UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
POSTGRADO EN MATEMÁTICA

NÚCLEOS DEFINIDOS POSITIVOS, REGULARIDAD, PERTURBACIONES Y APLICACIONES.

Autor: MSc. Arnaldo De La Barrera.
Tutor: Dra. Marisela Domínguez.

Tesis Doctoral presentada ante la ilustre Universidad Central de Venezuela para optar al título de Doctor en Ciencias, Mención Matemática.

Caracas, Venezuela
2015

Resumen

Se da un resultado de representación para núcleos de Toeplitz definidos positivos regulares y, como corolario, se obtiene un resultado de representación para núcleos equivalentes. Se obtiene un resultado de estabilidad que se usa para probar que, bajo ciertas condiciones, una perturbación especial de un núcleo de Toeplitz definido positivo es equivalente al núcleo perturbado. Se dan algunas aplicaciones a procesos estocásticos.

En el caso de núcleos a valores operadores, se establecen resultados para núcleos definidos positivos equivalentes a núcleos de Toeplitz.

Índice general

Introducción

Los núcleos definidos positivos aparecen de manera natural en muchos resultados y problemas tanto de análisis como de probabilidades, en los que juegan un rol distinguido. Esta noción permite considerar, de manera unificada, problemas de ambas áreas.

En este trabajo se considerarán núcleos que son equivalentes a núcleos de Toeplitz definidos positivos.

Una de las herramientas fundamentales que se utilizará es la descomposición de Wold, la cual apareció por primera vez en [**11**] (ver también [**12**]) y su versión en términos de análisis armónico para operadores en espacios de Hilbert fue dada en [**10**]. Se usará la descomposición de Wold del operador de traslación para obtener un resultado de representación para núcleos de Toeplitz definidos positivos regulares (ver Teorema 2.5), que es análogo a un resultado para procesos estocásticos dado en [**5**]. Considerando bases de Riesz se da un resultado de representación similar para núcleos equivalentes a núcleos de Toeplitz definidos positivos (ver Teorema 2.7).

También se prueba un resultado de estabilidad para núcleos definidos positivos relacionado con el teorema de Paley-Wiener acerca de estabilidad de bases dado en [**8**] (ver Teorema 3.1). Este resultado de estabilidad se usa para probar que, bajo ciertas condiciones, una perturbación especial de un núcleo de Toeplitz definido positivo es equivalente al núcleo perturbado (ver Teorema 3.6).

Se dan algunas aplicaciones a procesos estocásticos. Comencemos por recordar algunos aspectos básicos: es bien sabido que un proceso estocástico discreto es una sucesión de variables aleatorias en un espacio de probabilidad y un proceso estocástico se dice que es estacionario cuando sus distribuciones finito dimensionales son invariantes bajo las traslaciones en el tiempo. Una clase más amplia de procesos estocásticos está dada por los procesos débilmente estacionarios en cuya definición se imponen solamente las condiciones absolutamente necesarias para usar métodos de espacios de Hilbert y métodos de análisis de Fourier. En este caso el núcleo de covarianza es un núcleo de Toeplitz definido positivo.

Usando los resultados de representación para núcleos de Toeplitz definidos positivos regulares se obtiene un teorema de Gihman y Skorokhod para procesos estocásticos probado en [**5**] (ver Teorema 3.8).

Se considera una clase especial de procesos estocásticos, llamados aproximadamente débilmente estacionarios, que fueron introducidos por Strandell. Para este tipo de procesos se prueba un resultado de representación que ya había sido obtenido en [**9**] (ver Teorema 3.10) y un resultado de perturbación similar a un teorema dado en [**9**] (ver Teorema 3.11).

Estos resultados han sido distribuidos en este trabajo de la siguiente manera, en el Capítulo 1 se introducen nociones preliminares, básicas para la comprensión de los capítulos posteriores, relacionadas con espacios de Hilbert y bases de Riesz. También se exponen el teorema de Paley-Wiener y la descomposición de Wold.

En los Capítulos 2 y 3, se proporcionan los detalles de los resultados obtenidos y que han sido publicados en [**1**]. Se da un resultado de representación para núcleos de Toeplitz definidos positivos regulares y, como corolario, se obtiene un resultado de representación para núcleos equivalentes. Se obtiene un resultado de estabilidad que se usa para probar que, bajo ciertas condiciones, una perturbación especial de un núcleo de Toeplitz definido positivo es equivalente al núcleo perturbado. Se dan algunas aplicaciones a procesos estocásticos.

