UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Criterio del segundo cociente para convergencia de series numéricas

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Richard Rene Frangie Vera** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutor: Ramón Bruzual.

Caracas, Venezuela
Septiembre 2009

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado "**Criterio del segundo cociente para convergencia de series numéricas**", presentado por el **Br. Richard Rene Frangie Vera**, titular de la Cédula de Identidad **18.010.824**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Ramón Bruzual
Tutor

Marisela Domínguez
Jurado

Carmen Da Silva
Jurado

Agradecimiento

Primero que todo gracias a Dios por darme vida y salud.

Mi sincero agradecimiento al profesor Ramón Bruzual por todo su apoyo y colaboración en la realización de este trabajo.

Agradezco a mis compañeros y todas esas personas que han apoyado de una u otra manera y han confiado en mi.

Al Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico de la Universidad Central de Venezuela por su colaboración con la impresión de este trabajo.

Gracias a todos.

Índice general

Introducción

El objetivo fundamental de este Trabajo Especial de Grado es el desarrollo del artículo "The mth Ratio Test: New Convergence Test for Series" de Sayel A. Ali ([**7**]), en el cual se prueba un nuevo criterio para la convergencia de series.

El muy conocido criterio de convergencia para series numéricas de D'Alembert, también conocido como criterio del cociente, establece lo siguiente:

Si $\{a_n\}$ *es una sucesión de términos positivos tal que existe*

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

entonces

(i) *Si* $\alpha < 1$ *entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*

(ii) *Si* $\alpha > 1$ *entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge.*

(iii) *Si* $\alpha = 1$ *el criterio no da información.*

Tal como muestran los ejemplos que se dan en el Capítulo 3, este criterio suele no dar información en series cuyo término general contiene factoriales o productos finitos. Este tipo de series suele aparecer en muchos desarrollos de Taylor.

Si el criterio falla, el límite de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ es 1 y se tiene que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + b_n$$

para alguna sucesión $\{b_n\}$ que converge a 0. Un estudio detallado de la relación entre la convergencia de la serie y el comportamiento de la sucesión $\{b_n\}$ ha permitido establecer refinamientos del criterio del cociente, entre los que destacan los criterios clásicos de Kummer, Raabe y Gauss.

En el artículo ya mencionado, Ali Sayel desarrolla un nuevo criterio, el del segundo cociente, que refina el del cociente y que depende de los siguientes límites

$$\frac{a_{2n+1}}{a_n} \quad \text{y} \quad \frac{a_{2n}}{a_n},$$

donde a_n es el término general de la serie. Este criterio contiene al de Raabe y una parte del criterio de Gauss.

El trabajo está organizado en tres capítulos.

En el Capítulo 1 se da un repaso de algunas definiciones y resultados básicos de series y límites. Además se hace un breve estudio del teorema del cociente de D'Alembert. En el Capítulo 2 se estudia en detalle el criterio del segundo cociente, los criterios de Kummer, Raabe y Gauss y la relación que existe entre ellos. Por último, en el Capítulo 3 se evaluarán el comportamiento de algunas series para las que falla el criterio de D'Alembert y sin embargo, el criterio del segundo cociente permite determinar el carácter de la serie.

CAPíTULO 1

Resultados básicos y criterio de D'Alembert

El objetivo de este primer capítulo es realizar una revisión de algunas definiciones y resultados básicos, necesarios para la comprensión de este trabajo.

Las definiciones y resultados que se dan forman parte del Cálculo Básico y no se dan demostraciones, salvo en el caso del criterio del cociente. Se pueden encontrar más detalles en las siguientes referencias. [**1, 2, 3, 4, 6**]

1. Nociones básicas.

Una *serie* es un par $(\{a_n\}, \{S_n\})$ donde a_n es una sucesión de números reales y

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Es usual utilizar la siguiente terminología:

A a_n se le llama *término general* de la serie.

A la sucesión $\{S_n\}$ se le llama sucesión de *sumas parciales* de la serie.

En vez de referirse a las series como un par es usual hablar de la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge* cuando la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ es convergente.

Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge* cuando la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ no converge.

Si la sucesión $\{S_n\}$ converge a S con $S \in \mathbb{R}$, se suele escribir

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Debe quedar claro que S no se obtiene simplemente por adición, S es el límite de una sucesión de sumas.

Ejemplo 1.1 (La serie geométrica). Una *serie geométrica* es una serie donde cada término se obtiene multiplicando al anterior por una constante, llamada *razón*. Una serie geométrica tiene la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^n,$$

donde $a, r \in \mathbb{R}$.

Para $a \neq 0$ esta serie converge si y sólo si $|r| < 1$ y, en este caso se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

Se cumple el siguiente resultado.

Teorema 1.2. *Si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge, entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

En este trabajo solamente se considerarán series de términos no negativos. En este caso la sucesión de sumas parciales forma una sucesión monótona creciente. Del hecho de que una sucesión monótona creciente es convergente si y sólo si es acotada se deducen los siguientes resultados.

Teorema 1.3. *Una serie de términos no negativos converge si y sólo si la sucesión de sumas parciales es acotada.*

Teorema 1.4 (Criterio de comparación). *Sean* $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *sucesiones no negativas tales que* $b_n \leq a_n$ *para todo* n

(i) *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *también converge.*
(ii) *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverge entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *también diverge.*

2. Límite Superior y Límite Inferior.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales. Sea $E = E_{\{x_n\}}$ el conjunto de los x tales que existe una subsucesión de $\{x_n\}$ con límite x (puede ocurrir que $+\infty$ ó $-\infty$ sean elementos de E).

Definición 1.5. El *límite superior* de $\{x_n\}$ es el supremo de E. Se denotará por

$$\limsup_{n\to\infty} x_n$$

con la convención $\sup E = +\infty$, si $+\infty$ está en E.

El *límite inferior* de $\{x_n\}$ es el ínfimo de E. Se denotará por

$$\liminf_{n\to\infty} x_n$$

con la convención $\inf E = -\infty$, si $-\infty$ está en E.

Se tienen los siguientes resultados.

PROPOSICIÓN 1.6. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión.*
Entonces

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$$

TEOREMA 1.7. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión.*
Existe $\lim_{n\to\infty} x_n$ si y sólo si $\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n$.
En este caso $\lim_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n$.

Un resultado importante que se obtiene a través de este teorema es que una sucesión acotada $\{x_n\}$ converge si y sólo si $\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n$.

