UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Representación de operadores que entrelazan al operador de traslación

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Nelson David Molina Osuna** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutor: Ramón Bruzual.

Caracas, Venezuela
Enero, 2009

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado "**Representación de operadores que entrelazan al operador de traslación**", presentado por el **Br. Nelson Molina**, titular de la Cédula de Identidad **N° 16.223.242**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Dr. Ramón Bruzual
Tutor

Dra. Marisela Domínguez
Jurado

Dra. Cristina Balderrama
Jurado

Dedicatoria

Para mis padres que mucho han trabajado para el progreso de la familia, en ciertas ocasiones haciendo sacrificios de asuntos importantes para sus vidas. Son lo mas hermoso, lo mejor...

A mis hermanas, a pesar de las diferencias siempre tengo en mente todo lo que hemos vivido, como hemos ido pasando cada una de las etapas que a pesar de las cosas que suceden hay que ir adelante, hacia el triunfo. Sus experiencias han sido muy significativas para mi con relaccion al ambito profesional y sentimental.

A mis sobrinos, para ser un ejemplo a seguir.

Al amor...

Agradecimiento

Mis padres, hermanas, sobrinos, a mi tío (el gallo), a todos por su apoyo incondicional.

A mi tutor el Dr Ramón Bruzual, por su dedicación, apoyo, paciencia y guía para la realización de este trabajo.

A las profesoras Marisela Domínguez y Cristina Balderrama por las correcciones y sugerencias.

A los profesores Eddy Pariguan, Berta Villegas, Francisco Tovar, Mairene Colina, Dalmagro Fermin, Yamilet Quintana, Adriana Guerra, Tomas Guardia, Jose Gregorio Mijares, Jose Rafael Leon, Mariela Castillo, Anakarina Fermin, Ricardo Rios, Mauricio Angel, Inés Nuñez, Jose Luis Sánchez, cada uno intervino en el desarrollo de mi aprendizaje desde que ingrese a la carrera.

A mis compañeros de estudio durante la carrera, Alejandra Ruiz, Gledys Sulbaran (Glady), Gisell Marcano, Arquimides Gonzalez, Roberto Morillo (Bigote), Jesus Yerena, Julio Nemer, Sahid Leal, Yarot Avendaño, Gonzalo Barragan, Mariolis Ribas (Maholy), Luis Paredes, Jose Gregorio Di campo, Marcia Garcia, Jenifer Figueroa, Andrés Contreras, Karelis Medina, vicky, Wendy Montero (Wamda), Migdalis Marcano (Maga), Alemar padilla, Derwin Pacheco, Fredy Hernandez (Morfi), Jesus Mata, Alejandro Gonzalez, por aquellas mañanas, tardes, noches o breves ratos de estudio, por los buenos y no tan buenos momentos que hemos compartido, por el apoyo que brindaron.

A aquellas amistades que aparecen y a pesar de solo haber compartido un instante muy corto han sido significativas, algunas todavía siguen en contacto; Yaidilys (la negra), Yamila (Camila), Oriana (Orleana), Nestor pedroso, Felix, Nairobis, karen, Alexandra.

A las amistades incondicionales que siempre han estado en aquellos momentos en los que mas se necesita de unas palabras, un apoyo: Eulises Bauza, Miguel Mejias, Maren Salas, los

Hermanos Colina, Domingo Espinoza, Caribay Sanchez, Naliza y Shiemy (Las muchachas), Tia laura, Luz Marina (La sayo).

Al Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico de la Universidad Central de Venezuela por el apoyo en la impresión de este trabajo.

A todos Gracias!!!

Índice general

Introducción

El *conmutante* de un operador lineal (o de un conjunto de operadores lineales) es el conjunto formado por los operadores que conmutan con el operador dado (o con cada uno de los operadores en el conjunto dado).

El poder determinar el conmutante de un operador es parte importante de su estudio.

En algunos casos es posible caracterizar de manera muy precisa el conmutante de un operador, entre estos casos destaca el conmutante del operador de traslación (shift) S de $L^2(\mu)$ en $L^2(\mu)$, donde μ es una medida regular no negativa definida en la circunferencia unitaria $\mathbb{T}$. El conmutante de este operador es el conjunto de los operadores de multiplicación.

Si $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ son espacios de Hilbert, $S_k : \mathcal{H}_k \to \mathcal{H}_k$ $(k = 1, 2)$, y $A : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ son operadores lineales acotados, se dice que A *entrelaza* a S_1 y S_2 si

$$AS_1 = S_2 A.$$

Este último concepto generaliza la noción de conmutación, ya que la contiene como caso particular cuando $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ y $S_1 = S_2$.

El caracterizar operadores que entrelazan determinados operadores es una técnica muy usada y que tiene diversas aplicaciones en análisis funcional, teoría de operadores y análisis armónico.

Sean μ_1 y μ_2 dos medidas no negativas en la circunferencia unitaria y sean $S_k : L^2(\mu_k) \to L^2(\mu_k)$ $(k = 1, 2)$ los correspondientes operadores de traslación. Mischa Cotlar y Alejandra Maestripieri en su libro “Representaciones de Fourier, factorización de operadores triangulares y operadores diferenciales canónicos”([**4**]), caracterizan a los operadores que entrelazan a S_1 y S_2 (ver también los trabajos de Mischa Cotlar y Cora Sadosky [**5, 6**]).

El objetivo de este trabajo es presentar, de una manera comprensible y bastante autocontenida, este resultado.

CAPíTULO 1

Preliminares

En este capítulo se presentan algunas definiciones y resultados que serán necesarios para la comprensión del siguiente trabajo. En la mayoría de los casos se ha omitido la demostración de los resultados presentados, bien sea porque forman parte de la formación básica ya obtenida en la Licenciatura en Matemática o para evitar alargar exageradamente este trabajo. Las referencias fundamentales para este capítulo son libros de W. Rudin ([**8, 9**]), el libro de C. Betz ([**1**]) y la guía de R. Bruzual y M. Domínguez ([**3**]).

1. Espacios normados y de Banach

DEFINICIÓN 1.1. Un *espacio vectorial* (o *espacio lineal*) consiste de:

(1) Un cuerpo de escalares $\mathbb{K}$
(2) Un conjunto X de objetos llamados vectores
(3) Una operación llamada suma de vectores, que asigna a cada par de vectores $x, y \in X$ un vector $x + y \in X$ llamado suma de x y de y de manera que se cumplen las siguientes propiedades
   (a) La suma es conmutativa, esto es $x + y = y + x$, para todo $x, y \in X$.
   (b) La suma es asociativa, esto es $x + (y + z) = (x + y) + z$ para todo $x, y, z \in X$.
   (c) Existe un único vector $0 \in X$ llamado vector cero, tal que $x + 0 = x$ para todo $x \in X$.
   (d) Para cada vector $x \in X$ existe un único vector $-x$ tal que $x + (-x) = 0$
(4) una operación llamada multiplicación por un escalar, que asigna a cada escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ y a cada vector $x \in X$ un vector λx, llamado producto de λ y de x de manera que que cumplen las siguientes propiedades
   (a) $1x = x$ para todo $x \in X$
   (b) $(\lambda_1\lambda_2)x = \lambda_1(\lambda_2 x)$ para todo $(\lambda_1\lambda_2) \in \mathbb{K}$, $x \in X$
   (c) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, $x, y \in X$
   (d) $(\lambda_1 + \lambda_2)x = \lambda_1 x + \lambda_2 x$, para todo $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$,$x \in X$

Cuando no hay confusión con el cuerpo de escalares, es usual referirse al espacio vectorial como X pero generalmente es deseable especificar el cuerpo de escalares y en ese caso se dice que X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ o un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

En general los espacios vectoriales que se considerarán en este trabajo son espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos.

Ejemplo 1.2.

(1) $\mathbb{C}^n$ es un espacio vectorial complejo.
(2) El conjunto de las matrices $m \times n$ con entradas en $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial complejo.
(3) Sea A un conjunto. El espacio de las funciones de A en $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial complejo.

Definición 1.3. Sea $\mathfrak{X}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. *Una norma* en $\mathfrak{X}$ es una función $\|\cdot\| : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ tal que:

(1) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in \mathfrak{X}$
(2) $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$
(3) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ para todo $x \in \mathfrak{X}$ y todo escalar $\lambda \in \mathbb{C}$
(4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in \mathfrak{X}$

En este caso se dice que $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$ es un *espacio normado*.

