An. Arm. Teor. Op. Vol. 1, No. 1, 15–25
ISSN 2244-7628

Análisis Armónico
y Teoría de Operadores

BASES EN ESPACIOS DE BANACH Y CRITERIO DE ESTABILIDAD DE PALEY-WIENER

ARNALDO DE LA BARRERA

Resumen. La intención de este trabajo es describir, de forma breve, algunos resultados referentes a bases de Schauder en espacios de Banach, sucesiones de Bessel y bases de Riesz en espacios de Hilbert. Además se presenta el criterio de estabilidad para bases de Schauder en espacios de Banach, dado por Paley y Wiener.

Abstract. The purpose of this note is to describe, in a simple way, some results concerning Schauder basis on Banach spaces, Bessel sequenes and Riesz bases on Hilbert spaces. Also the stability criterium for Schauder bases on Banach spaces, given by Paley and Wiener, is presented.

1. Introducción.

En cualquier espacio vectorial de dimensión finita existe el concepto de base algebraica, o simplemente base y en este caso son equivalentes todas las topologías, con las que es un espacio vectorial localmente convexo. En un espacio vectorial de dimensión infinita, la noción de base algebraica no tiene relación con la topología. Es por eso, que existen diversos intentos de generalización de las bases algebraicas a bases en espacios de dimensión infinita, en particular a espacios de Banach infinito-dimensionales. Entre las bases que han resultado ser de una mayor aplicabilidad se encuentran las bases de Schauder. Este trabajo tiene como objetivos el introducir al lector a las bases de Schauder en espacios de Banach, a las sucesiones de Bessel, a las bases de Riesz en espacios de Hilbert y al criterio de estabilidad de Paley-Wiener. Este trabajo comienza con una sección dedicada a algunas nociones y resultados referentes a bases de Schauder en espacios de Banach. Para el caso general de los espacios de Banach no se presentan las demostraciones, éstas pueden conseguirse en el libro de Lindenstrauss y Tzafriri [3]. Se hace especial énfasis en el caso de los espacios de Hilbert, para los cuales se presentan las demostraciones de la mayoría de los resultados que se enuncian.

Recibido por los editores 2 de febrero 2012 y aceptado 24 de abril 2012.
2000 *Mathematics Subject Classification.* Primario 46B15; Secundarios 46C05.
Palabras claves. bases de Schauder, sucesiones de Bessel, bases de Riesz, equivalencia, estabilidad.

2. Bases de Schauder y sucesiones básicas en espacios de Banach

En esta sección se introduce el concepto de base de Schauder de un espacio de Banach y la noción correspondiente de sucesión básica. Para más detalles de este tema se recomienda ver [1, 2, 3].

Salvo que se indique lo contrario $(X, \|\cdot\|)$ o simplemente X denotará un espacio de Banach. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, por $\mathrm{span}\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se denotará al espacio vectorial generado por $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y por $\overline{\mathrm{span}}\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ al espacio vectorial cerrado generado por $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Definición 2.1. Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X es una *base de Schauder* de X si para cada vector $x \in X$ existe una única sucesión de escalares $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n,$$

donde la convergencia de la serie es con respecto a $\| \, \|$.

Definición 2.2. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, se dice que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una *sucesión básica* cuando es base de Schauder para $\overline{\mathrm{span}}\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Un espacio X con una base de Schauder $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ puede ser considerado como un espacio de sucesiones identificando cada $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n$ con la única sucesión de coeficientes $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Es importante notar que para describir una base de Schauder hay que definir los vectores de la base no sólo como un conjunto, sino como una sucesión ordenada.

Definición 2.3. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, se dice que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *completa* o *total* cuando $\overline{\mathrm{span}}\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = X$. Es decir, cuando $\mathrm{span}\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es denso en X.

El espacio dual topológico de un espacio normado X, se denota por X^*, y está formado por todos los funcionales lineales y acotados definidos en X.

Dada una base de Schauder $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para X, se definen los funcionales coordenados x_n^* en X mediante

$$x_n^*(x) = a_n$$

donde $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$. Además se define la *$n$-ésima proyección* $P_n : X \to \mathrm{span}\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ por

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^*(x) x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

Usando el teorema de la aplicación abierta se puede demostrar el siguiente resultado, ver [2] y [3, Prop.1.a.2.].