TEOREMA 1.8. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada y sean $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ las sucesiones definidas por*

$$s_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}.$$

$$t_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}.$$

Entonces la sucesión $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ son convergentes y

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \liminf_{n\to\infty} x_n.$$

OBSERVACIÓN 1.9. Por el Teorema 1.8 y la definición de límite superior e inferior se tiene que si $\{x_n\}$ es una sucesión (no necesariamente acotada) entonces

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} x_k$$

y

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} x_k.$$

Por lo tanto, si $\{x_n\}$ es una sucesión tal que

$$\limsup_{n\to\infty} x_n < r$$

para algún número real r, entonces existe un entero positivo N tal que

$$\sup_{k\geq N} x_k < r$$

y por lo tanto

$$x_n < r \quad \text{para todo } n \geq N.$$

De igual manera se puede ver que si $\{x_n\}$ es una sucesión tal que

$$\liminf_{n\to\infty} x_n > r$$

para algún número real r, entonces existe un entero positivo N tal que

$$x_n > r \quad \text{para todo } n \geq N.$$

3. Criterio de D'Alembert

Jean le Rond d'Alembert (16 de noviembre 1717-24 de octubre 1783) fue un matemático y filósofo francés. Se le considera uno de los máximos exponentes del movimiento ilustrado, concibe las Ciencias como un todo integrado y una herramienta para el progreso de la Humanidad.

Abordó la Matemática a través de la Física, con el problema de los tres cuerpos. Esto lo llevó a estudiar ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. También probó un criterio de convergencia para series.

Cuadro y estatua de D'Alembert

Esta nota histórica y las imágenes fueron tomadas de [**8**].

D'Alembert demostró el siguiente criterio para convergencia de series.

Teorema 1.10 (Criterio de D'Alembert o criterio simplificado del cociente). *Sea* $\{a_n\}$ *una sucesión de términos positivos tal que existe* $\alpha = \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

(i) *Si* $\alpha < 1$ *entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*
(ii) *Si* $\alpha > 1$ *entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge.*
(iii) *Si* $\alpha = 1$ *el criterio no da información.*

Este resultado es consecuencia del siguiente teorema.

Teorema 1.11 (Criterio ampliado de D'Alembert o criterio del cociente). *Sea* $\{a_n\}$ *una sucesión de términos positivos.*

(i) *Si* $\limsup \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ *entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*
(ii) *Si existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ *para todo* $n \geq n_0$ *entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge.*
(iii) *Si* $\liminf \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ *entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge.*
(iv) *Si* $\liminf \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \leq \limsup \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ *el criterio no da información.*

Demostración.

(i) Sea

$$\alpha = \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

y sea $\eta \in (\alpha, 1)$.

Por la Observación 1.9 existe $N \geq 1$ tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \eta \text{ si } n \geq N.$$

Usando la desigualdad anterior se obtiene

$$
\begin{aligned}
&a_{N+1} < \eta a_N \\
&a_{N+2} < \eta a_{N+1} < \eta^2 a_N \\
&a_{N+3} < \eta a_{N+2} < \eta^3 a_N \\
&\quad \ldots\ldots \\
&a_{N+k} < \eta^k a_N \text{ para todo } k \geq 1.
\end{aligned}
$$

Como $\sum_{k=1}^{+\infty} \eta^k$ es una serie geométrica de razón $\eta < 1$ entonces $\sum_{k=1}^{+\infty} \eta^k$ converge. Por el criterio de comparación se tiene que $\sum_{k=1}^{+\infty} a_{N+k}$ converge y por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

converge.

(ii) En este caso $a_{n+1} \geq a_{n_0}$ para todo $n \geq n_0$ y por lo tanto el término general de la serie no tiende a 0, por lo que diverge.

(iii) Este caso se reduce fácilmente al anterior. En efecto sea

$$1 < \alpha = \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} = \sup_{k \geq 1} \inf_{n \geq k} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Nuevamente por la Observación 1.9 existe $n_0 \in \mathbb{N}$

$$1 < \frac{a_{n+1}}{a_n} \text{ si } n \geq n_0.$$

Usando (ii) se obtiene que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

(iv) Basta considerar las series

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

La primera de estas series diverge y la segunda converge, sin embargo en ambos

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

existe y da 1.

$\square$

4. Algunos criterios básicos de convergencia

Los criterios básicos que se enuncian a continuación serán utilizados en algunas partes de este trabajo.

TEOREMA 1.12 (Criterio de Cauchy o criterio de la raíz).
Sea $\{a_n\}$ *una sucesión no negativa y sea*

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Entonces

(i) *Si* $\alpha < 1$ *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*
(ii) *Si* $\alpha > 1$ *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge.*
(iii) *Si* $\alpha = 1$ *el criterio no da información.*

También se cumple el siguiente resultado.

TEOREMA 1.13. *Si* $\{c_n\}$ *es una sucesión de números positivos entonces*

$$\liminf \frac{c_{n+1}}{c_n} \leq \liminf \sqrt[n]{c_n} \leq \limsup \sqrt[n]{c_n} \leq \limsup \frac{c_{n+1}}{c_n}.$$

Este último resultado permite concluir que el criterio de la raíz es "más fino" que el criterio del cociente, es decir, si se puede concluir convergencia a partir del criterio del cociente también se puede hacer a partir del criterio de la raíz.

TEOREMA 1.14 (Criterio de la integral). *Supóngase que* f *es una función positiva y monótona decreciente definida en* $[1, +\infty)$ *y que* $f(n) = a_n$ *para todo* n *natural.*

Entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

converge si y sólo si existe el límite

$$\lim_{A\to+\infty} \int_1^A f(x)\, dx.$$

TEOREMA 1.15 (Criterio de condensación de Cauchy).

Sea $\{a_n\}$ *una sucesión decreciente tal que* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

converge si y sólo si

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

converge.

CAPíTULO 2

Criterio del segundo cociente y refinamientos clásicos del criterio de D'Alembert

En este capítulo se expone el criterio del segundo cociente, demostrado por Ali Sayel en su artículo [**7**] y se estudia su relación con algunos refinamientos clásicos del criterio de D'Alembert.

1. Criterio del segundo cociente

TEOREMA 2.1 (Criterio del segundo cociente, [**7**]). *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos positivos y sean*

$$L = \max\left\{\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n}, \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n}\right\}$$

y

$$l = \min\left\{\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n}, \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n}\right\}.$$

Entonces

(i) *Si* $L < \frac{1}{2}$ *se tiene que* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*

(ii) *Si* $l > \frac{1}{2}$ *se tiene que* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge.*

(iii) *Si* $l \leq \frac{1}{2} \leq L$ *el criterio no proporciona información.*

DEMOSTRACIÓN.

(i) Supóngase que $L < \frac{1}{2}$. Sea $r \in \mathbb{R}$ tal que $L < r < \frac{1}{2}$, entonces

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} < r \quad \text{y} \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} < r.$$

Por la Observación 1.9 se tiene que existe un entero positivo N tal que

$$\frac{a_{2n}}{a_n} \leq r \quad \text{y} \quad \frac{a_{2n+1}}{a_n} \leq r$$

para todo $n \geq N$.