Sea $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea $\{x_n\}$ una sucesión en $\mathfrak{X}$. Se dice que $\{x_n\}$ *converge a* $x \in \mathfrak{X}$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un numero natural N tal que si $n \in \mathbb{N}$ y $n > N$ entonces $\|x_n - x\| < \varepsilon$ y se dice que la sucesión $\{x_n\}$ es *convergente* si existe $x \in \mathfrak{X}$ tal que $\{x_n\}$ converge a x.

Se dice que $\{x_n\}$ es una *sucesión de Cauchy* si para $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ si $n, m > N$.

Se tiene que toda sucesión convergente es de Cauchy, sin embargo existen espacios normados en los que se pueden dar ejemplos de sucesiones de Cauchy que no son convergentes. Los espacios en los que toda sucesión de Cauchy es convergente se llaman *completos*.

Definición 1.4. Un *espacio de Banach* es un espacio normado completo.

Ejemplo 1.5.

(1) $\mathbb{C}$ con la norma usual es un espacios de Banach.

(2) $l_p^n = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$ donde

$$\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

para $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$, es un espacios de Banach.

(3) $l_\infty^n = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty)$ donde

$$\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\|_\infty = \text{máx}\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}.$$

para $n \in \mathbb{N}$, es un espacios de Banach.

(4) Para $1 \leq p < \infty$ sea

$$l_p = \{(x_n)_{n\geq 1} : x_n \in \mathbb{C} \text{ y } \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty\}.$$

Para $x = (x_n)_{n\geq 1}$ se define

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

Se tiene que l_p con esta norma es un espacio de Banach.

Sean $(\mathfrak{X}_1, \| \|_{\mathfrak{X}_1})$ y $(\mathfrak{X}_2, \| \|_{\mathfrak{X}_2})$ dos espacios normados y sea

$$T : \mathfrak{X}_1 \to \mathfrak{X}_1$$

un operador lineal. Entonces T es continuo si y sólo si existe $M > 0$ tal que

$$\|Tx\|_{\mathfrak{X}_2} \leq M\|x\|_{\mathfrak{X}_1}$$

para todo $x \in \mathfrak{X}_1$. En este caso se define la *norma* del operador T por

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_{\mathfrak{X}_1}=1} \|Tx\|_{\mathfrak{X}_2}$$

y se cumple

$$\|Tx\|_{\mathfrak{X}_2} \leq \|T\|\|x\|_{\mathfrak{X}_1}$$

para todo $x \in \mathfrak{X}_1$.

2. Espacios de Hilbert

DEFINICIÓN 1.6. Sea $\mathcal{E}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Un *producto interno* en $\mathcal{E}$ es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{C}$, tal que

(1) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ para todo $x, y \in \mathcal{E}$.
(2) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ para todo $x, y, z \in \mathcal{E}$.
(3) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ para todo $x, y \in \mathcal{E}$.
(4) $\langle x, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{E}$.
(5) $\langle x, x \rangle = 0$ si y solo si $x = 0$.

Un *espacio con producto interno* es un par $(\mathcal{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ donde $\mathcal{E}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno en $\mathcal{E}$.

Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno en el espacio vectorial $\mathcal{E}$ se tiene que, si para $x \in \mathcal{E}$ se define

$$\|x\| = (\langle x, x \rangle)^{1/2},$$

entonces, $\| \ \|$ es una norma en $\mathcal{E}$. Esta norma se conoce como la norma inducida por el producto interno y es la que, usualmente, se considera en $\mathcal{H}$.

Además se cumple la desigualdad de *Cauchy-Schwarz*:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad \text{para todo} x, y, \in \mathcal{E}.$$

DEFINICIÓN 1.7. Un *espacio de Hilbert* es un espacio vectorial con producto interno que es completo con respecto a la norma inducida por el producto interno.

EJEMPLO 1.8. $\mathbb{C}^n$ es un espacio de Hilbert con el producto interno euclídeo,

$$\langle v, w \rangle_n = vw^* = \sum_{k=1}^{n} v_k \overline{w_k}$$

donde $v, w \in \mathbb{C}^n$ y w^* es el adjunto de w.

EJEMPLO 1.9. El espacio

$$l_2(\mathbb{Z}) = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \ : \ x_n \in \mathbb{C} \ y \ \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^2 < \infty \right\},$$

es un espacio de Hilbert, con el producto interno dado por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \overline{y_n}.$$

Ejemplo 1.10. El espacio

$$l_2(\mathbb{N}) = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \,:\, x_n \in \mathbb{C} \text{ y } \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^2 < \infty \right\},$$

es un espacio de Hilbert, con el producto interno dado por

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \overline{y_n}.$$

Es importante destacar que $l_2(\mathbb{N})$ se puede considerar como un subespacio de $l_2(\mathbb{Z})$, si se identifica la sucesión $(x_0, x_1, \dots)$ con la sucesión $(\dots, 0, 0, x_0, x_1, \dots)$

Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $y \in \mathcal{H}$ entonces, por las propiedades del producto interno y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, el funcional $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$, definido por

$$f(x) = \langle x, y\rangle \text{ para } x \in \mathcal{H}$$

es lineal y continuo.

El siguiente teorema, que se debe a Riesz, garantiza que todos los funcionales lineales y continuos de un espacio de Hilbert se obtienen de esta manera, más precisamente.

Teorema 1.11 (Teorema de Representación de Riesz). *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea f un funcional lineal y continuo de $\mathcal{H}$ en $\mathbb{C}$. Entonces existe un único $y \in \mathcal{H}$ tal que*

$$f(x) = \langle x, y\rangle \text{ para todo } x \in \mathcal{H}.$$

Además $\|f\| = \|y\|$.

2.1. Funcionales sesquilineales.

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert con producto interno $\langle\ ,\ \rangle$.

Definición 1.12. Un *funcional sesquilineal* en $\mathcal{H}$ es una función

$$\mathcal{A} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$$

que satisface

(1) $\mathcal{A}(\alpha x_1 + x_2, y) = \alpha\mathcal{A}(x_1, y) + \mathcal{A}(x_2, y)$ para todo $x_1, x_2, y \in \mathcal{H}$, $\alpha \in \mathbb{C}$.
(2) $\mathcal{A}(x, \alpha y_1 + y_2) = \overline{\alpha}\mathcal{A}(x, y_1) + \mathcal{A}(x, y_2)$ para todo $x, y_1, y_2 \in \mathcal{H}$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Se dice que el funcional sesquilineal $\mathcal{A} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ es *acotado* si

$$\sup \{|\mathcal{A}(x, y)| : \|x\| = \|y\| = 1\} < \infty,$$

en este caso se define la *norma* del funcional sesquilineal por

$$\|\mathcal{A}\| = \sup \{|\mathcal{A}(x, y)| : \|x\| = \|y\| = 1\}$$

y se tiene que

$$|\mathcal{A}(x, y)| \leq \|\mathcal{A}\| \|x\| \|y\| \text{ para todo } x, y \in \mathcal{H}.$$

TEOREMA 1.13. *Si $\mathcal{A} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ es una forma sesquilineal y acotada, entonces existe un único operador lineal $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que*

$$\mathcal{A}(x, y) = \langle Ax, y \rangle \quad \textit{para todo } x \in \mathcal{H}, y \in \mathcal{H}.$$

Además $\|A\| = \|\mathcal{A}\|$.

DEMOSTRACIÓN. Para $x \in \mathcal{H}$, se define el funcional lineal $f_x : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ por

$$f_x(y) = \overline{\mathcal{A}(x, y)},$$

entonces

$$|f_x(y)| = |\mathcal{A}(x, y)| \leq \|\mathcal{A}\| \|x\| \|y\|,$$

por lo tanto f_x es continuo. Por el teorema de Representación de Riesz, existe un único elemento $z_x \in \mathcal{H}$ tal que

$$f_x(y) = \langle y, z_x \rangle \quad \text{para todo} \quad y \in \mathcal{H},$$

luego

$$\mathcal{A}(x, y) = \langle z_x, y \rangle$$

Se define $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ por

$$Ax = z_x.$$

Por construcción se tiene que

$$\mathcal{A}(x, y) = \langle Ax, y \rangle \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H}, y \in \mathcal{H}.$$

Sean $x_1, x_2, y \in \mathcal{H}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned}\langle A(\alpha x_1 + x_2), y\rangle =&\mathcal{A}(\alpha x_1 + x_2, y)\\ &= \alpha\mathcal{A}(x_1, y) + \mathcal{A}(x_2, y)\\ &= \alpha\langle Ax_1, y\rangle + \langle Ax_2, y\rangle.\\ &= \langle \alpha Ax_1 + Ax_2, y\rangle,\end{aligned}$$

por lo tanto

$$A(\alpha x_1 + x_2) = \alpha Ax_1 + Ax_2,$$

es decir A es lineal.