Finalmente en los Capítulos 4 y 5 se considera el caso en que los núcleos definidos positivos toman valores operadores, en lugar de valores escalares. En el Capítulo 4 se presentan resultados conocidos como lo son el teorema de descomposición de Kolmogorov y el teorema de Naimark. En el Capítulo 5 se dan las bases para posibles extensiones a valores operadores de algunos de los resultados obtenidos para el caso escalar.

En resumen, las nociones preliminares se presentan en los Capítulos 1 y 4. Los resultados originales se encuentran en los Capítulos 2, 3 y 5.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Generalidades de espacios de Hilbert

Como es usual por $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ se denotarán los conjuntos de números naturales, enteros, reales y complejos.

Dos vectores h, g del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ se dice que son *ortogonales* si $\langle h, g\rangle = 0$.

Si $\mathcal{G}$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$, entonces el *complemento ortogonal* $\mathcal{G}^{\perp}$ (ó $\mathcal{H} \ominus \mathcal{G}$) de $\mathcal{G}$ se define por

$$\mathcal{G}^{\perp} = \mathcal{H} \ominus \mathcal{G} = \{h \in \mathcal{H} : \langle h, g\rangle = 0 \qquad \text{para todo} \qquad g \in \mathcal{G}\}.$$

Dos subespacios cerrados $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ de $\mathcal{H}$ se dice que son *subespacios ortogonales*, en símbolos $\mathcal{G}_1 \perp \mathcal{G}_2$, si

$$\langle h, g\rangle = 0 \qquad \text{para todo} \qquad h \in \mathcal{G}_1 \qquad \text{y} \qquad g \in \mathcal{G}_2.$$

Suponga que $\{\mathcal{H}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una familia de subespacios cerrados de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces, la clausura del espacio vectorial lineal (span) de estos espacios es denotada por

$$\bigvee_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}_n.$$

Si los subespacios $\mathcal{H}_n$ son pares ortogonales, esto es, $\mathcal{H}_i \perp \mathcal{H}_j$ para $i \neq j$, entonces se usa la notación

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}_n$$

en lugar de $\bigvee_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}_n$. El espacio $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}_n$ es llamado la *suma ortogonal* de los pares de subespacios $\mathcal{H}_n$.

Dado que para todo f en $\mathcal{H}$ existe únicos vectores g en $\mathcal{G}$ y h en $\mathcal{G}^{\perp}$ tales que $f = g + h$, se sigue que

$$\mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^{\perp} = \mathcal{H}.$$

Suponga que $\{\mathcal{H}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una familia de espacios de Hilbert, no necesariamente contenidos en un mismo espacio de Hilbert. El símbolo

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}_n$$

denota el espacio de Hilbert (llamado la suma ortogonal de los espacios $\mathcal{H}_n$) que consiste en las sucesiones $\{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que $h_n \in \mathcal{H}_n$ para $n \in \mathbb{Z}$ y

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|h_n\|^2_{\mathcal{H}_n} < \infty,$$

equipado con el producto interior

$$\langle \{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle h_n, g_n \rangle_{\mathcal{H}_n},$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_n}$ es el producto interior en $\mathcal{H}_n$.

Si los espacios $\mathcal{H}_n$ son todos iguales a un espacio de Hilbert dado $\mathcal{H}$, entonces se usa la notación $l^2(\mathcal{H})$ para denotar su suma ortogonal.

También observe que si $\mathcal{H}_n = \mathbb{C}$ entonces $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}_n = l^2(\mathbb{C})$.

Cabe mencionar que cada espacio $\mathcal{H}_n$ puede ser identificado con un subespacio cerrado de $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}_n$ y entonces $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}_n$ es la suma ortogonal de estos pares de subespacios ortogonales.

Como es usual si $(\mathcal{H}_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_1})$ y $(\mathcal{H}_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_2})$ son espacios de Hilbert, $\| \cdot \|_{\mathcal{H}_1}$ y $\| \cdot \|_{\mathcal{H}_2}$ denotarán las normas inducidas en $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ respectivamente. Con $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ denotaremos el espacio de los operadores lineales y continuos de $\mathcal{H}_1$ en $\mathcal{H}_2$ y se usará $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ para denotar $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ cuando $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ son espacios de Hilbert iguales a $\mathcal{H}$.