Por otra parte

$$\begin{aligned}\sum_{n=N}^{\infty} a_n &= (a_N + a_{N+1} + \cdots + a_{2N-1}) + (a_{2N} + a_{2N+1} + \cdots + a_{4N-1}) + \\ &\qquad + (a_{4N} + a_{4N+1} + \cdots + a_{8N-1}) + \cdots \\ &\qquad + (a_{2^kN} + a_{2^kN+1} + \cdots + a_{2^{k+1}N-1}) + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (a_{2^kN} + a_{2^kN+1} + \cdots + a_{2^{k+1}N-1}).\end{aligned}$$

Sea $S_k = a_{2^kN} + a_{2^kN+1} + \cdots + a_{2^{k+1}N-1}$ para $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Entonces, para $k \geq 0$,

$$S_k = (a_{2^kN} + a_{2^kN+1}) + (a_{2^kN+2} + a_{2^kN+3}) + \cdots + (a_{2^{k+1}N-2} + a_{2^{k+1}N-1}).$$

Como para $n \geq N$ se tiene que

$$\frac{a_{2n}}{a_n} \leq r \quad \text{y} \quad \frac{a_{2n+1}}{a_n} \leq r$$

entonces

$$\frac{a_{2n}}{a_n} + \frac{a_{2n+1}}{a_n} \leq r + r$$

y por lo tanto

$$a_{2n} + a_{2n+1} \leq 2ra_n \quad \text{para } n \geq N.$$

Luego

$$\begin{aligned}S_k &= (a_{2^kN} + a_{2^kN+1}) + (a_{2^kN+2} + a_{2^kN+3}) + \cdots + (a_{2^{k+1}N-2} + a_{2^{k+1}N-1}) \\ &\leq 2ra_{2^{k-1}N} + 2ra_{2^{k-1}N+1} + \cdots + 2ra_{2^kN-1} \\ &= 2r(a_{2^{k-1}N} + a_{2^{k-1}N+1} + \cdots + a_{2^kN-1}) = 2rS_{k-1}.\end{aligned}$$

Procediendo inductivamente se obtiene

$$S_k \leq 2rS_{k-1} \leq 2r(2rS_{k-2}) \leq 2r(2r(2rS_{k-3})) \leq \ldots \leq 2^k r^k S_0$$

para $k \geq 0$, de donde

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} S_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} S_0 (2r)^k < \infty,$$

por el Criterio de Comparación (Teorema 1.4) se tiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

converge.

(ii) Supóngase que $l > \frac{1}{2}$. Sea $r \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{2} < r < l$, entonces

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} > r \quad \text{y} \quad \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} > r.$$

Nuevamente, por la Observación 1.9 se tiene que existe un entero positivo N tal que

$$\frac{a_{2n}}{a_n} \geq r \ \text{ y } \ \frac{a_{2n+1}}{a_n} \geq r$$

para todo $n \geq N$.

Procediendo de manera análoga que en la prueba de (i), para $n \geq N$ se tiene que

$$\frac{a_{2n}}{a_n} + \frac{a_{2n+1}}{a_n} \geq r + r$$

y por lo tanto

$$a_{2n} + a_{2n+1} \geq 2ra_n.$$

Luego

$$\begin{aligned}
S_k =&(a_{2^kN} + a_{2^kN+1}) + (a_{2^kN+2} + a_{2^kN+3}) + \cdots + (a_{2^{k+1}N-2} + a_{2^{k+1}N-1})\\
\geq&2ra_{2^{k-1}N} + 2ra_{2^{k-1}N+1} + \cdots + 2ra_{2^kN-1}\\
=&2r(a_{2^{k-1}N} + a_{2^{k-1}N+1} + \cdots + a_{2^kN-1}) = 2rS_{k-1}.
\end{aligned}$$

Procediendo inductivamente,

$$S_k \geq 2rS_{k-1} \geq 2r(2rS_{k-2}) \geq 2r(2r(2rS_{k-3})) \geq \ldots \geq 2^k r^k S_0.$$

Como $r > \frac{1}{2}$, se tiene que

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} S_k \geq \sum_{k=0}^{\infty} S_0(2r)^k = \infty,$$

por el Criterio de Comparación (Teorema 1.4) se tiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

diverge.

(iii) Para verificar que el criterio no da información en este caso, se debe mostrar que existe una serie convergente para la cual se cumple la condición $l \leq \frac{1}{2} \leq L$ y que existe una serie divergente que cumple la misma condición.

Se considerará la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}.$$

Usando el criterio de la integral se puede deducir que la serie converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$.

Para cualquier p

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(\ln n)^p}{2n[\ln(2n)]^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{\ln n}{\ln(2) + \ln(n)}\right)^p = \frac{1}{2}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(\ln n)^p}{(2n+1)[\ln(2n+1)]^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1}\left(\frac{\ln n}{\ln(2n+1)}\right)^p = \frac{1}{2}.$$

□

En muchos ejemplos los límites

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n}.$$

existen. En este caso

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} = \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n}.$$

Por lo tanto se tiene el siguiente corolario.

Corolario 2.2 (Criterio simplificado del segundo cociente, [**7**]). *Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} \quad y \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n}$$

existen. Sean

$$L_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n}, \quad L_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n},$$

$L = \max\{L_1, L_2\}$, *y* $l = \min\{L_1, L_2\}$.

Entonces

(i) *Si* $L < \frac{1}{2}$ *se tiene que* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge.*

(ii) *Si* $l > \frac{1}{2}$ *se tiene que* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *diverge.*

(iii) *Si* $l \leq \frac{1}{2} \leq L$ *el criterio no proporciona información.*

Si a las hipótesis del resultado anterior se agrega que la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente, entonces

$$\frac{a_{2n+1}}{a_n} \leq \frac{a_{2n}}{a_n}$$

y, por lo tanto

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} \quad \text{y} \quad l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n}.$$

Luego se tiene el siguiente corolario.

Corolario 2.3. *Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos tal que la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente y*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} \quad y \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n}$$

existen. Sean

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n}, \quad l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n}.$$

Entonces

(i) *Si $L < \frac{1}{2}$ se tiene que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.*
(ii) *Si $l > \frac{1}{2}$ se tiene que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.*

Observación 2.4. El resultado anterior también se puede obtener a partir del Criterio de condensación de Cauchy (Teorema 1.15) y el Criterio de D'Alembert de la siguiente manera.

(i) Si $L < \frac{1}{2}$ entonces, aplicando el Criterio de D'Alembert a $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$, se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} a_{2^{n+1}}}{2^n a_{2^n}} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2(2^n)}}{a_{2^n}} = 2L < 1.$$

Por lo tanto $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ converge, de donde $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

(ii) Si $l > \frac{1}{2}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} a_{2^{n+1}}}{2^n a_{2^n}} \geq 2 \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2(2^n)}}{a_{2^n}} = 2l > 1.$$

Por lo tanto $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ diverge, de donde $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

2. Criterio de Kummer

Ernst Eduard Kummer (29 de enero de 1810 - 14 de mayo de 1893) fue un matemático alemán que realizó varias contribuciones a la matemática en áreas diversas, entre las que destacan las series numéricas, la teoría de números y la geometría de superficies. Probó el último teorema de Fermat para una clase considerable de exponentes primos.

E. Kummer

Esta nota histórica y la imagen fueron tomadas de [**8**].

TEOREMA 2.5 (Criterio de Kummer). *Sea* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *una serie de términos positivos. Supóngase que existe una sucesión de términos positivos* $\{d_n\}$ *tal que el siguiente límite*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{d_n}-\frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\frac{1}{d_{n+1}}\right)=h$$

existe.

