An. Arm. Teor. Op. Vol. 1, No. 1, 1–13
ISSN 2244-7628


**Análisis Armónico y Teoría de Operadores**

# DESCOMPOSICIONES DE SEMIGRUPOS DE ISOMETRÍAS EN ESPACIOS DE HILBERT

# DECOMPOSITION OF SEMIGROUPS OF ISOMETRIES ON HILBERT SPACES

MARISELA DOMÍNGUEZ

*A la memoria del profesor Mario Wschebor.*

Resumen. Wold demostró que un proceso estocástico estacionario puede descomponerse como la suma de dos procesos no correlacionados entre sí, uno de ellos puramente determinístico y el otro puramente no determinístico. La intención de este trabajo es presentar, de una manera geométrica y comprensible, algunas generalizaciones de esta descomposición que han sido dadas por diversos autores.

Abstract. Wold proved that a stationary stochastic process can be split into two uncorrelated components, one of purely deterministic and the other purely indeterministic. Some generalizations of this decomposition given by several authors are presented in this note, in a comprehensive and geometrical way.

## 1. Introducción.

La descomposición de semigrupos de isometrías en espacios de Hilbert, como suma de semigrupos con características especiales, es una técnica que ha sido utilizada bastante en las últimas décadas. Esto se debe, entre varias razones, a las muchas aplicaciones que existen en análisis armónico, resolución de ecuaciones diferenciales, control óptimo, procesos aleatorios y econometría.

Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert de funciones analíticas en el disco unitario $\mathbb{D}$ del plano complejo, que es invariante con respecto al operador shift $S$ definido como

$$(Sf)(z) = zf(z),$$

se dice que vale un *teorema tipo-Beurling* en $\mathcal{H}$ (ver [8]), si cualquier subespacio $S$-invariante $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ es el menor subespacio $S$-invariante que contiene a $\mathcal{M} \ominus S\mathcal{M}$.

Recibido por los editores 16 de septiembre de 2011 y aceptado el 15 de diciembre de 2011.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primario 47D03; Secundario 43A17.

*Frases y palabras claves.* isometría, descomposición, invariante, unitario, no-unitario, semigrupo.

El autor fue financiado parcialmente por el CDCH de la Universidad Central de Venezuela.

Esta terminología está inspirada en el ejemplo clásico del espacio de Hardy $H^2$ en el cual, por el teorema de Beurling, cualquier subespacio $S$-invariante, $\mathcal{M}$, tiene la forma $\mathcal{M} = \theta H^2$ para alguna función interna $\theta$. En este caso $\mathcal{M} \ominus S\mathcal{M}$ es el subespacio uni-dimensional generado por $\theta$. Este resultado de Beurling puede ser considerado como un caso particular del teorema de descomposición de Wold-Kolmogorov para isometrías, que será explicado en estas notas.

En este trabajo se considerará la descomposición de Wold y cierto número de modelos y técnicas de descomposición de isometrías en espacios de Hilbert, dados por varios autores.

## 2. Motivación: el shift en $L^2$ de la medida de Lebesgue

Para $n \in \mathbb{Z}$ sea $e_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$e_n(x) = e^{inx}.$$

Estas funciones son llamadas las *exponenciales trigonométricas.*

Para $1 \leq p < \infty$ sea $L^p$ el espacio usual de Lebesgue con respecto a la medida de Lebesgue normalizada en $[0, 2\pi]$.

La *serie de Fourier* de una función $f \in L^1$ tiene la forma

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e_n(x)$$

con *coeficientes de Fourier*

$$a_n = \widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x)\, dx.$$

Como $L^2 \subset L^1$, estos conceptos tienen sentido para $f \in L^2$.

El espacio $L^2$ tiene una base ortonormal natural, la *base de Fourier*, que consiste de las exponenciales trigonométricas. Es decir, $L^2$ es el espacio lineal cerrado generado por $e_n$ con $n \in \mathbb{Z}$. Con la notación usual

$$L^2 = \bigvee_{n\in\mathbb{Z}} e_n.$$

Sean $L^2_+$ (usualmente llamado $H^2_+$) el espacio lineal cerrado generado por $e_n$ con $n \geq 0$, y $L^2_-$ el espacio lineal cerrado generado por $e_n$ con $n < 0$, esto es,

$$L^2_+ = \bigvee_{n\geq 0} e_n$$

$$L^2_- = \bigvee_{n<0} e_n$$

**Definición 2.1.** Si $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ son espacios de Hilbert, un operador lineal $V : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ se dice que es una *isometría* cuando

$$\|Vh\| = \|h\| \qquad \text{para todo } h \in \mathcal{H},$$

equivalentemente cuando

$$V^*V = I_{\mathcal{H}}.$$

Y se dice que es *unitario* cuando es isometría y es sobreyectivo, equivalentemente cuando

$$V^*V = I_{\mathcal{H}} \qquad \text{y} \qquad VV^* = I_{\mathcal{H}'}.$$

Sea $S : L^2 \to L^2$ el operador de multiplicación por $e_1$,

$$Sf = e_1 f.$$

Es bien sabido que $S$ es un operador unitario.

