a, \lambda) \cdot (b, \alpha) = (a \cdot b + \lambda b + \alpha a, \lambda\alpha)$.
(ii) $\lambda(a, \alpha) = (\lambda a, \lambda\alpha)$.
(iii) $(a, \lambda) + (b, \alpha) = (a + b, \lambda + \alpha)$.
(iv) $\|(a, \lambda)\|_{\mathcal{A}_1} = \|a\|_{\mathcal{A}} + |\lambda|$.
(v) $e = (0, 1)$ donde $0 \in \mathcal{A}$ y $1 \in \mathbb{C}$,

entonces $\mathcal{A}_1$ es un álgebra de Banach con unidad y la aplicación $a \mapsto (a, 0)$ es un isomorfismo isométrico de $\mathcal{A}$ sobre $\{(a, 0) : a \in \mathcal{A}\}$ (subálgebra de $\mathcal{A}_1$).

Proposición 2.11. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad. Sea $a \in \mathcal{A}$ tal que $\|a\| < 1$, entonces*

(a) *$e - a$ es invertible en $\mathcal{A}$.*
(b) $\|(e-a)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{1 - \|a\|}$.

Demostración.

(a) De $\|a^n\| \leq \|a\|^n$ para $n \geq 0$, obtenemos que

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} a^n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|a^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|a\|^n.$$

La serie de la derecha es una serie geométrica de razón $\|a\| < 1$, así que converge en $\mathbb{R}$. Por lo tanto la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ converge en $\mathcal{A}$ a un elemento $b \in \mathcal{A}$, de donde tenemos que:

$$(e-a) \cdot b = e \cdot b - a \cdot b = b - a \cdot b = \lim_{N \to \infty} \left(\sum_{n=0}^{N} a^n - \sum_{n=0}^{N} a^{n+1} \right) = e$$

y

$$b \cdot (e-a) = b \cdot e - b \cdot a = b - b \cdot a = \lim_{N \to \infty} \left(\sum_{n=0}^{N} a^n - \left(\sum_{n=0}^{N} a^n \right) \cdot a \right) = e.$$

Luego $e - a$ es invertible en $\mathcal{A}$.

(b) En la prueba de (a) obtuvimos que

$$(e-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$$

entonces

$$\|(e-a)^{-1}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|a\|^n.$$

Como la serie de la derecha es una serie geométrica de razón $\|a\| < 1$ tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|a\|^n = \frac{1}{1 - \|a\|}.$$

Luego

$$\|(e-a)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|a\|}.$$

□

Proposición 2.12. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad y sea*

$$\mathcal{G}_{\mathcal{A}} = \{a \in \mathcal{A} : a \text{ es invertible en } \mathcal{A}\}.$$

Entonces $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ es abierto en $\mathcal{A}$.

Demostración. Sea $a \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ y $b \in \mathcal{A}$ tal que

$$\|a - b\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}$$

entonces

$$\|e - a^{-1} \cdot b\| = \|a^{-1} \cdot (a - b)\| \leq \|a^{-1}\|\|a - b\| < 1.$$

Por la parte (a) de la Proposición 2.11, $a^{-1} \cdot b \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ y como $b = a \cdot (a^{-1} \cdot b)$ y $a \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ entonces $b \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$.

Por lo tanto,

$$B(a, 1/\|a^{-1}\|) = \{b \in \mathcal{A} : \|a - b\| < 1/\|a^{-1}\|\} \subset \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$$

de donde $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ es abierto en $\mathcal{A}$. □

Proposición 2.13. *La función en $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ definida por $a \mapsto a^{-1}$ es continua.*

Demostración. Sea $a \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ y sea $b \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ tal que

$$\|a - b\| < \frac{1}{2\|a^{-1}\|}$$

entonces

$$\|e - a^{-1} \cdot b\| < 1/2 < 1. \tag{2.1}$$

Por la Proposición 2.11, $a^{-1} \cdot b \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ y

$$\|(a^{-1} \cdot b)^{-1}\| = \|b^{-1} \cdot a\| \leq \frac{1}{1 - \|e - a^{-1} \cdot b\|}$$

entonces

$$\|b^{-1}\| = \|(b^{-1} \cdot a) \cdot a^{-1}\| \leq \|b^{-1} \cdot a\|\|a^{-1}\| \leq \frac{\|a^{-1}\|}{1 - \|e - a^{-1} \cdot b\|}$$

De (2.1) tenemos que

$$\frac{\|a^{-1}\|}{1 - \|e - a^{-1} \cdot b\|} \leq 2\|a^{-1}\|.$$

Luego

$$\|b^{-1}\| \leq 2\|a^{-1}\|.$$

Y así

$$\|a^{-1} - b^{-1}\| = \|a^{-1} \cdot (a-b) \cdot b^{-1}\| \leq \|a^{-1}\|\|a-b\|\|b^{-1}\| \leq 2\|a^{-1}\|^2\|a-b\|.$$

Sea $\epsilon > 0$ y $\delta = \min\{\epsilon/2\|a^{-1}\|^2, 1/2\|a^{-1}\|\}$, si $\|a-b\| < \delta$ entonces $\|a^{-1} - b^{-1}\| < \epsilon$. □

Lema 2.14. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad, sean $a_n \in \mathcal{G}_\mathcal{A}$ para $n \geq 1$ (entero) y $a \in \partial\mathcal{G}_\mathcal{A}$, donde $\partial\mathcal{G}_\mathcal{A}$ es la frontera de $\mathcal{G}_\mathcal{A}$, tal que*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{ en } \mathcal{A}.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \|a_n^{-1}\| = \infty.$$

Demostración. Supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} \|a_n^{-1}\| \neq \infty$$

entonces existe $M < \infty$ tal que $\|a_n^{-1}\| < M$ para infinitos valores de n. Ya que $\{a_n\}_{n\geq 1}$ converge a a en $\mathcal{A}$, por definición de convergencia, existe n_0 tal que

$$\|a_{n_0} - a\| < \frac{1}{M}.$$

De donde

$$\|e - a_{n_0}^{-1} \cdot a\| = \|a_{n_0}^{-1} \cdot (a_{n_0} - a)\| \leq \|a_{n_0}^{-1}\|\|a_{n_0} - a\| < 1,$$

y así $a_{n_0}^{-1} \cdot a \in \mathcal{G}_\mathcal{A}$ por la parte (a) de la Proposición 2.11.

Como $a = a_{n_0} \cdot (a_{n_0}^{-1} \cdot a)$ y $a_{n_0} \in \mathcal{G}_\mathcal{A}$, entonces $a \in \mathcal{G}_\mathcal{A}$. Como $\mathcal{G}_\mathcal{A}$ es abierto en $\mathcal{A}$ debido a la Proposición 2.12, entonces $a \notin \partial\mathcal{G}_\mathcal{A}$. Llegamos a una contradicción ya que $a \in \partial\mathcal{G}_\mathcal{A}$. □

Definición 2.15. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad. Sea $a \in \mathcal{A}$, el *espectro* de a es:

$$\sigma_\mathcal{A}(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda e \text{ NO es invertible }\}.$$

Y el *conjunto resolvente* de a es:

$$\sigma_\mathcal{A}(a)^C = \rho_\mathcal{A}(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda e \text{ es invertible en } \mathcal{A}\}.$$

OBSERVACIÓN 2.16. El álgebra de Banach $\mathcal{A}$ puede ser una subálgebra de un álgebra de Banach $\mathcal{B}$ y entonces podría ocurrir que algún elemento $a \in \mathcal{A}$ no es invertible en $\mathcal{A}$ pero es invertible en $\mathcal{B}$. Por lo tanto el espectro de a depende del álgebra.

Siempre se cumple que

$$\sigma_{\mathcal{B}}(a) \subset \sigma_{\mathcal{A}}(a).$$

Más adelante detallaremos sobre la relación entre ambos espectros.

A continuación veamos algunos ejemplos de espectros.

EJEMPLOS.

1. Para $\mathcal{A} = \mathbb{C}$, sea $z \in \mathbb{C}$ entonces

$$\sigma_{\mathcal{A}}(z) = \{z\}.$$

2. Para $\mathcal{A} = M_{n\times n}(\mathbb{C})$, sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ entonces

$$\sigma_{\mathcal{A}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(A - \lambda I) = 0\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ es autovalor de } A\}.$$

3. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $\mathcal{A} = L(\mathcal{H})$. Sea $T \in L(\mathcal{H})$, entonces

$$\sigma_{\mathcal{A}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ NO es invertible}\}.$$

   Por la Proposición 1.5, $T - \lambda I$ no es invertible si $T - \lambda I$ no es acotado inferiormente o Rango$(T - \lambda I) \neq \mathcal{H}$.
4. Sea X un espacio de Hausdorff compacto, $X \neq \emptyset$ y $\mathcal{A} = \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$. Sea $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$, entonces

$$\sigma_{\mathcal{A}}(f) = \{f(x) : x \in X\}.$$

OBSERVACIÓN 2.17. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $\mathcal{A} = L(\mathcal{H})$, si la dimensión de $\mathcal{H}$ es finita, entonces $T - \lambda I$ no es invertible si $\det(T - \lambda I) = 0$. Ya que $\det(T - \lambda I)$ es un polinomio en λ, cuyas raíces son exactamente los valores propios de T, se sigue que en el caso de dimensión finita $\sigma_{\mathcal{A}}(T)$ es el conjunto de los autovalores de T.

Si la dimensión de $\mathcal{H}$ es infinita puede ocurrir que $\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(T)$ y sin embargo λ no sea autovalor de T.

Por ejemplo, consideremos el espacio

$$l^2(\mathbb{N}) = \left\{ \{x_n\}_{n\geq 1} : x_n \in \mathbb{C} \quad (n \geq 1) \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

con la norma

$$\| \{x_n\}_{n\geq 1} \| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

para $\{x_n\}_{n\geq 1} \in l^2(\mathbb{N})$, y definamos $T : l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$ por:

$$T(\{x_1, x_2, \dots\}) = \{x_1, x_2/2, x_3/3, \dots\}.$$

Tenemos que T es inyectivo, por lo tanto Núcleo$(T) = \{0\}$ así que cero (0) no es autovalor de T. Por otro lado

$$\|T(e_n)\| = \frac{1}{n},$$

donde $e_n = \{0, \dots, 0, 1, 0, \dots\}$ (1 en la n-ésima posición) luego

$$\lim_{n\to\infty} \|T(e_n)\| = 0.$$

Pero como $\|e_n\| = 1$, entonces T no es acotado inferiormente y por la Proposición 1.5, T no es invertible, de donde $0 \in \sigma_{\mathcal{A}}(T)$.

Teorema 2.18. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad y $a \in \mathcal{A}$, entonces $\sigma_{\mathcal{A}}(a)$ es compacto y no vacío.*

Demostración. Veamos que $\sigma_{\mathcal{A}}(a)$ es compacto.

Sea $\phi : \mathbb{C} \to \mathcal{A}$ la función definida por:

$$\phi(\lambda) = a - \lambda e$$

para $\lambda \in \mathbb{C}$.

Tenemos que ϕ es continua. En efecto, sea $\epsilon > 0$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, si $|\lambda - \alpha| < \epsilon$ para $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces

$$\|\phi(\lambda) - \phi(\alpha)\| = \|(-\lambda + \alpha)e\| = |(-1)(\lambda - \alpha)| = |\lambda - \alpha| < \epsilon.$$

Como el conjunto $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ (dado en la Proposición 2.12) es abierto en $\mathcal{A}$ y ϕ es continua, entonces $\phi^{-1}(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ es abierto en $\mathbb{C}$.

Pero

$$\phi^{-1}(\mathcal{G}_{\mathcal{A}}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \phi(\lambda) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda e \text{ es invertible en } \mathcal{A}\} = \rho_{\mathcal{A}}(a)$$

entonces $\sigma_{\mathcal{A}}(a)^C = \rho_{\mathcal{A}}(a)$ es abierto en $\mathbb{C}$ y así $\sigma_{\mathcal{A}}(a)$ es cerrado en $\mathbb{C}$.

Sea $\lambda \in \mathbb{C}$, si $|\lambda| > \|a\|$ entonces

$$\left\| e - \left(e - \frac{1}{\lambda} a \right) \right\| = \left\| \frac{1}{\lambda} a \right\| = \frac{\|a\|}{|\lambda|} < 1$$

y por la parte (a) de la Proposición 2.11

$$e - \frac{1}{\lambda} a \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}},$$

luego

$$a - \lambda e \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$$

y por lo tanto

$$\lambda \in \rho_{\mathcal{A}}(a).$$

Hemos probado que

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \|a\|\} \subset \rho_{\mathcal{A}}(a)$$

entonces

$$\sigma_{\mathcal{A}}(a) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|a\|\}$$

y así $\sigma_{\mathcal{A}}(a)$ es un conjunto acotado, que además es cerrado en $\mathbb{C}$ y por lo tanto compacto.

Veamos que $\sigma_{\mathcal{A}}(a)$ no es vacío.

Sea $R : \rho_{\mathcal{A}}(a) \to \mathcal{A}$ la función definida por:

$$R(\lambda) = (a - \lambda e)^{-1}$$

para $\lambda \in \rho_{\mathcal{A}}(a)$.

Si $\alpha, \lambda \in \rho_{\mathcal{A}}(a)$ tenemos que

$$\begin{aligned} R(\alpha)^{-1} \cdot (R(\alpha) - R(\lambda)) \cdot R(\lambda)^{-1} &= (a - \alpha e) \cdot ((a - \alpha e)^{-1} - (a - \lambda e)^{-1}) \cdot (a - \lambda e) \\ &= (a - \lambda e) - (a - \alpha e) \\ &= (-\lambda + \alpha) e. \end{aligned}$$

De donde

$$R(\alpha) - R(\lambda) = (-\lambda + \alpha) R(\alpha) \cdot R(\lambda).$$

Como la inversión es continua por la Proposición 2.13, para $\lambda \in \rho_{\mathcal{A}}(a)$ tenemos que

$$\lim_{\alpha \to \lambda} \frac{R(\alpha) - R(\lambda)}{\alpha - \lambda} \text{ existe}$$

y éste es:

$$\lim_{\alpha \to \lambda} \frac{R(\alpha) - R(\lambda)}{\alpha - \lambda} = (R(\lambda))^2.$$

Por lo tanto R es una función analítica en $\rho_{\mathcal{A}}(a)$ y de esto obtenemos que la función $F : \rho_{\mathcal{A}}(a) \to \mathbb{C}$ dada por

$$F(\lambda) = f(R(\lambda))$$

es analítica en $\rho_{\mathcal{A}}(a)$, para todo $f \in \mathcal{A}^*$ (espacio dual topológico de $\mathcal{A}$).

Si $|\lambda| > \|a\|$, por resultado obtenido en la prueba de la parte (a) de la Proposición 2.11,

$$R(\lambda) = (a - \lambda e)^{-1} = \lambda^{-1}(e - \lambda^{-1}a)^{-1} = \lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^n$$

entonces

$$\|R(\lambda)\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\|a\|}{|\lambda|}\right)^n = \frac{1}{|\lambda|(1 - (\|a\|/|\lambda|))} = \frac{1}{|\lambda| - \|a\|}.$$

De donde

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} R(\lambda) = 0$$

y

$$\|R(\lambda)\| \leq \|a\|^{-1} \quad \text{si} \quad |\lambda| \geq 2\|a\| > \|a\|.$$

Luego

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} F(\lambda) = 0$$

y, para $f \in \mathcal{A}^*$

$$|F(\lambda)| \leq \|f\| \|a\|^{-1} \quad \text{si} \quad |\lambda| \geq 2\|a\| > \|a\|.$$

Si $\sigma_{\mathcal{A}}(a) = \emptyset$ entonces $\rho_{\mathcal{A}}(a) = \mathbb{C}$ y en ese caso F es analítica en $\mathbb{C}$ (es una función entera) que además se anula en el infinito y $|F(\lambda)| \leq M < \infty$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| \geq 2\|a\|$. Por el teorema de Liouville debe ser $F(\lambda) = 0$. (Este teorema dice que una función que es analítica y acotada en todo el plano es una función constante). Luego, por un corolario del Teorema de Hahn Banach que dice que si X es un espacio normado y $x_0 \in X$ es tal que $f(x_0) = 0$ para todo $f \in X^*$ entonces $x_0 = 0$, tenemos que $R(\lambda) = 0$. Hemos llegado a una contradicción ya que $R(\lambda)$ es, por definición, un elemento invertible en $\mathcal{A}$. Por lo tanto $\sigma_{\mathcal{A}}(a) \neq \emptyset$. $\square$

TEOREMA 2.19 (Gelfand-Mazur). *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad en la cual cada elemento distinto de cero es invertible, entonces $\mathcal{A}$ es isométricamente isomorfo a $\mathbb{C}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $a \in \mathcal{A}$, $\sigma_{\mathcal{A}}(a) \neq \emptyset$ por el Teorema 2.18. Sea $\lambda_a \in \sigma_{\mathcal{A}}(a)$, entonces $a - \lambda_a e$ no es invertible por definición. Ya que cada elemento de $\mathcal{A}$, distinto de cero, es invertible y $a - \lambda_a e$ no es invertible, entonces

$$a - \lambda_a e = 0$$

y así

$$a = \lambda_a e. \tag{2.2}$$

Luego, para $\lambda \neq \lambda_a$ tenemos que

$$a - \lambda e = (\lambda_a - \lambda)e$$

el cual es invertible.

Con estos hechos podemos concluir que todo elemento de $\mathcal{A}$ es múltiplo escalar de la unidad y que $\sigma_{\mathcal{A}}(a)$ contiene exactamente un número complejo λ_a por cada $a \in \mathcal{A}$.

Sea $\psi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ la función definida por:

$$\psi(a) = \lambda_a$$

para $a \in \mathcal{A}$.

Tenemos que ψ es un isomorfismo isométrico de $\mathcal{A}$ sobre $\mathbb{C}$. En efecto,

(i) Si $a, b \in \mathcal{A}$ y $\psi(a) = \psi(b)$ entonces $\lambda_a = \lambda_b$. Como

$$a = \lambda_a e = \lambda_b e = b$$

tenemos que

$$a = b.$$

Por lo tanto ψ es inyectiva.

(ii) Dado $\lambda \in \mathbb{C}$ y tomando $a = \lambda e \in \mathcal{A}$ tenemos que

$$\psi(a) = \lambda.$$

Por lo tanto ψ es sobreyectiva.

(iii) De (2.2) tenemos que

$$|\psi(a)| = |\lambda_a| = \|\lambda_a e\| = \|a\|$$

y así ψ es isométrica.

$\square$

Proposición 2.20. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad y $a, b \in \mathcal{A}$.*

(a) *Si $e - a \cdot b \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ entonces $e - b \cdot a \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ y*

$$(e - b \cdot a)^{-1} = e + b \cdot (e - a \cdot b)^{-1} \cdot a.$$

(b) $\sigma_{\mathcal{A}}(b \cdot a) \cup \{0\} = \sigma_{\mathcal{A}}(a \cdot b) \cup \{0\}$.

Demostración.

(a) Sea $e - a \cdot b$ invertible en $\mathcal{A}$, veamos que

$$(e - b \cdot a) \cdot [e + b \cdot (e - a \cdot b)^{-1} \cdot a] = e = [e + b \cdot (e - a \cdot b)^{-1} \cdot a] \cdot (e - b \cdot a).$$

Primero probaremos que

$$(e - b \cdot a) \cdot [e + b \cdot (e - a \cdot b)^{-1} \cdot a] = e.$$

$$\begin{aligned}
(e - b \cdot a) \cdot [e + b \cdot (e - a \cdot b)^{-1} \cdot a] &= e + b \cdot (e - a \cdot b)^{-1} \cdot a - b \cdot a \cdot [e + b \cdot (e - a \cdot b)^{-1} \cdot a] \\
&= e + b \cdot (e - a \cdot b)^{-1} \cdot a - b \cdot a - b \cdot a \cdot b \cdot (e - a \cdot b)^{-1} \cdot a \\
&= e - b \cdot a + b \cdot [(e - b \cdot a)^{-1} - a \cdot b \cdot (e - a \cdot b)^{-1}] \cdot a \\
&= e - b \cdot a + b \cdot (e - a \cdot b)(e - a \cdot b)^{-1} \cdot a \\
&= e - b \cdot a + b \cdot e \cdot a = e.
\end{aligned}$$

Finalmente probaremos que

$$[e + b \cdot (e - a \cdot b)^{-1} \cdot a] \cdot (e - b \cdot a) = e.$$

$$\begin{aligned}
[e + b \cdot (e - a \cdot b)^{-1} \cdot a] \cdot (e - b \cdot a) &= e - b \cdot a + b \cdot (e - a \cdot b)^{-1} \cdot a \cdot (e - b \cdot a) \\
&= e - b \cdot a + b \cdot (e - a \cdot b)^{-1} \cdot a - b \cdot (e - a \cdot b)^{-1} \cdot a \cdot b \cdot a \\
&= e - b \cdot a + b \cdot [(e - a \cdot b)^{-1} - (e - a \cdot b)^{-1} \cdot a \cdot b] \cdot a \\
&= e - b \cdot a + b \cdot (e - a \cdot b)^{-1} \cdot (e - a \cdot b) \cdot a \\
&= e - b \cdot a + b \cdot e \cdot a = e.
\end{aligned}$$

(b) Para $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, si

$$a \cdot b - \lambda e = -\lambda \left(e - \frac{1}{\lambda} a \cdot b \right) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$$

entonces por (a)

$$b \cdot a - \lambda e = -\lambda \left(e - \frac{1}{\lambda} b \cdot a \right) \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}.$$

Así

$$\sigma_{\mathcal{A}}(b \cdot a) \cup \{0\} = \sigma_{\mathcal{A}}(a \cdot b) \cup \{0\}.$$

□

Observación 2.21. Los espectros $\sigma_{\mathcal{A}}(b \cdot a)$ y $\sigma_{\mathcal{A}}(a \cdot b)$ no siempre son iguales. Veamos el siguiente ejemplo:

Para $\mathcal{A} = L(l^2(\mathbb{N}))$, sea $S : l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$ el operador definido por:

$$S(\{x_1, x_2, x_3, \dots\}) = \{0, x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

para $\{x_n\}_{n \geq 1} \in l^2(\mathbb{N})$. Y sea $T : l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$ el operador definido por:

$$T(\{x_1, x_2, x_3, \dots\}) = \{x_2, x_3, x_4, \dots\}$$

para $\{x_n\}_{n \geq 1} \in l^2(\mathbb{N})$.