Entonces

(i) *Si* $h>0$ *se tiene que* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge.*

(ii) *Si* $h<0$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ *diverge, se tiene que* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *diverge.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración que se va a dar está basada en la que aparece en el libro [**5**].

(i) Supóngase que $h>0$. Sea $\sigma\in(0,h]$, entonces existe $N\in\mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{d_n}-\frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\frac{1}{d_{n+1}}\geq\sigma>0$$

para todo $n \geq N$. Sea $\gamma_n = 1/d_n$.

Entonces, para $n \geq N$ se tiene que

$$\gamma_n - \frac{a_{n+1}\gamma_{n+1}}{a_n} \geq \sigma > 0.$$

Como $a_n > 0$

$$a_n\gamma_n - a_{n+1}\gamma_{n+1} \geq a_n\sigma > 0 \quad \text{si } n \geq N. \tag{2.1}$$

Por lo tanto $a_{n+1}\gamma_{n+1} \leq a_n\gamma_n$ si $n \geq N$, es decir la sucesión $\{a_n\gamma_n\}$ es monótona decreciente para $n \geq N$. Como esta sucesión está acotada inferiormente por 0, es convergente.

La serie telescópica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma}(a_n\gamma_n - a_{n+1}\gamma_{n+1})$$

tiene sumas parciales

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sigma}(a_k\gamma_k - a_{k+1}\gamma_{k+1}) = \frac{1}{\sigma}(a_0\gamma_0 - a_{n+1}\gamma_{n+1}).$$

Como $\{a_n\gamma_n\}$ converge, la sucesión $\{T_n\}$ converge y por lo tanto la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma}(a_n\gamma_n - a_{n+1}\gamma_{n+1})$$

es convergente.

Por la desigualdad (2.1) se tiene que

$$a_n \leq \frac{1}{\sigma}(a_n\gamma_n - a_{n+1}\gamma_{n+1}).$$

Finalmente por el criterio de comparación la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

converge.

(ii) Supóngase que $h < 0$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{d_n} - \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{1}{d_{n+1}} \leq 0$$

para $n \geq N$, esta última desigualdad equivale a

$$\frac{a_n}{d_n} \leq \frac{a_{n+1}}{d_{n+1}}.$$

Por lo tanto

$$\frac{a_n}{d_n} \geq \frac{a_N}{d_N} > 0$$

para todo $n \geq N$, de donde

$$a_n \geq \left(\frac{a_N}{d_N}\right) d_n$$

para todo $n \geq N$. Como $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$ diverge, por el criterio de comparación la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

es divergente. □

Observación 2.6. Considerando la serie (divergente) de término general constante e igual a 1 se obtienen las partes (i) y (ii) del criterio simplificado de D'Alembert.

En el teorema anterior puede ocurrir que $h = 0$ y el criterio no de información. Basta considerar la serie (divergente) de término general constante e igual a 1 y ejemplos donde falle el criterio simplificado de D'Alembert.

3. Criterio de Raabe

Joseph Ludwig Raabe (15 de mayo de 1801–22 de enero de 1859) fue un matemático suizo. Estableció un criterio de convergencia para series de términos positivos. También estudió diversos aspectos de los movimientos planetarios.

J. Raabe

Esta nota histórica y la imagen fueron tomadas de [**8**].

El criterio de convergencia que se enuncia a continuación fue demostrado por J. Raabe y se va a probar a partir del criterio del segundo cociente (Teorema 2.1). Es importante destacar que esto prueba que el criterio del segundo cociente es más general que el de Raabe.

TEOREMA 2.7 (Criterio de Raabe). *Sea* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *una serie de términos positivos. Supóngase que existen una sucesión* $\{\varepsilon_n\}$ *tal que* $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ *y* $\beta \in \mathbb{R}$ *tales que*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n}.$$

Entonces

(i) *Si* $\beta > 1$ *se tiene que* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge.*
(ii) *Si* $\beta < 1$ *se tiene que* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *diverge.*
(iii) *Si* $\beta = 1$ *el criterio no proporciona información.*

Para demostrar este teorema será necesario demostrar la siguiente desigualdad.

PROPOSICIÓN 2.8. *Si* n *es un entero mayor o igual que* 1*, entonces*

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \geq \ln 2.$$

DEMOSTRACIÓN. Si k es un entero positivo y $x \in [k, k+1]$ entonces

$$\frac{1}{k} \geq \frac{1}{x}$$

y por lo tanto

$$\frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x}.$$

Luego

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} &\geq \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} + \int_{n+1}^{n+2} \frac{dx}{x} + \cdots + \int_{2n-1}^{2n} \frac{dx}{x} \\
&= \int_n^{2n} \frac{dx}{x} = \ln(2n) - \ln(n) \\
&= \ln\left(\frac{2n}{n}\right) = \ln 2.
\end{aligned}$$

□

DEMOSTRACIÓN DEL CRITERIO DE RAABE.

(i) Supóngase que $\beta > 1$.

Se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(-\frac{\beta}{n}+\frac{\varepsilon_n}{n}\right)=-\beta.$$

Sea $\alpha \in (1,\beta)$, entonces existe $N\in\mathbb{N}$ tal que si $n\geq N$ entonces

$$n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)<-\alpha.$$

Sea $n\geq N$, entonces

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<1-\frac{\alpha}{n}$$

y

$$\frac{a_{2n}}{a_n}=\frac{a_{n+1}}{a_n}\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\cdots\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}}<\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{\alpha}{2n-1}\right).$$

Como $0<1-x\leq e^{-x}$ para $0<x<1$, se tiene que

$$\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{\alpha}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{\alpha}{2n-1}\right)\leq e^{-\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha}{n+1}+\cdots+\frac{\alpha}{2n-1}\right)},$$

por la Proposición 2.8

$$\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha}{n+1}+\cdots+\frac{\alpha}{2n-1}\geq \alpha\ln 2,$$

por lo tanto

$$\frac{a_{2n}}{a_n}\leq e^{-\alpha\ln 2}=\frac{1}{2^\alpha}$$

para todo $n\geq N$.

Procediendo de manera análoga

$$\begin{aligned}\frac{a_{2n+1}}{a_n}&=\frac{a_{n+1}}{a_n}\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\cdots\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}\\&<\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{\alpha}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{\alpha}{2n}\right)\\&\leq e^{-\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha}{n+1}+\cdots+\frac{\alpha}{2n}\right)}\\&\leq e^{-\alpha\ln\frac{2n+1}{n}}\leq e^{-\alpha\ln 2}=\frac{1}{2^\alpha}\end{aligned}$$

para todo $n\geq N$.

Como $\alpha>1$

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}}{a_n}\leq\frac{1}{2^\alpha}<\frac{1}{2}\quad\text{y}\quad\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_n}\leq\frac{1}{2^\alpha}<\frac{1}{2},$$

por el Teorema 2.1

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

converge.

(ii) Supóngase que $\beta < 1$.