Como $\mathcal{A}$ es acotado se tiene que

$$|\langle Ax, y\rangle| = |\mathcal{A}(x, y)| \leq \|\mathcal{A}\|\|x\|\|y\|$$

para todo $x, y \in \mathcal{H}$. Tomando $y = Ax$, se obtiene

$$\|Ax\|^2 = |\langle Ax, Ax\rangle| = |\mathcal{A}(Ax, x)| \leq \|\mathcal{A}\|\|Ax\|\|x\|,$$

de donde se deduce que

$$\|Ax\| \leq \|\mathcal{A}\|\|x\| \text{ para todo } x \in \mathcal{H}.$$

Por lo tanto A es continuo y $\|A\| \leq \|\mathcal{A}\|$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que $\|\mathcal{A}\| \leq \|A\|$ y por lo tanto se cumple la igualdad.

Finalmente la unicidad del operador A sigue de las propiedades del producto interno.

□

2.2. Adjunto de un operador.

Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ denota al conjunto de los operadores lineales y acotados de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}$.

Nuevamente, sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Del Teorema 1.13 se deduce, de manera sencilla, el siguiente resultado.

Teorema 1.14. *Si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ entonces existe un único operador $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$$

para todo $x, y \in \mathcal{H}$. Además se tiene que $\|T\| = \|T^*\|$.

El operador T^* se llama el *adjunto* de T.

Definición 1.15. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ se dice que T es un operador

(1) *normal* si $T^*T = TT^*$,

(2) *unitario* si $T^*T = TT^* = I$,

(3) *isométrico* si $T^*T = I$,

donde I denota al operador identidad.

De las propiedades del operador adjunto sigue que un operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es isométrico si y sólo si

$$\langle Tx, Tx\rangle = \langle x, x\rangle \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H},$$

lo que equivale a

$$\|Tx\| = \|x\| \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H}.$$

Además un operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es unitario si y sólo si T es isométrico y sobreyectivo.

Ejemplo 1.16. Sea $U : l^2(\mathbb{Z}) \to l^2(\mathbb{Z})$ el operador definido por

$$U((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (x_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Entonces U es isométrico y sobreyectivo, por lo tanto U es unitario.

Ejemplo 1.17. Sea $V : l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$ la el operador definido por

$$(Vx)_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ x_{n-1} & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

Entonces V es isométrico y no es sobreyectivo, por lo tanto V es una isometría no unitaria.

Observación 1.18. Sean U y V los operadores definidos anteriormente. Es importante destacar que, con la identificación señalada en el Ejemplo 1.10, V es restricción de U al subespacio $l^2(\mathbb{N})$.

Al operador U se le suele llamar *operador de traslación bilateral*, o *shift bilateral* y al operador V se le suele llamar *operador de traslación unilateral* o *shift unilateral*.

2.3. Suma directa de espacios de Hilbert y representación matricial de operadores.

Sean $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ espacios de Hilbert con producto interno $\langle\ ,\ \rangle_{\mathcal{H}_1}$ y $\langle\ ,\ \rangle_{\mathcal{H}_2}$ respectivamente. Para $(f_1, g_1), (f_2, g_2) \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ se define

$$\langle (f_1, g_1), (f_2, g_2) \rangle = \langle f_1, g_1 \rangle_{\mathcal{H}_1} + \langle f_2, g_2 \rangle_{\mathcal{H}_2}.$$

Se tiene que $\langle\ ,\ \rangle$ así definido es un producto interno en $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ y con este producto interno, $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ es un espacio de Hilbert.

La *suma directa de* $\mathcal{H}_1$ *y* $\mathcal{H}_2$ es el espacio $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ con el producto interno definido anteriormente y se denota por $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$.

Es usual denotar al par (f, g) por $f \oplus g$ o también como vector columna

$$\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}.$$

Si $T : \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ es un operador lineal y acotado, entonces se tiene que

$$T(f \oplus g) = (T_{11} f + T_{12} g) \oplus (T_{21} f + T_{22} g),$$

donde

$$T_{ij} : \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_i$$

es un operador lineal y continuo $(i, j = 1, 2)$.

En este caso es usual representar a T por la matriz de operadores

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$$

y, en la notación de vectores columna se tiene que

$$T \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} f + T_{12} g \\ T_{21} f + T_{22} g \end{bmatrix}.$$

3. Nociones generales de teoría de la medida

3.1. Definiciones básicas.

Sea X un conjunto y sea $\mathcal{P}(X)$ el conjunto de partes de X. Un conjunto $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ es una *σ-álgebra* si

(1) $\emptyset \in \mathcal{F}$,

(2) $\mathcal{F}$ estable bajo complemento, es decir, para todo $A \in \mathcal{F}$ se tiene $A^c \in \mathcal{F}$,

(3) $\mathcal{F}$ es estable bajo uniones numerables, es decir, para toda colección $\{A_n\} \subset \mathcal{F}$ se tiene que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}.$$

Al par $(X, \mathcal{F})$ se le suele llamar *espacio medible* y a los elementos de $\mathcal{F}$ se les suele llamar *conjuntos medibles*.

Si $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible y $f : X \to \mathbb{R}$ (ó $\mathbb{C}$) es una función, se dice que f es *medible* con respecto a la σ-álgebra $\mathcal{F}$ si la imagen inversa bajo f de un abierto en $\mathbb{R}$ (ó $\mathbb{C}$) es medible (es decir, está en $\mathcal{F}$).

Si X es un conjunto y A es un subconjunto de $\mathcal{P}(X)$ existe una σ-álgebra contenida en $\mathcal{P}(X)$, que es la σ-álgebra más pequeña que contiene a A. Esta σ-álgebra se conoce con el nombre de *σ-álgebra generada* por A

Si X es un espacio topológico, la *σ-álgebra de Borel* de X es la σ-álgebra generada por los abiertos y se dice que una función de X en $\mathbb{R}$ (ó $\mathbb{C}$) es *medible Borel* si f es medible con respecto a la σ-álgebra de Borel. Los elementos de la σ-álgebra de Borel son llamados *borelianos*.

Sea $\overline{\mathbb{R}^+} = [0, \infty) \cup \{\infty\}$, con las operaciones usuales extendidas ($a(+\infty) = +\infty$ si $a > 0$, $a + \infty = +\infty$ si $a \in \mathbb{R}$, etc).

Definición 1.19. Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible.

(1) Una *medida no negativa* en $(X, \mathcal{F})$ es una función $\mu : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ tal que
   (a) $\mu(\emptyset) = 0$,
   (b) Si $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una colección de conjuntos disjuntos de $\mathcal{F}$, entonces

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

(2) Una *medida compleja* en $(X,\mathcal{F})$ es una función $\mu:\mathcal{F}\to\mathbb{C}$ tal que si $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una colección de conjuntos disjuntos de $\mathcal{F}$, entonces

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n).$$

Es importante destacar que las medidas complejas no pueden tomar valores infinitos y que la primera condición en la definición de medida no negativa equivale a pedir que exista al menos un conjunto de medida finita.

Se dice que una medida no negativa μ es *finita* si $\mu(X)<\infty$ y se dice que μ es *σ-finita* si existe una sucesión $\{A_n\}$ de conjuntos medibles tales que

$$X=\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

y cada A_n es de medida finita.