La norma de un operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ se define por la fórmula

$$\|T\| = \sup\{\|Th\|_{\mathcal{H}_2} : h \in \mathcal{H}_1, \|h\|_{\mathcal{H}_1} \leq 1\}. \tag{1.1}$$

Sea T en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Se dice que T es *positivo* (y se escribe $T \geq 0$) si

$$\langle Th, h \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0$$

para todo $h \in \mathcal{H}$.

El *adjunto* T^* de un operador T en $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ es el operador que aplica $\mathcal{H}_2$ sobre $\mathcal{H}_1$, definido por la igualdad

$$\langle h_1, T^* h_2 \rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle Th_1, h_2 \rangle_{\mathcal{H}_2}$$

para todo h_1 en $\mathcal{H}_1$ y h_2 en $\mathcal{H}_2$.

Un operador P es una *proyección* si $P^2 = P = P^*$.

Observación 1.1.

(a) Suponga que $\mathcal{G}$ es un subespacio cerrado de el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Si $f = g+h$ con g en $\mathcal{G}$ y h en $\mathcal{G}^{\perp}$, se define $P_{\mathcal{G}} f = g$. Entonces $P_{\mathcal{G}}$ es una proyección y, recíprocamente, para toda proyección P en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, existe un subespacio cerrado $\mathcal{G}$ tal que $P = P_{\mathcal{G}}$. En esta situación se tiene que

$$\mathcal{H} = \mathcal{G} \oplus \mathcal{G}_1,$$

donde $\mathcal{G}$ es el rango de P, es decir, $\mathcal{G} = R(P)$ y $\mathcal{G}_1$ es el núcleo de P, es decir, $\mathcal{G}_1 = N(P)$.

Además se tiene que

$$f = Pf + (I-P)f \qquad \text{y} \qquad P(I-P)f = Pf - P^2 f = 0$$

para todo $f \in \mathcal{H}$.

(b) El rango y el núcleo de una proyección continua son cerrados. En efecto, sea $\{f_n\}$ una sucesión en $\mathcal{H}$ y supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} P f_n = g$$

entonces, por continuidad,

$$Pg = P\left(\lim_{n\to\infty} P f_n\right) = \lim_{n\to\infty} P^2 f_n = \lim_{n\to\infty} P f_n = g.$$

Luego g está en el rango de P. Por lo tanto el rango de P es cerrado. De igual manera se puede probar que el núcleo es cerrado.

(c) Sea $\mathcal{G}$ un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$, entonces existe un subespacio cerrado $\mathcal{G}_1$ tal que $\mathcal{H} = \mathcal{G} \oplus \mathcal{G}_1$. Por lo tanto, la correspondiente proyección P con núcleo $\mathcal{G}_1$ es continua y con norma 1. Para esto último basta notar que si $f = g + h$ con g en $\mathcal{G}$ y h en $\mathcal{G}_1$, entonces

$$\|f\|^2 = \|g\|^2 + \|h\|^2.$$

Cuando es necesario hacer referencia al espacio $\mathcal{H}$ es usual escribir $P = P_{\mathcal{G}}^{\mathcal{H}}$.

1.2. Bases de Riesz

Sea X un espacio de Banach, como es usual $\mathcal{L}(X)$ denotará el espacio de los operadores lineales y continuos de X en sí mismo.

Sea $\{x_n\}$ una base de Schauder en el espacio de Banach X. Sea $T \in \mathcal{L}(X)$ un operador invertible con inverso acotado. Sea $\{y_n\}$ definida por

$$y_n = Tx_n \qquad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

entonces $\{y_n\}$ también es una base de Schauder de X. Dos bases que satisfacen una relación de este tipo se dice que son *bases equivalentes.*

Para más detalles acerca de bases en espacios de Banach ver [**2, 6**].

En un espacio de Hilbert separable son muy importantes las bases ortonormales. Otras bases muy destacadas y menos conocidas son las llamadas bases de Riesz.

En esta sección se estudian algunas de las propiedades de las bases de Riesz, para más detalles sobre este tema se puede consultar el libro de Young [**13**].

Definición 1.2. Una base para un espacio de Hilbert es una *base de Riesz* si es equivalente a una base ortonormal, es decir, si es obtenida de una base ortonormal por medio de un operador lineal acotado invertible con inverso acotado.