Tenemos que TS es invertible y sin embargo ST no es invertible. En efecto,

$$TS(\{x_1, x_2, \dots\}) = T(\{0, x_1, x_2, \dots\}) = \{x_1, x_2, \dots\}$$

de donde $TS = I$ es el operador identidad en $l^2(\mathbb{N})$, por lo tanto $0 \notin \sigma_{\mathcal{A}}(TS)$. El elemento ST no es invertible porque

$$ST(\{1, 0, 0, \dots\}) = S(\{0, 0, \dots\}) = \{0, 0, 0, \dots\}$$

y no existe $\widetilde{T} \in L(l^2(\mathbb{N}))$ tal que $\widetilde{T}ST(\{1, 0, 0, \dots\}) = I(\{1, 0, 0, \dots\})$. Recordemos que los operadores lineales envían el vector cero a cero.

Recordemos la siguiente definición topológica:

Definición 2.22. Sea $\mathcal{X}$ un espacio topológico, una *componente conexa* $\mathcal{E}$ de $\mathcal{X}$ es un subconjunto conexo maximal de $\mathcal{X}$, es decir, $\mathcal{E}$ es conexo y no es subconjunto propio de ningún subconjunto conexo de $\mathcal{X}$.

LEMA 2.23. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio topológico, sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ conjuntos abiertos en $\mathcal{X}$ tales que $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$ y $\mathcal{W}$ no contiene puntos fronteras de $\mathcal{V}$, entonces $\mathcal{V}$ es una unión de componentes conexas de $\mathcal{W}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea Ω una componente conexa de $\mathcal{W}$ tal que $\Omega \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$, tenemos que $\Omega \cap \mathcal{V}$ es abierto en $\mathcal{W}$. Como $\mathcal{W}$ no contiene puntos fronteras de $\mathcal{V}$ entonces

$$\mathcal{W} \cap \partial\mathcal{V} = \emptyset$$

de donde, $\Omega \subset \partial\mathcal{V}^C$ y $\mathcal{V} \subset \partial\mathcal{V}^C$. Aquí $\partial\mathcal{V}$ es la frontera de $\mathcal{V}$ y $\partial\mathcal{V}^C$ es el complemento de $\partial\mathcal{V}$.

Sea $\mathcal{U} = \overline{\mathcal{V}}^C$, $\Omega \cap \mathcal{U}$ es abierto en $\mathcal{W}$ y tenemos que

$$(\Omega \cap \mathcal{V}) \cup (\Omega \cap \mathcal{U}) = \Omega \cap (\mathcal{V} \cup \mathcal{U}) = \Omega \cap (\mathcal{V} \cup \partial\mathcal{V}^C) = \Omega.$$

Además

$$(\Omega \cap \mathcal{V}) \cap (\Omega \cap \mathcal{U}) = \emptyset.$$

Ya que Ω es conexo y $\Omega \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$, entonces $\Omega \cap \mathcal{U} = \emptyset$ de donde $\Omega \cap \mathcal{V} = \Omega$ y por lo tanto

$$\Omega \subset \mathcal{V}.$$

Como las componentes conexas son disjuntas y su unión es $\mathcal{W}$, deducimos que $\mathcal{V}$ es una unión de componentes conexas de $\mathcal{W}$. □

TEOREMA 2.24.

(a) *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad y $\mathcal{B}$ una subálgebra cerrada de $\mathcal{A}$ tal que $e \in \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{G}_\mathcal{B}$ es una unión de componentes conexas de $\mathcal{B} \cap \mathcal{G}_\mathcal{A}$.*

(b) *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad y $\mathcal{B}$ una subálgebra cerrada de $\mathcal{A}$ tal que $e \in \mathcal{B}$, sea $b \in \mathcal{B}$, entonces $\sigma_\mathcal{B}(b)$ es la unión de $\sigma_\mathcal{A}(b)$ y una colección (posiblemente vacía) de componentes conexas acotadas de $\rho_\mathcal{A}(b)$.*

DEMOSTRACIÓN.

(a) Todo elemento de $\mathcal{B}$ que tiene inverso en $\mathcal{B}$ tiene el mismo inverso en $\mathcal{A}$. De donde $\mathcal{G}_\mathcal{B} \subset \mathcal{G}_\mathcal{A}$, además $\mathcal{G}_\mathcal{B}$ y $\mathcal{B} \cap \mathcal{G}_\mathcal{A}$ son subconjuntos abiertos de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{G}_\mathcal{B} \subset \mathcal{B} \cap \mathcal{G}_\mathcal{A}$. Por el Lema 2.23 basta probar que $\mathcal{G}_\mathcal{A}$ no contiene puntos fronteras de $\mathcal{G}_\mathcal{B}$.

Sea $b \in \partial\mathcal{G}_\mathcal{B}$, existe una sucesión $\{b_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{G}_\mathcal{B}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b \quad \text{en } \mathcal{B}$$

porque $\mathcal{B}$ es cerrado. Como $\mathcal{B}$ es un álgebra de Banach con unidad (ver el Ejemplo 7 de la Definición 2.8), por el Lema 2.14

$$\lim_{n\to\infty} \|b_n^{-1}\| = \infty.$$

Si $b \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} b_n^{-1} = b^{-1},$$

debido a la continuidad de la inversión en $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ por la Proposición 2.13, en ese caso la sucesión $\{\|b_n^{-1}\|\}_{n\geq 1}$ es acotada, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $b \notin \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$.

(b) Siempre se cumple que

$$\rho_{\mathcal{B}}(b) \subset \rho_{\mathcal{A}}(b),$$

porque $\lambda \in \rho_{\mathcal{B}}(b)$ si y sólo si $b - \lambda e \in \mathcal{G}_{\mathcal{B}} \subset \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$. Sea λ_o punto frontera de $\rho_{\mathcal{B}}(b)$, entonces $b - \lambda_o e$ es punto frontera de $\mathcal{G}_{\mathcal{B}}$. Por (a), $b - \lambda_o e \notin \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$, entonces $\lambda_o \notin \rho_{\mathcal{A}}(b)$.

Por el Lema 2.23, $\rho_{\mathcal{B}}(b)$ es la unión de ciertas componentes conexas de $\rho_{\mathcal{A}}(b)$ y entonces las otras componentes conexas de $\rho_{\mathcal{A}}(b)$ son subconjuntos de $\sigma_{\mathcal{B}}(b)$ y por lo tanto acotadas. Como siempre $\sigma_{\mathcal{A}}(b) \subset \sigma_{\mathcal{B}}(b)$, tenemos que $\sigma_{\mathcal{B}}(b)$ es la unión de $\sigma_{\mathcal{A}}(b)$ y una colección de componentes conexas acotadas de $\rho_{\mathcal{A}}(b)$.

Si $\rho_{\mathcal{A}}(b)$ es conexo entonces tiene una sóla componente conexa que es el mismo $\rho_{\mathcal{A}}(b)$ y no es acotada. Por lo tanto la colección de componentes conexas acotadas de $\rho_{\mathcal{A}}(b)$ es vacía. Esto también sucede cuando el interior de $\sigma_{\mathcal{B}}(b)$ es vacío.

□

Definición 2.25. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad y $a \in \mathcal{A}$, definimos el *radio espectral* de a como

$$r_{\mathcal{A}}(a) = \max_{\lambda\in\sigma_{\mathcal{A}}(a)} |\lambda|.$$

Ejemplos.

1. Para $\mathcal{A} = \mathbb{C}$, sea $z \in \mathbb{C}$, por el Ejemplo 1 de la Definición 2.15 tenemos que

$$r_{\mathcal{A}}(z) = |z|.$$

2. Para $\mathcal{A} = M_{n\times n}(\mathbb{C})$, sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, por el Ejemplo 2 de la Definición 2.15 tenemos que

$$r_{\mathcal{A}}(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ es autovalor de } A\}.$$

3. Sea X un espacio de Hausdorff compacto, $X \neq \emptyset$ y $\mathcal{A} = \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$. Sea $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$, por el Ejemplo 4 de la Definición 2.15, tenemos que

$$r_{\mathcal{A}}(f) = \max_{x \in X} |f(x)| = \|f\|_\infty.$$

Teorema 2.26 (Fórmula de Beurling-Gelfand). *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad y $a \in \mathcal{A}$, entonces*

$$r_{\mathcal{A}}(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n\geq 1} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}. \tag{2.3}$$

Y la desigualdad

$$r_{\mathcal{A}}(a) \leq \|a\|$$

está contenida en la Fórmula (2.3).

Demostración. Veamos que

$$\lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n\geq 1} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Sea $m \geq 1$ (entero fijo). Si $n \geq 1$ (entero), por el algoritmo de Euclides, existen $q_n \geq 0$ y $r_n \geq 0$ (enteros) tales que

$$n = mq_n + r_n$$

donde $0 \leq r_n < m$. Luego

$$\|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \|a^{mq_n + r_n}\|^{\frac{1}{n}} \leq \|a^m\|^{\frac{q_n}{n}} \|a\|^{\frac{r_n}{n}}. \tag{2.4}$$

Como $0 \leq r_n < m$ entonces $0 \leq \dfrac{r_n}{n} < \dfrac{m}{n}$ y tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{n} = 0. \tag{2.5}$$

Como

$$q_n = \frac{1}{m}(n - r_n)$$

entonces

$$\frac{q_n}{n} = \frac{1}{m}\left(1 - \frac{r_n}{n}\right)$$

y de (2.5) tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q_n}{n} = \frac{1}{m}. \tag{2.6}$$

Luego de (2.4),(2.5) y (2.6) obtenemos la desigualdad

$$\limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|a^m\|^{\frac{1}{m}}$$

para todo $m \geq 1$, de donde

$$\limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \inf_{m\geq 1} \|a^m\|^{\frac{1}{m}} \leq \liminf_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$$

y como

$$\liminf_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \quad \text{existe}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n\geq 1} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

(1) Veamos que

$$r_{\mathcal{A}}(a) \leq \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que

$$|\lambda| > \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$$

entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|a^n\|}{|\lambda|^n} < \infty$$

debido al criterio de la raíz, porque

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\|a^n\|}{|\lambda|^n}\right)^{\frac{1}{n}} < 1,$$

y por lo tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} a^n < \infty.$$

Sea

$$b=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda^n}a^n.$$

Como

$$\left(e-\frac{1}{\lambda}a\right)\cdot b=b\cdot\left(e-\frac{1}{\lambda}a\right)=e$$

se sigue que $e-\dfrac{1}{\lambda}a\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ y por lo tanto $a-\lambda e\in\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$. De donde

$$\left\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|>\lim_{n\to\infty}\|a^n\|^{\frac{1}{n}}\right\}\subset\rho_{\mathcal{A}}(a)$$

y así

$$\sigma_{\mathcal{A}}(a)\subset\left\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|\leq\lim_{n\to\infty}\|a^n\|^{\frac{1}{n}}\right\}.$$

Luego

$$r_{\mathcal{A}}(a)\leq\lim_{n\to\infty}\|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

(2) Veamos que

$$r_{\mathcal{A}}(a)\geq\lim_{n\to\infty}\|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Sea $R:\rho_{\mathcal{A}}(a)\to\mathcal{A}$ la función definida por:

$$R(\lambda)=(a-\lambda e)^{-1}$$

para $\lambda\in\rho_{\mathcal{A}}(a)$. En la prueba del Teorema 2.18 obtuvimos que R es analítica en $\rho_{\mathcal{A}}(a)$ y que

$$\sigma_{\mathcal{A}}(a)\subset\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|\leq\|a\|\},$$

entonces $r_{\mathcal{A}}(a)\leq\|a\|$ y R es analítica en $\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|>r_{\mathcal{A}}(a)\}$. Sea $f\in\mathcal{A}^*$ (espacio dual topológico de $\mathcal{A}$) y definamos

$$F(\lambda)=f(R(\lambda))$$

para $\lambda\in\rho_{\mathcal{A}}(a)$, entonces F es analítica en $\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|>r_{\mathcal{A}}(a)\}$. Además si $|\lambda|>r_{\mathcal{A}}(a)$ tenemos que

$$F(\lambda)=\lambda^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda^n}f(a^n) \tag{2.7}$$

(porque el desarrollo es válido en cualquier conjunto de la forma $\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|>x\}$ que está contenido en el dominio de F).

Sea $\lambda_0 \in \rho_{\mathcal{A}}(a)$ tal que $|\lambda_0| > r_{\mathcal{A}}(a)$, entonces $\{f(a^n/\lambda_0^n)\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión acotada para todo $f \in \mathcal{A}^*$ por (2.7). De donde

$$\| \, a^n/\lambda_0^n \, \| \leq M$$

para todo $n \geq 0$ (entero) y algún $M > 0$.

Luego

$$\|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq M^{\frac{1}{n}} |\lambda_0|,$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq |\lambda_0|,$$

de donde

$$\lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r_{\mathcal{A}}(a).$$

□

Observación 2.27. El radio espectral de $a \in \mathcal{A}$ no depende del álgebra ya que su fórmula (fórmula de Beurling-Gelfand) es expresada en términos de las propiedades métricas de las potencias de a y ellas son independientes de lo que ocurra en el exterior de $\mathcal{A}$ (cuando $\mathcal{A}$ es subálgebra de un álgebra de Banach).

Notación. (Cálculo simbólico). Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad y $a \in \mathcal{A}$. Para $z \in \mathbb{C}$, si

$$p(z) = \alpha_0 + \cdots + \alpha_n z^n \quad (\alpha_k \in \mathbb{C})$$

es un polinomio, entonces denotamos por $p(a)$ el elemento de $\mathcal{A}$ definido mediante

$$p(a) = \alpha_0 e + \alpha_1 a + \cdots + \alpha_n a^n.$$

La función $p \mapsto p(a)$ es un homomorfismo del álgebra de los polinomios a $\mathcal{A}$.

Veamos algunas definiciones de elementos de $\mathcal{A}$ dadas por otras funciones.

Si

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n \quad (\alpha_n \in \mathbb{C})$$

es una función entera en $\mathbb{C}$, es natural definir $\varphi(a)$ por

$$\varphi(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n a^n;$$

esta serie siempre converge a un elemento de $\mathcal{A}$ porque

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n a^n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| \|a\|^n.$$

y la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| \|a\|^n$ siempre converge en $\mathbb{R}$ dependiendo del valor de su radio de convergencia. Si

$$\varphi(z) = \frac{1}{\alpha - z} \quad (\alpha \in \mathbb{C}, z \neq \alpha)$$

la definición natural de $\varphi(a)$ es

$$\varphi(a) = (\alpha e - a)^{-1}$$

la cual es la misma para todo $a \in \mathcal{A}$ tal que $\alpha \in \rho_{\mathcal{A}}(a)$.

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo, en particular, si $\mathcal{A} = L(\mathcal{H})$ y $T \in \mathcal{A}$ es un operador normal, podemos interpretar a $\varphi(T)$ como un operador lineal, acotado y normal en $\mathcal{H}$ cuando $\varphi \in \mathcal{C}(\sigma_{\mathcal{A}}(T), \mathbb{C})$. Más adelante detallaremos sobre este hecho.

Teorema 2.28 (Aplicación espectral para polinomios). *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad, $a \in \mathcal{A}$ y p un polinomio, entonces*

$$\sigma_{\mathcal{A}}(p(a)) = p(\sigma_{\mathcal{A}}(a)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(a)\}.$$

Demostración.

(1) Veamos que

$$\sigma_{\mathcal{A}}(p(a)) \subset p(\sigma_{\mathcal{A}}(a)).$$

Sea $\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(p(a))$ entonces $p(a) - \lambda e$ no es invertible por definición. Si la forma canónica de $p(z) - \lambda$ para $z \in \mathbb{C}$, está dada por:

$$p(z) - \lambda = \lambda_0 (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \ldots (z - \alpha_n)$$

donde $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ es constante y $\alpha_i \in \mathbb{C} \quad (i = 1, \ldots, n)$, tenemos que

$$p(a) - \lambda e = \lambda_0(a - \alpha_1 e)(a - \alpha_2 e) \ldots (a - \alpha_n e).$$

Como $p(a) - \lambda e$ no es invertible entonces existe algún $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $a - \alpha_k e$ no es invertible y por lo tanto $\alpha_k \in \sigma_{\mathcal{A}}(a)$. Como

$$p(\alpha_k) = \lambda$$

entonces $\lambda \in p(\sigma_{\mathcal{A}}(a))$.

(2) Finalmente probaremos que

$$p(\sigma_{\mathcal{A}}(a)) \subset \sigma_{\mathcal{A}}(p(a)).$$

Sea $\lambda \in p(\sigma_{\mathcal{A}}(a))$ entonces

$$p(z) - \lambda = \lambda_0(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \ldots (z - \alpha_n)$$

donde $\alpha_1 \in \sigma_{\mathcal{A}}(a)$ y tenemos que

$$p(a) - \lambda e = \lambda_0(a - \alpha_1 e)(a - \alpha_2 e) \ldots (a - \alpha_n e).$$

Como $\alpha_1 \in \sigma_{\mathcal{A}}(a)$ entonces $a - \alpha_1 e$ no es invertible. Por lo tanto $p(a) - \lambda e$ no es invertible, de donde $\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(p(a))$.

$\square$

2. Algebras de Banach conmutativas

En esta sección trataremos sobre la *Teoría Gelfand* de álgebras de Banach conmutativas, aunque alguno de los resultados de esta teoría pueden ser aplicados a álgebras no conmutativas.

Definición 2.29. Un álgebra $\mathcal{A}$ es *conmutativa* cuando $a \cdot b = b \cdot a$ para todo $a, b \in \mathcal{A}$.

Ejemplos.

1. $\mathbb{C}$ es conmutativa.
2. $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ NO es conmutativa.
3. Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert complejo tal que $\dim(\mathcal{H}) > 1$, entonces $L(\mathcal{H})$ NO es conmutativa. (Excluimos el espacio trivial $\mathcal{H} = \{0\}$).
4. Para X un espacio de Hausdorff compacto, $X \neq \emptyset$, $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ es conmutativa.
5. $\mathcal{C}_l(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ y $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ son conmutativas.

DEFINICIÓN 2.30. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra conmutativa, sea $\mathcal{I}$ un subconjunto de $\mathcal{A}$, decimos que $\mathcal{I}$ es un *ideal* cuando:

(i) $\mathcal{I}$ es un variedad lineal de $\mathcal{A}$, y
(ii) $a \cdot b \in \mathcal{I}$ para cualquier $a \in \mathcal{A}$ y $b \in \mathcal{I}$.

Si $\mathcal{I} \neq \mathcal{A}$, decimos que $\mathcal{I}$ es un *ideal propio* de $\mathcal{A}$.

Diremos que $\mathcal{I}$ es un *ideal maximal* de $\mathcal{A}$ si es un ideal propio tal que los únicos ideales que lo contienen son $\mathcal{I}$ o $\mathcal{A}$.

EJEMPLOS.

1. $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ es un ideal propio de $\mathcal{C}_l(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
2. Sea X un espacio de Hausdorff compacto, $X \neq \emptyset$. Sea $x \in X$ y

$$\mathcal{M}_x = \{f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C}) : f(x) = 0\}.$$

Entonces $\mathcal{M}_x$ es un ideal maximal de $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$. En efecto, definiendo la función $\varphi_x : \mathcal{C}(X, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ por:

$$\varphi_x(f) = f(x)$$

para todo $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$, tenemos que φ_x es un homomorfismo y que

$$\mathcal{M}_x = \text{ Núcleo } (\varphi_x).$$

Por lo tanto $\mathcal{M}_x$ es un ideal propio de $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$.

Supongamos que $\mathcal{I}$ es ideal de $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ y $\mathcal{M}_x \subsetneq \mathcal{I}$. Veamos que $\mathcal{I} = \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$.

Como $\mathcal{M}_x \subsetneq \mathcal{I}$ entonces existe $f \in \mathcal{I} - \mathcal{M}_x = \mathcal{M}_x^C$ tal que $f(x) = \alpha \neq 0$. Sea $h : X \to \mathbb{C}$ la función dada por:

$$h(y) = f(y) - \alpha$$

para todo $y \in X$, entonces $h(x) = 0$ y como $h \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ tenemos que $h \in \mathcal{M}_x \subsetneq \mathcal{I}$, de donde $h \in \mathcal{I}$ y como $f \in \mathcal{I}$ entonces $f - h \in \mathcal{I}$ porque $\mathcal{I}$ es un ideal. Sea

$$g = f - h$$

tenemos que

$$g(y) = \alpha$$

para todo $y \in X$. Sea

$$r(y) = \frac{1}{\alpha}$$

para todo $y \in X$, entonces

$$(r \cdot g)(y) = r(y)g(y) = \frac{1}{\alpha}\alpha = 1 = (g \cdot r)(y).$$

Como $r \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ y $g \in \mathcal{I}$ entonces $r \cdot g = g \cdot r \in \mathcal{I}$, de donde la función constantemente igual a uno pertenece a $\mathcal{I}$. Sea $s \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$,

$$s = s \cdot 1 \in \mathcal{I}.$$

Por lo tanto $\mathcal{C}(X, \mathbb{C}) \subset \mathcal{I}$ y como $\mathcal{I}$ es ideal de $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ entonces

$$\mathcal{I} = \mathcal{C}(X, \mathbb{C}).$$

Luego $\mathcal{M}_x$ es un ideal maximal de $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$.

Observación 2.31.

(a) Si $\mathcal{A}$ es un álgebra conmutativa con unidad y si $\mathcal{I}$ es un ideal propio de $\mathcal{A}$, entonces cada elemento de $\mathcal{I}$ no es invertible.
(b) Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach conmutativa y si $\mathcal{I}$ es un ideal de $\mathcal{A}$, entonces la clausura $\overline{\mathcal{I}}$ de $\mathcal{I}$ es un ideal.