El subespacio $L^2_+$ es invariante bajo $S$, es decir,

$$S(L^2_+) \subseteq L^2_+.$$

Sea $S_+ : L^2_+ \to L^2_+$ es el operador dado por

$$S_+ f = e_1 f.$$

Sigue que $S_+$ es una isometría y

$$S_+ = S\mid_{L^2_+}.$$

La compresión de $S$ a $L^2_-$ se denotará por $S_-$. Esto es, $S_- : L^2_- \to L^2_-$ está dado por

$$S_- = P_{L^2_-} S\mid_{L^2_-}.$$

El operador $S_-$ es el adjunto de la restricción de $S^*$ a $L^2_-$

$$S_- = (S^*\mid_{L^2_-})^*.$$

Además el operador $S_-$ es unitariamente equivalente a $S^*_+$.

Sea

$$\Lambda = \bigvee e_0.$$

Se tiene que

$$\Lambda = L^2_+ \ominus S_+ L^2_+.$$

Como

$$S^n_+ \Lambda \subset S^n_+ L^2_+ \subset S_+ L^2_+$$

y $S_+ L^2_+ \perp \Lambda$ sigue que

$$S^n_+ \Lambda \perp \Lambda \qquad \text{para todo } n \geq 1.$$

Como $S$ es una isometría se tiene que

$$S^n_+ \Lambda \perp S^m_+ \Lambda \qquad \text{para todo } n, m \geq 0, \text{ con } n \neq m.$$

Por otro lado, $L^2_+$ es igual a la siguiente suma ortogonal

$$\bigoplus_{n \geq 0} S^n_+ \Lambda.$$

Se tiene que existe un subespacio cerrado $\Lambda$ de $L^2_+$ tal que

(1) $S^n_+ \Lambda \perp S^m_+ \Lambda$ para todo $n, m \geq 0$, con $n \neq m$.
(2) $L^2_+ = \bigoplus_{n \geq 0} S^n_+ \Lambda$.

Estos hechos motivan las definiciones que se presentan en la próxima sección.

Es importante destacar que

$$\begin{aligned}
\bigoplus_{k=0}^{n-1} S^k_+ \Lambda &= \Lambda \oplus S_+ \Lambda \oplus \cdots \oplus S^{n-1}_+ \Lambda \\
&= (L^2_+ \ominus S_+ L^2_+) \oplus S_+(L^2_+ \ominus S_+ L^2_+) \oplus \cdots \oplus S^{n-1}_+ (L^2_+ \ominus S_+ L^2_+) \\
&= (L^2_+ \ominus S_+ L^2_+) \oplus (S_+ L^2_+ \ominus S^2_+ L^2_+) \oplus \cdots \oplus (S^{n-1}_+ L^2_+ \ominus S^n_+ L^2_+) \\
&= L^2_+ \ominus S^n_+ L^2_+.
\end{aligned}$$

## 3. Descomposición de isometrías usando "Shifts" unilaterales

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert.

**Definición 3.1.** Sea $\mathcal{M}$ un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$, se dice que $\mathcal{M}$ es *invariante* bajo $V$, o simplemente $V$-*invariante*, si $V\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$.

**Proposición 3.2.** *Si $V$ es una isometría en $\mathcal{H}$ y $V\mathcal{M} = \mathcal{M}$ entonces $\mathcal{M}$ es $V$-invariante y $\mathcal{M}$ es $V^*$-invariante.*

En efecto,

$$V^*\mathcal{M} = V^*V\mathcal{M} = \mathcal{M}.$$

Por lo tanto $\mathcal{M}$ es $V^*$- invariante.

**Definición 3.3.** Un subespacio $\mathcal{M}$ de $\mathcal{H}$ es un espacio $V$-*nómado* o $V$-*errante* (*wandering*) si $V^n\mathcal{M} \perp V^m\mathcal{M}$ para todo $n, m \geq 0$, con $n \neq m$. En el caso de una isometría, para que $\mathcal{M}$ sea $V$-nómado, basta suponer $V^n\mathcal{M} \perp \mathcal{M}$ para todo $n \geq 1$.

**Definición 3.4.** Una isometría $V$ en $\mathcal{H}$ es un *"shift" unilateral* si existe un subespacio cerrado $\mathcal{M}$ de $\mathcal{H}$ tal que

(1) $\mathcal{M}$ es $V$-nómado.
(2) $\mathcal{H} = \bigoplus_{n\geq 0} V^n\mathcal{M}$.

El subespacio $\mathcal{M}$ es llamado *generador* para $V$, está unívocamente determinado por $V$ y su dimensión es llamada la *multiplicidad* del "shift" unilateral.