Definición 1.3. Sean $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$, dos productos internos sobre un espacio vectorial. Se dice que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ son *productos internos equivalentes* cuando generan normas equivalentes.

Definición 1.4. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert.

(a) Se dice que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *completa* en $\mathcal{H}$ si

$$\overline{\operatorname{span}}\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \mathcal{H}.$$

(b) Se dice que las sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son *biortogonales* si

$$\langle x_n, y_m \rangle = \delta_{nm} \qquad \text{para todo } n, m \in \mathbb{N}.$$

Teorema 1.5.

Sea $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert separable y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{H}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes,

(i) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una base de Riesz para $\mathcal{H}$.*

(ii) *Existe un producto interior* $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ *sobre el espacio lineal* $\mathcal{H}$*, equivalente al producto interior sobre* $\mathcal{H}$ *tal que* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una base ortonormal para* $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$*.*

(iii) *La sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es completa en* $\mathcal{H}$ *y existen constantes* $A, B > 0$*,* $A \leq B$ *tales que*

$$A\sum_{n\in\mathbb{N}}|a_n|^2 \leq \left\|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n\right\|^2 \leq B\sum_{n\in\mathbb{N}}|a_n|^2$$

para toda sucesión de escalares $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *con soporte finito.*

(iv) *La sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es completa en* $\mathcal{H}$ *y su matriz de Gram*

$$(\langle x_i, x_j \rangle)_{i,j=1}^{\infty}$$

es la matriz de un operador acotado invertible en $l^2(\mathbb{N})$*.*

(v) *La sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es completa en* $\mathcal{H}$ *y posee una sucesión biortogonal completa* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, x_n \rangle|^2 < \infty \qquad y \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, y_n \rangle|^2 < \infty$$

para todo x *en* $\mathcal{H}$*.*

Este teorema y su prueba pueden verse en [**13**, página 32].

1.3. El teorema de Paley-Wiener

El criterio fundamental de estabilidad, e históricamente el primero, se debe a Paley - Wiener [**8**]. Este se basa en el hecho elemental de que un operador lineal acotado T sobre un espacio de Banach es invertible cuando

$$\|I - T\| < 1.$$

Teorema 1.6 (Paley -Wiener)**.**

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una base de Schauder para un espacio de Banach* X*, y suponga que* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de elementos en* X *tal que*

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} c_n(x_n - y_n)\right\| \leq \lambda \left\|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\right\|$$

para todo N*, para alguna constante* λ*, con* $0 \leq \lambda < 1$ *y para cualquier sucesión de escalares* $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*. Entonces* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una base de Schauder para* X *equivalente a* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*.*

Demostración.

De la hipótesis sigue que si las sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ son una sucesión de Cauchy, entonces las sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x_n - y_n)$ también son una sucesión de Cauchy.

Luego si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ es convergente entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x_n - y_n)$ es convergente.

Se define el operador $T : X \to X$ mediante

$$T\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x_n - y_n).$$

De la definición de T y de la hipótesis sigue que T es lineal y acotado con $\|T\| \leq \lambda < 1$. Luego el operador $I - T$ es invertible con inverso acotado.

Como $(I - T)(x_n) = y_n$ para todo n se tiene que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son equivalentes.

$\square$

1.4. Descomposición de Wold

Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}'$ espacios de Hilbert. Sea $V : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ un operador lineal. Se dice que V es una *isometría* si

$$\|Vh\|_{\mathcal{H}'} = \|h\|_{\mathcal{H}} \qquad \text{para todo} \qquad h \in \mathcal{H},$$

o equivalentemente, si

$$V^*V = I_{\mathcal{H}}.$$

Se dice que es V es *unitario* cuando es isometría y es sobreyectivo, equivalentemente si

$$V^*V = I_{\mathcal{H}} \qquad \text{y} \qquad VV^* = I_{\mathcal{H}'}.$$

Sea $T \in L(\mathcal{H})$ y sea $\mathcal{M}$ un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$. Se dice que $\mathcal{M}$ es *invariante bajo* T, o simplemente T-*invariante*, si

$$T\mathcal{M} \subset \mathcal{M},$$

y se dice que $\mathcal{M}$ *reduce* a T si $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}^{\perp}$ son T-invariantes. Si $T \in L(\mathcal{H})$ es una isometría se tiene que el subespacio $\mathcal{M}$ reduce a T si y sólo si $\mathcal{M}$ es T-invariante y $T\mathcal{M} = \mathcal{M}$.