Igual que en el caso (i)

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(-\frac{\beta}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n}\right) = -\beta.$$

Por lo tanto si $\beta < 1$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) > -1$$

para todo $n \geq N$.

Supóngase que $n \geq N$, entonces

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} = \frac{d_{n+1}}{d_n},$$

donde

$$d_n = \frac{1}{n-1}.$$

Luego

$$\frac{a_{n+1}}{d_{n+1}} > \frac{a_n}{d_n},$$

por lo que

$$a_{n+1} > d_{n+1}\left(\frac{a_N}{d_N}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{a_N}{d_N}\right)$$

si $n > N$.

Por el criterio de comparación

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

diverge.

(iii) La serie armónica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n},$$

que es divergente, satisface las hipótesis del criterio de Raabe con $\beta = 1$ (ver Ejemplo 1 del Capítulo 3).

Para ver que el criterio no da información en el caso $\beta = 1$, basta mostrar una serie convergente que satisface las hipótesis con $\beta = 1$. Para esto se considerará la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}.$$

Usando el criterio de la integral se puede verificar que esta serie converge.

Para verificar que la serie satisface las hipótesis del criterio con $\beta = 1$ se debe verificar que

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{\dfrac{1}{(n+1)(\ln(n+1))^2}}{\dfrac{1}{n(\ln n)^2}}\right)=1.$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} n\left(1-\frac{\dfrac{1}{(n+1)(\ln(n+1))^2}}{\dfrac{1}{n(\ln n)^2}}\right) &= n\left(1-\frac{n(\ln n)^2}{(n+1)(\ln(n+1))^2}\right) \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{(n+1)(\ln(n+1))^2-n(\ln n)^2}{(\ln(n+1))^2}\right) \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)\left(1+\frac{n(\ln(n+1))^2-n(\ln n)^2}{(\ln(n+1))^2}\right). \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1,$$

basta mostrar que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(\ln(n+1))^2-n(\ln n)^2}{(\ln(n+1))^2}=0.$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{n(\ln(n+1))^2-n(\ln n)^2}{(\ln(n+1))^2} &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n(\ln(n+1)-\ln n)}{\ln(n+1)}\right]\left[\frac{\ln(n+1)+\ln n}{\ln(n+1)}\right] \\ &= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

A continuación se presenta una versión alternativa del criterio de Raabe que, en algunos casos, permite simplificar algunos cálculos.

Antes de demostrarlo es necesario el siguiente resultado.

Proposición 2.9. *Sea* $\{\gamma_n\}$ *una sucesión de números no negativos que converge a* 0. *Entonces se tiene que la sucesión* $\{n\gamma_n\}$ *es convergente si y sólo si la sucesión* $(1+\gamma_n)^n$ *es* *convergente. En este caso*

$$\lim_{n\to\infty} n\gamma_n = \lambda$$

si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} (1+\gamma_n)^n = e^{\lambda}.$$

Demostración. Se deben considerar dos casos:

Primer caso: $\{\gamma_n\}$ se anula una cantidad infinita de veces.

En este caso $\{n\gamma_n\}$ es convergente si y sólo $\{n\gamma_n\}$ tiende a 0 y $(1+\gamma_n)^n$ es convergente si y sólo si $(1+\gamma_n)^n$ tiende a 1, de donde se obtiene el resultado.

Segundo caso: $\{\gamma_n\}$ se anula solamente una cantidad finita de veces.

Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma_n \neq 0$ para todo $n \geq N$.

Para $n \geq N$ se tiene que

$$(1+\gamma_n)^n = \left((1+\gamma_n)^{1/\gamma_n}\right)^{n\gamma_n}.$$

Por las propiedades básicas del número e,

$$\lim_{n\to\infty} (1+\gamma_n)^{1/\gamma_n} = e.$$

Por lo tanto $(1+\gamma_n)^n$ converge a e^{λ} si y sólo si $n\gamma_n$ tiende a λ.

□

Observación 2.10. Por el resultado anterior se tiene que si $\{\alpha_n\}$ es una sucesión que tiende a 1 entonces la sucesión $\{n(\alpha_n - 1)\}$ converge si y sólo si la sucesión $\{(\alpha_n)^n\}$ converge y, en este caso

$$\lim_{n\to\infty} n(\alpha_n - 1) = \xi$$

si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha_n)^n = e^{\xi}.$$

Teorema 2.11 (Forma alternativa del criterio de Raabe). *Sea* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *una serie de términos positivos tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

y existe

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right).$$

Sea $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$e^L = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n .$$

Entonces

(i) *Si $L < -1$ se tiene que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.*
(ii) *Si $L > -1$ se tiene que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.*

DEMOSTRACIÓN.
Sea β definido por

$$\beta = -\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right).$$

Entonces se tiene que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n},$$

donde $\{\varepsilon_n\}$ es una sucesión que tiende a 0. Además, por la Observación 2.10 se tiene que $L = -\beta$. Por lo tanto el resultado sigue del criterio de Raabe.

$\square$

4. Criterio de Gauss

Johann Carl Friedrich Gauss (30 de abril de 1777–23 de febrero de 1855), fue un matemático, astrónomo y físico alemán que contribuyó significativamente en muchos campos, incluida la teoría de números, el análisis matemático, la geometría diferencial, la geodesia, el magnetismo y la óptica. Muchos lo consideran “el príncipe de las matemáticas” y “el matemático más grande desde la antigüedad”. Su obra tuvo una influencia notable en muchos campos de la matemática y de la ciencia.

J. C. Gauss

El reconocimiento a Gauss en Alemania es tan grande que su imagen, con dibujos alegóricos a su trabajo, fue colocado en los billetes de 10 marcos (previos a la implantación del euro), tal como se muestra en la siguiente ilustración.

Esta nota histórica y las imágenes fueron tomadas de [**8**].

Teorema 2.12 (Criterio de Gauss). *Sea* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *una serie de términos positivos. Supóngase que existen una sucesión acotada* $\{\theta_n\}$, $\beta \in \mathbb{R}$ *y* $\lambda > 0$ *tales que*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\lambda}}.$$

Entonces

(i) *Si* $\beta > 1$ *se tiene que* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge.*

(ii) *Si* $\beta \leq 1$ *se tiene que* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *diverge.*

Demostración.

El caso $\beta \neq 1$ se obtiene del criterio de Raabe, tomando

$$\varepsilon_n = \frac{\theta_n}{n^\lambda}.$$

Supóngase que $\beta = 1$.