Proposición 2.4. *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder para X. Sean P_n las proyecciones naturales y x_n^* los funcionales coordenados asociados a la base, entonces P_n y x_n^* son continuos. Además*

$$\sup_n \|P_n\| < \infty.$$

El número $k = \sup_n \|P_n\|$ que aparece en el resultado anterior recibe el nombre de *constante base* de la base $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y se dice que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una *sucesión básica con constante k*.

En el caso que la constante básica es igual a 1 se dice que la base es *monótona.*

Como
$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| = \left\|P_n\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i\right)\right\| \le \|P_n\| \left\|\sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i\right\|,$$
una base es monótona cuando para toda sucesión de escalares $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, la sucesión de números $\{\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\|\}_{n\ge 1}$ es no decreciente.

Dada una base de Schauder $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de X, se puede pasar a una norma equivalente en X para la cual la base dada es monótona, ver [3, Sec.1.a.].

Ejemplo 2.5. Sea
$$e^n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$$
donde 1 se encuentra en el n-ésimo lugar. Si $1 \le p < \infty$ entonces la sucesión de los vectores unitarios $\{e^n\}_{n\ge 1}$ es una base de Schauder para los espacios l_p, conocida como la *base canónica*. Ésta es una base monótona para l_p.

Proposición 2.6. (Ver [2] y [3, Prop.1.a.3.]) Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de vectores en X. Entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder para X si y sólo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

(i) $x_n \ne 0$ para todo n.

(ii) Existe una constante k tal que
$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \le k \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\|.$$
para toda sucesión finita de escalares $\{a_i\}_{i=1}^m$ y para todo $n < m$.

(iii) $\overline{\mathrm{span}}\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = X$.

Como consecuencia de este resultado se tiene que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica si y sólo si satisface la condición (ii) de la proposición anterior.

Teorema 2.7 (Banach)**.** [3, Teorema 1.a.5.] *Todo espacio de Banach de dimensión infinita contiene una sucesión básica.*

Definición 2.8. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, se dice que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *mínima* cuando $x_j \notin \overline{\mathrm{span}}\{x_i\}_{i\ne j}$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 2.9. Sea $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal para un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimensión infinita y separable. Sea
$$g_n = e_n + e_{n+1}.$$
Entonces $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es mínima y completa.

Una vez que se sabe que un espacio de Banach tiene una base de Schauder es natural preguntarse si ésta es única. Para estudiar esto en detalle, se introduce la noción de equivalencia de bases.

En lo que sigue $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$, o simplemente X y Y, son espacios de Banach.

Definición 2.10. Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, sucesiones básicas en X y Y respectivamente. Se dice que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son *equivalentes* si para toda sucesión de escalares $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, se tiene que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ converge si y sólo si la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i$ converge.

Usando el teorema del gráfico cerrado se puede demostrar el siguiente resultado.

Teorema 2.11. [1, Teorema 1.3.2] *Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones básicas en X y Y respectivamente. Se tiene que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son equivalentes si y sólo si existe un isomorfismo $\psi : \overline{span}\{x_n\} \to \overline{span}\{y_n\}$ tal que $\psi(x_n) = y_n$.*

Corolario 2.12. [1, Corolario 1.3.4] *Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones básicas en X y Y respectivamente. Se tiene que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son equivalentes si y sólo si existe una constante c, con $0 < c < \infty$, tal que para toda sucesión de escalares $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, distinta de cero para una cantidad finita de términos, se tiene que*

$$c^{-1}\left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i\right\|_Y \leq \left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right\|_X \leq c\left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i\right\|_Y$$

En este caso se dice que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son *c-equivalentes.*

Observación 2.13.

(a) Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica y si existe alguna sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que satisface

$$c^{-1}\left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i\right\|_Y \leq \left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right\|_X \leq c\left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i\right\|_Y$$

entonces $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también es una sucesión básica equivalente a $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica con constante k, y si $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface la desigualdad anterior, entonces $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene constante base a lo sumo c^2k.

En efecto, de acuerdo a la desigualdad anterior, se tiene que

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i y_i\right\|_Y \leq c\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\|_X \leq ck\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\|_X \leq c^2k\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i y_i\right\|_Y$$

con $m \geq n$ y $c, k > 0$

Ejemplo 2.14.

(1) Una sucesión básica $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para un espacio de Banach X es equivalente a la base usual para lp si y sólo si

$$c^{-1}\left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right\|_X \leq c\left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

para alguna constante $c > 0$ y para cualquier sucesión de escalares $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, distinta de cero para una cantidad finita de términos.