Sea $V \in L(\mathcal{H})$ una isometría en $\mathcal{H}$ y sea $\mathcal{M}$ un subespacio de $\mathcal{H}$. Se dice que $\mathcal{M}$ es V- *nómado*, *errante o nómado (wandering)* para V si

$$(V^n\mathcal{M}) \perp (V^k\mathcal{M})$$

para todo $n, k \geq 0$, $n \neq k$. Como V es una isometría, para que $\mathcal{M}$ sea V- nómado basta suponer que

$$(V^n\mathcal{M})\perp\mathcal{M} \qquad \text{para todo} \qquad n \geq 1.$$

Para el caso de un subespacio errante, $\mathcal{M}$, se puede formar la suma ortogonal en $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H}_{\mathcal{M}} = \bigoplus_{n=0}^{\infty}(V^n\mathcal{M}),$$

se tiene que

$$V\mathcal{H}_{\mathcal{M}} = \bigoplus_{n=1}^{\infty}(V^n\mathcal{M}) = \mathcal{H}_{\mathcal{M}} \ominus \mathcal{M}$$

y por lo tanto

$$\mathcal{M} = \mathcal{H}_{\mathcal{M}} \ominus V\mathcal{H}_{\mathcal{M}}.$$

Una isometría V en $\mathcal{H}$ es un *shift unilateral* si existe un subespacio cerrado $\mathcal{M}$ de $\mathcal{H}$, el cual es V- nómado y tal que

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty}(V^n\mathcal{M}).$$

Este subespacio $\mathcal{M}$, es llamado *generador* para V, esta unívocamente determinado por V y su dimensión es llamada la *multiplicidad* del shift unilateral.

Teorema 1.7 (Descomposición de Wold)**.**

Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y V una isometría en $\mathcal{H}$. Entonces $\mathcal{H}$ se descompone en una suma ortogonal

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$$

tal que

(1) *$\mathcal{H}_0$ y $\mathcal{H}_1$ reducen a V*

(2) *$V|_{\mathcal{H}_0}$ es unitario.*

(3) *$V|_{\mathcal{H}_1}$ es un shift unilateral.*

La descomposición está determinada de manera única:

$$\mathcal{H}_0 = \bigcap_{n=0}^{\infty}(V^n\mathcal{H}) \qquad y \qquad \mathcal{H}_1 = \bigoplus_{n=0}^{\infty}(V^n\mathcal{M})$$

donde $\mathcal{M} = \mathcal{H} \ominus V\mathcal{H}$.

El espacio $\mathcal{H}_0$ o el espacio $\mathcal{H}_1$ pueden ser iguales a $\{0\}$.

Este teorema y su prueba pueden verse en [**10**].

Capítulo 2

Núcleos definidos positivos y regularidad

2.1. Algunas propiedades de núcleos definidos positivos

En este capítulo y el que le sigue se considerarán núcleos a valores escalares.

Sea $K : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ un núcleo. Se dice que K es *definido positivo* si

$$\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} K(n,m)\, a_m\, \overline{a_n} \geq 0$$

para toda sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ con soporte finito.

Sea $\mathcal{E}_o$ el espacio de las sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ con soporte finito.

Sea $K : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ un núcleo definido positivo. Para $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y $b = \{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ en $\mathcal{E}_o$ se define

$$\langle a, b\rangle = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} K(n,m)\, a_m\, \overline{b_n}.$$

Se tiene que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es una forma sesquilineal, posiblemente degenerada, definida positiva en $\mathcal{E}_o$.

Sea $\mathcal{E}_{o,K}$ el espacio pre-Hilbert obtenido después de haber pasado al cociente natural en $\mathcal{E}_o$ y sea $\mathcal{H}_K$ la completación de $\mathcal{E}_{o,K}$.

El producto y la norma en $\mathcal{H}_K$ se denotarán por $\langle\ ,\ \rangle_{\mathcal{H}_K}$ y $\|\ \|_{\mathcal{H}_K}$ respectivamente. Esta norma se llamará *la norma inducida por* K.

Para $n \in \mathbb{Z}$ sea $\delta^{(n)}$ el elemento de $\mathcal{E}_o$ definido por

$$\delta^{(n)}_m = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{si } m \neq n. \end{cases}$$

Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ una sucesión con soporte finito.