**Proposición 3.5.** *Si $V$ en $\mathcal{H}$ es un "shift" unilateral entonces*

(a) $V^*V^n h = V^{n-1}h$ *si* $h \in \mathcal{M}$ *y* $n \geq 1$.
(b) $V^*h = 0$ *si* $h \in \mathcal{M}$.
(c) $\lim_{n\to\infty} \|V^{*n}h\|^2 = 0 \qquad (h \in \mathcal{H})$.

*Demostración.*
(a) Si $h \in \mathcal{M}$ y $n \geq 1$ entonces

$$V^*V^n h = V^*VV^{n-1}h = V^{n-1}h.$$

(b) $V^*h = 0$ porque

$$\langle V^*h, h'\rangle = \langle h, Vh'\rangle = 0 \qquad \text{para todo } h' \in \mathcal{H}.$$

(c) Esta parte se prueba usando la igualdad de Plancherel y usando que las "colas" de las series convergentes tienden a cero.

□

**Teorema 3.6.** *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $V$ una isometría en $\mathcal{H}$. Entonces $\mathcal{H}$ se descompone en una suma ortogonal*

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_U \oplus \mathcal{H}_S$$

*tal que*

(1) $\mathcal{H}_U$ *es $V$-invariante.*
(2) $\mathcal{H}_S$ *es $V$-invariante.*
(3) $V\,|_{\mathcal{H}_U}$ *es unitario.*
(4) $V\,|_{\mathcal{H}_S}$ *es un "shift" unilateral.*

*La descomposición está determinada de manera única:*

$$\mathcal{H}_U = \bigcap_{n\geq 0} V^n\mathcal{H}, \qquad \mathcal{H}_S = \bigoplus_{n\geq 0} V^n\mathcal{M}$$

*donde* $\mathcal{M} = \mathcal{H} \ominus V\mathcal{H}$.

*El espacio* $\mathcal{H}_S$ *o el espacio* $\mathcal{H}_U$ *pueden ser iguales a* $\{0\}$.

Estas descomposiciones pueden verse en el artículo de Halmos [4] o en el libro de Sz.-Nagy y Foias [10, Section I.1])

A continuación se dará una idea de la demostración. Sean $\mathcal{M} = \mathcal{H} \ominus V\mathcal{H}$ y

$$\mathcal{H}_S = \bigoplus_{n\geq 0} V^n\mathcal{M}.$$

Se tiene que

$$V\mathcal{H}_S = \bigoplus_{n\geq 1} V^n\mathcal{M} = \mathcal{H}_S \ominus \mathcal{M} \subset \mathcal{H}_S.$$

Por lo tanto $\mathcal{H}_S$ es $V$-invariante.

En forma análoga a lo presentado en la sección anterior se puede probar

$$\bigoplus_{k=0}^{n-1} V^k\mathcal{M} = \mathcal{H} \ominus V^n\mathcal{H}. \tag{1}$$

y $V\,|_{\mathcal{H}_S}$ es un "shift" unilateral.

Sea

$$\mathcal{H}_U = \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_S.$$

Como

$$h \in \mathcal{H}_U \qquad \text{si y sólo si} \qquad h \perp \bigoplus_{k=0}^{n-1} V^k\mathcal{M} \text{ para todo } n \geq 1.$$

de (1) sigue que

$$h \in \mathcal{H}_U \qquad \text{si y sólo si} \qquad h \in V^n\mathcal{H} \text{ para todo } n \geq 1.$$

Por lo tanto

$$\mathcal{H}_U = \bigcap_{n\geq 1} V^n\mathcal{H}.$$

Se puede agregar $n = 0$, luego

$$\mathcal{H}_U = \bigcap_{n\geq 0} V^n\mathcal{H}.$$

Sigue que

$$V\mathcal{H}_U = V\left(\bigcap_{n\geq 0} V^n\mathcal{H}\right) = \bigcap_{n\geq 0} V^{n+1}\mathcal{H} = \bigcap_{n\geq 1} V^n\mathcal{H} = \mathcal{H}_U.$$

Por lo tanto

$$V\mathcal{H}_U = \mathcal{H}_U$$

y $V\,|_{\mathcal{H}_U}$ es unitario.

## 4. El shift en $L^2$ de una medida finita

Sean $\mu$ una medida finita no negativa definida en los borelianos de $[0, 2\pi]$ y $S : L^2_\mu \to L^2_\mu$ el operador de multiplicación por $e_1$,

$$Sf = e_1 f.$$

**Lema 4.1.** *Sea $\mathcal{M}$ un subespacio cerrado de $L^2_\mu$, $S$-invariante. Entonces la proyección ortogonal $P_{\mathcal{M}}$ en $\mathcal{M}$ tiene la forma*

$$P_{\mathcal{M}} f = g_{\mathcal{M}} f$$

*para una función $g_{\mathcal{M}} \in L^2_\mu$ que toma valores 0 y 1. Más aún*

$$g_{\mathcal{M}} = P_{\mathcal{M}} e_0.$$

Se omitirá la demostración de este lema, ya que es sencilla.