Sea

$$d_n = \frac{1}{n \ln n},$$

entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n$$

es divergente y además

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{d_n} - \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{1}{d_{n+1}} \right) &= \lim_{n\to\infty} \left(n \ln n - \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\lambda}} \right) \cdot (n+1)(\ln(n+1)) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(n \ln n - \left(\frac{n-1}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\lambda}} \right) \cdot (n+1) \ln(n+1) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(n \ln n - \left(\frac{(n-1)(n+1)\ln(n+1)}{n} + \frac{\theta_n (n+1) \ln(n+1)}{n^{1+\lambda}} \right) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(n \ln n - \frac{(n^2-1)}{n} \cdot \ln(n+1) - \frac{(n+1)}{n} \cdot \frac{\theta_n \ln(n+1)}{n^\lambda} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(n \ln n - n \ln(n+1) + \frac{\ln(n+1)}{n} - \frac{(n+1)}{n} \cdot \frac{\theta_n \ln(n+1)}{n^\lambda} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln n - \ln(n+1)}{1/n} + \frac{\ln(n+1)}{n} - \frac{(n+1)}{n} \cdot \frac{\theta_n \ln(n+1)}{n^\lambda} \right) \\
&= -1 + 0 + 0 \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Por el criterio de Kummer la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

$\square$

CAPíTULO 3

Ejemplos

Este capítulo está dedicado a estudiar el comportamiento de algunas series para las que falla el criterio de D'Alembert y sin embargo, el criterio del segundo cociente permite determinar el carácter de la serie. En algunos de los ejemplos también se aplican otros de los criterios que se han presentado, lo que permite comparar las ventajas que pueden ofrecer los diferentes criterios dependiendo del tipo de serie que se desea estudiar.

Los siguientes límites, que se pueden probar de manera análoga a como se probó la Proposición 2.9, se utilizarán en algunos casos.

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{tn+\alpha}{tn}\right]^{n-\alpha}=e^{\alpha/t} \tag{3.1}$$

y

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{tn+\beta}{tn+\alpha}\right]^{n-\alpha}=e^{(\beta-\alpha)/t} \tag{3.2}$$

1. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$

Para la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p},$$

donde $p\in\mathbb{R}$, el criterio de D'Alembert falla ya que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n^p}{(n+1)^p}$$

y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p=1.$$

1.1. Aplicación del criterio del segundo cociente.

Se tiene que

$$\frac{a_{2n}}{a_n} = \frac{1}{2^p} \qquad \text{y} \qquad \frac{a_{2n+1}}{a_n} = \frac{1}{(2+\frac{1}{n})^p}$$

y por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = \frac{1}{2^p}.$$

Del criterio del segundo cociente se deduce que la serie converge si $p > 1$ y diverge si $p < 1$, el criterio no da información si $p = 1$.

1.2. Aplicación del criterio de Kummer.

Tomando

$$d_n = \frac{1}{n}$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{d_n} - \frac{a_{n+1}}{a_n} \frac{1}{d_{n+1}} \right) &= \lim_{n\to\infty} \left(n - \frac{n^p}{(n+1)^p} \cdot (n+1) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n \left(1 - \left(\frac{n}{n+1} \right)^{p-1} \right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \left(\dfrac{x}{x+1} \right)^{p-1}}{\dfrac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} (p-1) \left(\frac{x}{x+1} \right)^{p-2} \frac{x^2}{(x+1)^2} \\
&= p - 1.
\end{aligned}$$

Del criterio de Kummer se deduce que la serie converge si $p > 1$ y diverge si $p < 1$.

1.3. Aplicación del criterio de Raabe.

Se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n^p}{(n+1)^p}-1\right)\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^p-1}{\dfrac{1}{x}}\\
&= \lim_{x\to\infty} -p\left(\frac{x}{x+1}\right)^{p-1}\frac{x^2}{(x+1)^2}\\
&= -p.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1-\frac{p}{n}+\frac{\varepsilon_n}{n},$$

donde

$$\varepsilon_n = n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)+p$$

tiende a 0.

Del criterio de Raabe ($\beta = p$) se deduce que la serie converge si $p > 1$ y diverge si $p < 1$.

1.4. Comentarios.

El criterio de Gauss no parece ser adecuado para esta serie, ya que resulta muy complicado encontrar la sucesión $\{\theta_n\}$. También es importante destacar que para aplicar el criterio de Kummer hay que escoger (o poder "adivinar") la sucesión $\{d_n\}$.

2. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n(n+1)!}$

Para la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n(n+1)!}$$

el criterio de D'Alembert falla ya que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+4}$$

y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+4} = 1.$$

2.1. Aplicación del criterio del segundo cociente.

Se tiene que

$$\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \frac{4n+1}{4n+4} < 1$$

y por lo tanto $a_{2n+1} < a_{2n}$. Además

$$\begin{aligned}
\frac{a_{2n+1}}{a_n} < \frac{a_{2n}}{a_n} &= \frac{(2n+3)(2n+5)\cdots(4n-1)}{2^n(n+2)(n+3)\cdots(2n)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2n+3}{2n+4}\right)\left(\frac{2n+5}{2n+6}\right)\cdots\left(\frac{4n-1}{4n}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+4}\right)\left(1-\frac{1}{2n+6}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{4n}\right) \\
&< \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4n}\right)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Como

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{4n}\right)^{n-1} = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}$$

se tiene que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} \le \frac{1}{2\sqrt[4]{e}} < \frac{1}{2}.$$

Del criterio del segundo cociente se deduce que la serie converge.

2.2. Aplicación del criterio de Kummer.

Tomando

$$d_n = \frac{1}{n}$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{d_n} - \frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\frac{1}{d_{n+1}}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(n - \left(\frac{2n+1}{2n+4}\right)(n+1)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{2n+4}\right) = \frac{1}{2} > 0.
\end{aligned}$$

Del criterio de Kummer se deduce que la serie converge.

2.3. Aplicación del criterio de Raabe.

Se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+1}{2n+4}-1\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} -\frac{3n}{2n+4}\\ &= -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1-\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{\varepsilon_n}{n},$$

donde

$$\varepsilon_n = n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)+\frac{3}{2} = -\frac{3n}{2n+4}+\frac{3}{2} = \frac{3}{n+2}$$

tiende a 0.

Del criterio de Raabe ($\beta = 3/2$) se deduce que la serie converge.

2.4. Aplicación del criterio de Gauss.

Por los cálculos ya hechos para aplicar el criterio de Raabe se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= 1-\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{3}{n+2}\right)\\ &= 1-\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\left(\frac{3\sqrt{n}}{n+2}\right)\end{aligned}$$

Del criterio de Gauss, con $\beta = 3/2$, $\lambda = 1/2$ y

$$\theta_n = \frac{3\sqrt{n}}{n+2},$$

se deduce que la serie converge.

3. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n n!}\right]^p$

Para la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n n!}\right]^p,$$

donde $p \in \mathbb{R}$, el criterio de D'Alembert falla ya que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left[\frac{2n+1}{2n+2}\right]^p$$

y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{2n+1}{2n+2}\right]^p = 1.$$

3.1. Aplicación del criterio del segundo cociente.

Se tiene que

$$\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \left[\frac{4n+1}{4n+2}\right]^p < 1$$

y por lo tanto $a_{2n+1} < a_{2n}$. Además

$$\begin{aligned}\frac{a_{2n+1}}{a_n} < \frac{a_{2n}}{a_n} &= \left[\frac{(2n+1)(2n+3)(2n+5)\cdots(4n-1)}{2^n(n+1)(n+2)\cdots(2n)}\right]^p \\ &= \left[\left(1-\frac{1}{2n+2}\right)\left(1-\frac{1}{2n+4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{4n}\right)\right]^p.\end{aligned}$$

Como $0 < 1-x \leq e^{-x}$ para $0 < x < 1$,

$$\frac{a_{2n+1}}{a_n} < \frac{a_{2n}}{a_n} \leq e^{-p\left(\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+4}+\cdots+\frac{1}{4n}\right)}.$$

Al igual que en la Proposición 2.8 se prueba que

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \ln\left[\frac{2n+1}{n+1}\right],$$

por lo tanto

$$\frac{a_{2n+1}}{a_n} < \frac{a_{2n}}{a_n} \leq e^{-\frac{p}{2}\ln\left[\frac{2n+1}{n+1}\right]} = \left[\frac{2n+1}{n+1}\right]^{-p/2}.$$

Luego,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} \leq \lim_{n\to\infty} \left[\frac{2n+1}{n+1}\right]^{-p/2} = 2^{-p/2} < \frac{1}{2}$$

si $p > 2$.

Del criterio del segundo cociente se deduce que la serie converge si $p > 2$.

Para el caso $p \leq 2$ el criterio del segundo cociente no aporta información, sin embargo se puede demostrar directamente, que en este caso, la serie diverge.

Se procede de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{a_n}\right)^{1/p} &= \frac{2^n\, n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)} \\
&= 2\,\frac{(2\cdot 2)(2\cdot 3)(2\cdot 4)\cdots(2\cdot n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)} \\
&= 2\left(\frac{2\cdot 2}{3}\right)\left(\frac{2\cdot 3}{5}\right)\left(\frac{2\cdot 4}{7}\right)\cdots\left(\frac{2\cdot n}{2n-1}\right) \\
&= 2\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)
\end{aligned}$$

Como $0 < 1 + x \le e^x$ para $x > 0$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{a_n}\right)^{1/p} &\le 2\, e^{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}} \\
&\le 2\, e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}}
\end{aligned}$$

Al igual que se probó la Proposición 2.8 se prueba que

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right) \le \frac{1+\ln n}{2},$$

por lo tanto

$$\left(\frac{1}{a_n}\right)^{1/p} \le 2\sqrt{e}\, e^{\frac{\ln n}{2}} = 2e^{\frac{1}{2}}\sqrt{n} \le 4\sqrt{n},$$

luego

$$a_n \ge \frac{1}{4^p n^{p/2}}.$$

Por el criterio de comparación la serie diverge para $p \le 2$.

3.2. Comentarios.

El criterio del segundo cociente funciona bastante bien para esta serie, al intentar aplicar cualquiera de los otros tres criterios aparecen límites más complicados que los que aparecen con el del segundo cociente.

4. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)b(b+1)(b+2)\cdots(b+n-1)}{n!\,c(c+1)(c+2)\cdots(c+n-1)}$

Sean a, b y c números positivos, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)b(b+1)(b+2)\cdots(b+n-1)}{n!\,c(c+1)(c+2)\cdots(c+n-1)}$$

se conoce con el nombre de serie hipergeométrica.

Para esta serie el criterio de D'Alembert falla ya que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(a+n)(b+n)}{(n+1)(c+n)}$$

y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(a+n)(b+n)}{(n+1)(c+n)} = 1.$$

4.1. Aplicación del criterio del segundo cociente.

$$\begin{aligned}\frac{a_{2n}}{a_n} &= \frac{(a+n)(a+n+1)\cdots(a+2n-1)(b+n)(b+n+1)\cdots(b+2n-1)}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)(c+n)(c+n+1)\cdots(c+2n-1)} \\ &= \frac{(a+n)(b+n)}{2n(c+n)}\left[\frac{(a+n+1)(b+n+1)}{(n+1)(c+n+1)}\cdots\frac{(a+2n-1)(b+2n-1)}{(2n-1)(c+2n-1)}\right].\end{aligned}$$

Cada una de las expresiones racionales dentro de los corchetes es de la forma

$$\frac{(a+x)(b+x)}{x(c+x)}.$$

Sea

$$f(x) = \frac{(a+x)(b+x)}{x(c+x)}.$$

Entonces

$$f(x) = \frac{(a+x)(b+x)}{x(c+x)} = 1 + \frac{(a+b-c)x+ab}{x(c+x)}.$$

Por lo tanto si $a+b<c$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f(x)$ es creciente para $x > N$.

Luego, si $a+b<c$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{a_{2n}}{a_n} &\leq \frac{(a+n)(b+n)}{2n(c+n)}\left[\frac{(a+2n-1)(b+2n-1)}{(2n-1)(c+2n-1)}\right]^{n-1} \\ &= \frac{(a+n)(b+n)}{2n(c+n)}\left[\frac{2n+a-1}{2n+c-1}\right]^{n-1}\left[\frac{2n+b-1}{2n-1}\right]^{n-1}\end{aligned}$$

para todo $n > N$. En forma similar se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{a_{2n+1}}{a_n} &\leq \frac{(a+n)(b+n)}{(2n+1)(c+n)}\left[\frac{(a+2n)(b+2n)}{(2n)(c+2n)}\right]^{n-1} \\ &= \frac{(a+n)(b+n)}{(2n+1)(c+n)}\left[\frac{2n+a}{2n+c}\right]^{n-1}\left[\frac{2n+b}{2n}\right]^{n-1}\end{aligned}$$

para todo $n > N$.

Utilizando el límite notable (3.2) se obtiene

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} \leq \frac{1}{2}\, e^{\frac{a+b-c}{2}} < \frac{1}{2}$$

y

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} \leq \frac{1}{2}\, e^{\frac{a+b-c}{2}} < \frac{1}{2}$$

si $a+b<c$.

Del criterio del segundo cociente se deduce que la serie converge si $a+b<c$.

El caso $a+b \geq c$ se puede tratar directamente de la siguiente manera.

Si $a+b \geq c$, entonces

$$\frac{(a+x)(b+x)}{x(c+x)} = 1 + \frac{(a+b-c)x+ab}{x(c+x)} > 1$$

para todo $x>0$. Por lo tanto

$$\frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)b(b+1)(b+2)\cdots(b+n-1)}{n!c(c+1)(c+2)\cdots(c+n-1)} > \frac{ab}{cn},$$

luego, por el Criterio de Comparación, la serie diverge si $a+b \geq c$.

4.2. Aplicación del criterio de Kummer.

Tomando

$$d_n = \frac{1}{n}$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{d_n} - \frac{a_{n+1}}{a_n}\frac{1}{d_{n+1}}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(n - \frac{(a+n)(b+n)}{(n+1)(c+n)}(n+1)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+cn-ab-an-nb-n^2}{n+c}\right) \\
&= c-a-b
\end{aligned}$$

Del criterio de Kummer se deduce que la serie converge si $a+b<c$ y diverge si $a+b>c$.

4.3. Aplicación del criterio de Raabe.

Se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(a+n)(b+n)}{(n+1)(c+n)}-1\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(a+b-c-1)n^2+abn-cn}{n^2+(c+1)n+c}\\
&= a+b-c-1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1+\frac{a+b-c-1}{n}+\frac{\varepsilon_n}{n},$$

donde

$$\varepsilon_n = n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)-(a+b-c-1)$$

tiende a 0.