3.2. Espacios L^p.

Sea μ una medida no negativa en el espacio medible $(X,\mathcal{F})$. Para $1\le p<\infty$ se define el espacio $L^p_\mu(X)$ por

$$L^p_\mu(X)=\left\{f:X\to\mathbb{C}\text{ tales que }f\text{ es medible y }\int_X |f(\xi)|^p d\mu<\infty\right\}$$

y, para $f\in L^p_\mu(X)$ se define

$$\|f\|_p=\left(\int_X |f(\xi)|^p\right)^{1/p}.$$

Si $f:X\to\overline{\mathbb{R}^+}$ es una función medible, se define el *supremo esencial* de f denotado por $\text{supess}f$ como

$$\text{supess}f=\text{ínf}\{M>0:\mu\{x\in X:f(x)>M\}=0\},$$

y para $f:X\to\mathbb{C}$ medible se define

$$\|f\|_\infty=\text{supess}|f|.$$

Se define el espacio $L^\infty_\mu(X)$ por

$$L^\infty_\mu(X)=\{f:X\to\mathbb{C}\text{ tales que }\|f\|_\infty<\infty\}.$$

Si $1\le p\le\infty$, entonces $\|\ \|_p$ es una norma en el espacio $L^p_\mu(X)$ y, con esta norma, $L^p_\mu(X)$ es un espacio de Banach.

3.3. Convergencia en casi todo punto.

Sea μ una medida no negativa en el espacio medible $(X, \mathcal{F})$. Se dice que una propiedad P se cumple en *casi todo punto* (abreviado c.t.p.), si el conjunto de los puntos de X en los que no se cumple P tiene medida 0.

Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles de X en $\mathbb{C}$ se dice que la sucesión $\{f_n\}$ converge a f en *casi todo punto* (c.t.p) si

$$\mu\{x \in X : f_n(x) \text{ no converge a } f(x)\} = 0.$$

Es decir, $\{f_n\}$ converge puntualmente a f, excepto en un conjunto de medida cero.

El siguiente resultado será utilizado más adelante.

Si $1 \leq p < \infty$ y $f_n : X \to \mathbb{C}$ es una sucesión de funciones medibles que converge a f en $\| \, \|_p$, entonces existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ de $\{f_n\}$ que converge a f en casi todo punto.

3.4. Medidas absolutamente continuas.

Definición 1.20. Sea μ una medida positiva en una σ-álgebra $\mathcal{F}$, y sea λ una medida arbitraria en $\mathcal{F}$ (λ podría ser no negativa o compleja). Se dice que λ es *absolutamente continua* con respecto a μ y se escribe $\lambda \ll \mu$, si $\lambda(E) = 0$ para cada $E \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(E) = 0$.

El siguiente resultado, conocido como teorema de Radon-Nikodym será utilizado más adelante.

Teorema 1.21. *Sea μ una medida no negativa y σ- finita en el espacio medible $(X, \mathcal{F})$. Sea $\nu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ otra medida σ-finita tal que $\nu \ll \mu$. Entonces existe $f \in L^1_\mu(X)$ tal que*

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu$$

para todo $E \in \mathcal{F}$.

La función f es única en c.t.p-μ, se conoce con el nombre de densidad de ν con respecto a μ y es usual escribir

$$d\nu = f \, d\mu.$$

3.5. Medidas regulares.

Sean X un espacio topológico y μ una medida de Borel en X. Se dice que μ es *regular* si se cumplen las siguientes dos condiciones

(1) Para todo Boreliano E se tiene que

$$\mu(E) = \text{ínf}\{\mu(V) : E \subset V, V \text{ abierto }\},$$

(2) Si E es un conjunto de Borel de medida finita, entonces

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, K \text{ compacto }\}.$$

El siguiente resultado será utilizado más adelante.

Sean X un espacio de Hausdorff compacto, μ una medida de Borel no negativa y regular y $1 \leq p < \infty$. Entonces el conjunto de las funciones continuas es denso en $L^p_\mu(X)$.

4. El caso complejo del teorema de Stone-Weierstrass

Sea X un espacio de Hausdorff compacto, se define $C(X, \mathbb{C})$ como el conjunto de las funciones $f : X \to \mathbb{C}$ continuas. Se tiene que $C(X, \mathbb{C})$ es un espacio de Banach, con la norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Además, con el producto puntual de funciones, $C(X, \mathbb{C})$ es un álgebra.

El teorema de Stone-Weierstrass (caso complejo) establece lo siguiente.

Sea X un espacio de Hausdorff compacto. Sea Λ una subalgebra de $C(X, \mathbb{C})$ tal que

(1) Λ *separa puntos de* X

(2) Λ *contiene las funciones constantes*

(3) Λ *es estable con respecto a la conjugación*

Entonces Λ es densa en $C(X, \mathbb{C})$.

5. El espacio $L^2_\mu(\mathbb{T})$

Sea $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ la circunferencia unitaria, entonces $\mathbb{T}$ es un espacio métrico compacto. Con el cambio de variable $z = e^{it}$ puede identificarse con el intervalo $[-\pi, \pi]$, con los extremos $-\pi$ y π identificados.

Sean $\mathcal{P}$ el conjunto de los polinomios trigonométricos, $\mathcal{P}^+$ el conjunto de los polinomios trigonométricos analíticos y $\mathcal{P}^-$ el conjunto de los polinomios trigonométricos anti-analíticos, es decir

$$\mathcal{P} = \left\{ \sum_{n=-N}^{N} a_n z^n \ : \ N \in \mathbb{N},\ a_n \in \mathbb{C} \right\},$$

$$\mathcal{P}^+ = \left\{ \sum_{n=0}^{N} a_n z^n \ : \ N \in \mathbb{N},\ a_n \in \mathbb{C} \right\},$$

$$\mathcal{P}^- = \left\{ \sum_{n=-N}^{-1} a_n z^n \ : \ N \in \mathbb{N},\ a_n \in \mathbb{C} \right\}.$$

Entonces $\mathcal{P}$ es una subálgebra de $C(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ que separa puntos y que contiene las constantes. Además, como para $z \in \mathbb{T}$ se tiene que $\overline{z} = z^{-1}$ se tiene que $\mathcal{P}$ es estable con respecto a la conjugación. Por el teorema de Stone-Weierstrass se tiene que $\mathcal{P}$ es denso en $C(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ (con respecto a la norma $\| \, \|_\infty$).

Sea μ una medida de Borel no negativa y regular en $\mathbb{T}$. El espacio $L^2_\mu(\mathbb{T})$ definido en la sección 3,2 es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{T}} f(z)\overline{g(z)}\, d\mu(z).$$

Por ser μ regular se tiene que el conjunto de las funciones continuas $C(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ es denso en $L^2_\mu(\mathbb{T})$ y, como la convergencia en $\| \, \|_\infty$ implica la convergencia en $\| \, \|_2$, se tiene que el conjunto de los polinomios trigonométricos $\mathcal{P}$ es denso en $L^2_\mu(\mathbb{T})$.

El espacio $H^2_\mu(\mathbb{T})$ se define como la clausura de $\mathcal{P}^+$ en $L^2_\mu(\mathbb{T})$.

6. Matrices positivas de medidas

Una medida matricial de Borel (2×2) en $\mathbb{T}$ es una matriz $\Gamma = (\mu_{ij})^2_{i,j=1}$ donde cada μ_{ij} es una medida de Borel en $\mathbb{T}$.

Se dice que la medida matricial Γ es *positiva* si para cada $\Delta \subset \mathbb{T}$ de Borel, la matriz $(\mu_{ij}(\Delta))^2_{i,j=1}$ es definida positiva, es decir si

$$\sum_{i,j=1}^{2} \mu_{ij}(\Delta)\lambda_i\overline{\lambda_j} \geq 0$$

para cada $\Delta \subset \mathbb{T}$ de Borel, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.

Esta condición equivale a

$$\mu_{11}(\Delta) \geq 0, \quad \mu_{22}(\Delta) \geq 0, \quad \mu_{21}(\Delta) = \overline{\mu_{12}(\Delta)},$$

$$|\mu_{12}(\Delta)|^2 \leq \mu_{11}(\Delta)\mu_{22}(\Delta)$$

para todo $\Delta \subset \mathbb{T}$ de Borel.