(2) Cualquier base ortonormal en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ separable es 1-equivalente ($c = 1$) a la base canónica de l_2.

Usando la noción de equivalencia, el problema de la unicidad se puede reformular. Sin embargo, si existen las bases de Schauder, aunque se identifiquen las que son equivalentes, nunca son únicas.

Teorema 2.15 (ver [5] y [3])**.** *Sea X un espacio de Banach infinito dimensional con una base de Schauder. Entonces existe una cantidad infinita no numerable de bases normalizadas en X que no son mutuamente equivalentes.*

Dado un subespacio cerrado M de un espacio normado X, se dice que M es *complementado* en X si existe otro subespacio cerrado N de X tal que X es suma directa de M y N esto se denota por

$$X = M \oplus N$$

y significa que $M \cap N = \{0\}$ y $X = M + N$. Además se cumple que X/M es isomorfo a N. Equivalentemente, M es complementado en X si M es el rango de una proyección lineal continua P definida en X.

Teorema 2.16 (El principio de perturbación pequeña, ver [2])**.** *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica normalizada en X con constante de base k, y supóngase que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ satisface*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| = \delta \tag{1}$$

(i) *Si $2k\delta < 1$, entonces $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica equivalente a $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*
(ii) *Si span$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es complementado por una proyección acotada $P : X \to X$ y si*

$$8k\delta\|P\| < 1$$

entonces span$\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también es complementado en X.

3. Estabilidad de bases en espacios de Banach y teorema de Paley-Wiener

El criterio fundamental de estabilidad, e históricamente el primero, se debe a Paley y a Wiener [4]. Este se basa en el hecho elemental de que un operador lineal acotado T sobre un espacio de Banach es invertible cuando

$$\|I - T\| < 1.$$

Teorema 3.1 (Paley-Wiener)**.** *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder para X, y supóngase que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos en X tal que*

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} c_n(x_n - y_n)\right\| \le \lambda \left\|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\right\|$$

para alguna constante λ, con $0 \le \lambda < 1$ y para cualquier sucesión de escalares $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder para X equivalente a $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Demostración. Por hipótesis se tiene que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ es convergente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x_n - y_n)$ es convergente. Se define la aplicación $T : X \to X$ mediante

$$T\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x_n - y_n).$$

Se tiene que T es lineal y acotada, además

$$\|T\| \le \lambda < 1.$$

Luego el operador $I - T$ es invertible.

Como $(I - T)(x_n) = y_n$ para todo n, se sigue el resultado. □

4. Sucesiones de Bessel en espacios de Hilbert

En lo que sigue $\mathcal{H}$ denotará un espacio de Hilbert separable e infinito dimensional, con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definición 4.1. Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ se llama *sucesión de Bessel* si para todo $h \in \mathcal{H}$ se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle h, x_n \rangle|^2 < +\infty.$$

Observación 4.2. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Bessel, entonces la serie

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n$$

es convergente para $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$ y existe una constante $B > 0$ tal que

$$\left\| \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n \right\|^2 \leq B \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2$$

para todo $a \in l^2(\mathbb{N})$.

La constante B recibe el nombre de *cota de Bessel* para la sucesión y viene dada por

$$B = \sup \left\{ \left\| \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n \right\|^2 : \|a\|_{l^2(\mathbb{N})} = 1 \right\}$$

Proposición 4.3. [6] *Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ es una sucesión de Bessel, entonces existe una constante B tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle h, x_n \rangle|^2 \leq B\|h\|^2 \qquad \textit{para todo } h \in \mathcal{H}.$$

Proposición 4.4. *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ una sucesión. Se tiene que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Bessel con cota B, si y sólo si la desigualdad*

$$\left\| \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n \right\|^2 \leq B \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2$$

se cumple para todo $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$.

Demostración. Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de Bessel y $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$. Se tiene que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle h, x_n \rangle|^2 < +\infty$$

para todo $h \in \mathcal{H}$.

Sea

$$h_o = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n \in \mathcal{H}.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz, se tiene que

$$
\begin{aligned}
|\langle h_o, h_o\rangle|^2 &= \left|\left\langle h_o, \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n \right\rangle\right|^2 = \left|\sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{a_n}\, \langle h_o, x_n\rangle\right|^2 \\
&\leq \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle h_o, x_n\rangle|^2\right).
\end{aligned}
$$

Por otra parte por la Proposición 4.3 se tiene que existe $B > 0$ tal que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle h_o, x_n\rangle|^2 \leq B\|h_o\|^2.$$

Luego,

$$\left\|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n\right\|^4 = |\langle h_o, h_o\rangle|^2 \leq B\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2\right)\left\|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n\right\|^2.$$

Esto implica que

$$\left\|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n\right\|^2 \leq B\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2\right),$$

donde $B = \sup\left\{\left\|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n\right\|^2 : \|a\|_{l^2(\mathbb{N})} = 1\right\}$.