La clase de equivalencia del elemento $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \delta^{(n)}$ se denotará por $\left[\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \delta^{(n)}\right]_K$ y se tiene que

$$\left\| \left[\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \delta^{(n)}\right]_K \right\|^2_{\mathcal{H}_K} = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} K(n,m)\, a_m\, \overline{a_n}.$$

Definición 2.1. Sean $K_1, K_2 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ dos núcleos definidos positivos. Se dice que K_1 y K_2 son *equivalentes* si las correspondientes normas pre-Hilbert inducidas, $\| \, \|_{\mathcal{H}_{K_1}}$ y $\| \, \|_{\mathcal{H}_{K_2}}$, en el espacio $\mathcal{E}_o$ son equivalentes.

A continuación presentamos uno de nuestros primeros resultados.

Proposición 2.2.

Sean $K_1, K_2 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ dos núcleos definidos positivos. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) *Los núcleos K_1 y K_2 son equivalentes.*

(ii) *Existe una aplicación lineal acotada biyectiva, con inversa acotada,*

$$\Phi : \mathcal{H}_{K_1} \to \mathcal{H}_{K_2}$$

tal que

$$\Phi[\delta^{(n)}]_{K_1} = [\delta^{(n)}]_{K_2} \qquad \textit{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

(iii) *Existen dos constantes A, B con $0 < A \leq B$ tales que*

$$A \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} K_1(n,m)\, a_m\, \overline{a_n} \leq \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} K_2(n,m)\, a_m\, \overline{a_n} \leq B \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} K_1(n,m)\, a_m\, \overline{a_n}$$

para toda sucesión con soporte finito $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$.

Demostración.

Note que la condición (iii) significa que

$$A\|[h]_{K_1}\|^2_{\mathcal{H}_{K_1}} \leq \|[h]_{K_2}\|^2_{\mathcal{H}_{K_2}} \leq B\|[h]_{K_1}\|^2_{\mathcal{H}_{K_1}}$$

para $h \in \mathcal{E}_o$.

Luego la condición (ii) implica la condición (iii).

Por definición las condiciones (i) y (iii) son equivalentes. Así que basta probar que la condición (iii) implica la condición (ii).

Suponga que la condición (iii) se cumple. Entonces la aplicación

$$\Phi_o : \mathcal{E}_{o,K_1} \to \mathcal{E}_{o,K_2}$$

definida por

$$\Phi_o\left(\left[\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \delta^{(n)}\right]_{K_1}\right) = \left[\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \delta^{(n)}\right]_{K_2}$$

está bien definida y es lineal y continua.

Sea $\Phi : \mathcal{H}_{K_1} \to \mathcal{H}_{K_2}$ la extensión lineal y continua de Φ_o.

Se tiene que $\{[h_m]_{K_2}\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{E}_{o,K_2}$ si y sólo si $\{[h_m]_{K_1}\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{E}_{o,K_1}$. De este hecho sigue que Φ es sobreyectiva con inversa continua.

$\square$

Se dice que $K : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ es un *núcleo de Toeplitz* si existe una sucesión $\tau : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ tal que

$$K(n, m) = \tau(n - m) \quad \text{para todo } n, m \in \mathbb{Z}.$$

La sucesión τ es *definida positiva* si el núcleo de Toeplitz correspondiente es definido positivo.

Si K es un núcleo de Toeplitz definido positivo entonces el operador $T : \mathcal{E}_{o,K} \to \mathcal{E}_{o,K}$ definido por

$$T\left(\left[\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \delta^{(n)}\right]_K\right) = \left[\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \delta^{(n-1)}\right]_K$$

da origen a un operador unitario en $\mathcal{H}_K$, que también se denotará por T. Como es usual se le llamará el *operador de traslación*.

2.2. Núcleos de Toeplitz definidos positivos regulares

Si $K : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ es un núcleo definido positivo, para $j \in \mathbb{Z}$ sea $\mathcal{H}_K^j$ el subespacio cerrado de $\mathcal{H}_K$ generado por los elementos de la forma $[\delta^{(n)}]_K$ con $n \leq j$, esto es

$$\mathcal{H}_K^j = \overline{\text{span}}\left\{[\delta^{(n)}]_K : n \leq j\right\}.$$

Note que si K es un núcleo de Toeplitz, entonces $\mathcal{H}_K^j$ es invariante por el operador de traslación T.

Definición 2.3.