Para cada $n \in \mathbb{Z}$ sea $\mathcal{F}_n$ el menor subespacio cerrado de $L^2_\mu$ que contiene las funciones $e_k$ con $k > n$:

$$\mathcal{F}_n = \bigvee_{k>n} e_k.$$

Entonces $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es decreciente.

Sea

$$\mathcal{H}_D = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}_n.$$

Se tiene que $\mathcal{H}_D$ es un subespacio cerrado de $L^2_\mu$ y $\mathcal{H}_D$ es $S$-invariante.

Sea

$$g_D = P_{\mathcal{H}_D} e_0$$

la función dada por el Lema 4.1.

Si $e_0 \in \mathcal{F}_0$, se definen $\mathcal{H}_I = \{0\}$ y $g_I = 0$.

Si $e_0 \notin \mathcal{F}_0$, sea

$$e_0 = h_0 + f_0$$

donde $f_0 \in \mathcal{F}_0$ y $h_0 \perp \mathcal{F}_0$.

Sean

$$h_n = S^n h_0 \qquad \text{y} \qquad f_n = e_n - h_n,$$

entonces

$$e_n = h_n + f_n.$$

Se puede probar que $h_n$ y $f_n$ son ortogonales.

La sucesión bilateral $\{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ genera un conjunto en $L^2_\mu$ que es ortogonal a $\mathcal{H}_D$.

En efecto, sea

$$\mathcal{H}_I = \bigvee_{n\in\mathbb{Z}} h_n = \bigvee_{n\in\mathbb{Z}} S^n h_0.$$

Observe que $\mathcal{H}_I$ es cerrado, $\mathcal{H}_I$ es $S$-invariante y $\mathcal{H}_D \perp \mathcal{H}_I$.

Sea

$$g_I = P_{\mathcal{H}_I} e_0$$

la función dada por el lema.

Con lo hecho anteriormente se obtiene que $L^2_\mu$ se descompone en una suma ortogonal

$$L^2_\mu = \mathcal{H}_I \oplus \mathcal{H}_D$$

tal que

(1) $\mathcal{H}_D$ es $S$-invariante.
(2) $\mathcal{H}_I$ es $S$-invariante.
(3) $S^n\mid_{\mathcal{H}_D}$ es unitario para todo $n \geq 0$.

Si $L^2_\mu = \mathcal{H}_D$ diremos que $\mu$ es una *medida determinística*. Si $L^2_\mu = \mathcal{H}_I$ diremos que $\mu$ es una *medida de innovación*, con innovación $S^n h_0$ en el tiempo $n$. Para más detalles acerca de estas medidas y los procesos relacionados se puede consultar el artículo de Helson y Lowdenslager [5, Sección 3].

## 5. Parte completamente no-unitaria

**Definición 5.1.** Se dice que la isometría $V$ es *completamente no-unitaria* si para todo subespacio invariante $\mathcal{M}$, tal que $V\mid_{\mathcal{M}}$ es unitario se tiene que $\mathcal{M} = \{0\}$.

El siguiente teorema también es un resultado de descomposición y es un caso particular de un teorema de Suciu [9], que se presenta más adelante en este trabajo (ver Teorema 7.14).

**Teorema 5.2.** *Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $V$ es una isometría en $\mathcal{H}$, entonces $\mathcal{H}$ se puede descomponer de manera única en una suma ortogonal*

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_U \oplus \mathcal{H}_T$$

*tal que*

(1) *$\mathcal{H}_U$ es $V$-invariante.*
(2) *$\mathcal{H}_T$ es $V$-invariante.*
(3) *$V\mid_{\mathcal{H}_U}$ es unitario.*
(4) *$V\mid_{\mathcal{H}_T}$ es completamente no-unitario.*

## 6. Descomposición de Wold

El siguiente resultado apareció por primera vez en un libro de Wold [11] (ver también [12]). La segunda edición de este libro es de 1954 y es una excelente introducción a la teoría de procesos en tiempo discreto [3, pag. 297].

**Teorema 6.1.** *Un proceso estocástico estacionario puede expresarse como la suma de dos procesos no-correlacionados entre sí, uno de ellos puramente determinístico y el otro puramente no-determinístico.*

*Más aún, la componente puramente no-determinística (que es esencialmente la parte estocástica) puede escribirse como una combinación lineal del proceso de innovación, el cual es una sucesión de variables aleatorias no correlacionadas.*

## 7. Semigrupos de isometrías

La referencia principal para esta sección es el artículo de Suciu [9].

Sea $G$ un grupo abeliano con unidad $0 = 0_G$. Sea $\Sigma$ un subsemigrupo de $G$ tal que

$$\Sigma \cap (-\Sigma) = \{0\}.$$

Un ejemplo muy sencillo está dado por

$$\Sigma = \{\text{ números pares positivos }\} \cup \{0\}, -\Sigma = \{\text{ números pares negativos }\} \cup \{0\}.$$

Se supondrá que

$$G = \Sigma + (-\Sigma).$$

Si $\Sigma$ y $-\Sigma$ son como en el ejemplo anterior, tendría que ser $G = \{$ números pares $\}$ y no se podría tomar $G$ como $\mathbb{Z}$.

Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $L(\mathcal{H})$ el álgebra de todos los operadores lineales y acotados en $\mathcal{H}$.

Un *semigrupo de isometrías* $\{T_t\}_{t\in\Sigma}$ en $\mathcal{H}$ es una aplicación

$$t \mapsto T_t$$

de $\Sigma$ en $L(\mathcal{H})$ tal que

(a) $T_t$ es un operador isométrico en $\mathcal{H}$, si $t \in \Sigma$.
(b) $T_0 = I$.
(c) $T_r T_s = T_{r+s}$ para $r, s \in \Sigma$.

Sea $\{T_t\}_{t\in\Sigma}$ un semigrupo de isometrías.

Sean $s_1, r_1, s_2, r_2 \in \Sigma$ tales que $s_1 - r_1 = s_2 - r_2$. Como $G$ es un grupo abeliano, se obtiene que: $r_2 + s_1 = r_1 + s_2$.

De donde

$$T_{r_2} T_{s_1} = T_{r_1} T_{s_2}. \tag{2}$$

Como $r_2 + r_1 = r_1 + r_2$ se tiene que

$$(T_{r_2} T_{r_1})^* = (T_{r_2+r_1})^* = (T_{r_1+r_2})^* = (T_{r_1} T_{r_2})^*.$$

Luego

$$T_{r_1}^* T_{r_2}^* = T_{r_2}^* T_{r_1}^*. \tag{3}$$

Usando que $T_{r_1}$, $T_{r_2}$ son isometrías, de (2) y (3) sigue que

$$T_{r_1}^* T_{s_1} = T_{r_1}^* (T_{r_2}^* T_{r_2}) T_{s_1} = T_{r_2}^* T_{r_1}^* T_{r_1} T_{s_2} = T_{r_2}^* T_{s_2}.$$

Como $G = \Sigma + (-\Sigma)$, si para $t = s - r$ se toma

$$T_t = T_r^* T_s,$$

se obtiene una aplicación bien definida $t \mapsto T_t$ de $G$ en $L(\mathcal{H})$ que extiende al semigrupo $\{T_t\}_{t\in\Sigma}$ y verifica

$$T_{-t} = T_t^* \qquad \text{si } t \in \Sigma.$$

A partir de un teorema de dilatación de Ito [6] (ver también [9]) o del teorema de dilatación de Naimark [10], se puede probar que existe un espacio de Hilbert $\mathcal{K}$ que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y una representación unitaria $t \mapsto U_t$ de $G$ en $\mathcal{K}$ tal que

$$T_t = P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{K}} U_t$$

donde $P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{K}}$ es la proyección ortogonal de $\mathcal{K}$ en $\mathcal{H}$.

El grupo $\{U_t\}_{t\in G}$ se llama la *dilatación unitaria del semigrupo* $\{T_t\}_{t\in\Sigma}$.

### 7.1. **Semigrupo invariante.**

**Definición 7.1.** Un subespacio cerrado $\mathcal{M}$ de $\mathcal{H}$ se dice que es:

(a) *invariante* bajo $\{T_t\}_{t\in\Sigma}$ si

$$T_t\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M} \qquad \text{para todo } t \in \Sigma.$$

(b) *doblemente invariante* bajo $\{T_t\}_{t\in\Sigma}$ si

$$T_t\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M} \qquad \text{y} \qquad T_t^*\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M} \qquad \text{para todo } t \in \Sigma.$$

**Proposición 7.2.** *Sea $\{T_t\}_{t\in\Sigma}$ un semigrupo de isometrías en $\mathcal{H}$. Si $\mathcal{M}$ es doblemente invariante entonces $\{T_t\mid_{\mathcal{M}}\}_{t\in\Sigma}$ es un semigrupo de isometrías en $\mathcal{M}$.*

7.2. **Semigrupo unitario y semigrupo completamente no-unitario.**

**Definición 7.3.** Sea $\{T_t\}_{t\in\Sigma}$ un semigrupo de isometrías en $\mathcal{H}$, se dice que el semigrupo es:

(a) *unitario* si $T_t$ es unitario para cada $t \in \Sigma$.
(b) *completamente no-unitario* si para todo subespacio doblemente invariante $\mathcal{M}$, tal que $\{T_t\mid_{\mathcal{M}}\}_{t\in\Sigma}$ es unitario se tiene que $\mathcal{M} = \{0\}$.