Del criterio de Raabe ($\beta = -(a+b-c-1)$) se deduce que la serie converge si $a+b<c$ y diverge si $a+b>c$

4.4. Aplicación del criterio de Gauss.

Se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{1}{n+1}\left[n+a+b-c+\frac{(a-c)(b-c)}{n+c}\right]\\
&= \frac{1}{n+1}\left[n+1-(1+c-a-b)+\frac{(a-c)(b-c)}{n+c}\right]\\
&= 1-\frac{1+c-a-b}{n+1}+\frac{1}{n+1}\left(\frac{(a-c)(b-c)}{n+c}\right)\\
&= 1-\frac{1+c-a-b}{n}+\frac{1}{n+1}\left(\frac{(a-c)(b-c)}{n+c}\right)+\frac{1+c-a-b}{n(n+1)}
\end{aligned}$$

Se puede aplicar el criterio de Gauss con $\beta = -(a+b-c-1)$, $\lambda = 1/2$ y $\{\theta_n\}$ definida por

$$\theta_n = \left(n^{3/2}\right)\left(\frac{1}{n+1}\left(\frac{(a-c)(b-c)}{n+c}\right)+\frac{1+c-a-b}{n(n+1)}\right)$$

Del criterio de Gauss se deduce que la serie converge si $a+b<c$ y diverge si $a+b\geq c$.

4.5. Comentarios.

El criterio de Gauss es muy adecuado para esta serie.

5. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(1+x)(2+x)(3+x)\cdots(n+x)}$

Para la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(1+x)(2+x)(3+x)\cdots(n+x)}$$

donde $x > 0$, el criterio de D'Alembert falla ya que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1+x}$$

y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1+x} = 1.$$

5.1. Aplicación del criterio del segundo cociente.

Se tiene que

$$\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \frac{2n}{2n+1+x} \le 1,$$

por lo tanto $a_{2n+1} \le a_{2n}$.

Además se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{a_{2n+1}}{a_n} \le \frac{a_{2n}}{a_n} &= \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)}{(n+1+x)(n+2+x)\cdots(2n-1+x)(2n+x)} \\ &= \frac{n}{2n+x}\left(\frac{n+1}{n+1+x}\right)\left(\frac{n+2}{n+2+x}\right)\cdots\left(\frac{2n-1}{2n-1+x}\right).\end{aligned}$$

Como

$$\frac{k}{k+x} = 1 - \frac{x}{k+x},$$

se tiene que

$$\frac{n+j}{n+j+x} \le \frac{2n-1}{2n-1+x}, \qquad j = 1, \dots, n-1.$$

Por lo tanto

$$\frac{a_{2n+1}}{a_n} \le \frac{a_{2n}}{a_n} \le \frac{n}{2n+x}\left(\frac{2n-1}{2n-1+x}\right)^{n-1}.$$

Por el límite notable (3.2)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+x}\left(\frac{2n-1}{2n-1+x}\right)^{n-1} = \frac{1}{2}\ e^{-x/2}.$$

Luego

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} \le \frac{1}{2}\ e^{-x/2} < \frac{1}{2}.$$

Del criterio del segundo cociente se deduce que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(1+x)(2+x)(3+x)\cdots(n+x)}$$

converge para $x > 0$.

6. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\cdot 2^p\cdot 3^p\cdots(n-1)^p}{(1+x)(2^p+x)(3^p+x)\cdots(n^p+x)}$

Para la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 2^p\cdot 3^p\cdots(n-1)^p}{(1+x)(2^p+x)(3^p+x)\cdots(n^p+x)},$$

donde $p \in \mathbb{R}$ y $x > 0$, el criterio de D'Alembert falla ya que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^p}{(n+1)^p + x}$$

y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{(n+1)^p + x} = 1.$$

6.1. Aplicación del criterio del segundo cociente.

Se tiene que

$$\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \frac{(2n)^p}{(2n+1)^p + x} \leq 1,$$

por lo tanto $a_{2n+1} \leq a_{2n}$.

Además se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{a_{2n+1}}{a_n} \leq \frac{a_{2n}}{a_n} &= \frac{(n^p)(n+1)^p(n+2)^p\cdots(2n-1)^p}{((n+1)^p+x)((n+2)^p+x)\cdots((2n-1)^p+x)((2n)^p+x)} \\ &\leq \frac{n^p}{(2n)^p+x}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, para $p > 1$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} \leq \frac{1}{2^p} < \frac{1}{2} \text{ para } p > 1.$$

Por otra parte

$$\frac{(n+j)^p}{(n+j)^p + x} = 1 - \frac{x}{(n+j)^p + x} \leq 1 - \frac{x}{(2n-1)^p + x},$$

para $j = 1, \ldots, n-1$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{a_{2n+1}}{a_n} \leq \frac{a_{2n}}{a_n} &= \frac{(n^p)(n+1)^p(n+2)^p\cdots(2n-1)^p}{((n+1)^p+x)((n+2)^p+x)\cdots((2n-1)^p+x)((2n)^p+x)}\\ &\leq \left(\frac{n^p}{(2n)^p+x}\right)\left(1-\frac{x}{(2n-1)^p+x}\right)^{n-1}.\end{aligned}$$

Luego para $p<1$ se tiene que

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}}{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_n} \leq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^p}{(2n)^p+x}\right)\left(1-\frac{x}{(2n-1)^p+x}\right)^{n-1} = 0.$$

Del criterio del segundo cociente se deduce que la serie converge para todo $p<1$ ó $p>1$. Por el Ejemplo 5 la serie converge si $p=1$. Por lo tanto esta serie converge para todo $x>0$ y para todo p.

Bibliografía

[1] T. Apostol, *Cálculus,* Vol. I, John Wiley, 1967. Citado en la(s) página(s): 3

[2] R. Bruzual y M. Domínguez, *Cálculo Diferencial en una Variable.*
Disponible en http://www.matematica.ciens.ucv.ve/labfg/an1/cd1van1.pdf .
Citado en la(s) página(s): 3

[3] R. Bruzual y M. Domínguez, *Cálculo Integral y Serie de Funciones.*
Disponible en http://www.matematica.ciens.ucv.ve/labfg/an1/ci1van1.pdf.
Citado en la(s) página(s): 3

[4] J. Perez, *Cálculo Diferencial e Integral.*
Disponible en http://www.ugr.es/ fjperez/apuntes.html .
Citado en la(s) página(s): 3

[5] E. Rainville, *Infinite Series,* Macmillan, New York, 1967. Citado en la(s) página(s): 16

[6] Rudin, W. *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw Hill. Citado en la(s) página(s): 3

[7] A. Sayel, *The mth ratio test: New convergence test for series.* American Mathematical Monthly **115**, No. 6, 514-524 (2008). Citado en la(s) página(s): 1, 11, 14

[8] Wikipedia en español, http://es.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Portada. Citado en la(s) página(s): 7, 16, 18, 25