Poniendo $\mu = \frac{1}{2}(\mu_{11} + \mu_{22})$, se tiene que μ es una medida positiva y $\mu(\Delta) = 0$ implica $\mu_{11}(\Delta) = \mu_{22}(\Delta) = \mu_{21}(\Delta) = \mu_{12}(\Delta) = 0$

CAPíTULO 2

Operadores que conmutan con el operador de traslación

1. El operador de traslación

Sea μ una medida de Borel positiva, finita y regular en $\mathbb{T}$. Para $\varphi \in L^\infty_\mu(\mathbb{T})$ y $f \in L^2_\mu(\mathbb{T})$ se define el *operador de multiplicación por* φ, M_φ por

$$M_\varphi f = \varphi\, f.$$

Proposición 2.1. *Se tiene que $M_\varphi : L^2_\mu(\mathbb{T}) \to L^2_\mu(\mathbb{T})$ es un operador lineal, continuo y*

$$\|M_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty.$$

Demostración. Es claro que M_φ es lineal. Para mostrar que $M_\varphi f \in L^2_\mu(\mathbb{T})$ si $f \in L^2_\mu(\mathbb{T})$ y la acotación de la norma, basta notar que

$$\|M_\varphi\, f\|^2 = \int_{\mathbb{T}} |\varphi(\xi) f(\xi)|^2\, d\mu(\xi) \leq \|\varphi\|^2_\infty \int_{\mathbb{T}} |f(\xi)|^2\, d\mu(\xi).$$

□

1.1. El operador de traslación unidimensional.

Sea $e_1 : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ la función definida por

$$e_1(z) = z.$$

Es claro que $e_1 \in L^\infty_\mu(\mathbb{T})$ y que $\|e_1\|_\infty = 1$.

Definición 2.2. El *operador de traslación (o shift)* es el operador $S : L^2_\mu(\mathbb{T}) \to L^2_\mu(\mathbb{T})$ definido por $S = M_{e_1}$, es decir

$$(Sf)(z) = zf(z).$$

Proposición 2.3. *El operador de traslación es unitario.*

Demostración. La sobreyectividad sigue de que si $g(z) = z^{-1}f(z)$, entonces $Sg = f$. Si $f, g \in L^2_\mu(\mathbb{T})$, entonces

$$\begin{aligned}\langle Sf, Sg\rangle &= \int_{\mathbb{T}} zf(z)\overline{zg(z)}\,d\mu(z) = \int_{\mathbb{T}} zf(z)z^{-1}\overline{g(z)}\,d\mu(z)\\ &= \int_{\mathbb{T}} f(z)\overline{g(z)}\,d\mu(z) = \langle f, g\rangle\end{aligned}$$

□

Si $p(z) = \sum_{n=-N}^{N} a_n z^n$ es un polinomio trigonométrico, entonces

$$(Sp)(z) = \sum_{n=-N}^{N} a_n z^{n+1} = \sum_{n=-N+1}^{N+1} a_{n-1} z^n.$$

Por lo tanto S deja invariante al espacio de los polinomios trigonométricos. También es claro que S deja invariante al espacio de los polinomios analíticos y por lo tanto deja invariante al espacio $H^2_\mu(\mathbb{T})$.

La restricción de S al espacio $H^2_\mu(\mathbb{T})$ se suele llamar *operador de traslación unilateral* y, en este mismo contexto, al operador S se le suele llamar *operador de traslación bilateral.* Al referirse a operador de traslación se entenderá que se está haciendo referencia al operador de traslación bilateral.

Observación 2.4. Si μ es la medida de Lebesgue, entonces la transformada de Fourier

$$f \mapsto (\widehat{f}(n))$$

es un isomorfismo isométrico entre $L^2_\mu(\mathbb{T})$ y $l^2(\mathbb{Z})$.

Por lo tanto, cada elemento de $L^2_\mu(\mathbb{T})$ se puede identificar con una sucesión en $l^2(\mathbb{Z})$.

Con esta identificación el operador de traslación bilateral corresponde con el operador del Ejemplo 1.16 y el operador de traslación unilateral corresponde con el operador del Ejemplo 1.17. Para más detalles ver [**7**].

1.2. El operador de traslación bidimensional.

Sean μ_1 y μ_2 dos medidas de Borel positivas, finitas y regulares en $\mathbb{T}$.

Definición 2.5. El *operador de traslación bidimensional*

$$S : L^2_{\mu_1}(\mathbb{T}) \oplus L^2_{\mu_2}(\mathbb{T}) \to L^2_{\mu_1}(\mathbb{T}) \oplus L^2_{\mu_2}(\mathbb{T})$$

es el operador definido por

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix},$$

donde $S_1 : L^2_{\mu_1}(\mathbb{T}) \to L^2_{\mu_1}(\mathbb{T})$ y $S_2 : L^2_{\mu_2}(\mathbb{T}) \to L^2_{\mu_2}(\mathbb{T})$ son los operadores de traslación en $L^2_{\mu_1}(\mathbb{T})$ y $L^2_{\mu_2}(\mathbb{T})$ respectivamente.

2. Conmutante del operador de traslación unidimensional

Tal como se dijo en la introducción, el *conmutante* de un operador es el conjunto de los operadores que conmutan con el operador.

Sea μ una medida de Borel no negativa y regular en la circunferencia $\mathbb{T}$ y sea

$$S : L^2_\mu(\mathbb{T}) \to L^2_\mu(\mathbb{T})$$

el operador de traslación.

Si $\varphi \in L^\infty_\mu(\mathbb{T})$ entonces se tiene que S conmuta con el operador de multiplicación por φ, es decir

$$S\, M_\varphi = M_\varphi\, S.$$

A continuación se probará que todo operador que conmuta con el operador de traslación S es de la forma M_φ, para alguna función $\varphi \in L^\infty_\mu(\mathbb{T})$.

TEOREMA 2.6. *Sea $\mathcal{H} = L^2_\mu(\mathbb{T})$. Si $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ conmuta con S entonces existe una única función $\varphi \in L^\infty_\mu(\mathbb{T})$ tal que*

$$A = M_\varphi.$$

Además $\|A\| = \|\varphi\|_\infty$.

DEMOSTRACIÓN.

Sea $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que $AS = SA$.

Para $n \in \mathbb{Z}$, sea $e_n \in L^2(\mathbb{T})$ la función definida por

$$e_n(z) = z^n,$$

entonces

$$e_0(z) \equiv 1 \quad \text{y} \quad Se_n = e_{n+1}.$$

Además

$$S^n e_0 = e_n \qquad\qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots ,$$

Sea

$$\varphi(z) = (Ae_0)(z),$$

entonces

$$\varphi \in L^2_\mu(\mathbb{T}).$$

Como A conmuta con S, se tiene que A conmuta con S^n para $n \in \mathbb{Z}$. Luego, si $n \in \mathbb{Z}$ y $z \in \mathbb{T}$, se tiene que

$$(Ae_n)(z) = (AS^n e_0)(z) = (S^n Ae_0)(z) = z^n \varphi(z).$$

Sea p un polinomio trigonométrico, es decir

$$p(z) = \sum_{n=-N}^{N} a_n z^n \quad \text{ para } z \in \mathbb{T},$$

donde $a_{-N}, \dots a_N \in \mathbb{C}$.

Entonces

$$\begin{aligned}(Ap)(z) &= \left(A\left(\sum_{n=-N}^{N} a_n S^n e_0\right)\right)(z) = \sum_{n=-N}^{N} a_n (AS^n e_0)(z) = \sum_{n=-N}^{N} a_n (S^n A e_0)(z) \\ &= \sum_{n=-N}^{N} a_n z^n (Ae_0)(z) = \left(\sum_{n=-N}^{N} a_n z^n\right)\varphi(z) = p(z)\varphi(z).\end{aligned}$$

Sea $f \in L^2_\mu(\mathbb{T})$, entonces (ver página 14) existe una sucesión de polinomios trigonométricos $\{p_n\}$ tal que

$$\|p_n - f\|_{L^2_\mu} \to 0.$$

Por la continuidad de A se tiene que

$$\|Af - Ap_n\|_{L^2_\mu} \to 0.$$

Como la sucesión $\{Ap_n\}$ converge a Af en la norma de $L^2_\mu(\mathbb{T})$, se tiene que existe una subsucesión $\{Ap_{n_k}\}$ de $\{Ap_n\}$ tal que la sucesión numérica $\{Ap_{n_k}(z)\}$ converge en casi todo punto (con respecto a μ) a $Af(z)$.

Por la misma razón existe una subsucesión $\{p_{n_{k_j}}\}$ de $\{p_{n_k}\}$ tal que la sucesión numérica $\{p_{n_{k_j}}(z)\}$ converge en casi todo punto z (con respecto a μ) a $f(z)$.