Teorema 2.32 (Teorema maximal de Hausdorff). *Todo conjunto no vacío parcialmente ordenado $\mathcal{P}$ contiene un subconjunto totalmente ordenado $\mathcal{C}$ el cual es maximal con respecto a la existencia de los subconjuntos totalmente ordenados de $\mathcal{P}$.*

No demostraremos este teorema, sólo indicamos que su prueba se basa en el uso del axioma de elección. Una prueba puede encontrarse en [**11**], página 392.

TEOREMA 2.33.

(a) *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra conmutativa con unidad, entonces todo ideal propio de $\mathcal{A}$ está contenido en un ideal maximal de $\mathcal{A}$.*

(b) *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa con unidad, entonces todo ideal maximal de $\mathcal{A}$ es cerrado.*

DEMOSTRACIÓN.

(a) Sea $\mathcal{J}$ un ideal propio de $\mathcal{A}$. Sea

$$\mathcal{P} = \{\mathcal{I} \subset \mathcal{A} : \mathcal{I} \text{ es ideal propio de } \mathcal{A} \text{ y } \mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}\}.$$

Como $\mathcal{J} \in \mathcal{P}$, entonces $\mathcal{P} \neq \emptyset$. El orden parcial en $\mathcal{P}$ está dado por la contención de conjuntos.

Por el teorema maximal de Hausdorff, $\mathcal{P}$ contiene un subconjunto totalmente ordenado $\mathcal{C}$ el cual es maximal. Sea

$$\mathcal{M} = \bigcup_{\mathcal{F} \in \mathcal{C}} \mathcal{F}.$$

Cuando $\mathcal{F}_\alpha \neq \mathcal{F}_\beta$ entonces $\mathcal{F}_\alpha \subsetneq \mathcal{F}_\beta$ o $\mathcal{F}_\beta \subsetneq \mathcal{F}_\alpha$, además $\mathcal{F}_\alpha$ y $\mathcal{F}_\beta$ son ideales. Por lo tanto $\mathcal{M}$ es un ideal. Además $\mathcal{J} \subset \mathcal{M}$ y $\mathcal{M} \neq \mathcal{A}$ ya que los elementos de $\mathcal{P}$ no contienen el elemento unidad de $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}$, la maximalidad de $\mathcal{C}$ implica que $\mathcal{M}$ es un ideal maximal de $\mathcal{A}$.

(b) Sea $\mathcal{J}$ un ideal maximal de $\mathcal{A}$. Como cada elemento de $\mathcal{J}$ es no invertible, entonces $\|e - b\| \geq 1$ por la Proposición 2.11 y así $e \notin \overline{\mathcal{J}}$. Por lo tanto $\overline{\mathcal{J}}$ es un ideal propio de $\mathcal{A}$ y como

$$\mathcal{J} \subseteq \overline{\mathcal{J}} \subsetneq \mathcal{A},$$

la maximalidad de $\mathcal{J}$ implica que

$$\mathcal{J} = \overline{\mathcal{J}}.$$

De donde $\mathcal{J}$ es cerrado en $\mathcal{A}$.

□

A continuación veamos algunos resultados sobre *álgebras cociente* .

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa con unidad y $\mathcal{R}$ un ideal propio y cerrado en $\mathcal{A}$. Tenemos que $\mathcal{A}/\mathcal{R}$ es un álgebra con las siguientes operaciones:

(i) $[a]_\mathcal{R} + [b]_\mathcal{R} = [a + b]_\mathcal{R}$,

(ii) $\lambda[a]_\mathcal{R} = [\lambda a]_\mathcal{R}$,

(iii) $[a]_\mathcal{R} \cdot [b]_\mathcal{R} = [a \cdot b]_\mathcal{R}$, para $a, b \in \mathcal{A}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Además $\mathcal{A}/\mathcal{R}$ es conmutativa y tiene como elemento unidad $[e]_{\mathcal{R}}$.

Como $\mathcal{R}$ es un subespacio (cerrado) de $\mathcal{A}$, para $[a]_{\mathcal{R}} \in \mathcal{A}/\mathcal{R}$ definimos en $\mathcal{A}/\mathcal{R}$ la siguiente norma:

$$\|[a]_{\mathcal{R}}\|_{\mathcal{A}/\mathcal{R}} = \inf_{r \in \mathcal{R}} \|a + r\|_{\mathcal{A}}.$$

Recordemos que con esta norma $\mathcal{A}/\mathcal{R}$ es un espacio de Banach y satisface que:

(a) $\| \, [a]_{\mathcal{R}} \cdot [b]_{\mathcal{R}}\|_{\mathcal{A}/\mathcal{R}} \leq \|[a]_{\mathcal{R}}\|_{\mathcal{A}/\mathcal{R}}\|[b]_{\mathcal{R}}\|_{\mathcal{A}/\mathcal{R}}$ para todo $a, b \in \mathcal{A}$.
(b) $\|[e]_{\mathcal{R}}\|_{\mathcal{A}/\mathcal{R}} = 1$.

Probaremos (a).

Sean $a, b \in \mathcal{A}$, entonces

$$\begin{aligned}
\|[a]_{\mathcal{R}} \cdot [b]_{\mathcal{R}}\|_{\mathcal{A}/\mathcal{R}} &= \|[a \cdot b]_{\mathcal{R}}\|_{\mathcal{A}/\mathcal{R}} \\
&= \inf_{r \in \mathcal{R}} \|a \cdot b + r\|_{\mathcal{A}} \\
&= \inf_{r_1, r_2 \in \mathcal{R}} \|a \cdot b + a \cdot r_2 + r_1 \cdot b + r_1 \cdot r_2\|_{\mathcal{A}} \\
&= \inf_{r_1, r_2 \in \mathcal{R}} \|(a + r_1) \cdot (b + r_2)\|_{\mathcal{A}} \\
&\leq \inf_{r_1 \in \mathcal{R}} \|a + r_1\|_{\mathcal{A}} \inf_{r_2 \in \mathcal{R}} \|b + r_2\|_{\mathcal{A}} \\
&= \|[a]_{\mathcal{R}}\|_{\mathcal{A}/\mathcal{R}}\|[b]_{\mathcal{R}}\|_{\mathcal{A}/\mathcal{R}}.
\end{aligned}$$

Finalmente probaremos (b).

Por la Proposición 2.11 y la parte (a) de la Observación 2.31, tenemos que

$$\|e - r\|_{\mathcal{A}} \geq 1$$

para todo $r \in \mathcal{R}$, entonces

$$\|[e]_{\mathcal{R}}\|_{\mathcal{A}/\mathcal{R}} = \inf_{r \in \mathcal{R}} \|e - r\|_{\mathcal{A}} = 1.$$

Luego, $\mathcal{A}/\mathcal{R}$ es un álgebra de Banach conmutativa con unidad y la función $\Pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{R}$ dada por:

$$\Pi(a) = [a]_{\mathcal{R}}$$

para todo $a \in \mathcal{A}$, es un homomorfismo.

Llamaremos a Π la *proyección canónica*.

NOTACIÓN. Si f es una función de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, denotaremos Núcleo(f) y Rango(f) por ker(f) y ran(f), respectivamente.

$$\ker(f) = \{a \in \mathcal{A} : f(a) = 0\}.$$

$$\operatorname{ran}(f) = \{f(a) \in \mathcal{B} : a \in \mathcal{A}\}.$$

TEOREMA 2.34. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa con unidad y sea*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{A}} = \{f : \mathcal{A} \to \mathbb{C} : f \text{ es un homomorfismo } \}.$$

Entonces:

(a) *Todo ideal maximal de $\mathcal{A}$ es el núcleo de algún $h \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$.*
(b) *Si $h \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$, el núcleo de h es un ideal maximal de $\mathcal{A}$.*
(c) *Un elemento $a \in \mathcal{A}$ es invertible en $\mathcal{A}$ si y sólo si $h(a) \neq 0$ para todo $h \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$.*
(d) *Sea $a \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(a)$ si y sólo si $h(a) = \lambda$ para algún $h \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$.*

DEMOSTRACIÓN.

(a) Sea $\mathcal{J}$ un ideal maximal de $\mathcal{A}$. Tenemos que $\mathcal{J}$ es cerrado por la parte (b) del Teorema 2.33 y por lo tanto $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ es un álgebra de Banach conmutativa con unidad.

Sea $a \in \mathcal{A} - \mathcal{J}$ y

$$\mathcal{R} = \{c \cdot a + b : c \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{J}\}.$$

Entonces $\mathcal{R}$ es un ideal de $\mathcal{A}$ ya que $\mathcal{J}$ es un ideal de $\mathcal{A}$ y contiene a $\mathcal{J}$ porque si $d \in \mathcal{J}$, $d = 0 \cdot a + d$. Además $a \in \mathcal{R}$ ya que

$$a = e \cdot a + 0,$$

por lo tanto $\mathcal{R} = \mathcal{A}$ y entonces $c \cdot a + b = e$ para algún $c \in \mathcal{A}$ y algún $b \in \mathcal{J}$.

Si $\Pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{J}$ es la proyección canónica, como

$$\begin{aligned}\ker(\Pi) &= \{a \in \mathcal{A} : \Pi(a) = 0\} \\ &= \{a \in \mathcal{A} : [a]_{\mathcal{J}} = 0\} \\ &= \{a \in \mathcal{A} : a \in \mathcal{J}\} = \mathcal{J}\end{aligned}$$

entonces $b \in \ker(\Pi)$ y así

$$\Pi(c) \cdot \Pi(a) = \Pi(e) = \Pi(a) \cdot \Pi(c).$$

porque Π es un homomorfismo y $\mathcal{A}$ es conmutativa. Por lo tanto todo elemento no nulo $\Pi(a) \in \mathcal{A}/\mathcal{J}$ es invertible en $\mathcal{A}/\mathcal{J}$. Por el Teorema 2.19, existe un isomorfismo isométrico φ de $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ sobre $\mathbb{C}$. Sea $h : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ la función definida mediante

$$h = \varphi \circ \Pi.$$

Entonces h está bien definida , $h \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ (ya que es la composición de homomorfismos) y como φ es un isomorfismo tenemos que

$$\begin{aligned} \ker(h) &= \{a \in \mathcal{A} : h(a) = 0\} \\ &= \{a \in \mathcal{A} : \varphi([a]_{\mathcal{J}}) = 0\} \\ &= \{a \in \mathcal{A} : [a]_{\mathcal{J}} = 0\} = \mathcal{J}. \end{aligned}$$

(b) Sea $h \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$, sabemos que $\ker(h)$ es un ideal de $\mathcal{A}$.

Si $\ker(h) = \mathcal{A}$ entonces $h = 0$ y así $h \notin \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$, pero esto contradice que $h \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$.

Por lo tanto, debe ser $\ker(h) \neq \mathcal{A}$.

Para $a \in \mathcal{A}$ tenemos que

$$h(a - h(a)e) = h(a) - h(a)h(e) = h(a) - h(a) = 0,$$

es decir, $a - h(a)e \in \ker(h)$ y además

$$a = (a - h(a)e) + h(a)e.$$

Luego

$$\mathcal{A} = \ker(h) + \{\lambda e : \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Entonces $\ker(h)$ es maximal.

(c) ($\Rightarrow$) Sea $a \in \mathcal{A}$ tal que $a \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ y $h \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$, entonces

$$h(a)h(a^{-1}) = h(a \cdot a^{-1}) = h(e) = 1.$$

De donde

$$h(a) \neq 0.$$

($\Leftarrow$) Sea $a \in \mathcal{A}$, supongamos que a no es invertible en $\mathcal{A}$, entonces

$$\mathcal{R} = \{b \cdot a : b \in \mathcal{A}\}$$

es un ideal propio de $\mathcal{A}$ porque $e \notin \mathcal{R}$. Por la parte (a) del Teorema 2.33, $\mathcal{R}$ está contenido en algún ideal maximal $\mathcal{J}$ de $\mathcal{A}$.

Por (a) existe $h \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ tal que $\ker(h) = \mathcal{J}$ y entonces $h(a) = 0$ porque

$$0 = h(e \cdot a) = h(a).$$

(d) Por (c) tenemos que $a - \lambda e$ es invertible en $\mathcal{A}$ si y sólo si $h(a - \lambda e) \neq 0$ para todo $h \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$, es decir, $a - \lambda e$ es invertible en $\mathcal{A}$ si y sólo si $h(a) \neq \lambda$ para todo $h \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$.

De donde, $\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(a)$ si y sólo si $h(a) = \lambda$ para algún $h \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$.

□

Observación 2.35. Debido al Teorema 2.34 tenemos que $\mathcal{M}_{\mathcal{A}} \neq \emptyset$.

Teorema 2.36. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa con unidad, entonces*

(a) $\|f\| = 1$ *para todo* $f \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$.

(b) *Sea $\mathcal{S}^*_{\mathcal{A}}$ la bola unitaria cerrada de $\mathcal{A}^*$ (espacio dual topológico de $\mathcal{A}$), es decir,*

$$\mathcal{S}^*_{\mathcal{A}} = \{h \in \mathcal{A}^* : \|h\| \leq 1\},$$

entonces $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ es un subconjunto compacto de $\mathcal{S}^*_{\mathcal{A}}$ en la topología débil *.

(c) $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ *es un espacio de Hausdorff.*

Demostración.

(a) Sea $f \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$. Por la prueba de la parte (b) del Teorema 2.34 sabemos que $\ker(f) \neq \mathcal{A}$ y que

$$\mathcal{A} = \ker(f) + \{\lambda e : \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sup_{a \neq 0} \frac{|f(a)|}{\|a\|} \\ &= \sup_{b \in \ker(f), \lambda \neq 0} \frac{|f(b + \lambda e)|}{\|b + \lambda e\|} \\ &= \sup_{b \in \ker(f), \lambda \neq 0} \frac{|f(b) + \lambda|}{\|b + \lambda e\|} \\ &= \sup_{b \in \ker(f), \lambda \neq 0} \frac{|\lambda|}{\|b + \lambda e\|} \\ &= \sup_{b \in \ker(f), \lambda \neq 0} \frac{|\lambda|}{|\lambda| \|b/\lambda + e\|} \\ &= \sup_{c \in \ker(f)} \frac{1}{\|c + e\|}. \end{aligned}$$

Si $\|c + e\| < 1$, entonces $c \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ por la parte (a) de la Proposición 2.11 y así $f(c) \neq 0$ por la parte (c) del Teorema 2.34. Llegamos a una contradicción ya que obtenemos que $c \notin \ker(f)$. Entonces $\|c+e\| \geq 1$ de donde

$$\sup_{c \in \ker(f)} \frac{1}{\|c+e\|} = 1.$$

Por lo tanto $\|f\| = 1$.

(b) Sea $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}^*$ y $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$, tal que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge a f en la topología débil*. Para probar la compacidad de $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ es suficiente probar que $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ es cerrado en $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}^*$ con la topología de la convergencia puntual, porque $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}^*$ es compacto en vista del teorema de Banach-Bourbaki-Alaoglu, y todo cerrado contenido en un compacto es compacto. Entonces

(i) Como $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}^* \subset \mathcal{A}^*$, f es lineal.

(ii) Sean $a, b \in \mathcal{A}$, como en $\mathbb{C}$ el producto es una operación continua, tenemos que

$$f(a \cdot b) = \lim_{n\to\infty} f_n(a \cdot b) = \lim_{n\to\infty} f_n(a) \cdot f_n(b) = \lim_{n\to\infty} f_n(a) \cdot \lim_{n\to\infty} f_n(b) = f(a) \cdot f(b).$$

(iii) Siendo e el elemento unidad de $\mathcal{A}$, entonces

$$f(e) = \lim_{n\to\infty} f_n(e) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Luego $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ es cerrado en $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}^*$.

(c) $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ es un espacio topológico cuya topología está dada por la restricción a $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ de la topología débil* de $\mathcal{A}^*$.

Para que $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ sea un espacio de Hausdorff basta probar que $\mathcal{C}(\mathcal{M}_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})$ separa puntos de $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$.

Recordemos que para cada $a \in \mathcal{A}$ existe una función continua $\hat{a} : \mathcal{M}_{\mathcal{A}} \to \mathbb{C}$ dada por:

$$\hat{a}(f) = f(a)$$

para cada $f \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$. Sean $f, g \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ tales que $f \neq g$, entonces existe $a \in \mathcal{A}$ tal que

$$f(a) \neq g(a)$$

y por lo tanto

$$\hat{a}(f) \neq \hat{a}(g).$$

Entonces $\mathcal{C}(\mathcal{M}_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})$ separa puntos de $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$.

$\square$

DEFINICIÓN 2.37. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa con unidad, la *transformada de Gelfand* en $\mathcal{A}$ es la función $\Gamma : \mathcal{A} \to \mathcal{C}(\mathcal{M}_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})$ dada por:

$$\Gamma(a) = \hat{a}.$$

Donde

$$\Gamma(a)(f) = f(a)$$

para todo $f \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$.

En algunos casos escribiremos $\Gamma_{\mathcal{A}}$.

Ya que existe una correspondencia uno a uno entre los ideales maximales de $\mathcal{A}$ y los elementos de $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$, entonces $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ con la topología débil inducida por $\operatorname{ran}(\Gamma)$, que es la menor topología que hace a cada $\Gamma(a)$ continua, es llamado el *espacio ideal maximal* de $\mathcal{A}$.

EJEMPLO. Sea X un espacio de Hausdorff compacto, $X \neq \emptyset$ y $\mathcal{A} = \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$.

Sabemos que para cada $x \in X$, $f \mapsto f(x)$ es un homomorfismo ψ_x. Como $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ separa puntos de X (por el lema de Urysohn), $x \neq y$ implica que

$$\psi_x \neq \psi_y.$$

Así $x \mapsto \psi_x$ es la inclusión de X en $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$. Se cumple que cada $\psi \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ es un ψ_x. Si esto es falso, podemos encontrar $\psi \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ tal que

$$\psi(f) = 0 \neq f(x)$$

para algún $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$. De donde existe un ideal maximal $\mathcal{R}$ de $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ el cual contiene, para cada $y \in X$, una función f tal que $f(y) \neq 0$.

De la compacidad de X tenemos que todo cubrimiento por abiertos de X admite un subcubrimiento finito, lo que implica que $\mathcal{R}$ contiene un número finito de funciones $f_1, \ldots, f_n$ tal que al menos una de ellas es distinta de cero (0) en cada punto de X. Sea

$$g = f_1\overline{f_1} + \cdots + f_n\overline{f_n}.$$

Entonces $g \in \mathcal{R}$ porque $\mathcal{R}$ es un ideal y $g(y) > 0$ para todo $y \in X$, luego g es invertible en $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$. Llegamos a una contradicción ya que los ideales propios no tienen elementos invertibles. Por lo tanto $x \leftrightarrow \psi_x$ es una correspondencia uno a uno entre X y $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ y puede ser usada para identificar a $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ con X.

Esta identificación es también correcta en término de las dos topologías que se presentan:

- La topología débil en X inducida por $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$, que llamaremos γ, y
- la topología original de X, que llamaremos τ.

Como γ es más débil que τ ($\gamma \subset \tau$) y γ es una topología Hausdorff (distintos puntos de X tienen entornos disjuntos) , entonces $\gamma = \tau$. Para ver esto, sea $V \subset X$ cerrado con respecto a la topología τ (τ-cerrado), ya que X es τ-compacto entonces V es τ-compacto. Como $\gamma \subset \tau$ tenemos que V es γ-compacto.

Por la compacidad en espacios de Hausdorff, como γ es una topología Hausdorff entonces V es γ-cerrado.

Con las propiedades anteriores, X es el espacio ideal maximal de $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ y la transformada de Gelfand es la función identidad en $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$.

Proposición 2.38. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa con unidad, Γ la transformada de Gelfand en $\mathcal{A}$ y $a \in \mathcal{A}$, entonces:*

(a) Γ *es un homomorfismo.*
(b) $\sigma_{\mathcal{A}}(a) = \mathrm{ran}(\Gamma(a))$.
(c) $\|\Gamma(a)\|_\infty = r_{\mathcal{A}}(a)$.

Demostración.

(a) Sean $a, b \in \mathcal{A}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces para $f \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$
 (i)
$$\begin{aligned}\Gamma(\lambda a + b)(f) &= f(\lambda a + b) = \lambda f(a) + f(b)\\ &= \lambda\Gamma(a)(f) + \Gamma(b)(f) = (\lambda\Gamma(a) + \Gamma(b))(f).\end{aligned}$$

 (ii) $\Gamma(a \cdot b)(f) = f(a \cdot b) = f(a)f(b) = \Gamma(a)(f) \cdot \Gamma(b)(f) = (\Gamma(a) \cdot \Gamma(b))(f)$.

 (iii) Siendo e el elemento unidad de $\mathcal{A}$, entonces
$$\Gamma(e)(f) = f(e) = 1.$$

 Luego Γ es un homomorfismo.

(b) Por la parte (d) del Teorema 2.34 tenemos que
$$\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(a) \text{ si y sólo si } h(a) = \lambda \text{ para algún } h \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}.$$

 De donde
$$\sigma_{\mathcal{A}}(a) = \mathrm{ran}(\Gamma(a)).$$

(c) Por (b) tenemos que
$$\|\Gamma(a)\|_\infty = \max_{h \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}} |h(a)| = \max_{\lambda \in \mathrm{ran}(\Gamma(a))} |\lambda| = \max_{\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(a)} |\lambda| = r_{\mathcal{A}}(a).$$

□

Observación 2.39. Γ envía todos los elementos de la forma $a.b - b.a$ a cero (0). Entonces, si $\mathcal{A}$ no es conmutativa el ran(Γ), que es una subálgebra de $\mathcal{C}(\mathcal{M}_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})$, puede presentar dificultad al reflejar las propiedades de algunos elementos de $\mathcal{A}$, como por ejemplo la invertibilidad. En el caso conmutativo, sin embargo, $\mathcal{M}_{\mathcal{A}} \neq \emptyset$ y la invertibilidad de un elemento $a \in \mathcal{A}$ es determinada por la invertibilidad de $\Gamma(a) \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})$. Si a es invertible en $\mathcal{A}$, $\Gamma(a^{-1})$ es la inversa de $\Gamma(a)$ y si a no es invertible en $\mathcal{A}$ entonces $\Gamma(a)$ no es invertible en $\mathcal{C}(\mathcal{M}_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})$ debido a la parte (c) del Teorema 2.34. Este hecho hace de la transformada de Gelfand una poderosa herramienta para el estudio de álgebras de Banach conmutativas, que más adelante permitirán caracterizar elementos positivos de álgebras de Banach no necesariamente conmutativas.