**Proposición 7.4.** *Sea $\{T_t\}_{t\in\Sigma}$ un semigrupo de isometrías en $\mathcal{H}$ y $\mathcal{M}$ un subespacio doblemente invariante.*

(a) *Si $\{T_t\}_{t\in\Sigma}$ es unitario entonces $\{T_t\mid_{\mathcal{M}}\}_{t\in\Sigma}$ es unitario.*
(b) *Si $\{T_t\}_{t\in\Sigma}$ es completamente no-unitario entonces $\{T_t\mid_{\mathcal{M}}\}_{t\in\Sigma}$ es completamente no-unitario.*

7.3. **Semigrupo quasi-unitario o casi-unitario.**

Consideremos el caso particular en que $G = \mathbb{Z}$,

$$\Sigma = \mathbb{Z}^+ = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\}$$

y $T \in L(\mathcal{H})$ una isometría. Sea $T_n = T^n$ para $n \geq 0$.

$$T\mathcal{H} = T^{0*}T^1 \subseteq \bigvee_{n-m>0} T^{m*}T^n\mathcal{H}.$$

Como

$$T^{m*}T^{n-1}\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}$$

sigue que

$$T^{m*}T^n\mathcal{H} \subseteq T\mathcal{H}.$$

Luego

$$\bigvee_{n-m>0} T^{m*}T^n\mathcal{H} = T\mathcal{H}.$$

Como $-\Sigma = \{k \in \mathbb{Z} : k \leq 0\}$ se tiene que

$$\bigvee_{n-m\notin-\Sigma} T_m^*T_n\mathcal{H} = T\mathcal{H}.$$

Por lo tanto, $T$ es unitario si y sólo si

$$\bigvee_{n-m\notin-\Sigma} T_m^*T_n\mathcal{H} = \mathcal{H}.$$

Otro caso particular está dado por $G = \mathbb{R}$, con la suma usual,

$$\Sigma = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$

y $\{T_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ un semigrupo fuertemente continuo de isometrías en $\mathcal{H}$.

Se puede probar que

$$\bigvee_{s-r\notin-\Sigma} T_r^*T_s\mathcal{H} = \mathcal{H}.$$

Para probar esto no se necesita que $\{T_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ sea unitario.

Esto motiva los conceptos siguientes.

**Definición 7.5.** Sea $\{T_t\}_{t\in\Sigma}$ un semigrupo de isometrías en $\mathcal{H}$, se dice que el semigrupo es: *casi-unitario*, o *quasi-unitario*, si

$$\bigvee_{s-r\notin-\Sigma} T_r^* T_s \mathcal{H} = \mathcal{H}.$$

**Ejemplo 7.6.** Dados $G = \mathbb{Z}$, $\Sigma = \mathbb{Z}^+$ y $T \in L(\mathcal{H})$ un operador unitario, tomar $T_n = T^n$ para $n \geq 0$.

**Ejemplo 7.7.** Dados $G = \mathbb{R}$, con la suma usual, $\Sigma = \mathbb{R}^+$, tomar $\{T_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ un semigrupo fuertemente continuo de isometrías en $\mathcal{H}$.

**Proposición 7.8.** *Si $\{T_t\}_{t\in\Sigma}$ es un semigrupo de operadores unitarios entones es casi-unitario.*

En efecto, sea $t \notin -\Sigma$ tal que $t = x - y$ para $x, y \in \Sigma$. Entonces

$$T_y^* T_x \mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}.$$

Luego

$$\mathcal{H} = T_t^* T_t \mathcal{H} = T_x^* T_y T_y^* T_x \mathcal{H} \subseteq T_x^* T_y \mathcal{H} \subseteq \bigvee_{s-r\notin-\Sigma} T_r^* T_s \mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}.$$

**Proposición 7.9.** *Sea $\{T_t\}_{t\in\Sigma}$ un semigrupo de isometrías en $\mathcal{H}$ y $\mathcal{M}$ un subespacio doblemente invariante. Si $\{T_t\}_{t\in\Sigma}$ es casi-unitario entonces $\{T_t\mid_{\mathcal{M}}\}_{t\in\Sigma}$ es casi-unitario.*

*Demostración.* Como $\mathcal{M}$ es doblemente invariante se tiene que

$$\bigvee_{s-r\notin-\Sigma} T_r^* T_s \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}.$$

Por otro lado sea $m \in \mathcal{M}$ tal que

$$m \perp \bigvee_{s-r\notin-\Sigma} T_r^* T_s \mathcal{M}.$$

Sea $h \in \mathcal{H}$ tal que $h = h_1 + h_2$ con $h_1 \in \mathcal{M}$ y $h_2 \in \mathcal{M}^\perp$. Entonces para $s - r \notin -\Sigma$ se tiene que

$$\langle m, T_r^* T_s h_1 \rangle = 0.$$

Por lo tanto, usando la doblemente invariancia sigue que

$$\langle m, T_r^* T_s h \rangle = \langle m, T_r^* T_s h_1 \rangle + \langle m, T_r^* T_s h_2 \rangle = \langle T_s^* T_r m, h_2 \rangle = 0.$$

De donde

$$m \perp \bigvee_{s-r\notin-\Sigma} T_r^* T_s \mathcal{H} = \mathcal{H}.$$

La última igualdad se debe a que $\{T_t\}_{t\in\Sigma}$ es casi-unitario.