Por lo tanto

$$Af(z) = \lim_{j\to\infty}(Ap_{n_{k_j}})(z) = \lim_{j\to\infty}\varphi(z)p_{n_{k_j}}(z) = \varphi(z)f(z),$$

en casi todo punto z (con respecto a μ).

Luego

$$Af = \varphi f \text{ para toda } f \in L^2_\mu(\mathbb{T}).$$

Como A es un operador acotado se tiene que, para toda $f \in L^2_\mu(\mathbb{T})$,

$$\|\varphi f\|_{L^2_\mu} = \|Af\|_{L^2_\mu} \leq \|A\|\|f\|_{L^2_\mu},$$

es decir

$$\int_{\mathbb{T}} |\varphi(z)f(z)|^2 d\mu(z) \leq \|A\|^2 \int_{\mathbb{T}} |f(z)|^2 d\mu(z) \tag{2.1}$$

Para $\varepsilon > 0$, sea $E_\varepsilon = \{z \in \mathbb{T} : |\varphi(z)| \geq \|A\| + \varepsilon\}$. Aplicando la desigualdad (2.1) a la función $\chi_{E_\varepsilon} \in L^2_\mu(\mathbb{T})$ se obtiene

$$\int_{E_\varepsilon} |\varphi(z)|^2 d\mu(z) \leq \|A\|^2 \mu(E_\varepsilon).$$

Por otra parte

$$\int_{E_\varepsilon} |\varphi(z)|^2 d\mu(z) \geq (\|A\| + \varepsilon)^2 \mu(E_\varepsilon),$$

luego

$$(\|A\| + \varepsilon)^2 \mu(E_\varepsilon) \leq \|A\|^2 \mu(E_\varepsilon)$$

de donde se deduce que $\mu(E_\varepsilon) = 0$.

Finalmente

$$\mu\{z \in \mathbb{T} : |\varphi(z)| > \|A\|\} = \mu\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_{\frac{1}{n}}\right\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(E_{\frac{1}{n}}\right) = 0,$$

de donde se concluye que

$$\|\varphi\|_\infty \leq \|A\|.$$

De la Proposición 2.1 sigue la igualdad.

□

Observación 2.7. Una generalización de este resultado, en la que se considera el operador de traslación restringido a un subespacio invariante contenido en $H^2(\mathbb{T})$, fue probada por D. Sarason en su trabajo [**10**]. Esta generalización permite un enfoque unificado de una gran variedad de problemas de interpolación y sirvió de base para muchos trabajos posteriores.

Definición 2.8. Sea $\mathcal{A}$ una forma sesquilineal en $L^2_\mu(\mathbb{T})$. Se dice que $\mathcal{A}$ es *S-invariante* si

$$\mathcal{A}(Sf, Sg) = \mathcal{A}(f, g)$$

para todo $f, g \in L^2_\mu(\mathbb{T})$.

Proposición 2.9. *Sean A un operador acotado en $L^2_\mu(\mathbb{T})$ y $\mathcal{A}$ la forma sesquilineal asociada al operador A. Entonces A conmuta con S si y sólo si la forma sesquilineal $\mathcal{A}$ es S-invariante.*

Demostración.

Sean $f, g \in L^2_\mu(\mathbb{T})$, si A conmuta con S entonces

$$\mathcal{A}(Sf, Sg) = \langle ASf, Sg \rangle = \langle SAf, Sg \rangle = \langle Af, g \rangle = \mathcal{A}(f, g).$$

Supóngase que $\mathcal{A}$ es S-invariante, entonces

$$\langle ASf, Sg \rangle = \langle Af, g \rangle$$

para todo par $f, g \in L^2_\mu(\mathbb{T})$.

Como S es unitario se tiene que $\langle ASf, Sg \rangle = \langle S^{-1}ASf, g \rangle$, por lo tanto

$$\langle S^{-1}ASf, g \rangle = \langle Af, g \rangle$$

para todo par $f, g \in L^2_\mu(\mathbb{T})$ de donde se concluye que

$$S^{-1}AS = A,$$

es decir

$$AS = SA.$$

$\square$

TEOREMA 2.10. *Si* $\mathcal{A} : L^2_\mu(\mathbb{T}) \times L^2_\mu(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ *es una forma sesquilineal acotada y* S*-invariante, entonces existe una función* $\varphi \in L^\infty_\mu(\mathbb{T})$ *tal que*

$$\mathcal{A}(f,g) = \int_{\mathbb{T}} f(z)\overline{g(z)}\varphi(z)d\mu(z) \text{ para todo } f,g \in L^2_\mu(\mathbb{T}).$$

Además $\|\varphi\|_\infty = \|\mathcal{A}\|$.

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 1.13 existe una operador acotado $A : L^2_\mu(\mathbb{T}) \to L^2_\mu(\mathbb{T})$ tal que

$$\mathcal{A}(f,g) = \langle Af, g\rangle \quad \text{para } f,g \in \mathcal{H}.$$

Como $\mathcal{A}$ es S-invariante, por la Proposición anterior se tiene que A conmuta con S. Por el Teorema 2.6, existe una función $\varphi \in L^\infty_\mu(\mathbb{T})$ tal

$$Af = \varphi f \text{ para } f \in L^2(\mathbb{T}) \text{ y } \|\varphi\|_\infty = \|A\|$$

Ahora bien,

$$\mathcal{A}(f,g) = \langle Af, g\rangle = \langle \varphi f, g\rangle = \int_{\mathbb{T}} (\varphi f)(z)\overline{g(z)}d\mu(z).$$

Por lo tanto

$$\mathcal{A}(f,g) = \int_{\mathbb{T}} \varphi(z)f(z)\overline{g(z)}d\mu(z) \text{ para todo } f,g \in L^2_\mu(\mathbb{T})$$

y $\|\mathcal{A}\| = \|A\| = \|\varphi\|_\infty$ □

3. Conmutante del operador de traslación bidimensional

El siguiente teorema es una generalización parcial del Teorema 2.6 y caracteriza a los operadores lineales y acotados que conmutan con el operador de traslación bidimensional S, dado por

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}$$

donde S_1 y S_2 son los operadores de traslación unidimensional en los espacios $L^2_{\mu_1}(\mathbb{T})$ y $L^2_{\mu_2}(\mathbb{T})$ respectivamente.

TEOREMA 2.11. *Si* $B : L^2_{\mu_1}(\mathbb{T}) \oplus L^2_{\mu_2}(\mathbb{T}) \mapsto L^2_{\mu_1}(\mathbb{T}) \oplus L^2_{\mu_2}(\mathbb{T})$ *es un operador lineal y acotado, tal que*

$$BS = SB$$

Entonces existe una función medible

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix} : \mathbb{T} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$$

Tal que

$$B \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \varphi \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

Demostración.

Sea $B : L^2_{\mu_1}(\mathbb{T}) \oplus L^2_{\mu_2}(\mathbb{T}) \mapsto L^2_{\mu_1}(\mathbb{T}) \oplus L^2_{\mu_2}(\mathbb{T})$ un operador lineal y acotado tal que $BS = SB$.

Para $n \in \mathbb{Z}$, sea $e_n^{(1)} \in L^2_{\mu_1}$ la función definida por

$$e_n^{(1)}(z) = z^n \qquad z \in \mathbb{T}$$

y $e_m^{(2)} \in L^2_{\mu_2}$ la función definida por

$$e_m^{(2)}(\lambda) = \lambda^m \qquad \lambda \in \mathbb{T},$$

entonces

$$e_0^{(1)} \equiv 1 \text{ y } e_0^{(2)} \equiv 1.$$

Además,

$$S_1^n e_0^{(1)} = e_n; \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots,$$

y

$$S_2^m e_0^{(2)} = e_m; \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, .$$

Sean $\varphi_{11},\ \varphi_{12},\ \varphi_{21},\ \varphi_{22}$ las funciones de $\mathbb{T}$ en $\mathbb{C}$ definida por

$$\begin{bmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{21} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} e_0^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varphi_{12} \\ \varphi_{22} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} 0 \\ e_0^{(2)} \end{bmatrix}$$

y sea

$$\varphi(\xi) = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(\xi) & \varphi_{12}(\xi) \\ \varphi_{21}(\xi) & \varphi_{22}(\xi) \end{bmatrix}.$$

Como B conmuta con S, se tiene que B conmuta con S^n, luego

$$B\begin{bmatrix} e_n^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} = BS^n\begin{bmatrix} e_0^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} = S^nB\begin{bmatrix} e_0^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} = S^n\begin{bmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{21} \end{bmatrix},$$

$$B\begin{bmatrix} 0 \\ e_m^{(2)} \end{bmatrix} = BS^m\begin{bmatrix} 0 \\ e_0^{(2)} \end{bmatrix} = S^mB\begin{bmatrix} 0 \\ e_0^{(2)} \end{bmatrix} = S^m\begin{bmatrix} \varphi_{12} \\ \varphi_{22} \end{bmatrix}$$

para $n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots,$.