3. Algebras C^*

Definición 2.40. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra (no necesariamente conmutativa), una *involución* en $\mathcal{A}$ es una aplicación $a \mapsto a^*$ de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}$ que satisface las siguientes propiedades: para todo $a, b \in \mathcal{A}$ y para todo $\alpha, \lambda \in \mathbb{C}$

(i) $a^{**} = a$,
(ii) $(\alpha a + \lambda b)^* = \overline{\alpha} a^* + \overline{\lambda} b^*$, y
(iii) $(a \cdot b)^* = b^* \cdot a^*$.

El elemento a^* es llamado el *adjunto* de a.
Si $\mathcal{A}$ tiene unidad debe satisfacer que $e^* = e$.

Ejemplos.

1. Una involución en $\mathbb{C}$ está dada por
$$z^* = \overline{z}$$
para $z \in \mathbb{C}$.
2. Una involución en $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ está dada por
$$A^* = [\overline{a_{ji}}]_{1\leq i,j\leq n}$$
para $A = [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Donde A^* es la matriz transpuesta conjugada.
3. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo, una involución en $L(\mathcal{H})$ está dada por $T^* \in L(\mathcal{H})$ tal que
$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$$
para todo $x, y \in \mathcal{H}$.

4. Sea X un espacio de Hausdorff compacto, $X \neq \emptyset$, una involución en $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ está dada por
$$f^* = \overline{f}$$
para $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$, donde
$$f^*(x) = \overline{f}(x) = \overline{f(x)}$$
para todo $x \in X$.

Y es la misma para $\mathcal{C}_l(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ y $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Definición 2.41. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra con involución y $a \in \mathcal{A}$, entonces:

(i) a es *normal* si $a \cdot a^* = a^* \cdot a$.
(ii) a es *autoadjunto o hermitiano* cuando $a = a^*$.
(iii) Si $\mathcal{A}$ tiene unidad, a es *unitario* si $a \cdot a^* = a^* \cdot a = e$, es decir, si $a \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ y $a^{-1} = a^*$.

Ejemplos.

1. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra con involución y $a \in \mathcal{A}$, sean
$$a_1 = \frac{1}{2}(a + a^*) \quad , \quad a_2 = \frac{1}{2i}(a - a^*)$$
entonces a_1 y a_2 son hermitianos, $a^* \cdot a$ y $a \cdot a^*$ son hermitianos.

   Cada elemento hermitiano es normal.
2. En $\mathbb{C}$ los elementos unitarios son los números complejos que tienen valor absoluto uno. Por ejemplo,
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta.$$

Definición 2.42. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras con involución y φ una función de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, diremos que φ es una *función** si
$$\varphi(a^*) = \varphi(a)^*$$
para todo $a \in \mathcal{A}$.

Diremos que φ es un *homomorfismo** cuando:

(i) φ es un homomorfismo y
(ii) φ es una función*.

Ejemplos.

1. En $M_{n\times n}(\mathbb{C})$, sea $A = [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ y definamos $\operatorname{tr} : M_{n\times n}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ como
$$\operatorname{tr}(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn}.$$

   Entonces tr es una función*.

2. Sea X un espacio de Hausdorff compacto, $X \neq \emptyset$, $\mathcal{A} = \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ y $\mathcal{B} = \mathbb{C}$. Con la definición de f^* dada en el Ejemplo 4 de la Definición 2.40 tenemos que:
   Para cada $x \in X$, $f \mapsto f(x)$ es un homomorfismo*.

Observación 2.43. Si $\mathcal{X}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con producto interno (posiblemente degenerado) $\langle ., . \rangle_{\mathcal{X}}$ y $L : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ es una transformación lineal, entonces $L^* : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ es una transformación lineal que satisface:

$$\langle L(x), y \rangle_{\mathcal{X}} = \langle x, L^*(y) \rangle_{\mathcal{X}}$$

para todo $x, y \in \mathcal{X}$.

Si el producto interno no es degenerado entonces L^* es única en caso de que exista.

Notación. Si $\mathcal{X}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con producto interno $\langle ., . \rangle_{\mathcal{X}}$, escribiremos

$$\widetilde{L}(\mathcal{X}) = \{ L : \mathcal{X} \to \mathcal{X} : L \text{ es lineal y } L^* \text{ existe} \}.$$

Con el producto definido por la composición $\widetilde{L}(\mathcal{X})$ es un álgebra y la aplicación $L \mapsto L^*$ es una involución en $\widetilde{L}(\mathcal{X})$.

Proposición 2.44. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra con involución, sea $\mathcal{X}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con producto interno degenerado $\langle ., . \rangle_{\mathcal{X}}$ y $\varphi : \mathcal{A} \to \widetilde{L}(\mathcal{X})$ una función* que satisface $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ para todo $a, b \in \mathcal{A}$.*

Para $a \in \mathcal{A}$, si $x \in X$,

$$\langle x, x \rangle_{\mathcal{X}} \leq 1 \tag{2.8}$$

y

$$\langle \varphi(a)x, \varphi(a)x \rangle_{\mathcal{X}} > 1 \tag{2.9}$$

entonces

$$\langle \varphi([a^* \cdot a]^{2^k})x, x \rangle_{\mathcal{X}} > 1 \qquad \text{para } k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Demostración. Por inducción sobre k.

(1) Veamos para $k = 0$.

Como φ es una función* que satisface $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ para todo $a, b \in \mathcal{A}$, tenemos que

$$\langle \varphi(a^* \cdot a)x, x \rangle_{\mathcal{X}} = \langle \varphi(a^*)\varphi(a)x, x \rangle_{\mathcal{X}} = \langle \varphi(a)^*\varphi(a)x, x \rangle_{\mathcal{X}} = \langle \varphi(a)x, \varphi(a)x \rangle_{\mathcal{X}}.$$

De (2.9) obtenemos que

$$\langle \varphi(a^* \cdot a)x, x \rangle_{\mathcal{X}} > 1. \tag{2.10}$$

(2) Veamos para $k = 1$.

Por (2.10), por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y por (2.8) tenemos que

$$\begin{aligned} 1 < |\langle \varphi(a^* \cdot a)x, x\rangle_{\mathcal{X}}| &\leq \langle \varphi(a^* \cdot a)x, \varphi(a^* \cdot a)x\rangle_{\mathcal{X}}^{\frac{1}{2}} \, . \, \langle x, x\rangle_{\mathcal{X}}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \langle \varphi(a^* \cdot a)x, \varphi(a^* \cdot a)x\rangle_{\mathcal{X}}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

De donde

$$\langle \varphi(a^* \cdot a)x, \varphi(a^* \cdot a)x\rangle_{\mathcal{X}} > 1. \tag{2.11}$$

Como

$$\langle \varphi([a^* \cdot a]^2)x, x\rangle_{\mathcal{X}} = \langle \varphi(a^* \cdot a)\varphi(a^* \cdot a)x, x\rangle_{\mathcal{X}} = \langle \varphi(a^* \cdot a)x, \varphi(a^* \cdot a)x\rangle_{\mathcal{X}},$$

de (2.11) obtenemos que

$$\langle \varphi([a^* \cdot a]^2)x, x\rangle_{\mathcal{X}} > 1.$$

(3) Supongamos que la proposición vale para k, entonces tenemos como hipótesis inductiva que

$$\langle \varphi([a^* \cdot a]^{2^k})x, x\rangle_{\mathcal{X}} > 1$$

para $a \in \mathcal{A}$. Veamos si se cumple para $k+1$.

$$\begin{aligned} \langle \varphi([a^* \cdot a]^{2^{k+1}})x, x\rangle_{\mathcal{X}} &= \langle \varphi([a^* \cdot a]^{2^k.2})x, x\rangle_{\mathcal{X}} = \langle \varphi(([a^* \cdot a]^2)^{2^k})x, x\rangle_{\mathcal{X}} \\ &= \langle \varphi([(a^* \cdot a)^* \cdot (a^* \cdot a)]^{2^k})x, x\rangle_{\mathcal{X}}. \end{aligned}$$

Por hipótesis inductiva

$$\langle \varphi([(a^* \cdot a)^* \cdot (a^* \cdot a)]^{2^k})x, x\rangle_{\mathcal{X}} > 1.$$

Por lo tanto

$$\langle \varphi([a^* \cdot a]^{2^{k+1}})x, x\rangle_{\mathcal{X}} > 1.$$

□

Definición 2.45. Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach con involución y

$$\|a^* \cdot a\| = \|a\|^2$$

para todo $a \in \mathcal{A}$, entonces $\mathcal{A}$ es un *álgebra C^**.

Ejemplos.

1. $\mathbb{C}$ con las propiedades dadas en el Ejemplo 1 de la Definición 2.8 y el Ejemplo 1 de la Definición 2.40 es un álgebra C^*.

2. $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ con las propiedades dadas en el Ejemplo 2 de la Definición 2.8 y el Ejemplo 2 de la Definición 2.40 es un álgebra C^*.

3. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo, $L(\mathcal{H})$ con las propiedades dadas en el Ejemplo 3 de la Definición 2.8 y el Ejemplo 3 de la Definición 2.40 es un álgebra C^*.

4. Sea X un espacio de Hausdorff compacto, $X \neq \emptyset$, $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ con las propiedades dadas en el Ejemplo 4 de la Definición 2.8 y el Ejemplo 4 de la Definición 2.40 es un álgebra C^*.

5. $\mathcal{C}_l(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ con las propiedades dadas en el Ejemplo 5 de la Definición 2.8 y $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ con las propiedades dadas en el Ejemplo 6 de la Definición 2.8 son álgebras C^*.

6. Si $\mathcal{A}$ es un álgebra C^*, toda subálgebra con involución y cerrada en $\mathcal{A}$ es un álgebra C^*.

OBSERVACIÓN 2.46. Toda álgebra C^* es isométricamente isomorfa a una subálgebra con involución y cerrada en $L(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert complejo. Así las subálgebras con involución y cerradas en $L(\mathcal{H})$ son los ejemplos más generales de álgebras C^*.

En la sección 6 detallaremos sobre este hecho.

PROPOSICIÓN 2.47. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* y $a \in \mathcal{A}$, entonces*

$$\|a\| = \|a^*\|.$$

Es decir, la involución en $\mathcal{A}$ es una isometría.

DEMOSTRACIÓN. Ya que la desigualdad

$$\|a\|^2 = \|a^* \cdot a\| \leq \|a^*\|\|a\|$$

implica que

$$\|a\| \leq \|a^*\| \tag{2.12}$$

y como $a^{**} = a$, entonces de (2.12) tenemos que

$$\|a^*\| \leq \|a^{**}\| = \|a\|.$$

Luego, por simetría

$$\|a\| = \|a^*\|.$$

□

PROPOSICIÓN 2.48. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* conmutativa con unidad, sea $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ el espacio ideal maximal de $\mathcal{A}$ y $a \in \mathcal{A}$ tal que $a = a^*$, entonces $\sigma_{\mathcal{A}}(a) \subset \mathbb{R}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$, veamos que $f(a) \in \mathbb{R}$.

Sea

$$b = a + ite$$

para $t \in \mathbb{R}$. Si

$$f(a) = x + iy$$

con $x, y \in \mathbb{R}$, entonces

$$f(b) = f(a) + it = x + i(y + t)$$

y

$$b \cdot b^* = (a + ite) \cdot (a - ite) = a^2 + t^2 e.$$

Como $\mathcal{A}$ es un álgebra C^* y f es continua debido a la parte (a) del Teorema 2.36, tenemos que

$$x^2 + (y + t)^2 = |f(b)|^2 \leq \|b\|^2 = \|b \cdot b^*\| \leq \|a\|^2 + t^2,$$

de donde

$$x^2 + y^2 + 2yt \leq \|a\|^2 \quad (-\infty < t < \infty).$$

Como el lado izquierdo de la desigualdad es una recta donde la variable es t, entonces $y = 0$. Por lo tanto

$$f(a) \in \mathbb{R}$$

y así

$$\sigma_{\mathcal{A}}(a) = \operatorname{ran}(\Gamma(a)) \subset \mathbb{R}.$$

□

Teorema 2.49 (Gelfand-Naimark). *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* conmutativa con unidad, con espacio ideal maximal $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$, entonces la transformada de Gelfand en $\mathcal{A}$ es un isomorfismo isométrico* de $\mathcal{A}$ sobre $\mathcal{C}(\mathcal{M}_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})$.*

Demostración. Si $a \in \mathcal{A}$ entonces

$$a_1 = \frac{1}{2}(a + a^*) \quad \text{y} \quad a_2 = \frac{1}{2i}(a - a^*) \tag{2.13}$$

son hermitianos y

$$a = a_1 + ia_2 \quad , \quad a^* = a_1 - ia_2. \tag{2.14}$$

Ya que $\sigma_{\mathcal{A}}(a_1) = \mathrm{ran}(\Gamma(a_1))$ y $\sigma_{\mathcal{A}}(a_2) = \mathrm{ran}(\Gamma(a_2))$ están contenidos en $\mathbb{R}$ por la Proposición 2.48, las funciones $\Gamma(a_1)$ y $\Gamma(a_2)$ son a valores reales. Por lo tanto

$$\Gamma(a)^* = \overline{\Gamma(a)} = \overline{\Gamma(a_1) + i\Gamma(a_2)} = \Gamma(a_1) - i\Gamma(a_2) = \Gamma(a_1 - ia_2) = \Gamma(a^*).$$

Entonces Γ es una función* y $\mathrm{ran}(\Gamma)$ es cerrado bajo la conjugación compleja. Además $\mathrm{ran}(\Gamma)$ separa puntos de $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ (si $g, f \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ tales que $f \neq g$, entonces existe $b \in \mathcal{A}$ tal que $f(b) \neq g(b)$) y contiene a las funciones constantes ($\Gamma(\lambda e)(f) = \lambda$). Por el teorema de Stone-Weierstrass, $\mathrm{ran}(\Gamma)$ es denso en $\mathcal{C}(\mathcal{M}_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})$.

Si $b = a \cdot a^*$ entonces $b = b^*$ y

$$\|b^2\| = \|b \cdot b^*\| = \|b\|^2. \tag{2.15}$$

Supongamos que

$$\|b^{2^n}\| = \|b\|^{2^n} \tag{2.16}$$

para un $n \geq 1$ (entero). Veamos si se cumple para $n + 1$.

De (2.15) , (2.16) y como $b^2 = (b^2)^*$ tenemos que

$$\|b^{2^{n+1}}\| = \|b^{22^n}\| = \|(b^2)^{2^n}\| = \|b^2\|^{2^n} = \|b\|^{2^{n+1}}.$$

Luego (2.16) siempre es cierta para todo $n \geq 1$ (entero) cuando $b = b^*$.

Por (2.16), la Definición 2.45, la Proposición 2.38, el Teorema 2.26 y el hecho de Γ es una función* tenemos que

$$\begin{aligned} \|a\|^2 = \|a \cdot a^*\| = \|(a \cdot a^*)^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} &= \lim_{n\to\infty} \|(a \cdot a^*)^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} \\ &= \|\Gamma(a \cdot a^*)\|_\infty = \|\Gamma(a) \cdot \Gamma(a^*)\|_\infty = \||\Gamma(a)|^2\|_\infty = \|\Gamma(a)\|_\infty^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto Γ es una isometría y a partir de esto obtenemos que es inyectiva ya que es lineal y si $\Gamma(a) = 0$ entonces $a = 0$. También obtenemos que $\mathrm{ran}(\Gamma)$ es cerrado en $\mathcal{C}(\mathcal{M}_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})$.

Como además ran(Γ) es denso en $\mathcal{C}(\mathcal{M}_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})$, podemos concluir que

$$\text{ran}(\Gamma) = \mathcal{C}(\mathcal{M}_{\mathcal{A}}, \mathbb{C}).$$

Entonces Γ es un isomorfismo. Por lo tanto Γ es un isomorfismo isométrico* de $\mathcal{A}$ sobre $\mathcal{C}(\mathcal{M}_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})$. $\square$

NOTACIÓN. Sean $a, b \in \mathcal{A}$, un polinomio en dos variables de $\mathcal{A}$ es de la forma:

$$p(a,b) = \alpha_o e + \lambda_n a^n + \lambda_{n-1} a^{n-1} \cdot b + \cdots + \lambda_1 a \cdot b^{n-1} + \lambda_o b^n,$$

donde $\alpha_o \in \mathbb{C}$ y $\lambda_k \in \mathbb{C} \quad (k = 0, \ldots, n)$.

El siguiente teorema es un caso especial del Teorema 2.49 porque presenta la *inversa* de la transformada de Gelfand con la finalidad de relacionar el cálculo simbólico.

TEOREMA 2.50. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* conmutativa con unidad la cual contiene un elemento a tal que el álgebra de los polinomios en a y a^* es denso en $\mathcal{A}$, sea Γ la transformada de Gelfand en $\mathcal{A}$, entonces la función $\psi : \mathcal{C}(\sigma_{\mathcal{A}}(a), \mathbb{C}) \to \mathcal{A}$ dada mediante*

$$\psi(f) = \Gamma^{-1}(f \circ \Gamma(a))$$

para todo $f \in \mathcal{C}(\sigma_{\mathcal{A}}(a), \mathbb{C})$, define un isomorfismo isométrico* de $\mathcal{C}(\sigma_{\mathcal{A}}(a), \mathbb{C})$ sobre $\mathcal{A}$.

Más aún, si $f(\lambda) = \lambda$ para todo $\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(a)$, entonces

$$\psi(f) = a.$$

DEMOSTRACIÓN. Veamos que si $f \in \mathcal{C}(\sigma_{\mathcal{A}}(a), \mathbb{C})$ entonces $f \circ \Gamma(a)$ está bien definida. Sea $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ el espacio ideal maximal de $\mathcal{A}$. La función $\Gamma(a) : \mathcal{M}_{\mathcal{A}} \to \sigma_{\mathcal{A}}(a)$ dada por

$$\Gamma(a)(g) = g(a)$$

para todo $g \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$, está bien definida y es sobreyectiva ya que ran$(\Gamma(a)) = \sigma_{\mathcal{A}}(a)$ por la parte (b) de la Proposición 2.38, además es continua. En efecto, como g es continua

$$|\Gamma(a)(g)| = |g(a)| \leq \|a\| \|g\|.$$

Veamos si $\Gamma(a)$ es inyectiva.

Sean $h_1, h_2 \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ tales que $\Gamma(a)(h_1) = \Gamma(a)(h_2)$, de donde

$$h_1(a) = h_2(a).$$

Por el Teorema 2.49 tenemos que

$$h_1(a^*) = \Gamma(a^*)(h_1) = \overline{\Gamma(a)(h_1)} = \overline{\Gamma(a)(h_2)} = \Gamma(a^*)(h_2) = h_2(a^*).$$

Si p es un polinomio de $\mathcal{A}$ en dos variables, entonces

$$h_1(p(a,a^*)) = h_2(p(a,a^*))$$

porque h_1 y h_2 son homomorfismos.

Por hipótesis el álgebra de los polinomios de la forma $p(a,a^*)$ es denso en $\mathcal{A}$. Entonces la continuidad de h_1 y h_2 implica que

$$h_1(b) = h_2(b)$$

para todo $b \in \mathcal{A}$. Luego $h_1 = h_2$ y por lo tanto $\Gamma(a)$ es inyectiva.

Como $\Gamma(a)$ es biyectiva y continua, y como, $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ y $\sigma_{\mathcal{A}}(a)$ son espacios de Hausdorff compactos, por la caracterización de homeomorfismos en términos de funciones abiertas y cerradas, tenemos que $\Gamma(a)$ es un homeomorfismo de $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ sobre $\sigma_{\mathcal{A}}(a)$ y entonces $(\Gamma(a))^{-1} : \sigma_{\mathcal{A}}(a) \to \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ es continua.

Luego la función $\varphi(f) = f \circ \Gamma(a)$ está bien definida y es un isomorfismo isométrico* de $\mathcal{C}(\sigma_{\mathcal{A}}(a), \mathbb{C})$ sobre $\mathcal{C}(\mathcal{M}_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})$. En efecto,

(i) φ es lineal.

(ii) Sea $g \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})$, tomando $f = g \circ (\Gamma(a))^{-1}$ tenemos que

$$\varphi(f) = g.$$

Por lo tanto φ es sobreyectiva.

(iii) Como $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ es homeomorfo a $\sigma_{\mathcal{A}}(a)$ tenemos que

$$\|f\|_\infty = \max_{\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(a)} |f(\lambda)| = \max_{g \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}} |f \circ \Gamma(a)(g)| = \|f \circ \Gamma(a)\|_\infty = \|\varphi(f)\|_\infty.$$

De donde φ es una isometría y como φ es lineal obtenemos que es inyectiva ya que si $\varphi(f) = 0$ entonces $f = 0$.

(iv) Además

$$\varphi(f^*) = \varphi(\overline{f}) = \overline{f} \circ \Gamma(a) = \overline{f \circ \Gamma(a)} = \varphi(f)^*.$$

Por el Teorema 2.49, Γ es un isomorfismo, entonces cada $f \circ \Gamma(a)$ es la transformada de Gelfand de un único elemento de $\mathcal{A}$, el cual denotamos por $\psi(f)$, es decir,

$$\Gamma(\psi(f)) = \widehat{\psi(f)} = f \circ \Gamma(a)$$

y satisface que $\|\psi(f)\| = \|f\|_\infty$ ya que

$$\|\psi(f)\| = \|\Gamma(\psi(f))\|_\infty = \|f \circ \Gamma(a)\|_\infty = \|f\|_\infty.$$

Como

$$\Gamma(\psi(f^*)) = \varphi(f^*) = \varphi(f)^* = \Gamma(\psi(f)^*)$$

entonces

$$\psi(f^*) = \psi(f)^*,$$

porque Γ es un isomorfismo*.