Para el recíproco, sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ una sucesión tal que

$$\left\|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n\right\|^2 \leq B\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2\right),$$

para toda sucesión de escalares $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$. Sea

$$h_o = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n \in \mathcal{H}.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz se tiene

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{a_n}\, \langle h_o, x_n\rangle\right|^2 = \left|\left\langle h_0, \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n \right\rangle\right|^2 \leq \|h_0\|^2 \left\|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n\right\|^2.$$

Luego

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{a_n}\, \langle h_o, x_n\rangle\right|^2 \leq \|h_0\|^2\, B\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2\right).$$

Considerando la sucesión $a_n = \langle h_o, x_n\rangle$ y sumas parciales en la desigualdad anterior, se obtiene

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle h_o, x_n\rangle|^2\right) \leq B\,\|h_0\|^2 < +\infty$$

y así $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Bessel con cota B.

□

Ejemplo 4.5. Sea $t \in [0,1]$, sea $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $g_n(t) = t^n$. La sucesión $\{g_0, g_1, g_2, ...\}$ forma una sucesión de Bessel en $L^2[0,1]$.

En efecto, sean $f \in L^2([0,1])$ y

$$c_n = \int_0^1 t^n f(t)dt = \langle f, g_n \rangle$$

donde $n \geq 0$.

Entonces

$$|c_n| = \left| \int_0^1 t^n f(t)dt \right| = | \langle f, g_n \rangle | \leq \|f\|_2 \, \|g_n\|_2.$$

Por otro lado

$$\|g_n\|_2^2 = \int_0^1 t^{2n}\, dt = \frac{1}{2n+1},$$

luego

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \|f\|_2^2 \|g_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} \right)^2 \\ &\leq \|f\|_2^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\, \|f\|_2^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty$$

para toda $f \in L^2[0,1]$.

Ahora se estimará la cota de Bessel, B, para esta sucesión. Sea $a_n \geq 0$ para $n = 0, 1, ...$ se tiene que

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n \right\|_2^2 &= \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n, \sum_{m=0}^{\infty} a_m g_m \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n \overline{a_m} \langle g_n, g_m \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n \overline{a_m} \int_0^1 t^n t^m dt = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_n \overline{a}_m}{m+n+1} \\ &\leq \pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2,\end{aligned}$$

donde se ha utilizado la desigualdad de Hilbert (ver [6, página 161])

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_n \overline{a_m}}{m+n+1} \leq \pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$$

si $a_n \geq 0$ para $n \geq 0$.

Luego

$$B = \sup \left\{ \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n g_n \right\|^2 : \|a\|_{l^2(\mathbb{N})} = 1 \right\} \leq \pi.$$

5. Bases de Riesz en espacios de Hilbert

Definición 5.1. Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ es una *base de Riesz* para $\mathcal{H}$ si

a) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es total en $\mathcal{H}$, esto es $\mathcal{H} = \overline{\operatorname{span}}\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
b) Existen constantes $A, B > 0$, $A \leq B$ tales que

$$A\sum_{n\in\mathbb{N}}|a_n|^2 \leq \left\|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n\right\|^2 \leq B\sum_{n\in\mathbb{N}}|a_n|^2$$

si $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$.

Definición 5.2. Dados dos productos internos sobre un mismo espacio vectorial, se dice que son *equivalentes* cuando generan normas equivalentes.

Proposición 5.3. *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{H}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Riesz para $\mathcal{H}$.*
(ii) *Existen un operador lineal, acotado e invertible $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ y una base ortonormal $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para $\mathcal{H}$ tal que*

$$T(e_n) = x_n \qquad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(iii) *Existe un producto interior $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ sobre el espacio lineal $\mathcal{H}$, equivalente al producto interior sobre $\mathcal{H}$, tal que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal para $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$.*

Demostración.
(i)$\Rightarrow$(ii)
Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de Riesz para $\mathcal{H}$, entonces se tiene que

(a) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es total en $\mathcal{H}$.
(b) Existen constantes $A, B > 0$, $B \geq A$ tales que

$$A\sum_{n\in\mathbb{N}}|a_n|^2 \leq \left\|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n\right\|^2 \leq B\sum_{n\in\mathbb{N}}|a_n|^2$$

para todo $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$.