Sea h la suma directa de dos polinomios trigonométricos, es decir

$$h = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

donde

$$p = \sum_{k=-N}^{N} a_k e_k^{(1)};$$

$$q = \sum_{k=-N}^{N} b_k e_k^{(2)},$$

entonces

$$Bh = B\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = B\begin{bmatrix} \sum_{k=-N}^{N} a_k e_k^{(1)} \\ \sum_{k=-N}^{N} b_k e_k^{(2)} \end{bmatrix} = B\begin{bmatrix} \sum_{k=-N}^{N} a_k S_1^k e_0^{(1)} \\ \sum_{k=-N}^{N} b_k S_2^k e_0^{(2)} \end{bmatrix}$$

Como

$$
\begin{aligned}
B\begin{bmatrix} \sum_{k=-N}^{N} a_k S_1^k e_0^{(1)} \\ \sum_{k=-N}^{N} b_k S_2^k e_0^{(2)} \end{bmatrix} &= \sum_{k=-N}^{N} a_k B S^k \begin{bmatrix} e_0^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{k=-N}^{N} b_k B S^k \begin{bmatrix} 0 \\ e_0^{(2)} \end{bmatrix} \\
&= \sum_{k=-N}^{N} a_k S^k B \begin{bmatrix} e_0^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{k=-N}^{N} b_k S^k B \begin{bmatrix} 0 \\ e_0^{(2)} \end{bmatrix} \\
&= \sum_{k=-N}^{N} a_k S^k \begin{bmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{21} \end{bmatrix} + \sum_{k=-N}^{N} b_k S^k \begin{bmatrix} \varphi_{12} \\ \varphi_{22} \end{bmatrix} \\
&= \sum_{k=-N}^{N} a_k \begin{bmatrix} e_k^{(1)} \varphi_{11} \\ e_k^{(2)} \varphi_{21} \end{bmatrix} + \sum_{k=-N}^{N} b_k \begin{bmatrix} e_k^{(1)} \varphi_{12} \\ e_k^{(2)} \varphi_{22} \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

se tiene que

$$
Bh = \begin{bmatrix} \left(\sum_{k=-N}^{N} a_k e_k^{(1)} \right) \varphi_{11} + \left(\sum_{k=-N}^{N} b_k e_k^{(1)} \right) \varphi_{12} \\ \left(\sum_{k=-N}^{N} a_k e_k^{(2)} \right) \varphi_{21} + \left(\sum_{k=-N}^{N} b_k e_k^{(2)} \right) \varphi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p\varphi_{11} + q\varphi_{12} \\ p\varphi_{21} + q\varphi_{22} \end{bmatrix} = \varphi \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}
$$

Usando argumentos de convergencia en casi todo punto similares a los usados en la prueba del Teorema 2.6, se obtiene que

$$
B\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \varphi \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}
$$

para todo par $(f_1, f_2) \in L^2_{\mu_1}(\mathbb{T}) \oplus L^2_{\mu_2}(\mathbb{T})$ □

CAPíTULO 3

Caracterización de los operadores que entrelazan a dos operadores de traslación

A continuación se demuestra el resultado principal de este trabajo, que da una caracterización de los operadores que entrelazan a dos operadores de traslación unidimensionales.

Este resultado corresponde con el Teorema 1.1.d de la pag. 19 del libro de M. Cotlar y A. Maestripieri [**4**] y está relacionado con resultados previos obtenidos en contextos más generales por M. Cotlar y C. Sadosky (ver [**5, 6**]).

TEOREMA 3.1. *Sean μ_1 y μ_2 dos medidas de Borel finitas, positivas y regulares en $\mathbb{T}$ y sea $A : L^2_{\mu_1}(\mathbb{T}) \to L^2_{\mu_2}(\mathbb{T})$ un operador lineal acotado.*

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) *A entrelaza el operador de traslación S_1 de $L^2_{\mu_1}(\mathbb{T})$ con el operador de traslación S_2 de $L^2_{\mu_2}(\mathbb{T})$, es decir,*

$$AS_1 = S_2A.$$

(2) *La forma sesquilineal asociada al operador A está dada por*

$$\mathcal{A}(f,g) = \int_{\mathbb{T}} f(\xi)\overline{g(\xi)}d\mu_0(\xi) \qquad (f \in L^2_{\mu_1}(\mathbb{T}),\ g \in L^2_{\mu_2}(\mathbb{T})),$$

donde μ_0 es una medida compleja de Borel en $\mathbb{T}$ tal que

$$|\mu_0(\Delta)|^2 \leq \|A\|\, \mu_1(\Delta)\mu_2(\Delta)$$

para todo boreliano $\Delta \subset \mathbb{T}$.

(3) *Si $\mu = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$, ω_1 y ω_2 están definidas por $d\mu_1 = \omega_1 d\mu$, $d\mu_2 = \omega_2 d\mu$, entonces existe $\theta \in L^\infty_{\mu_1}(\mathbb{T})$ con $\|\theta\|_{L^\infty_{\mu_1}(\mathbb{T})} \leq \|A\|$ tal que*

$$(Af)(\xi) = \left(\frac{\omega_1(\xi)}{\omega_2(\xi)}\right)^{1/2} \theta(\xi)f(\xi)$$

para toda $f \in L^2_{\mu_1}(\mathbb{T})$.

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ (3)

Sea S el operador de traslación bidimensional en $L^2_{\mu_1}(\mathbb{T}) \oplus L^2_{\mu_2}(\mathbb{T})$. Entonces S tiene la representación matricial

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix},$$

donde S_1 y S_2 son los operadores de traslación unidimensional en los espacios $L^2_{\mu_1}(\mathbb{T})$ y $L^2_{\mu_2}(\mathbb{T})$ respectivamente.

Sea $B : L^2_{\mu_1}(\mathbb{T}) \oplus L^2_{\mu_2}(\mathbb{T}) \to L^2_{\mu_1}(\mathbb{T}) \oplus L^2_{\mu_2}(\mathbb{T})$ el operador definido por

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$SB = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ S_2 A & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$BS = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ AS_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como $AS_1 = S_2 A$ se tiene que $BS = SB$. Por el Teorema 2.11 existe una función medible

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix} : \mathbb{T} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$$

tal que

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}.$$

Como

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Af_1 \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{11} f_1 + \varphi_{12} f_2 \\ \varphi_{21} f_1 + \varphi_{22} f_2 \end{bmatrix}$$

se tiene que

$$\begin{bmatrix} 0 \\ Af_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{11} f_1 + \varphi_{12} f_2 \\ \varphi_{21} f_1 + \varphi_{22} f_2 \end{bmatrix}$$

para todo $f_1 \in L^2_{\mu_1}(\mathbb{T})$, $f_2 \in L^2_{\mu_2}(\mathbb{T})$. Por lo tanto $\varphi_{11} = 0$, $\varphi_{12} = 0$, $\varphi_{22} = 0$ y

$$Af_1 = \varphi_{21} f_1.$$

Para $f \in L^2_{\mu_1}(\mathbb{T})$ se tiene que

$$\|Af\|^2_{L^2_{\mu_2}(\mathbb{T})} \leq \|A\|^2 \|f\|^2_{L^2_{\mu_1}(\mathbb{T})}.$$

Por lo tanto

$$\int_{\mathbb{T}} |\varphi_{21}(\xi)|^2 |f(\xi)|^2 \, d\mu_2(\xi) \leq \|A\|^2 \int_{\mathbb{T}} |f(\xi)|^2 \, d\mu_1(\xi)$$

para toda $f \in L^2_{\mu_1}(\mathbb{T})$.