Si $f(\lambda) = \lambda$ para $\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(a)$, entonces

$$f \circ \Gamma(a) = \Gamma(a),$$

de donde

$$\Gamma(\psi(f)) = \Gamma(a)$$

y como Γ es un isomorfismo

$$\psi(f) = a.$$

$\square$

DEFINICIÓN 2.51. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con unidad y $a \in \mathcal{A}$, el álgebra C^* *generada* por a es la menor álgebra C^* que contiene a a y la denotaremos por $\mathcal{A}_{(a)}$.

PROPOSICIÓN 2.52. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con unidad y $a \in \mathcal{A}$ tal que a es normal. Sea*

$$\mathcal{P} = \{p(a, a^*) : p \text{ es un polinomio en dos variables } \},$$

entonces la clausura $\overline{\mathcal{P}}$ de $\mathcal{P}$ es un álgebra C^* conmutativa con unidad y $\overline{\mathcal{P}} = \mathcal{A}_{(a)}$.

DEMOSTRACIÓN. Ya que a y a^* conmutan, $\mathcal{P}$ es una subálgebra conmutativa con involución y además

$$\mathcal{P} \subset \mathcal{A}_{(a)}.$$

Como

$$\overline{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \cup \mathcal{P}'$$

donde $\mathcal{P}'$ es el conjunto de los puntos límites de $\mathcal{P}$, y el producto es una operación continua en $\mathcal{A}_{(a)}$ entonces $\mathcal{P}'$ es conmutativa y por lo tanto $\overline{\mathcal{P}}$ es conmutativa.

Además

$$e, a, a^* \in \overline{\mathcal{P}} \qquad \text{y} \qquad \overline{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{A}_{(a)}.$$

Concluimos que $\overline{\mathcal{P}}$ es una subálgebra con involución y cerrada en $\mathcal{A}_{(a)}$, de esto sigue que $\overline{\mathcal{P}}$ es un álgebra C^* que además es conmutativa y tiene unidad.

Como $\mathcal{A}_{(a)}$ es la mínima álgebra C^* que contiene a a, tenemos que $\overline{\mathcal{P}} = \mathcal{A}_{(a)}$. $\square$

Observación 2.53. De la Proposición 2.52 obtuvimos que si $a \in \mathcal{A}$ es normal, entonces $\mathcal{A}_{(a)}$ es conmutativa. Las funciones de $\mathcal{C}(\sigma_{\mathcal{A}_{(a)}}(a), \mathbb{C})$ a $\mathcal{C}(\mathcal{M}_{\mathcal{A}_{(a)}}, \mathbb{C})$ dadas por $f \mapsto f \circ \Gamma(a)$ y $f \mapsto \Gamma(f(a))$ (donde Γ es la transformada de Gelfand en $\mathcal{A}_{(a)}$) son homomorfismos*, sus valores coinciden cuando f es una de las funciones:

$$\lambda \mapsto 1, \qquad \lambda \mapsto \lambda, \qquad \lambda \mapsto \overline{\lambda}$$

para $\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}_{(a)}}(a)$. Como el álgebra C^* generada por esas funciones es $\mathcal{C}(\sigma_{\mathcal{A}_{(a)}}(a), \mathbb{C})$ debido a la Proposición 2.52 (recordemos que el álgebra de los polinomios $\mathcal{P}(\sigma_{\mathcal{A}_{(a)}}(a), \mathbb{C})$ es densa en $\mathcal{C}(\sigma_{\mathcal{A}_{(a)}}(a), \mathbb{C})$), los dos homomorfismos son iguales, es decir,

$$f \circ \Gamma(a) = \Gamma(f(a)).$$

De donde el Teorema 2.50 nos dice que la relación

$$\mathcal{C}(\sigma_{\mathcal{A}_{(a)}}(a), \mathbb{C}) \longleftrightarrow \mathcal{A}_{(a)}$$

está dada por

$$f \longleftrightarrow f(a).$$

Es decir, extiende el cálculo simbólico (particularmente para el álgebra $\mathcal{A}_{(a)}$) a funciones arbitrarias que son continuas en $\sigma_{\mathcal{A}_{(a)}}(a)$.

Más adelante veremos que $\sigma_{\mathcal{A}_{(a)}}(a) = \sigma_{\mathcal{A}}(a)$.

Definición 2.54. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra y $\mathcal{B}$ un subconjunto de $\mathcal{A}$, decimos que $\mathcal{B}$ es *conmutativo* si cualquier par de elementos de $\mathcal{B}$ conmutan.

Observación 2.55. Si $\mathcal{B}$ es conmutativo, entonces

$$\mathcal{B} \subset \{a \in \mathcal{A} : a \cdot b = b \cdot a \text{ para todo } b \in \mathcal{B}\}. \tag{2.17}$$

Definición 2.56. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra con involución y $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, decimos que $\mathcal{B}$ es un *subconjunto normal* de $\mathcal{A}$ si $\mathcal{B}$ es conmutativo y $a^* \in \mathcal{B}$ para todo $a \in \mathcal{B}$.

Teorema 2.57. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con involución y con unidad , sea $\mathcal{B}$ un subconjunto normal de $\mathcal{A}$ que es maximal con respecto a la existencia de los subconjuntos normales de $\mathcal{A}$. Entonces,*

(a) *$\mathcal{B}$ es una subálgebra conmutativa y cerrada en $\mathcal{A}$ tal que $e \in \mathcal{B}$ y*
(b) *$\sigma_{\mathcal{B}}(a) = \sigma_{\mathcal{A}}(a)$ para todo $a \in \mathcal{B}$.*

Demostración.

(a) Veamos que si $a \in \mathcal{A}$,

$$a \cdot a^* = a^* \cdot a \tag{2.18}$$

y

$$a \cdot b = b \cdot a \text{ para todo } b \in \mathcal{B}, \tag{2.19}$$

entonces $a \in \mathcal{B}$.

Sea $a \in \mathcal{A}$ tal que a satisface (2.18) y (2.19). Como $\mathcal{B}$ es un subconjunto normal de $\mathcal{A}$, entonces $b^* \in \mathcal{B}$ para todo $b \in \mathcal{B}$, así

$$a \cdot b^* = b^* \cdot a \text{ para todo } b \in \mathcal{B}$$

y por lo tanto

$$a^* \cdot b = (b^* \cdot a)^* = (a \cdot b^*)^* = b \cdot a^* \tag{2.20}$$

para todo $b \in \mathcal{B}$. Entonces de (2.18),(2.19) y (2.20) tenemos que $\mathcal{B} \cup \{a, a^*\}$ es un subconjunto normal de $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{B}$ es maximal, entonces $a \in \mathcal{B}$.

De (2.17), (2.18) y (2.19) obtenemos que $e \in \mathcal{B}$ y $\mathcal{B}$ es una subálgebra conmutativa de $\mathcal{A}$.

Veamos que $\mathcal{B}$ es cerrado en $\mathcal{A}$. Sea $\{a_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{B}$ y $a \in \mathcal{A}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{ en } \mathcal{A}.$$

Como $\mathcal{B}$ es conmutativa, para $n \geq 1$,

$$a_n \cdot b = b \cdot a_n \text{ para todo } b \in \mathcal{B}.$$

Ya que el producto es una operación continua en $\mathcal{A}$, entonces

$$a \cdot b = b \cdot a$$

y por lo tanto

$$a^* \cdot b = (b^* \cdot a)^* = (a \cdot b^*)^* = b \cdot a^*$$

para todo $b \in \mathcal{B}$. En particular,

$$a^* \cdot a_n = a_n \cdot a^* \text{ para todo } n \geq 1$$

de donde

$$a^* \cdot a = a \cdot a^*.$$

Entonces $a \in \mathcal{B}$. Luego $\mathcal{B}$ es cerrado en $\mathcal{A}$.

(b) Sea $a \in \mathcal{B}$ tal que $a \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$. Entonces $a^* \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ y $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$ porque

$$(a \cdot a^{-1})^* = e = (a^{-1} \cdot a)^*.$$

Como a es normal entonces a^{-1} es normal y como a conmuta con todo elemento de $\mathcal{B}$ entonces a^{-1} conmuta con todo elemento de $\mathcal{B}$. En efecto, la igualdad

$$a^* \cdot a = a \cdot a^*$$

implica que

$$a^{-1} \cdot (a^{-1})^* = (a^{-1})^* \cdot a^{-1}.$$

Y si $b \in \mathcal{B}$ tenemos que

$$b \cdot a^{-1} = (a^{-1} \cdot a \cdot b) \cdot a^{-1} = (a^{-1} \cdot b \cdot a) \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot b \cdot (a \cdot a^{-1}) = a^{-1} \cdot b.$$

Luego $a^{-1} \in \mathcal{B}$. Deducimos entonces que para cada $b \in \mathcal{B}$

$$\rho_{\mathcal{A}}(b) \subset \rho_{\mathcal{B}}(b)$$

de donde

$$\sigma_{\mathcal{B}}(b) \subset \sigma_{\mathcal{A}}(b)$$

y como siempre $\sigma_{\mathcal{A}}(b) \subset \sigma_{\mathcal{B}}(b)$ entonces

$$\sigma_{\mathcal{B}}(b) = \sigma_{\mathcal{A}}(b).$$

$\square$

OBSERVACIÓN 2.58. Si $\mathcal{A}$ es un álgebra C^* y $a \in \mathcal{A}$ es normal, entonces $\{a, a^*\}$ es un subconjunto normal de $\mathcal{A}$ que, por el teorema maximal de Hausdorff, está contenido en un subconjunto normal maximal de $\mathcal{A}$.

La siguiente aplicación del Teorema 2.57 puede extender algunas consecuencias del Teorema 2.49 a álgebras C^* que no necesariamente son conmutativas.

PROPOSICIÓN 2.59. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con unidad.*

(a) *Si $a \in \mathcal{A}$ es hermitiano, entonces $\sigma_{\mathcal{A}}(a) \subset \mathbb{R}$.*
(b) *Si $a \in \mathcal{A}$ es normal, entonces $r_{\mathcal{A}}(a) = \|a\|$.*
(c) *Si $b \in \mathcal{A}$, entonces $r_{\mathcal{A}}(b \cdot b^*) = \|b\|^2$.*

DEMOSTRACIÓN.

(a) Sea $a \in \mathcal{A}$ tal que a es hermitiano, entonces a es normal. Por el teorema maximal de Hausdorff, a pertenece a un subconjunto normal maximal $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ (ver la Observación 2.58). Por el Teorema 2.57, $\mathcal{B}$ es un álgebra C^* conmutativa con unidad y para cada $b \in \mathcal{B}$
$$\sigma_{\mathcal{B}}(b) = \sigma_{\mathcal{A}}(b).$$
Por el Teorema 2.49, $\mathcal{B}$ es isométricamente isomorfo al $\operatorname{ran}(\Gamma_{\mathcal{B}})$ y tiene la propiedad de que para cada $b \in \mathcal{B}$
$$\sigma_{\mathcal{A}}(b) = \sigma_{\mathcal{B}}(b) = \operatorname{ran}(\Gamma_{\mathcal{B}}(b)).$$
Como a es hermitiano, el Teorema 2.49 prueba que $\Gamma_{\mathcal{B}}(a)$ es una función en $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ a valores reales, donde $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ es el espacio ideal maximal de $\mathcal{B}$.
Por lo tanto
$$\sigma_{\mathcal{A}}(a) \subset \mathbb{R}.$$
(b) Sea $a \in \mathcal{A}$ tal que a es normal, escogiendo $\mathcal{B}$ como en la prueba anterior tenemos que la igualdad
$$\sigma_{\mathcal{A}}(a) = \operatorname{ran}(\Gamma_{\mathcal{B}}(a))$$
implica que
$$r_{\mathcal{A}}(a) = \|\Gamma_{\mathcal{B}}(a)\|_\infty.$$
Como $\mathcal{B}$ y $\operatorname{ran}(\Gamma_{\mathcal{B}})$ son isométricos entonces
$$\|\Gamma_{\mathcal{B}}(a)\|_\infty = \|a\|.$$
Luego
$$r_{\mathcal{A}}(a) = \|a\|.$$

(c) Sea $b \in \mathcal{A}$, sabemos que $b \cdot b^*$ es hermitiano y por lo tanto normal. Por (b) y como $\mathcal{A}$ es un álgebra C^* tenemos que

$$r_{\mathcal{A}}(b \cdot b^*) = \|b \cdot b^*\| = \|b\|^2.$$

□

4. Elementos positivos de un álgebra C^*

DEFINICIÓN 2.60. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con unidad y $a \in \mathcal{A}$, decimos que a es *positivo* si a es hermitiano y $\sigma_{\mathcal{A}}(a) \subset [0, \infty)$.

En este caso escribimos $a \geq 0$.

EJEMPLOS.

1. Para $\mathcal{A} = \mathbb{C}$, $z \in \mathcal{A}$ es positivo cuando la parte real de z es un número real no negativo y la parte imaginaria es cero.
2. Para $\mathcal{A} = M_{n\times n}(\mathbb{C})$, $A \in \mathcal{A}$ es positiva cuando todos los autovalores de A son números reales no negativos.
3. Sea X un espacio de Hausdorff compacto, $X \neq \emptyset$ y $\mathcal{A} = \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$, $f \in \mathcal{A}$ es positiva si es una función a valores reales no negativos.

TEOREMA 2.61. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con unidad.*

(a) *Si $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{A}$, $a \geq 0$ y $b \geq 0$, entonces $a + b \geq 0$.*
(b) *Si $a \in \mathcal{A}$, $a \geq 0$ y $-a \geq 0$, entonces $a = 0$.*
(c) *Si $a \in \mathcal{A}$, entonces $a \cdot a^* \geq 0$.*

DEMOSTRACIÓN.

(a) Sean $a, b \in \mathcal{A}$ tales que $a \geq 0$ y $b \geq 0$. Sea

$$c = a + b \quad \text{y} \quad t = \|a\| + \|b\|.$$

Ya que $\sigma_{\mathcal{A}}(a) \subset [0, \infty)$, por la parte (b) de la Proposición 2.59 tenemos que

$$\sigma_{\mathcal{A}}(a) \subset [0, \|a\|]. \tag{2.21}$$

Sea p el polinomio dado por

$$p(x) = \|a\| - x.$$

Por el Teorema 2.28 y por (2.21) tenemos que

$$\sigma_{\mathcal{A}}(\|a\|e - a) = p(\sigma_{\mathcal{A}}(a)) \subset [0, \|a\|]$$

entonces la parte (b) de la Proposición 2.59 y la definición de radio espectral implican que

$$\| \|a\|e - a \| \leq \|a\|.$$

Por la misma razón

$$\| \|b\|e - b \| \leq \|b\|.$$

Entonces

$$\|te - c\| \leq t. \tag{2.22}$$

El elemento $te - c$ es hermitiano porque $c = c^*$, entonces por la parte (a) de la Proposición 2.59, $\sigma_{\mathcal{A}}(te - c) \subset \mathbb{R}$ y por (2.22)

$$\sigma_{\mathcal{A}}(te - c) \subset [-t, t],$$

pero esto implica, debido al Teorema 2.28, que

$$\sigma_{\mathcal{A}}(c) \subset [0, 2t].$$

Por lo tanto $c = a + b \geq 0$.

(b) Sea $a \in \mathcal{A}$ tal que $a \geq 0$ y $-a \geq 0$ entonces

$$\sigma_{\mathcal{A}}(a) \subset [0, \infty) \quad \text{y} \quad -\sigma_{\mathcal{A}}(a) = \sigma_{\mathcal{A}}(-a) \subset [0, \infty)$$

de donde

$$\sigma_{\mathcal{A}}(a) \subset (-\infty, 0]$$

y por lo tanto

$$\sigma_{\mathcal{A}}(a) = \{0\}.$$

Por la parte (b) de la Proposición 2.59

$$\|a\| = r_{\mathcal{A}}(a) = 0.$$

Luego

$$a = 0.$$

(c) Sea $a \in \mathcal{A}$ (consideremos $a \neq 0$ ya que claramente $0 \in \mathcal{A}$ es positivo) y $b = a \cdot a^*$, b es hermitiano. Escogiendo a $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ como en la prueba de la parte (a) de la Proposición 2.59, tenemos que $\Gamma_{\mathcal{B}}(b)$ es una función en $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ a valores reales.

Ya que

$$\sigma_{\mathcal{A}}(b) = \operatorname{ran}(\Gamma_{\mathcal{B}}(b))$$

entonces debemos probar que $\Gamma_{\mathcal{B}}(b) \geq 0$ en $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$.

Como $\operatorname{ran}(\Gamma_{\mathcal{B}}) = \mathcal{C}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}, \mathbb{C})$ y $|\Gamma_{\mathcal{B}}(b)| - \Gamma_{\mathcal{B}}(b)$ es continua en $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$, entonces existe $c \in \mathcal{B}$ tal que

$$\Gamma_{\mathcal{B}}(c) = |\Gamma_{\mathcal{B}}(b)| - \Gamma_{\mathcal{B}}(b) \quad \text{ en } \mathcal{M}_{\mathcal{B}}.$$

Como $\Gamma_{\mathcal{B}}(c)$ es una función a valores reales, por el Teorema 2.49

$$\Gamma_{\mathcal{B}}(c) = \Gamma_{\mathcal{B}}(c)^* = \Gamma_{\mathcal{B}}(c^*)$$

de donde $c = c^*$. Sea $c \cdot a = d$, de (2.13) y (2.14) tenemos que

$$c \cdot a = d = d_1 + id_2$$

donde d_1 y d_2 son elementos hermitianos de $\mathcal{A}$. Como $c \in \mathcal{B}$ y $b \in \mathcal{B}$, conmutan, entonces

$$d \cdot d^* = c \cdot (a \cdot a^*) \cdot c^* = c \cdot (b \cdot c) = c^2 \cdot b.$$

Por otro lado

$$d \cdot d^* = d_1^2 - id_1 \cdot d_2 + id_2 \cdot d_1 + d_2^2.$$

Por lo tanto

$$d^* \cdot d = 2d_1^2 + 2d_2^2 - d \cdot d^* = 2d_1^2 + 2d_2^2 - c^2 \cdot b.$$

Como $d_1 = d_1^*$ y $\sigma_{\mathcal{A}}(d_1) \subset \mathbb{R}$ por la parte (a) de la Proposición 2.59, entonces d_1^2 es hermitiano y $\sigma_{\mathcal{A}}(d_1^2) = (\sigma_{\mathcal{A}}(d_1))^2 \subset [0, \infty)$ por el Teorema 2.28. Por lo tanto $d_1^2 \geq 0$ y también $d_2^2 \geq 0$. Veamos que $-c^2 \cdot b \geq 0$.

Como

$$-(\Gamma_{\mathcal{B}}(c))^2 \cdot \Gamma_{\mathcal{B}}(b) = 2|\Gamma_{\mathcal{B}}(b)| \cdot (\Gamma_{\mathcal{B}}(b))^2 - 2(\Gamma_{\mathcal{B}}(b))^3$$

entonces

$$-(\Gamma_{\mathcal{B}}(c))^2 \cdot \Gamma_{\mathcal{B}}(b) \geq 0 \quad \text{ en } \mathcal{M}_{\mathcal{B}}.$$

Ya que $c^2 \cdot b \in \mathcal{B}$, tenemos que $-c^2 \cdot b \in \mathcal{B}$ y

$$\sigma_{\mathcal{A}}(-c^2 \cdot b) = \operatorname{ran}(\Gamma_{\mathcal{B}}(-c^2 \cdot b)) = \operatorname{ran}(\, -(\Gamma_{\mathcal{B}}(c))^2 \cdot \Gamma_{\mathcal{B}}(b)\,)$$

entonces $-c^2 \cdot b \geq 0$ y por (a), $d^* \cdot d \geq 0$.

Por la Proposición 2.20, $\sigma_{\mathcal{A}}(d \cdot d^*) \subset \sigma_{\mathcal{A}}(d^* \cdot d) \cup \{0\}$ entonces $d \cdot d^* \geq 0$ y así ran($(\Gamma_{\mathcal{B}}(c))^2 \cdot \Gamma_{\mathcal{B}}(b)$) $\subset [0, \infty)$, pero como $-(\Gamma_{\mathcal{B}}(c))^2 \cdot \Gamma_{\mathcal{B}}(b) \geq 0$ en $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ entonces $\Gamma_{\mathcal{B}}(c) = 0$ y en ese caso

$$\Gamma_{\mathcal{B}}(b) = |\Gamma_{\mathcal{B}}(b)|.$$

Por lo tanto

$$\Gamma_{\mathcal{B}}(b) \geq 0 \quad \text{ en } \mathcal{M}_{\mathcal{B}}.$$

□

El siguiente teorema nos permite obtener que $\sigma_{\mathcal{A}_{(a)}}(a) = \sigma_{\mathcal{A}}(a)$.

TEOREMA 2.62. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con unidad, sea $\mathcal{B}$ una subálgebra cerrada de $\mathcal{A}$ tal que $e \in \mathcal{B}$ y $b^* \in \mathcal{B}$ para todo $b \in \mathcal{B}$, entonces $\sigma_{\mathcal{A}}(b) = \sigma_{\mathcal{B}}(b)$ para todo $b \in \mathcal{B}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $b \in \mathcal{B}$ tal que $b \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$. Debemos probar que $b^{-1} \in \mathcal{B}$.

Como $b \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ entonces $b^* \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ y por lo tanto $b \cdot b^* \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$, de donde $0 \notin \sigma_{\mathcal{A}}(b \cdot b^*)$. Como $b \cdot b^*$ es hermitiano entonces $\sigma_{\mathcal{A}}(b \cdot b^*) \subset (-\infty, \infty)$ debido a la parte (a) de la Proposición 2.59.

Por la parte (c) de la Proposición 2.59 y la parte (c) del Teorema 2.61 tenemos que $\sigma_{\mathcal{A}}(b \cdot b^*) \subset (0, \|b\|^2]$, por lo tanto $\rho_{\mathcal{A}}(b \cdot b^*)$ tiene componentes conexas y no acotadas porque

$$(-\infty, 0] \cup (\| b \|^2, \infty) \subseteq \rho_{\mathcal{A}}(b \cdot b^*).$$

La parte (b) del Teorema 2.24 prueba que $\sigma_{\mathcal{B}}(b \cdot b^*) = \sigma_{\mathcal{A}}(b \cdot b^*)$, entonces $(b \cdot b^*)^{-1} \in \mathcal{B}$ y como

$$b^{-1} = b^* \cdot (b \cdot b^*)^{-1}$$

tenemos que $b^{-1} \in \mathcal{B}$. □

PROPOSICIÓN 2.63. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con unidad y $a \in \mathcal{A}$, a es positivo si y sólo si existe $b \in \mathcal{A}$ tal que $a = b^* \cdot b$.*

DEMOSTRACIÓN.