De $m \perp \mathcal{H}$ sigue que $m = 0$. Luego

$$\bigvee_{s-r\notin-\Sigma} T_r^* T_s \mathcal{M} = \mathcal{M}.$$

Es decir, $\{T_t\mid_{\mathcal{M}}\}_{t\in\Sigma}$ es casi-unitario. □

7.4. **Semigrupo totalmente no-unitario y semigrupo extraño.**
Cuando $G$ no es $\mathbb{Z}$, también surgen las nociones siguientes.

**Definición 7.10.** Sea $\{T_t\}_{t\in\Sigma}$ un semigrupo de isometrías, se dice que el semigrupo es:

(a) *totalmente no-unitario* si para cada todo subespacio doblemente invariante $\mathcal{M}$, tal que $\{T_t\mid_{\mathcal{M}}\}_{t\in\Sigma}$ es casi-unitario se tiene que $\mathcal{M}=\{0\}$.
(b) *extraño* si es completamente no-unitario y casi unitario.

**Proposición 7.11.** *Si $\{T_t\}_{t\in\Sigma}$ es un semigrupo de isometrías totalmente no-unitario entones es completamente no-unitario.*

La demostración es consecuencia de las definiciones y de la proposición anterior.

*Observación* 7.12. En el caso $G=\mathbb{Z}$, $\Sigma=\mathbb{Z}^+$, $T\in L(\mathcal{H})$ una isometría y $T_n=T^n$ para $n\geq 0$, se tiene que "completamente no-unitario" es lo mismo que "totalmente no-unitario" y no-aparece la propiedad de ser "extraño".

**Proposición 7.13.** *Sea $\{T_t\}_{t\in\Sigma}$ un semigrupo de isometrías en $\mathcal{H}$ y $\mathcal{M}$ un subespacio doblemente invariante.*

(a) *Si $\{T_t\}_{t\in\Sigma}$ es totalmente no-unitario entonces $\{T_t\mid_{\mathcal{M}}\}_{t\in\Sigma}$ es totalmente no-unitario.*
(b) *Si $\{T_t\}_{t\in\Sigma}$ es extraño entonces $\{T_t\mid_{\mathcal{M}}\}_{t\in\Sigma}$ es extraño.*

7.5. **Descomposiciones de un semigrupo de isometrías.**

**Teorema 7.14** (Suciu)**.** [9, Teorema 1] *Sea $\{T_t\}_{t\in\Sigma}$ un semigrupo de isometrías en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces el espacio $\mathcal{H}$ se puede descomponer en una suma ortogonal*

$$\mathcal{H}=\mathcal{H}_U\oplus\mathcal{H}_C$$

*tal que*

(1) *$\mathcal{H}_U$ y $\mathcal{H}_C$ son subespacios doblemente invariantes*
(2) *$\{T_t\mid_{\mathcal{H}_U}\}_{t\in\Sigma}$ es unitario.*
(3) *$\{T_t\mid_{\mathcal{H}_C}\}_{t\in\Sigma}$ es completamente no-unitario.*

*La descomposición es única y*

$$\mathcal{H}_U=\left\{h\in\mathcal{H}:\|T_t^*h\|=\|h\|\ \textit{para todo}\ t\in\Sigma\right\}.$$

Idea de la demostración
Sean $\{U_t\}_{t\in G}$ la dilatación unitaria del semigrupo $\{T_t\}_{t\in\Sigma}$ y

$$\mathcal{H}_U=\left\{h\in\mathcal{H}:U_th\in\mathcal{H}\text{ para todo }t\in G\right\}.$$

Sea

$$\mathcal{H}_C=\mathcal{H}\ominus\mathcal{H}_U.$$

Entonces $\mathcal{H}=\mathcal{H}_U\oplus\mathcal{H}_C$.
Probaremos: la fórmula para $\mathcal{H}_U$.
Sean $h\in\mathcal{H}_U$ y $t\in\Sigma$. Se tiene que $U_{-t}h\in\mathcal{H}$. Luego

$$P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{K}}U_t^*h=U_t^*h.$$

De donde

$$\|T_t^*h\|=\|P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{K}}U_t^*h\|=\|U_t^*h\|=\|h\|.$$

Y así

$$\|T_t^*h\|=\|h\|.$$

Recíprocamente, si $\|T_t^* h\| = \|h\|$ para todo $t \in \Sigma$ se tiene que

$$\|P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{K}} U_{-t} h\| = \|T_t^* h\| = \|h\| = \|U_{-t} h\|.$$

Además

$$\|P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{K}} U_t h\| = \|T_t h\| = \|h\| = \|U_t h\|.$$

Luego

$$U_t h \in \mathcal{H} \quad \text{ y } \quad U_{-t} h \in \mathcal{H} \qquad \text{si } t \in \Sigma.$$

Por lo tanto, si $t \in G$ y $t = s - r$ entonces

$$\begin{aligned}
\|P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{K}} U_t h\| &= \|P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{K}} U_{s-r} h\| = \|P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{K}} U_s U_{-r} h\| \\
&= \|P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{K}} U_s P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{K}} U_{-r} h\| = \|T_s T_r^* h\| \\
&= \|T_t h\| = \|h\| = \|U_t h\|.
\end{aligned}$$

Luego $U_t h \in \mathcal{H}$. De donde $h \in \mathcal{H}_U$.