Por otra parte se tiene que todo espacio de Hilbert separable tiene una base ortonormal numerable.

Sea $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal para $\mathcal{H}$, de la identidad de Parseval sigue que

$$A\left\|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e_n\right\|^2 \leq \left\|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n\right\|^2 \leq B\left\|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e_n\right\|^2.$$

Sea $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ el operador dado por

$$T\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n$$

donde $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de escalares.

De aquí sigue que T es un operador lineal, biyectivo, acotado, con inverso acotado y que

$$Te_n = x_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(ii)$\Rightarrow$(iii)

Por hipótesis existe un operador lineal acotado $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, invertible y con inverso acotado, y existe una base ortonormal $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}$ tal que

$$T(e_n) = x_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se define un nuevo producto interior $\langle x, y\rangle_1$ sobre $\mathcal{H}$ de la siguiente forma

$$\langle x, y\rangle_1 = \left\langle T^{-1}x, T^{-1}y \right\rangle.$$

Sea $\|\cdot\|_1$ la norma inducida por este nuevo producto. Como T y T^{-1} son acotados se tiene que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|$ son equivalentes y por lo tanto los productos $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle$ son equivalentes.

Finalmente

$$\langle x_i, x_j\rangle_1 = \langle \Phi x_i, \Phi x_j\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$$

y así $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal para el producto $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$.

(iii)$\Rightarrow$(i)

Como $\{x_n\}$ es una base ortonormal para $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$, que induce una norma equivalente a la de $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, se tiene que $\{x_n\}$ es total. Además, por la identidad de Parseval, se tiene que

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n\right\|_1^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2.$$

Como $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_1$ son equivalentes, se cumple que existen constantes M y m positivas tales que

$$m\left\|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n\right\|_1 \le \left\|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n\right\| \le M\left\|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n\right\|_1,$$

es decir

$$m^2\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \le \left\|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n\right\|^2 \le M^2\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2.$$

□

6. Estabilidad de bases en espacios de Hilbert y teorema de Paley -Wiener

La estructura de espacios de Hilbert permite reformular el Teorema 3.1 de la siguiente manera.

Teorema 6.1 (Criterio de Paley-Wiener). *Sea $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal para un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y sea $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ una sucesión que satisface*

$$\left\|\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n(e_n - z_n)\right\| \le \lambda \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2\right)^{1/2}$$

para alguna constante λ, con $0 \le \lambda < 1$ y para toda sucesión de escalares $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Riesz para $\mathcal{H}$.

A continuación se presenta un resultado de Kadec que permitirá presentar un ejemplo de una base de Riesz.

Teorema 6.2 (Teorema 1/4 de Kadec, ver [6]). *Si* $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de números reales para la cual se cumple*

$$|\lambda_n - n| \leq l < \frac{1}{4}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. *Entonces La sucesión* $\left\{e^{i\lambda_n t}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *satisface el criterio de Paley-Wiener y por tanto forma una base de Riesz para* $L^2[-\pi, \pi]$.

Referencias

[1] F. Albiac and N. J. Kalton. *Topics in Banach space theory.* Springer, New York, 2006. Citado en página(s) 16, 18

[2] N. L. Carotheres. *A Short course on Banach Space Theory.* Department of Mathematics and statics, Bowling Green state University, Summer, 2000. Citado en página(s) 16, 17, 19

[3] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri. *Classical Banach Spaces I.* Springer Verlag, 1977. Citado en página(s) 15, 16, 17, 18

[4] R. Paley, N. Wiener. *Fourier transforms in the complex domain.* Am. Math. Soc. Colloq. Publ. Vol. 19. Am. Math. Soc., New York, 1934. Citado en página(s) 19

[5] A. Pelczynski, A. Singer. *On non-equivalent bases and conditional bases in Banach spaces.* Stud. Math. 25, 5-25 (1964). Citado en página(s) 18

[6] R. M. Young. *An introduction to Nonharmonic Fourier Series.* Academic Press, New York, 1980. Citado en página(s) 20, 22, 25

Universidad de Pamplona.

A. De La Barrera, Universidad de Pamplona, Colombia.

e-mail: abarrera1994@gmail.com