($\Rightarrow$) Supongamos que $a \geq 0$, entonces

$$a = a^* \quad \text{ y } \quad \sigma_{\mathcal{A}}(a) \subset [0, \infty).$$

Como $\mathcal{A}_{(a)}$ es conmutativa porque a es normal, $\mathcal{C}(\sigma_{\mathcal{A}_{(a)}}(a), \mathbb{C})$ es isomorfo a $\mathcal{C}(\mathcal{M}_{\mathcal{A}_{(a)}}, \mathbb{C})$ y $\sigma_{\mathcal{A}_{(a)}}(a) = \sigma_{\mathcal{A}}(a)$, podemos considerar la transformada de Gelfand $\Gamma : \mathcal{A}_{(a)} \to \mathcal{C}(\sigma_{\mathcal{A}}(a), \mathbb{C})$.

Como $\operatorname{ran}(\Gamma(a)) = \sigma_{\mathcal{A}}(a) \subset [0, \infty)$ entonces

$$\Gamma(a)(\lambda) \geq 0 \quad \text{para todo } \lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(a).$$

Por lo tanto $\Gamma(a) \geq 0$ (ver el Ejemplo 3 de la Definición 2.60), entonces existe $\varphi \in \mathcal{C}(\sigma_{\mathcal{A}}(a), \mathbb{C})$ tal que

$$\Gamma(a) = |\varphi|^2.$$

En realidad,

$$\varphi(\lambda) = \exp\left(\frac{1}{2}\log(\Gamma(a)(\lambda))\right).$$

De donde,

$$\lambda = \Gamma(a)(\lambda) = |\varphi(\lambda)|^2 = \overline{\varphi(\lambda)}\varphi(\lambda) = \varphi(\lambda)^*\varphi(\lambda).$$

Debido a la relación $\mathcal{C}(\sigma_{\mathcal{A}}(a), \mathbb{C}) \longleftrightarrow \mathcal{A}_{(a)}$ podemos escribir

$$a = \varphi(a)^* \cdot \varphi(a).$$

($\Leftarrow$) Si existe $b \in \mathcal{A}$ tal que $a = b^* \cdot b$ entonces a es positivo debido a la parte (c) del Teorema 2.61. $\square$

Una aplicación particular de esta proposición es la siguiente:

Proposición 2.64. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo, $\mathcal{A} = L(\mathcal{H})$ y $T \in L(\mathcal{H})$, entonces T es positivo si y sólo si $\langle T(x), x\rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$.*

Demostración.
($\Rightarrow$) Sea $T \geq 0$, por la Proposición 2.63 existe $S \in L(\mathcal{H})$ tal que $T = S^*S$. Luego

$$\langle T(x), x\rangle = \langle S^*S(x), x\rangle = \langle S(x), S(x)\rangle = \| S(x) \|^2 \geq 0.$$

($\Leftarrow$) Sea $\langle T(x), x\rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$, entonces $\langle T(x), x\rangle$ es un número real no negativo. Luego

$$\langle T^*(x), x\rangle = \langle x, T(x)\rangle = \overline{\langle T(x), x\rangle} = \langle T(x), x\rangle.$$

De donde $T^* = T$.
Veamos que $\sigma_{\mathcal{A}}(T) \subset [0, \infty)$. Sea $\lambda < 0$, como $\langle T(x), x\rangle \geq 0$ entonces

$$\|(T - \lambda I)(x)\|^2 = \langle (T - \lambda I)(x), (T - \lambda I)(x)\rangle = \|T(x)\|^2 - 2\lambda\langle T(x), x\rangle + \lambda^2\|x\|^2 \geq \lambda^2\|x\|^2.$$

Luego $T - \lambda I$ es acotado inferiormente. Como $(T - \lambda I)^* = T - \lambda I$, por la Proposición 1.6, $T - \lambda I$ es invertible. Entonces

$$(-\infty, 0) \subset \rho_{\mathcal{A}}(T)$$

y así

$$\sigma_{\mathcal{A}}(T) \subset [0, \infty).$$

$\square$

Definición 2.65. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con unidad y $a, b \in \mathcal{A}$, entonces

$$a \leq b \quad \text{si } b - a \text{ es positivo .}$$

Observación 2.66. De las partes (a) y (b) del Teorema 2.61 tenemos que la relación binaria $\leq$ hace de $\mathcal{A}$ un conjunto parcialmente ordenado, ya que

(i) $a \leq a$ para todo $a \in \mathcal{A}$,
(ii) si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$,
(iii) si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.

Proposición 2.67. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con unidad y $a \in \mathcal{A}$ hermitiano, entonces:*

(a) $a \leq \|a\|e$, *y*
(b) $-\|a\|e \leq a$.

Demostración.

(a) El elemento $\|a\|e - a$ es hermitiano ya que a y e son hermitianos. Veamos que

$$\sigma_{\mathcal{A}}(\|a\|e - a) \subset [0, \infty).$$

Como a es normal, por la parte (b) de la Proposición 2.59

$$r_{\mathcal{A}}(a) = \|a\|$$

de donde

$$\sigma_{\mathcal{A}}(a) \subset [-\|a\|, \|a\|].$$

Sea p el polinomio dado por

$$p(x) = \|a\| - x.$$

Por el Teorema 2.28 tenemos que

$$\sigma_{\mathcal{A}}(p(a)) = p(\sigma_{\mathcal{A}}(a))$$

entonces

$$p(\sigma_{\mathcal{A}}(a)) \subset [0, 2\|a\|] \subset [0, \infty).$$

Por lo tanto

$$\sigma_{\mathcal{A}}(\|a\|e - a) \subset [0, \infty).$$

(b) El elemento $a + \|a\|e$ es hermitiano ya que a y e son hermitianos. Veamos que

$$\sigma_{\mathcal{A}}(a + \|a\|e) \subset [0, \infty).$$

Como a es normal, por la parte (b) de la Proposición 2.59

$$r_{\mathcal{A}}(a) = \|a\|$$

de donde

$$\sigma_{\mathcal{A}}(a) \subset [-\|a\|, \|a\|].$$

Sea p el polinomio dado por

$$p(x) = x + \|a\|.$$

Por el Teorema 2.28 tenemos que

$$\sigma_{\mathcal{A}}(p(a)) = p(\sigma_{\mathcal{A}}(a))$$

entonces

$$p(\sigma_{\mathcal{A}}(a)) \subset [0, 2\|a\|] \subset [0, \infty).$$

Por lo tanto

$$\sigma_{\mathcal{A}}(a + \|a\|e) \subset [0, \infty).$$

$\square$

5. Funciones positivas en álgebras C^*

DEFINICIÓN 2.68. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras C^* con unidad y $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ una función lineal, diremos que φ es una *función positiva* si $\varphi(a) \geq 0$ para todo $a \in \mathcal{A}$, positivo.

EJEMPLOS.

1. En $M_{n\times n}(\mathbb{C})$, para $1 \leq i, j \leq n$, sea E_{ij} la matriz cuya entrada (i, j) es uno (1) y el resto es cero (0).

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & j & \end{array} \\ i & \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots 1 \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Sabemos que el conjunto $\{E_{ij}\}$ es base de $M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Sea $\varphi : M_{n\times n}(\mathbb{C}) \to M_{n\times n}(\mathbb{C})$ la función lineal dada por

$$\varphi(A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \varphi(E_{ij})_{1\leq r,s\leq n}$$

para todo $A = [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, donde para cada $1 \leq i, j \leq n$, $\varphi(E_{ij})_{1\leq r,s\leq n}$ es la matriz cuyas entradas (r, s) son $(r - j)(s - i)$. Por ejemplo, si $n = 3$, para $i = 1$ y $j = 1$ tenemos que

$$\varphi(E_{11})_{1\leq r,s\leq 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Sea $A = [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ tal que $A \geq 0$, para probar que $\varphi(A) \geq 0$ usaremos la Proposición 2.64 (recordemos que se puede identificar $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ con $L(\mathbb{C}^n)$ ya que $\dim(\mathbb{C}^n) = n < \infty$ cuando $\mathbb{C}^n$ es espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$).

Sea $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, como $A \geq 0$ entonces

$$\begin{aligned}
\langle \varphi(A)(z_1, \dots, z_n), (z_1, \dots, z_n)\rangle_n &= \left\langle \sum_{i,j} a_{ij}\, \varphi(E_{ij})_{rs}(z_1, \dots, z_n), (z_1, \dots, z_n) \right\rangle_n \\
&= \sum_{i,j,r,s} a_{ij}(r - j)(s - i) z_r \overline{z_s} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{r=1}^{n} (r - j) z_r \right) \left(\sum_{s=1}^{n} (s - i) \overline{z_s} \right) \\
&= \langle Az, z\rangle_n \geq 0,
\end{aligned}$$

donde

$$z = \left(\sum_{r=1}^{n}(r-1)z_r, \ldots, \sum_{r=1}^{n}(r-n)z_r\right) = \left(\sum_{s=1}^{n}(s-1)z_s, \ldots, \sum_{s=1}^{n}(s-n)z_s\right).$$

Luego $\varphi(A) \geq 0$.

2. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $x_o \in \mathcal{H}$, sea $\psi : L(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}$ el funcional lineal dado por

$$\psi(T) = \langle T(x_o), x_o \rangle$$

para todo $T \in L(\mathcal{H})$.

Tenemos que ψ es positivo.

3. Sea X un espacio de Hausdorff compacto, $X \neq \emptyset$, sea $x_o \in X$ y $\varphi : \mathcal{C}(X, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ el funcional lineal dado por

$$\varphi(f) = f(x_o)$$

para todo $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$.

Tenemos que φ es positivo.

4. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras C^* con unidad y $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un homomorfismo*. Entonces ψ es positivo ya que

$$\psi(a^* \cdot a) = \psi(a^*) \cdot \psi(a) = \psi(a)^* \cdot \psi(a)$$

para todo $a \in \mathcal{A}$.

Proposición 2.69. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras C^* con unidad y $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ una función lineal positiva.*

(a) *Si $a \in \mathcal{A}$ es hermitiano, entonces* $\|\varphi(a)\|_{\mathcal{B}} \leq \|\varphi(e)\|_{\mathcal{B}} \|a\|_{\mathcal{A}}$.

(b) *La función φ es continua en $\mathcal{A}$.*

Demostración.

(a) Sea $a \in \mathcal{A}$ hermitiano, por la Proposición 2.67 tenemos que

$$\|a\|_{\mathcal{A}}\, e - a \geq 0 \quad \text{y} \quad a + \|a\|_{\mathcal{A}}\, e \geq 0.$$

Como φ es lineal positiva entonces

$$\|a\|_{\mathcal{A}}\, \varphi(e) - \varphi(a) \geq 0 \quad \text{y} \quad \varphi(a) + \|a\|_{\mathcal{A}}\, \varphi(e) \geq 0,$$

de donde

$$-\|a\|_{\mathcal{A}}\,\varphi(e) \leq \varphi(a) \leq \|a\|_{\mathcal{A}}\,\varphi(e).$$

Luego

$$\|\varphi(a)\|_{\mathcal{B}} \leq \|\varphi(e)\|_{\mathcal{B}}\,\|a\|_{\mathcal{A}}.$$

(b) Sea $a \in \mathcal{A}$, ya que

$$a_1 = \frac{1}{2}(a+a^*) \quad \text{y} \quad a_2 = \frac{1}{2i}(a-a^*)$$

son hermitianos, entonces por (a) y la Proposición 2.47 tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\varphi(a)\|_{\mathcal{B}} &= \left\|\varphi\left(\frac{1}{2}(a+a^*) \,+\, i\frac{1}{2i}(a-a^*)\right)\right\|_{\mathcal{B}} \\
&= \left\|\varphi\left(\frac{1}{2}(a+a^*)\right) \,+\, i\,\varphi\left(\frac{1}{2i}(a-a^*)\right)\right\|_{\mathcal{B}} \\
&\leq \left\|\varphi\left(\frac{1}{2}(a+a^*)\right)\right\|_{\mathcal{B}} + \left\|\varphi\left(\frac{1}{2i}(a-a^*)\right)\right\|_{\mathcal{B}} \\
&\leq \|\varphi(e)\|_{\mathcal{B}}\,\left(\left\|\frac{1}{2}(a+a^*)\right\|_{\mathcal{A}} + \left\|\frac{1}{2i}(a-a^*)\right\|_{\mathcal{A}}\right) \\
&\leq \|\varphi(e)\|_{\mathcal{B}}\,(\|a\|_{\mathcal{A}} \,+\, \|a^*\|_{\mathcal{A}}) \\
&= 2\|\varphi(e)\|_{\mathcal{B}}\,\|a\|_{\mathcal{A}}.
\end{aligned}$$

Luego

$$\|\varphi(a)\|_{\mathcal{B}} \leq 2\|\varphi(e)\|_{\mathcal{B}}\,\|a\|_{\mathcal{A}}.$$

Sea $\epsilon > 0$ y $\delta = \epsilon/2\|\varphi(e)\|_{\mathcal{B}}$, para $a, b \in \mathcal{A}$ si $\|a-b\|_{\mathcal{A}} < \delta$, entonces por linealidad de φ y la desigualdad anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\varphi(a)-\varphi(b)\|_{\mathcal{B}} &= \|\varphi(a-b)\|_{\mathcal{B}} \\
&\leq 2\|\varphi(e)\|_{\mathcal{B}}\,\|a-b\|_{\mathcal{A}} \\
&< 2\|\varphi(e)\|_{\mathcal{B}}\,\delta \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

□

PROPOSICIÓN 2.70. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con unidad y $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ un funcional lineal positivo. Entonces:*

(a) $\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}$ *para todo* $a \in \mathcal{A}$.

(b) $|\varphi(a \cdot b^*)|^2 \leq \varphi(a \cdot a^*)\, \varphi(b \cdot b^*)$ *para todo* $a, b \in \mathcal{A}$.

DEMOSTRACIÓN.

(a) Sean $a, b \in \mathcal{A}$, como φ es positivo, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ tenemos que

$$\varphi((a + \lambda b) \cdot (a + \lambda b)^*) \geq 0,$$

entonces, como φ es lineal

$$\varphi(a \cdot a^*) + \overline{\lambda}\, \varphi(a \cdot b^*) + \lambda\, \varphi(b \cdot a^*) + |\lambda|^2\, \varphi(b \cdot b^*) \geq 0. \tag{2.23}$$

Si $\lambda = i$,

$$\varphi(a \cdot a^*) + i(\varphi(b \cdot a^*) - \varphi(a \cdot b^*)) + \varphi(b \cdot b^*) \geq 0$$

de donde $i(\varphi(b \cdot a^*) - \varphi(a \cdot b^*))$ es un número real no negativo y si $\lambda = 1$,

$$\varphi(a \cdot a^*) + \varphi(b \cdot a^*) + \varphi(a \cdot b^*) + \varphi(b \cdot b^*) \geq 0$$

de donde $\varphi(b \cdot a^*) + \varphi(a \cdot b^*)$ es un número real no negativo.

Así, deducimos que

$$\varphi(b \cdot a^*) = \overline{\varphi(a \cdot b^*)}.$$

Tomando $b = e$ tenemos que

$$\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}.$$

(b) Sean $a, b \in \mathcal{A}$, si $\varphi(a \cdot b^*) = 0$ claramente obtenemos (b). Si $\varphi(a \cdot b^*) \neq 0$, en (2.23) consideramos

$$\lambda = t\, \frac{\varphi(a \cdot b^*)}{|\varphi(a \cdot b^*)|}$$

donde $t \in \mathbb{R}$.

Luego

$$\varphi(a \cdot a^*) + t \left(|\varphi(a \cdot b^*)| + \frac{\varphi(a \cdot b^*)\, \varphi(b \cdot a^*)}{|\varphi(a \cdot b^*)|} \right) + \varphi(b \cdot b^*)\, t^2 \geq 0 \tag{2.24}$$

Como $\varphi(b \cdot a^*) = \varphi((a \cdot b^*)^*)$, por (a) tenemos que

$$\varphi(b \cdot a^*) = \overline{\varphi(a \cdot b^*)}$$

y sustituyendo en (2.24)

$$\varphi(a \cdot a^*) + 2|\varphi(a \cdot b^*)|\, t + \varphi(b \cdot b^*)\, t^2 \geq 0.$$

Obtenemos una ecuación de segundo grado en t cuya desigualdad se satisface si el discriminante cumple que

$$4\, |\varphi(a \cdot b^*)|^2 - 4\, \varphi(a \cdot a^*)\, \varphi(b \cdot b^*) \leq 0.$$

Entonces

$$|\varphi(a \cdot b^*)|^2 \leq \varphi(a \cdot a^*)\, \varphi(b \cdot b^*).$$

□

6. Caracterización de álgebras C^*

LEMA 2.71. *Sea X un espacio topológico y $\varphi : \mathcal{C}(X, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ un funcional lineal y continuo tal que*

$$\|\varphi\| = \varphi(1) = 1.$$

Entonces

$$0 \leq \varphi(f) \leq 1$$

si $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ y $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in X$.

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$\varphi(f) = r + is$$

con $r, s \in \mathbb{R}$. Como φ es lineal, para todo $t \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi\left(f - \frac{1}{2}\,1 + it\,1\right) &= \varphi(f) - \frac{1}{2} + it \\ &= r - \frac{1}{2} + i(s+t), \end{aligned}$$

de donde

$$\left(r - \frac{1}{2}\right)^2 + (s+t)^2 \leq \|\varphi\|^2 \left\| f - \frac{1}{2}\,1 + it\,1 \right\|_\infty^2$$

ya que φ es continua. Si $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in X$, entonces

$$\left\| f - \frac{1}{2}\,1 \right\|_\infty \leq \frac{1}{2}$$

y así

$$\left\| f - \frac{1}{2}\,1 + it\,1 \right\|_\infty^2 \leq \frac{1}{4} + t^2.$$

Luego

$$\left(r - \frac{1}{2} \right)^2 + (s+t)^2 \leq \frac{1}{4} + t^2,$$

entonces

$$r^2 - r + s^2 + 2\,st \leq 0$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. De donde debemos tener que $s = 0$ y en ese caso

$$r^2 \leq r.$$

Luego

$$0 \leq r \leq 1$$

y así

$$0 \leq \varphi(f) \leq 1.$$

□

Teorema 2.72. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con unidad y $a \in \mathcal{A}$, entonces existe un funcional lineal positivo $F : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ tal que*

$$F(e) = 1 \quad y \quad F(a \cdot a^*) = \|a\|^2.$$

Demostración. Sea $b = a \cdot a^*$. Por la parte (c) del Teorema 2.61, $\sigma_{\mathcal{A}}(b) \subset [0, \infty)$. Consideremos el álgebra C^* generada por b. Sea $\mathcal{M}_{\mathcal{A}_{(b)}}$ el espacio ideal maximal de $\mathcal{A}_{(b)}$. Por el Teorema 2.49, $\operatorname{ran}(\Gamma_{\mathcal{A}_{(b)}}) = \mathcal{C}(\mathcal{M}_{\mathcal{A}_{(b)}}, \mathbb{C})$ y $\Gamma_{\mathcal{A}_{(b)}}(b)$ es una función continua en $\mathcal{M}_{\mathcal{A}_{(b)}}$ a valores reales no negativos ya que $\operatorname{ran}(\Gamma_{\mathcal{A}_{(b)}}(b)) = \sigma_{\mathcal{A}_{(b)}}(b) = \sigma_{\mathcal{A}}(b)$, de donde alcanza su valor máximo para algún $h \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}_{(b)}}$, así

$$\Gamma_{\mathcal{A}_{(b)}}(b)(h) = h(b) = \|\Gamma_{\mathcal{A}_{(b)}}(b)\|_\infty = \|b\| = \|a\|^2.$$

Sea $\psi : \mathcal{A}_{(b)} \to \mathbb{C}$ el funcional lineal dado por

$$\psi(c) = \Gamma_{\mathcal{A}_{(b)}}(c)(h)$$

para todo $c \in \mathcal{A}_{(b)}$. Entonces

$$\psi(e) = 1 \quad \text{y} \quad \psi(b) = \psi(a \cdot a^*) = \|a\|^2.$$

Además $\|\psi\| = 1$ ya que

$$|\psi(c)| \leq \|\Gamma_{\mathcal{A}_{(b)}}(c)\|_\infty = \|c\|$$

para todo $c \in \mathcal{A}_{(b)}$.

La función ψ es extendida, debido al teorema de Hahn-Banach, a un funcional lineal continuo $F : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ tal que

$$F(c) = \psi(c)$$

para todo $c \in \mathcal{A}_{(b)}$ y

$$\|F\| = 1.$$

Debemos probar que $F(d) \geq 0$ para todo $d \in \mathcal{A},\ d \geq 0$.

Sea $d \in \mathcal{A},\ d \geq 0$ y sea $\varphi : \mathcal{C}(\mathcal{M}_{\mathcal{A}_{(d)}}, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ el funcional lineal dado por

$$\varphi(\Gamma_{\mathcal{A}_{(d)}}(c)) = F(c)$$

para todo $c \in \mathcal{A}_{(d)}$. Entonces

$$\varphi(1) = F(e) = \psi(e) = 1$$

y

$$\|\varphi\| = 1 = \varphi(1)$$

ya que

$$|\varphi(\Gamma_{\mathcal{A}_{(d)}}(c))| \leq \|F\|\|c\| = \|c\| = \|\Gamma_{\mathcal{A}_{(d)}}(c)\|_\infty.$$

Por el Lema 2.71 tenemos que

$$\varphi(\Gamma_{\mathcal{A}_{(d)}}(c)) \geq 0$$

para todo $c \in \mathcal{A}_{(d)}$ tal que $\Gamma_{\mathcal{A}_{(d)}}(c) \geq 0$.

Ya que $d \geq 0$, por los mismos hechos explicados al comienzo de la prueba, tenemos que $\Gamma_{\mathcal{A}_{(d)}}(d) \geq 0$.