Como $d\mu_1 = \omega_1 d\mu$ y $d\mu_2 = \omega_2 d\mu$, la desigualdad anterior equivale a

$$\int_{\mathbb{T}} |\varphi_{21}(\xi)|^2 |f(\xi)|^2 \, \omega_2(\xi) \, d\mu(\xi) \leq \|A\|^2 \int_{\mathbb{T}} |f(\xi)|^2 \, \omega_1(\xi) \, d\mu(\xi).$$

Por esta desigualdad se tiene que, si $\mathcal{N} = \{\xi \in \mathbb{T} : \omega_1(\xi) = 0\}$, entonces $|\varphi_{21}(\xi)|\omega_2(\xi) = 0$ en casi todo punto de $\mathcal{N}$ con respecto a μ.

Sea $\theta : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ la función definida por

$$\theta(\xi) = \begin{cases} \varphi_{21}(\xi) \left(\dfrac{\omega_2(\xi)}{\omega_1(\xi)} \right)^{1/2} & \text{si } \xi \in \mathbb{T} \setminus \mathcal{N}, \\ 0 & \text{si } \xi \in \mathcal{N}. \end{cases}$$

Sea $f \in L^2_{\mu_1}(\mathbb{T})$, entonces se tiene que

$$(Af)(\xi) = \varphi_{21}(\xi) f(\xi) = \left(\frac{\omega_1(\xi)}{\omega_2(\xi)} \right)^{1/2} \theta(\xi) f(\xi)$$

y

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} |\varphi_{21}(\xi)|^2 |f(\xi)|^2 \, \omega_2(\xi) \, d\mu(\xi) &= \int_{\mathbb{T}} |\theta(\xi)|^2 |f(\xi)|^2 \, \omega_1(\xi) \, d\mu(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{T}} |\theta(\xi)|^2 |f(\xi)|^2 \, d\mu_1(\xi). \end{aligned}$$

Luego

$$\int_{\mathbb{T}} |\theta(\xi)|^2 |f(\xi)|^2 \, d\mu_1(\xi) \leq \|A\|^2 \int_{\mathbb{T}} |f(\xi)|^2 \, d\mu_1(\xi),$$

por el Teorema 2.6, se tiene que

$$\|\theta\|_{L^\infty_{\mu_1}(\mathbb{T})} \leq \|A\|.$$

(3) $\Rightarrow$ (2)

Sea μ_o la medida compleja definida por

$$d\mu_o(\xi) = \omega_1^{1/2}(\xi)\, \omega_2^{1/2}(\xi)\, \theta(\xi)\, d\mu(\xi).$$

Entonces, para $f \in L^2_{\mu_1}(\mathbb{T})$ y $g \in L^2_{\mu_2}(\mathbb{T})$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(f,g) = \langle Af, g\rangle_{L^2_{\mu_2}(\mathbb{T})} &= \int_{\mathbb{T}} f(\xi)\overline{g(\xi)}\theta(\xi) \left(\frac{\omega_1^{1/2}(\xi)}{\omega_2^{1/2}(\xi)}\right) \, d\mu_2(\xi) \\
&= \int_{\mathbb{T}} f(\xi)\overline{g(\xi)}\theta(\xi) \frac{\omega_1^{1/2}(\xi)}{\omega_2^{1/2}(\xi)} \omega_2(\xi) \, d\mu(\xi) \\
&= \int_{\mathbb{T}} f(\xi)\overline{g(\xi)}\theta(\xi)\omega_1(\xi)^{1/2}\omega_2(\xi)^{1/2} \, d\mu(\xi) \\
&= \int_{\mathbb{T}} f(\xi)\overline{g(\xi)} \, d\mu_0(\xi).
\end{aligned}$$

Sea $\Delta \subseteq \mathbb{T}$ un conjunto de Borel, entonces

$$\begin{aligned}
|\mu_o(\Delta)| &= \left| \int_\Delta \omega_1^{1/2}(\xi)\, \omega_2^{1/2}(\xi)\, \theta(\xi)\, d\mu(\xi) \right| \\
&\leq \int_\Delta \left| \omega_1^{1/2}(\xi)\, \omega_2^{1/2}(\xi)\, \theta(\xi) \right| \, d\mu(\xi) \\
&\leq \|A\| \int_\Delta \omega_1^{1/2}(\xi)\, \omega_2^{1/2}(\xi)\, d\mu(\xi),
\end{aligned}$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
|\mu_o(\Delta)| &\leq \|A\| \left(\int_\Delta \omega_1(\xi)\, d\mu(\xi) \right)^{1/2} \left(\int_\Delta \omega_2(\xi)\, d\mu(\xi) \right)^{1/2} \\
&= \|A\| \left(\int_\Delta \, d\mu_1(\xi) \right)^{1/2} \left(\int_\Delta \, d\mu_2(\xi) \right)^{1/2} \\
&= \|A\| \, (\mu_1(\Delta))^{1/2} \, (\mu_2(\Delta))^{1/2}.
\end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (1)

Sean $f \in L^2_{\mu_1}(\mathbb{T})$ y $g \in L^2_{\mu_2}(\mathbb{T})$, entonces

$$\begin{aligned}
\langle AS_1 f, g\rangle_{L^2_{\mu_2}(\mathbb{T})} &= \int_{\mathbb{T}} (S_1 f)(\xi)\overline{g(\xi)}\, d\mu_0(\xi) = \int_{\mathbb{T}} \xi\, f(\xi)\overline{g(\xi)}\, d\mu_0(\xi) \\
&= \int_{\mathbb{T}} f(\xi)\, \overline{\xi^{-1}\, g(\xi)}\, d\mu_0(\xi) = \langle Af, S_2^{-1} g\rangle_{L^2_{\mu_2}(\mathbb{T})} \\
&= \langle S_2 A f, g\rangle_{L^2_{\mu_2}(\mathbb{T})},
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$AS_1 = S_2 A.$$

$\square$

Observación 3.2. Por lo expuesto en la Sección 6 del Capítulo 1 se tiene que la condición

$$|\mu_0(\Delta)|^2 \leq \|A\|^2\, \mu_1(\Delta)\mu_2(\Delta)$$

para todo boreliano $\Delta \subset \mathbb{T}$ que aparece en (2) del teorema anterior equivale a que la matriz de medidas

$$\begin{pmatrix} \|A\|\, \mu_1 & \mu_o \\ \overline{\mu_o} & \|A\|\, \mu_2 \end{pmatrix}$$

es positiva.

Observación 3.3. Si en el teorema anterior se considera el caso $\mu_1 = \mu_2$, entonces se tiene que $\omega_1 = \omega_2$ y por lo tanto se obtiene el Teorema 2.6.

Bibliografía

[1] C. Betz, *Introducción a la teoria de la medida e intedracion.* Universidad Central de Venezuela. Facultad de Ciencias, 1992. Citado en las páginas(s): 2

[2] R. Bruzual y M. Dominguez, *Espacios de Banach.* Universidad Central de Venezuela. Facultad de Ciencias. Laboratorio de forma en grupos, 1995. Citado en las páginas(s):

[3] R. Bruzual y M. Dominguez, *Espacios de Hilbert.* Universidad Central de Venezuela. Facultad de Ciencias. Laboratorio de forma en grupos, 1995. Citado en las páginas(s): 2

[4] M. Cotlar y A. Maestripieri, *Representaciones de Fourier, factorización de operadores triangulares y operadores diferenciales canónicos.* Ediciones del Vicerrectorado académico. Universidad Central de Venezuela, 2004. Citado en página(s): 1, 27

[5] M. Cotlar y C. Sadosky, *Integral representations of bounded Hankel forms defined in scattering systems with a multiparametric evolution group.* Operator theory: Advances and Applications **35** (1988), 357-375. Citado en página(s): 1, 27

[6] M. Cotlar y C. Sadosky, *Abstract, weighted and multidimensional AAK theorems and singular numbers of Sarason commutants.* Integral Equations and Operador Theory **17** (1993) 169-201. Citado en página(s): 1, 27

[7] K. Hoffman, *Banach spaces of analytic functions.* Prentice Hall, 1962. Citado en página(s): 18

[8] W. Rudin, *Real and Complex Analysis.* Mc Graw-Hill, 1966. Citado en las páginas(s): 2

[9] W. Rudin, *Functional Analysis.* Mc Graw-Hill, 1979. Citado en página(s): 2

[10] D. Sarason *Generalized interpolation in H^∞.* Trans. Am. Math. Soc. 127, 179-203 (1967). Citado en las páginas(s): 22