Otro resultado interesante de Suciu es el siguiente, la demostración detallada puede verse en [9].

**Teorema 7.15** (Suciu)**.** [9, Teorema 2] *Sea $\{T_t\}_{t\in\Sigma}$ un semigrupo de isometrías en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces el espacio $\mathcal{H}$ se puede descomponer, de manera única, en una suma ortogonal*

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_Q \oplus \mathcal{H}_T$$

*tal que*

1. *$\mathcal{H}_Q$ y $\mathcal{H}_T$ son subespacios doblemente invariantes*
2. *$\{T_t |_{\mathcal{H}_Q}\}_{t\in\Sigma}$ es casi-unitario.*
3. *$\{T_t |_{\mathcal{H}_T}\}_{t\in\Sigma}$ es totalmente no- unitario.*

Estos teoremas de Suciu están muy relacionados con el siguiente teorema de Helson y Lowdenslager [5] de teoría de predicción de procesos.

**Teorema 7.16** (Helson-Lowdenslager)**.** [5] *Sea $\{T_t\}_{t\in\Sigma}$ un semigrupo de isometrías en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces el espacio $\mathcal{H}$ se puede descomponer, de manera única, en una suma ortogonal*

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_U \oplus \mathcal{H}_E \oplus \mathcal{H}_T$$

*tal que*

1. *$\mathcal{H}_U$, $\mathcal{H}_E$ y $\mathcal{H}_T$ son subespacios doblemente invariantes.*
2. *$\{T_t |_{\mathcal{H}_U}\}_{t\in\Sigma}$ es unitario.*
3. *$\{T_t |_{\mathcal{H}_E}\}_{t\in\Sigma}$ es extraño.*
4. *$\{T_t |_{\mathcal{H}_T}\}_{t\in\Sigma}$ es totalmente no-unitario.*

La demostración se obtiene aplicando los dos teoremas anteriores.

Si el lector desea leer más sobre teoría de operadores puede consultar el libro [2] y para un estudio detallado del "shift" puede consultar los libros [7, 10].

Finalmente también se puede consultar el material [1] en el que se presentan modelos para el análisis de las series de tiempo y su relación con la descomposición de Wold.

## Referencias


[1] J. C. Abril. *Modelos para el análisis de las series de tiempo*. Univ. Nacional de Tucumán. Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de Argentina. http: //www.econometricos.com.ar/wp-content/uploads/2007/12/Espacio-de-Estado-2004.pdf. Citado en página(s): 12

[2] J. Conway. *A Course in Operator Theory,* American Mathemathical Society, Providence, Rhode Island, 2000. Citado en página(s): 12

[3] D.R. Cox, H.D.Miller. *The theory of stochastic processes*. Reprint. Science Paperbacks, 134. London: Chapman and Hall. X, 1977. First edition 1965. Citado en página(s): 7

[4] P.R. Halmos. *Shifts on Hilbert spaces*. J. Reine Angew. Math. 208, 102–112 (1961). Citado en página(s): 5

[5] H. Helson, D. Lowdenslager. *Prediction theory and Fourier series in several variables. II.* Acta Math. 106, 175-213 (1961). Citado en página(s): 7, 12

[6] T. Ito. *On the commutative family of subnormal operators.* J. Fac. Sci., Hokkaido Univ., Ser. I 14, 1-15 (1958). Citado en página(s): 8

[7] N. Nikol'skii. *Treatise on the Shift Operator,* Springer-Verlag, 1986. Citado en página(s): 12

[8] S.Shimorin. *On Beurling-type theorems in weighted $l^2$ and Bergman spaces*. Proc. Am. Math. Soc. 131, No. 6, 1777-1787 (2003). Citado en página(s): 1

[9] I. Suciu. *On the semi-groups of isometries*. Stud. Math. 30, 101-110 (1968). Citado en página(s): 7, 8, 11, 12

[10] B. Sz.-Nagy, C. Foias. *Harmonic analysis of operators on Hilbert space,* North Holland Publishing Co. 1970. Citado en página(s): 5, 8, 12

[11] H. O. A. Wold. *A Study in the Analysis of Stationary Time Series*, 2nd. edn, 1954. Almqvist & Wiksell: Stockholm, (1938). Citado en página(s): 7

[12] H. O. A. Wold. *A large sample test of moving averages*, J. Roy. Statist. Soc., B, 11, 297, (1949). Citado en página(s): 7



Universidad Central de Venezuela.

M. Domínguez, Departamento de Matemáticas, Fac. Ciencias, Universidad Central de Venezuela.

*e-mail*: `marisela.dominguez@ciens.ucv.ve , dominguez.math@gmail.com`