Luego

$$F(d) = \varphi(\Gamma_{\mathcal{A}_{(d)}}(d)) \geq 0.$$

□

TEOREMA 2.73. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con unidad y $a \in \mathcal{A}, a \neq 0$. Entonces existe un espacio de Hilbert complejo $\mathcal{H}_a$ y $\varphi_a : \mathcal{A} \to L(\mathcal{H}_a)$ un homomorfismo* tal que*

$$\|\varphi_a(b)\| \leq \|b\|$$

para todo $b \in \mathcal{A}$.

Y

$$\|\varphi_a(a)\| = \|a\|.$$

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 2.72, existe un funcional lineal positivo $F : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ tal que

$$F(e) = 1 \quad \text{y} \quad F(a^* \cdot a) = \|a\|^2.$$

Sea

$$\mathcal{N}_F = \{b \in \mathcal{A} : F(c \cdot b) = 0 \text{ para todo } c \in \mathcal{A}\}.$$

Ya que F es continua debido a la parte (b) de la Proposición 2.69, $\mathcal{N}_F$ es un subespacio (cerrado) de $\mathcal{A}$.

Consideremos el espacio cociente $\mathcal{A}/\mathcal{N}_F$. Sea

$$\langle [b]_{\mathcal{N}_F}, [c]_{\mathcal{N}_F} \rangle_{\mathcal{A}/\mathcal{N}_F} = F(c^* \cdot b)$$

para todo $[b]_{\mathcal{N}_F}, [c]_{\mathcal{N}_F} \in \mathcal{A}/\mathcal{N}_F$.

Para ver que la función $\langle .,. \rangle_{\mathcal{A}/\mathcal{N}_F}$ está bien definida, es decir, que es independiente de la elección de b y c , es suficiente probar que $F(c^* \cdot b) = 0$ si $c \in \mathcal{N}_F$ o $b \in \mathcal{N}_F$.

Si $b \in \mathcal{N}_F$, por definición de $\mathcal{N}_F$, $F(c^* \cdot b) = 0$.

Si $c \in \mathcal{N}_F$, por la parte (a) de la Proposición 2.70, tenemos que

$$F(c^* \cdot b) = \overline{F(b^* \cdot c)} = 0.$$

Luego, la función $\langle .,. \rangle_{\mathcal{A}/\mathcal{N}_F}$ está bien definida.

Veamos que $\langle .,. \rangle_{\mathcal{A}/\mathcal{N}_F}$ es un producto interno en $\mathcal{A}/\mathcal{N}_F$.

(i) Para $[b]_{\mathcal{N}_F}, [c]_{\mathcal{N}_F} \in \mathcal{A}/\mathcal{N}_F$,

$$\langle [b]_{\mathcal{N}_F}, [c]_{\mathcal{N}_F} \rangle_{\mathcal{A}/\mathcal{N}_F} = F(c^* \cdot b) = \overline{F(b^* \cdot c)} = \overline{\langle [c]_{\mathcal{N}_F}, [b]_{\mathcal{N}_F} \rangle}_{\mathcal{A}/\mathcal{N}_F}.$$

(ii) Ya que F es lineal la función $\langle .,. \rangle_{\mathcal{A}/\mathcal{N}_F}$ es lineal en la primera variable.

(iii) Sea $[b]_{\mathcal{N}_F} \in \mathcal{A}/\mathcal{N}_F$, como F es positiva

$$\langle [b]_{\mathcal{N}_F}, [b]_{\mathcal{N}_F} \rangle_{\mathcal{A}/\mathcal{N}_F} = F(b^* \cdot b) \geq 0.$$

(iv) Sea $[b]_{\mathcal{N}_F} \in \mathcal{A}/\mathcal{N}_F$. Si $[b]_{\mathcal{N}_F} = [0]_{\mathcal{N}_F}$ entonces $b \in \mathcal{N}_F$ y así $F(b^* \cdot b) = 0$.

Si
$$\langle [b]_{\mathcal{N}_F}, [b]_{\mathcal{N}_F} \rangle_{\mathcal{A}/\mathcal{N}_F} = 0$$
entonces
$$F(b^* \cdot b) = 0.$$

Por la parte (b) de la Proposición 2.70,
$$F(c \cdot b) = 0$$
para todo $c \in \mathcal{A}$. Luego $b \in \mathcal{N}_F$ y así $[b]_{\mathcal{N}_F} = [0]_{\mathcal{N}_F}$.

Entonces $\mathcal{A}/\mathcal{N}_F$ es un espacio con producto interno y tiene, para cada $[b]_{\mathcal{N}_F} \in \mathcal{A}/\mathcal{N}_F$, una norma dada por
$$\|[b]_{\mathcal{N}_F}\|_{\mathcal{A}/\mathcal{N}_F} = F(b^* \cdot b)^{\frac{1}{2}}.$$

Tomamos esta completación $\mathcal{H}$ como el espacio de Hilbert buscado.

Para $c \in \mathcal{A}$, sea $T_c : \mathcal{A}/\mathcal{N}_F \to \mathcal{A}/\mathcal{N}_F$ el operador lineal dado por
$$T_c([b]_{\mathcal{N}_F}) = [c \cdot b]_{\mathcal{N}_F}$$
para todo $[b]_{\mathcal{N}_F} \in \mathcal{A}/\mathcal{N}_F$.

Si $b \in \mathcal{N}_F$ entonces, por definición de $\mathcal{N}_F$, $c \cdot b \in \mathcal{N}_F$ por lo tanto T_c está bien definido.

La función $c \mapsto T_c$ tiene las siguientes propiedades:

(1) Es lineal.

(2) Si $c_1, c_2 \in \mathcal{A}$, entonces
$$T_{c_1} T_{c_2} = T_{c_1 \cdot c_2}.$$

(3) El operador T_e es el operador identidad en $\mathcal{A}/\mathcal{N}_F$.

(4) Veamos que para todo $c \in \mathcal{A}$
$$\|T_c\| \leq \|c\|.$$

Para cada $[b]_{\mathcal{N}_F} \in \mathcal{A}/\mathcal{N}_F$ tenemos que
$$\|T_c([b]_{\mathcal{N}_F})\|^2 = \langle [c \cdot b]_{\mathcal{N}_F}, [c \cdot b]_{\mathcal{N}_F} \rangle_{\mathcal{A}/\mathcal{N}_F} = F(b^* \cdot c^* \cdot c \cdot b).$$

Para $b \in \mathcal{A}$ (fijo), sea $G : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ la función dada por
$$G(c) = F(b^* \cdot c \cdot b)$$
para todo $c \in \mathcal{A}$. Claramente G es un funcional lineal positivo.

Por la parte (a) de la Proposición 2.69 tenemos que
$$G(c^* \cdot c) \leq G(e)\,\|c\|^2.$$

Luego, por la definición de la norma dada en $\mathcal{A}/\mathcal{N}_F$,

$$\|T_c([b]_{\mathcal{N}_F})\|^2 = G(c^* \cdot c) \leq F(b^* \cdot b)\, \|c\|^2 = \|[b]_{\mathcal{N}_F}\|^2\, \|c\|^2$$

y así

$$\|T_c\| \leq \|c\|.$$

(5) Para todo $[b_1]_{\mathcal{N}_F}, [b_2]_{\mathcal{N}_F} \in \mathcal{A}/\mathcal{N}_F$,

$$\begin{aligned}
\langle T_{c^*}([b_1]_{\mathcal{N}_F}), [b_2]_{\mathcal{N}_F}\rangle_{\mathcal{A}/\mathcal{N}_F} &= \langle [c^* \cdot b_1]_{\mathcal{N}_F}, [b_2]_{\mathcal{N}_F}\rangle_{\mathcal{A}/\mathcal{N}_F} \\
&= F(b_2^* \cdot c^* \cdot b_1) \\
&= F((c \cdot b_2)^* \cdot b_1) \\
&= \langle [b_1]_{\mathcal{N}_F}, [c \cdot b_2]_{\mathcal{N}_F}\rangle_{\mathcal{A}/\mathcal{N}_F} \\
&= \langle [b_1]_{\mathcal{N}_F}, T_c([b_2]_{\mathcal{N}_F})\rangle_{\mathcal{A}/\mathcal{N}_F} \\
&= \langle T_c^*([b_1]_{\mathcal{N}_F}), [b_2]_{\mathcal{N}_F}\rangle_{\mathcal{A}/\mathcal{N}_F}.
\end{aligned}$$

Luego

$$T_{c^*}([b_1]_{\mathcal{N}_F}) = T_c^*([b_1]_{\mathcal{N}_F}).$$

Debido a esta igualdad y ya que $\mathcal{A}/\mathcal{N}_F$ es denso en $\mathcal{H}$ tenemos que $c \mapsto T_c$ es una función*.

(6) Como

$$\|a\|^2 = F(a^* \cdot a) = \|T_a([e]_{\mathcal{N}_F})\|^2 \leq \|T_a\|^2\, \|[e]_{\mathcal{N}_F}\|^2$$

y

$$\|[e]_{\mathcal{N}_F}\|^2 = F(e^* \cdot e) = F(e) = 1,$$

entonces

$$\|a\| \leq \|T_a\|$$

pero , como probamos en (4),

$$\|T_a\| \leq \|a\|.$$

Por simetría

$$\|T_a\| = \|a\|.$$

Tomemos $\varphi_a : \mathcal{A} \to L(\mathcal{H}_a)$ como el homomorfismo* dado por

$$\varphi_a(c) = T_c$$

para todo $c \in \mathcal{A}$. □

Definición 2.74. Sea Δ un conjunto no vacío y sea $\{\mathcal{H}_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ una colección de espacios de Hilbert complejos, la *suma directa algebraica* de los espacios $\mathcal{H}_\alpha$ es:

$$\bigoplus_{\alpha\in\Delta}\mathcal{H}_\alpha = \left\{(x_\alpha)_{\alpha\in\Delta} \in \prod_{\alpha\in\Delta}\mathcal{H}_\alpha : x_\alpha = 0 \text{ salvo para una cantidad finita de vectores}\right\}$$

donde $\prod_{\alpha\in\Delta}\mathcal{H}_\alpha$ es el producto cartesiano de los espacios $\mathcal{H}_\alpha$.

Teorema 2.75. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con unidad, entonces existe un isomorfismo isométrico* de $\mathcal{A}$ sobre una subálgebra con involución y cerrada en $L(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert complejo escogido adecuadamente.*

Demostración. Para cada $a \in \mathcal{A}$, sea $\mathcal{H} = \bigoplus_a \mathcal{H}_a$ que es la suma directa algebraica de los espacios de Hilbert $\mathcal{H}_a$ construidos como en el Teorema 2.73.

Una descripción más precisa de $\mathcal{H}$ es la siguiente: sea $v \in \prod_a \mathcal{H}_a$ y sea x_a^v la $\mathcal{H}_a$-coordenada de v. Por la Definición 2.74, tenemos que $v \in \mathcal{H}$ si y sólo si $x_a^v = 0$ salvo para una cantidad finita de vectores, así

$$\sum_a \|x_a^v\|^2 < \infty$$

donde $\|x_a^v\|$ denota la $\mathcal{H}_a$-norma de x_a^v.

El producto interno en $\mathcal{H}$ está dado por

$$\langle v', v''\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_a \langle x_a^{v'}, x_a^{v''}\rangle$$

para todo $v', v'' \in \mathcal{H}$, de donde

$$\|v\|^2_{\mathcal{H}} = \langle v, v\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_a \|x_a^v\|^2,$$

y debido a esto y a la definición de $\mathcal{H}$ tenemos que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert complejo.

Si $S_a \in L(\mathcal{H}_a)$, si existe $M > 0$ tal que $\|S_a\| \leq M$ para todo $a \in \mathcal{A}$ y si $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es un operador cuya coordenada en $\mathcal{H}_a$ está dada por

$$x_a^{S(v)} = S_a(x_a^v)$$

para todo $v \in \mathcal{H}$, es decir, si $v = (x_a, x_b)$ entonces

$$S(v) = S((x_a, x_b)) = (S_a(x_a), S_b(x_b)).$$

Obtenemos que $S \in L(\mathcal{H})$ y que

$$\|S\| = \sup_a \|S_a\|. \tag{2.25}$$

Ahora, para cada $b \in \mathcal{A}$ consideremos un operador $T_b \in L(\mathcal{H})$ cuya coordenada en $\mathcal{H}_a$ está dada por

$$x_a^{T_b(v)} = \varphi_a(b)(x_a^v)$$

para todo $v \in \mathcal{H}$, donde $\varphi_a : \mathcal{A} \to L(\mathcal{H}_a)$ es como en el Teorema 2.73.

Ya que

$$\|\varphi_a(b)\| \leq \|b\| = \|\varphi_b(b)\|$$

por el Teorema 2.73, entonces de (2.25) tenemos que

$$\|T_b\| = \sup_a \|\varphi_a(b)\| = \|b\|$$

y así la función $b \mapsto T_b$ de $\mathcal{A}$ a $\{T_b : b \in \mathcal{A}\} \subset L(\mathcal{H})$ cumple con las propiedades requeridas por el teorema siguiendo una aplicación ordenada del Teorema 2.73. $\square$

CAPíTULO 3

Representación de funciones completamente positivas en álgebras C^*

1. Funciones completamente positivas en álgebras C^*

NOTACIÓN. Si $\mathcal{A}$ es un álgebra C^*, denotaremos $M_{n\times n}(\mathcal{A})$ (conjunto de las matrices $n\times n$ con entradas en $\mathcal{A}$) por $\mathcal{A}^{(n)}$.

OBSERVACIÓN 3.1. Si $\mathcal{A}$ es un álgebra C^* con unidad, entonces existe un espacio de Hilbert complejo $\mathcal{H}$ tal que $\mathcal{A}$ es isométricamente isomorfo a una subálgebra con involución y cerrada $\mathcal{U}$ de $L(\mathcal{H})$, debido al Teorema 2.75. Entonces podemos identificar $M_{n\times n}(\mathcal{A})$ con $M_{n\times n}(\mathcal{U})$.

Si $T_{ij} \in \mathcal{U}$ para $1 \leq i, j \leq n$, escribiendo:

$$[T_{ij}](x_1, \ldots, x_n) = (T_{11}(x_1) + \cdots + T_{1n}(x_n), \ldots, T_{n1}(x_1) + \cdots + T_{nn}(x_n))$$

para todo $x_k \in \mathcal{H}\,(k = 1, \ldots, n)$, obtenemos que la matriz $[T_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$ es un operador lineal y acotado en $\mathcal{H} \oplus \overset{n}{\ldots} \oplus \mathcal{H}$, es decir, $[T_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \in L(\mathcal{H} \oplus \overset{n}{\ldots} \oplus \mathcal{H})$. De donde $M_{n\times n}(\mathcal{U})$ es una subálgebra de $L(\mathcal{H} \oplus \overset{n}{\cdots} \oplus \mathcal{H})$ cuya involución está dada por

$$[T_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \mapsto [T^*_{ji}]_{1\leq i,j\leq n}$$

y además $M_{n\times n}(\mathcal{U})$ es cerrada porque $\mathcal{U}$ es cerrada en $L(\mathcal{H})$.

Entonces $\mathcal{A}^{(n)}$ también es un álgebra C^* con unidad. (Ver el Ejemplo 6 de la Definición 2.45).

Si $A = [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{A}^{(n)}$, el adjunto de A está dado por

$$A^* = [a^*_{ji}]_{1\leq i,j\leq n}.$$

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras C^* y φ una función lineal de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$. Para $n \geq 1$ (entero), sea $\varphi^{(n)}$ la función de $\mathcal{A}^{(n)}$ a $\mathcal{B}^{(n)}$ dada por:

$$\varphi^{(n)}(A) = [\varphi(a_{ij})]_{1\leq i,j\leq n}$$

para todo $A = [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{A}^{(n)}$.

Tenemos que $\varphi^{(n)}$ es una función lineal debido al hecho de que φ es una función lineal y por las propiedades de suma de matrices y el producto de una matriz por un escalar.

DEFINICIÓN 3.2. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras C^* con unidad y φ una función lineal de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, diremos que φ es *completamente positiva* si para todo $A = [a_{ij}]_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{A}^{(n)},\ A \ge 0$ tenemos que $\varphi^{(n)}(A) = [\varphi(a_{ij})]_{1\le i,j\le n} \ge 0$ para cada $n \ge 1$ (entero).

EJEMPLOS.

1. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras C^* con unidad y $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un homomorfismo*, entonces ψ es completamente positivo. En efecto, sea $A = [a_{ij}]_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{A}^{(n)}, A \ge 0$, por la Proposición 2.63 existe $B = [b_{ij}]_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{A}^{(n)}$ tal que $A = B^*B$, por la definición de B^*, para cada $1 \le i, j \le n$
$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}^* \cdot b_{kj}.$$
Como ψ es un homomorfismo* tenemos que
$$\begin{aligned}[]
[\psi(a_{ij})]_{1\le i,j\le n} &= \left[\psi\left(\sum_{k=1}^{n} b_{ki}^* \cdot b_{kj}\right)\right]_{1\le i,j\le n} \\
&= \left[\sum_{k=1}^{n} \psi(b_{ki})^* \cdot \psi(b_{kj})\right]_{1\le i,j\le n} \\
&= [\psi(b_{ij})]_{1\le i,j\le n}^* \ [\psi(b_{ij})]_{1\le i,j\le n}.
\end{aligned}$$
En particular, la función definida en el Ejemplo 3 de la Definición 2.68 es completamente positiva.
2. La función definida en el Ejemplo 2 de la Definición 2.68 es completamente positiva. (Esto se obtiene en vista del Teorema 3.6).

PROPOSICIÓN 3.3. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras C^* con unidad y $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ una función completamente positiva, entonces φ es positiva.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $a \in \mathcal{A}$, $a \ge 0$, por la Proposición 2.63 existe $b \in \mathcal{A}$ tal que $a = b^* \cdot b$, si $a_{ij} = a$ para $1 \le i, j \le n$ entonces $[a_{ij}]_{1\le i,j\le n} \ge 0$ porque
$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} b & b & \dots & b \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^* \cdot \begin{bmatrix} b & b & \dots & b \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Como φ es completamente positiva tenemos que

$$[\varphi(a)_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \geq 0$$

donde $\varphi(a)_{ij} = \varphi(a)$.

Por la Proposición 2.63, existe $B = [b_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{A}^{(n)}$ tal que

$$\varphi(a)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}^* \cdot b_{kj}.$$

Como $\varphi(a)_{ij} = \varphi(a)$ para cada $1 \leq i, j \leq n$, entonces

$$\varphi(a) = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}^* \cdot b_{ki}.$$

□

Observación 3.4. Es posible pensar que una función positiva es completamente positiva. Veamos un contraejemplo que prueba que esto no siempre es cierto.

Sea $\mathcal{A} = M_{n\times n}(\mathbb{C})$, la función $\varphi : M_{n\times n}(\mathbb{C}) \to M_{n\times n}(\mathbb{C})$ dada en el Ejemplo 1 de la Definición 2.68 es positiva, sin embargo, no es completamente positiva. En efecto, sea $\widetilde{E} = [E_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{A}^{(n)}$, donde E_{ij} es la matriz dada en el Ejemplo 1 de la Definición 2.68. Tenemos que $\widetilde{E} \geq 0$ ya que

$$\widetilde{E} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & \dots & E_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^* \cdot \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & \dots & E_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

pero $\varphi^{(n)}(\widetilde{E})$ no es positiva porque

$$\sum_{i,j,r,s} (r-j)(s-i)\delta_{ir}\delta_{js} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i-j)(j-i) < 0.$$

Recordemos que se puede identificar $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ con $L(\mathbb{C}^n)$ y podemos aplicar la Proposición 2.64.

2. Condiciones para que una función positiva sea completamente positiva

OBSERVACIÓN 3.5. Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert complejo y $T_{ij} \in L(\mathcal{H})$ para $1 \leq i, j \leq n$, sabemos que $[T_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \in L(\mathcal{H} \oplus \overset{n}{\cdots} \oplus \mathcal{H})$. (Ver la Observación 3.1)

Por la Proposición 2.64, tenemos que $[T_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \geq 0$ si y sólo si

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle T_{ij}(x_j), x_i\rangle \geq 0$$

para todo $x_k \in \mathcal{H}\,(k = 1, \ldots, n)$.

TEOREMA 3.6. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con unidad y $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ un funcional lineal positivo, entonces φ es completamente positivo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $A = [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{A}^{(n)}$ tal que $A \geq 0$. Veamos que

$$[\varphi(a_{ij})]_{1\leq i,j\leq n} \geq 0.$$

Ya que podemos identificar $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ con $L(\mathbb{C}^n)$, debido a la Observación 3.5 basta probar que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \varphi(a_{ij})\,\lambda_j\,\overline{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle\varphi(a_{ij})\,\lambda_j\,,\lambda_i\rangle_n \geq 0$$

para $\lambda_i \in \mathbb{C}\,(i = 1, \ldots, n)$.

Como $A \geq 0$, por la Proposición 2.63 existe $B = [b_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{A}^{(n)}$ tal que $A = B^*B$ de donde, para cada $1 \leq i, j \leq n$, tenemos que

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}^* \cdot b_{kj}.$$

Luego

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\lambda_j\,\overline{\lambda_i} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\,\overline{\lambda_i}\sum_{k=1}^{n} b_{ki}^* \cdot b_{kj}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,b_{ki}\right)^* \cdot \left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\,b_{kj}\right).\end{aligned}$$

Por la parte (a) del Teorema 2.61, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\lambda_j\,\overline{\lambda_i} \geq 0. \tag{3.1}$$

De (3.1) y como φ es un funcional lineal y positivo, entonces

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi(a_{ij})\,\lambda_j\,\overline{\lambda_i}=\varphi\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,\lambda_j\,\overline{\lambda_i}\right)\geq 0.$$

Por lo tanto, φ es completamente positivo. □

TEOREMA 3.7. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* conmutativa con unidad, sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $\varphi : \mathcal{A} \to L(\mathcal{H})$ una función lineal positiva, entonces φ es completamente positiva.*

DEMOSTRACIÓN. Sea X un espacio de Hausdorff compacto, $X \neq \emptyset$. Podemos tomar $\mathcal{A} = \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$. Recordemos que por el Teorema 2.49 un álgebra C^* conmutativa con unidad $\mathcal{A}$ es isomorfa a $\mathcal{C}(\mathcal{M}_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})$.

Sea $A = [f_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{A}^{(n)}$, tal que $A \geq 0$. Debido a la Observación 3.5, basta probar que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle\varphi(f_{ij})x_j, x_i\rangle \geq 0$$

para $x_k \in \mathcal{H}\,(k = 1, \ldots, n)$.

Sean $x_i \in \mathcal{H}\,(i = 1, \ldots, n)$ y $\psi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ el funcional dado por

$$\psi(f) = \sum_{i=1}^{n}\langle\varphi(f)x_i, x_i\rangle$$

para todo $f \in \mathcal{A}$.

Tenemos que ψ es lineal y positivo, por la parte (b) de la Proposición 2.69, ψ es continua en $\mathcal{A}$, entonces $\psi \in \mathcal{A}^*$. Por el teorema de Riesz-Markov, existe una medida de Borel positiva regular m en X tal que

$$\sum_{i=1}^{n}\langle\varphi(f)x_i, x_i\rangle = \int_X f(\gamma)\,dm(\gamma)$$

para todo $f \in \mathcal{A}$.

Sean $\widetilde{\psi}_{ij} : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ los funcionales dados por

$$\widetilde{\psi}_{ij}(f) = \langle\varphi(f)x_j, x_i\rangle$$

para todo $f \in \mathcal{A}$.

Tenemos que $\widetilde{\psi}_{ij}$ son lineales y además continuos porque φ es continua debido a la parte (b) de la Proposición 2.69, entonces $\widetilde{\psi}_{ij} \in \mathcal{A}^*$. Por el teorema de Riesz-Markov, existen medidas de Borel complejas μ_{ij} en X tales que

$$\langle \varphi(f)x_j, x_i\rangle = \int_X f(\gamma)\, d\mu_{ij}(\gamma)$$

para todo $f \in \mathcal{A}$.

Si $f \geq 0$ y $\sum_{i=1}^n \langle \varphi(f)x_i, x_i\rangle = 0$ entonces $\langle \varphi(f)x_j\,, x_i\rangle = 0$ debido a la desigualdad de Cauchy-Schwarz generalizada,

$$|\langle \varphi(f)x_j, x_i\rangle|^2 \leq \langle \varphi(f)x_j, x_j\rangle \langle \varphi(f)x_i, x_i\rangle.$$

Si f no es positiva recordemos que esta se puede escribir como

$$f = f_1^+ - f_1^- + i(f_2^+ - f_2^-)$$

donde $f_1^+, f_1^-, f_2^+, f_2^-$ son funciones medibles a valores reales no negativos.

Por lo tanto las medidas μ_{ij} son absolutamente continuas con respecto a m. Por el teorema de Radon-Nikodym, existen funcionales medibles $h_{ij} : X \to \mathbb{C}$, tales que

$$\langle \varphi(f)x_j\,, x_i\rangle = \int_X f\, h_{ij}(\gamma)\, dm(\gamma)$$

para todo $f \in \mathcal{A}$.

Sea $f \in \mathcal{A}$ tal que $f \geq 0$, como φ es positiva $\varphi(f) \geq 0$, entonces existe $T_f \in L(\mathcal{H})$ tal que

$$\varphi(f) = T_f^* T_f$$

y tenemos que

$$[\varphi(f)]_{1\leq i,j\leq n} \geq 0$$

porque

$$[\varphi(f)]_{1\leq i,j\leq n} = \begin{bmatrix} T_f & \dots & T_f \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^* \cdot \begin{bmatrix} T_f & \dots & T_f \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Como φ y $\varphi(f)$ son lineales entonces, debido a la Observación 3.5,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle \varphi(\lambda_j\, \overline{\lambda_i}\, f)x_j\,, x_i\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle \varphi(f)\lambda_j\, x_j\,, \lambda_i\, x_i\rangle \geq 0$$

para $\lambda_k \in \mathbb{C}\,(k = 1, \dots, n)$.

De donde

$$\int_X f(\gamma) \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_{ij}(\gamma)\lambda_j\overline{\lambda_i} \right) dm(\gamma) \geq 0.$$

Luego

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_{ij}(\gamma)\lambda_j\overline{\lambda_i} \geq 0$$

casi siempre.

Entonces, para cada n existe un conjunto medible $\mathcal{E}_n$ tal que

$$m(\mathcal{E}_n) = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_{ij}\,\lambda_j\overline{\lambda_i} \geq 0 \quad \text{en} \quad \mathcal{E}_n^C.$$

Sea $\mathcal{E} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n$, tenemos que $m(\mathcal{E}) = 0$ y si $\gamma \in \mathcal{E}^C$, entonces $\gamma \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n^C$ de donde obtenemos que

$$\sum_{i,j} h_{ij}(\gamma)\lambda_j\overline{\lambda_i} \geq 0 \tag{3.2}$$

para toda r-tupla de números complejos $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, con parte real e imaginaria racionales y con la excepción de $\gamma \in \mathcal{E}$.

Ya que $A = [f_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \geq 0$, existe $B = [g_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{A}^{(n)}$ tal que $A = B^*B$, de donde

$$f_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \overline{g}_{ki}\, g_{kj}$$

para cada $1 \leq i, j \leq n$.

Así

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(\gamma)\alpha_j\,\overline{\alpha_i} \geq 0 \tag{3.3}$$

para todo $\gamma \in X$ y para $\alpha_k \in \mathbb{C}\,(k = 1, \ldots, n)$, porque

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(\gamma)\alpha_j\,\overline{\alpha_i} = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\, g_{ki}(\gamma)\right)^*\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\, g_{kj}(\gamma)\right).$$

De (3.2) y (3.3) tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(\gamma)h_{ij}(\gamma) \geq 0$$

casi siempre y así

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle\varphi(f_{ij})x_j\,,x_i\rangle = \int_X \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}\,h_{ij}(\gamma)\right) dm(\gamma) \geq 0.$$

Por lo tanto φ es completamente positiva. □

3. Representación de funciones completamente positivas en álgebras C^*

LEMA 3.8. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con unidad, sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $\varphi : \mathcal{A} \to L(\mathcal{H})$ una función*, lineal y completamente positiva, entonces la función $\langle .,. \rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}} : \mathcal{A}\otimes\mathcal{H}\times\mathcal{A}\otimes\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ dada por*

$$\langle \xi,\eta\rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\langle\varphi(b_j^*\cdot a_i)x_i, y_j\rangle$$

para todo $\xi = \sum_{i=1}^{m} a_i\otimes x_i$, $\eta = \sum_{j=1}^{n} b_j\otimes y_j \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{H}$, es un producto interno, posiblemente degenerado, en $\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}$.

DEMOSTRACIÓN. Debido a la Observación 1.12, la función $\langle .,. \rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}}$ está bien definida.

(i) Sean $\xi_1 = \sum_{i=1}^{m} a_i\otimes x_i, \xi_2 = \sum_{k=1}^{r} c_k\otimes z_k, \eta = \sum_{j=1}^{n} b_j\otimes y_j \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{H}$ y $\lambda\in\mathbb{C}$, por definición de $\langle .,. \rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}}$ y como φ es lineal tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle\lambda\xi_1+\xi_2,\eta\rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}} &= \left\langle \sum_{i=1}^{m}\lambda a_i\otimes x_i + \sum_{k=1}^{r} c_k\otimes z_k, \sum_{j=1}^{n} b_j\otimes y_j\right\rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\langle\varphi(\lambda(b_j^*\cdot a_i))x_i, y_j\rangle\right) + \left(\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{n}\langle\varphi(b_j^*\cdot c_k)z_k, y_j\rangle\right) \\
&= \lambda\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\langle\varphi(b_j^*\cdot a_i)x_i, y_j\rangle + \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{n}\langle\varphi(b_j^*\cdot c_k)z_k, y_j\rangle) \\
&= \lambda\langle\xi_1,\eta\rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}} + \langle\xi_2,\eta\rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

(ii) Sean $\xi = \sum_{i=1}^{m} a_i \otimes x_i, \eta = \sum_{j=1}^{n} b_j \otimes y_j \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{H}$. Usando la propiedad del conjugado de la suma de números complejos y el hecho de que φ es una función* tenemos que

$$\begin{aligned}
\overline{\langle \eta, \xi \rangle}_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \overline{\langle \varphi(a_i^* \cdot b_j) y_j, x_i \rangle} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \overline{\langle y_j, \varphi(a_i^* \cdot b_j)^* x_i \rangle} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \overline{\langle y_j, \varphi(b_j^* \cdot a_i) x_i \rangle} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \langle \varphi(b_j^* \cdot a_i) x_i, y_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \langle \varphi(b_j^* \cdot a_i) x_i, y_j \rangle \\
&= \langle \xi, \eta \rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

(iii) Sea $\xi = \sum_{i=1}^{m} a_i \otimes x_i \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{H}$, tenemos que $[a_j^* \cdot a_i]_{1\le j,i\le m} \geq 0$ ya que

$$[a_j^* \cdot a_i]_{1\le j,i\le m} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^* \cdot \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Como φ es completamente positiva entonces $[\varphi(a_j^* \cdot a_i)]_{1\le j,i\le m} \geq 0$ y por lo tanto

$$\langle \xi, \xi \rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \langle \varphi(a_j^* \cdot a_i) x_i, x_j \rangle \geq 0.$$

(Ver la Observación 3.5).

$\square$

LEMA 3.9. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con unidad, sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo. Para cada $a \in \mathcal{A}$, sea $\psi(a) : \mathcal{A} \otimes \mathcal{H} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{H}$ la función dada por*

$$\psi(a) \sum_{i=1}^{n} b_i \otimes y_i = \sum_{i=1}^{n} (a \cdot b_i) \otimes y_i$$

para todo $\sum_{i=1}^{n} b_i \otimes y_i \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{H}$. Entonces:

(a) *$\psi(a)$ es lineal y $\psi(a)^*$ existe.*
(b) *La función $a \mapsto \psi(a)$ de $\mathcal{A}$ a $\widetilde{L}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{H})$ es un homomorfismo*.*

DEMOSTRACIÓN.

(a) Sea $a \in \mathcal{A}$, sean $\xi = \sum_{i=1}^{n} b_i \otimes y_i, \eta = \sum_{k=1}^{m} a_k \otimes x_k \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{H}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, por (1.1), (1.2) y la definición de $\psi(a)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\psi(a)(\lambda\xi + \eta) &= \psi(a) \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda b_i \otimes y_i + \sum_{k=1}^{m} a_k \otimes x_k \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda (a \cdot b_i) \otimes y_i + \sum_{k=1}^{m} (a \cdot a_k) \otimes x_k \\
&= \lambda \psi(a) \sum_{i=1}^{n} b_i \otimes y_i + \psi(a) \sum_{k=1}^{m} a_k \otimes x_k \\
&= \lambda \psi(a)\xi + \psi(a)\eta.
\end{aligned}$$

Entonces $\psi(a)$ es lineal.

Usando la función $\langle ., . \rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}}$ dada en el Lema 3.8, tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle \psi(a)\xi, \eta \rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}} &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} (a \cdot b_i) \otimes y_i, \sum_{k=1}^{m} a_k \otimes x_k \right\rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \langle \varphi((a_k^* \cdot a) \cdot b_i) y_i, x_k \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \langle \varphi((a^* \cdot a_k)^* \cdot b_i) y_i, x_k \rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} b_i \otimes y_i, \sum_{k=1}^{m} (a^* \cdot a_k) \otimes x_k \right\rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}} \\
&= \langle \xi, \psi(a)^* \eta \rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\psi(a)^* \sum_{k=1}^{m} a_k \otimes x_k = \sum_{k=1}^{m} (a^* \cdot a_k) \otimes x_k.$$

(b) (i) Sean $a, b \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ y $\xi = \sum_{i=1}^{n} b_i \otimes y_i \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{H}$. Por (1.1),(1.2) y la definición de ψ, tenemos que

$$\begin{aligned}
\psi(\lambda a + b)\xi &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda(a \cdot b_i) \otimes y_i + (b \cdot b_i) \otimes y_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda(a \cdot b_i) \otimes y_i + \sum_{i=1}^{n} (b \cdot b_i) \otimes y_i \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{n} (a \cdot b_i) \otimes y_i + \sum_{i=1}^{n} (b \cdot b_i) \otimes y_i \\
&= \lambda \psi(a)\xi + \psi(b)\xi \\
&= (\lambda \psi(a) + \psi(b))\xi.
\end{aligned}$$

Entonces, ψ es lineal.

(ii) Sean $a, b \in \mathcal{A}$ y $\xi = \sum_{i=1}^{n} b_i \otimes y_i \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{H}$. Por la definición de ψ tenemos que

$$\begin{aligned}
\psi(a) \cdot \psi(b)\xi &= \psi(a) \sum_{i=1}^{n} (b \cdot b_i) \otimes y_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} (a \cdot b) \cdot b_i \otimes y_i \\
&= \psi(a \cdot b)\xi.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\psi(a) \cdot \psi(b) = \psi(a \cdot b).$$

(iii) Sea $\xi = \sum_{i=1}^{n} b_i \otimes y_i \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{H}$, tenemos que

$$\psi(e)\xi = \sum_{i=1}^{n} (e \cdot b_i) \otimes y_i = \sum_{i=1}^{n} b_i \otimes y_i = \xi.$$

(iv) Por la definición de $\psi(a^*)$ y $\psi(a)^*$ tenemos que

$$\psi(a^*)\xi = \sum_{i=1}^{n} (a^* \cdot b_i) \otimes y_i = \psi(a)^*\xi.$$

Por lo tanto ψ es una función*.

$\square$

TEOREMA 3.10 (Stinespring [**12**]). *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* con unidad, sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $\varphi : \mathcal{A} \to L(\mathcal{H})$ una función lineal*. Una condición necesaria y suficiente para que φ tenga la forma:*

$$\varphi(a) = T^*\phi(a)\,T$$

para todo $a \in \mathcal{A}$, donde $T \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, $\mathcal{K}$ es un espacio de Hilbert complejo y $\phi : \mathcal{A} \to L(\mathcal{K})$ es un homomorfismo*, es que φ sea completamente positiva.

DEMOSTRACIÓN.

(1) Condición de necesidad:

Sea $a \in \mathcal{A}$, supongamos que

$$\varphi(a) = T^*\phi(a)\,T.$$

Sea $A = [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{A}^{(n)}$ tal que $A \geq 0$. Sabemos que $\varphi^{(n)}(A) \in L(\mathcal{H}\oplus \cdot \overset{n}{\cdot}\cdot \oplus\mathcal{H})$. Veamos que $\varphi^{(n)}(A) \geq 0$. Para ello basta probar que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle\varphi(a_{ij})x_j, x_i\rangle \geq 0$$

para $x_k \in \mathcal{H}\,(k = 1, \ldots, n)$.(Ver la Observación 3.5).

Ya que ϕ es un homomorfismo* entonces es completamente positivo, por lo tanto la matriz $[\phi(a_{ij})]_{1\leq i,j\leq n} \in L(\mathcal{K} \oplus \cdot \overset{n}{\cdot}\cdot \oplus \mathcal{K})$ es positiva, luego

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle\varphi(a_{ij})x_j, x_i\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle T^*\phi(a_{ij})\,Tx_j, x_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle\phi(a_{ij})\,Tx_j, Tx_i\rangle \geq 0.\end{aligned}$$

(2) Condición de suficiencia:

Supongamos que φ es completamente positiva.

Consideremos el espacio vectorial $\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}$ con el producto interno (posiblemente degenerado) dado en el Lema 3.8 y sea $\psi : \mathcal{A} \to \widetilde{L}(\mathcal{A}\otimes\mathcal{H})$ la función definida en el Lema 3.9, veamos que esta función satisface:

$$\langle\psi(a)\xi, \psi(a)\xi\rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}} \leq \|a\|^2\,\langle\xi, \xi\rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}} \tag{3.4}$$

para todo $a \in \mathcal{A}$ y $\xi \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{H}$.

Si no se cumple (3.4) podemos encontrar $a \in \mathcal{A}$ y $\xi = \sum_{i=1}^{n} b_i \otimes y_i \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{H}$ tal que

$$\langle\xi, \xi\rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}} \leq 1 \quad \text{y} \quad \|a\| < 1$$

pero

$$\langle \psi(a)\xi, \psi(a)\xi \rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}} > 1.$$

Por la Proposición 2.44

$$\langle \psi([a^* \cdot a]^{2^k})\xi, \xi \rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}} > 1$$

para $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Por la Proposición 3.3, φ es positiva, como también es lineal, por la parte (b) de la Proposición 2.69 φ es continua en $\mathcal{A}$ y como $\|a\| < 1$ tenemos que

$$\begin{aligned} 1 < \langle \psi([a^* \cdot a]^{2^k})\xi, \xi \rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle \varphi(b_j^* \cdot [a^* \cdot a]^{2^k} \cdot b_i) y_i, y_j \rangle \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M\|b_j\|\|a\|^{2^{k+1}}\|b_i\|\|y_i\|\|y_j\| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

porque

$$\exp(2^{k+1}\log(\|a\|)) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Hemos llegado a una contradicción. Por lo tanto se satisface (3.4).

Sea

$$\mathcal{N} = \{\xi \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{H} : \langle \xi, \xi \rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}} = 0\}.$$

Por la Proposición 1.14, $\mathcal{N}$ es una variedad lineal de $\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}$ y también $\mathcal{N}$ es invariante bajo $\psi(a)$ para cada $a \in \mathcal{A}$, debido a (3.4).

Sabemos que la función

$$\langle [\xi]_{\mathcal{N}}, [\eta]_{\mathcal{N}} \rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}/\mathcal{N}} = \langle \xi, \eta \rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}}$$

para todo $[\xi]_{\mathcal{N}}, [\eta]_{\mathcal{N}} \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{H}/\mathcal{N}$, es un producto interno en $\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}/\mathcal{N}$ y así $\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}/\mathcal{N}$ es un pre-espacio de Hilbert.

Definamos en la completación $\mathcal{K}$ de $\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}/\mathcal{N}$ el operador $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$, dado por

$$T(x) = [e \otimes x]_{\mathcal{N}}$$

para todo $x \in \mathcal{H}$.

De (1.1) y (1.2) obtenemos que T es lineal y como $\varphi(a) \in L(\mathcal{H})$ para cada $a \in \mathcal{A}$, entonces

$$\begin{aligned}\|T(x)\|_{\mathcal{K}}^2 = \|[e \otimes x]_{\mathcal{N}}\|_{\mathcal{K}}^2 &\leq \langle e \otimes x, e \otimes x\rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}} \\ &= \langle \varphi(e^* \cdot e)x, x\rangle \\ &= \langle \varphi(e)x, x\rangle \\ &\leq \|\varphi(e)\| \, \|x\|^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto T es acotado.

Sea $\phi : \mathcal{A} \to L(\mathcal{K})$ la función dada por

$$\phi(a)([\xi]_{\mathcal{N}}) = [\psi(a)\xi]_{\mathcal{N}}$$

para todo $a \in \mathcal{A}$ y $[\xi]_{\mathcal{N}} \in \mathcal{K}$.

Si $[\xi_1]_{\mathcal{N}} = [\xi_2]_{\mathcal{N}}$ entonces $\xi_1 - \xi_2 \in \mathcal{N}$, como $\mathcal{N}$ es invariante bajo $\psi(a)$ para cada $a \in \mathcal{A}$, tenemos que $\psi(a)\xi_1 - \psi(a)\xi_2 \in \mathcal{N}$ y así $[\psi(a)\xi_1]_{\mathcal{N}} = [\psi(a)\xi_2]_{\mathcal{N}}$, por lo tanto $\phi(a)$ está bien definida.

Por la parte (b) del Lema 3.9 y las operaciones de suma y producto de clases de equivalencia tenemos que ϕ es un homomorfismo*.

Por la definición de $\psi(a)$ y el producto interno (posiblemente degenerado) definido en $\mathcal{A} \otimes \mathcal{H}$, para todo $x, y \in \mathcal{H}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\langle T^*\phi(a)\, T(x), y\rangle &= \langle \phi(a)\, T(x), T(y)\rangle_{\mathcal{K}} \\ &= \langle \phi(a)[e \otimes x]_{\mathcal{N}}, [e \otimes y]_{\mathcal{N}}\rangle_{\mathcal{K}} \\ &= \langle [a \otimes x]_{\mathcal{N}}, [e \otimes y]_{\mathcal{N}}\rangle_{\mathcal{K}} \\ &= \langle a \otimes x, e \otimes y\rangle_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{H}} \\ &= \langle \varphi(e^* \cdot a)x, y\rangle \\ &= \langle \varphi(a)x, y\rangle.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\varphi(a) = T^*\phi(a)\, T$$

para cada $a \in \mathcal{A}$.

□

Observación 3.11. Como $\varphi(e) = T^*T$, entonces si $\varphi(e) = I_{\mathcal{H}}$ tenemos que T es una isometría.

Bibliografía

[1] R. Arens , On a theorem of Gelfand and Neumark, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **32** (1946), 237-239.

[2] W. Arveson , Subalgebras of C^*-algebras, *Acta Math.* **123** (1969), 142-224.

[3] C. Betz , Introducción a la Teoría de la Medida e Integración, Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ciencias, U.C.V., 1992.

[4] J. Dixmier , C^*-algebras, North Holland, Amsterdand,1977. 2

[5] R. G. Douglas , Banach Algebra Techniques in Operator Theory, Academic Press, New York, 1972. 2

[6] W. H. Greub , Multilinear Algebra, Springer-Verlag, New York, 1967. 2, 6

[7] P. R. Halmos , Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity, 2d ed., Chelsea, New York, 1951.

[8] K. Hoffman , Algebra Lineal, Prentice-Hall Hispanoamericana, México, 1973.

[9] C. E. Rickart , General Theory of Banach Algebrasm, D. Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1960.

[10] W. Rudin , Functional Analysis, 2d ed., McGraw-Hill, Boston, 1991. 2

[11] W. Rudin , Real and Complex Analysis, 3d ed., McGraw-Hill, New York, 1987. 35

[12] W. F. Stinespring , Positive functions on C^*-algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* **6** (1955), 211-216. 2, 88