Sea K un núcleo definido positivo, se dice que K es *regular* si

$$\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}_K^j = \{0\}.$$

Se evitará el caso trivial $K \equiv 0$.

Proposición 2.4.

Sea K un núcleo de Toeplitz definido positivo con operador de traslación T. Si K es regular entonces $\dim\left(\mathcal{H}_{\mathrm{K}}^0 \ominus \mathrm{T}\mathcal{H}_{\mathrm{K}}^0\right) = 1$.

Demostración.

Se tiene que $T\mathcal{H}_K^0 + \operatorname{span}\left\{[\delta^{(0)}]_{\mathrm{K}}\right\} = \mathcal{H}_{\mathrm{K}}^0$, entonces $\dim\left(\mathcal{H}_{\mathrm{K}}^0 \ominus \mathrm{T}\mathcal{H}_{\mathrm{K}}^0\right)$ es 0 ó 1.

Si esta dimensión es igual a 0, entonces $\mathcal{H}_K^j = T^j\mathcal{H}_K^0 = \mathcal{H}_K^0$, luego

$$\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}_K^j = \mathcal{H}_K^0 \neq \{0\}.$$

$\square$

Como es usual $\ell^2(\mathbb{N})$ denotará el espacio de las sucesiones de cuadrado sumable $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con norma $\|a\|_2 = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2\right)^{1/2}$, análogamente para $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Uno de los principales resultados de este trabajo es el siguiente resultado de representación de núcleos de Toeplitz.

Teorema 2.5.

Sea K un núcleo definido positivo. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes

(i) *K es regular y Toeplitz.*

(ii) *Existe una sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$ y una base ortonormal $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\mathcal{H}_K$ tal que*

$$\mathcal{H}_K^j = \overline{\operatorname{span}}\{e_n : n \leq j\} \quad \textit{para todo } j \in \mathbb{Z}$$

y

$$[\delta^{(n)}]_K = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j e_{n-j}.$$

Demostración.

Suponga que se cumple (i).

Se usará la descomposición de Wold del operador de traslación $T : \mathcal{H}_K \to \mathcal{H}_K$ (para más detalles acerca de la descomposición de Wold ver [**10**, Teorema 1.1 página 3]).

Como $T^p\mathcal{H}_K^q = \mathcal{H}_K^{q-p}$, si $p \geq 0$ se tiene que

$$\bigcap_{j=0}^{+\infty} T^j\mathcal{H}_K^0 = \bigcap_{j=0}^{+\infty} \mathcal{H}_K^{-j} = \bigcap_{j=-\infty}^{0} \mathcal{H}_K^j.$$

Como $\mathcal{H}_K^0 \subset \bigcap_{j=1}^{+\infty} \mathcal{H}_K^j$, se tiene que

$$\bigcap_{j=0}^{+\infty} T^j\mathcal{H}_K^0 \subset \bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_K^j = \{0\},$$

así que el operador T es un shift unilateral.

De la Proposición 2.4 sigue que $\dim(\mathcal{H}_{\mathrm{K}}^{0} \ominus \mathrm{T}\mathcal{H}_{\mathrm{K}}^{0}) = 1$, luego la multiplicidad de T es 1.

Sea e_0 un vector unitario en $\mathcal{H}_K^0 \ominus T\mathcal{H}_K^0$.

De la descomposición de Wold sigue que $\{T^p e_0\}_{p\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}_K$ y que $\{T^p e_0\}_{p=p_o}^{+\infty}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}_K^{-p_o}$.

Para $p \in \mathbb{Z}$ sea

$$e_p = T^{-p} e_0.$$

Como $[\delta^{(0)}]_K \in \mathcal{H}_K^0$ existe una sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$ tal que

$$[\delta^{(0)}]_K = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j e_{-j}.$$

Luego

$$[\delta^{(n)}]_K = T^{-n}[\delta^{(0)}]_K = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j e_{n-j}.$$

Suponga que se cumple (ii).

Entonces, para $n, m \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$K(n,m) = \left\langle [\delta^{(m)}]_K, [\delta^{(n)}]_K \right\rangle_{\mathcal{H}_K} = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j \overline{a}_{n-m+j}.$$

Así que K es un núcleo de Toeplitz.

Como $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}_K$ y $\mathcal{H}_K^j = \overline{\operatorname{span}}\{e_n : n \leq j\}$ para todo $j \in \mathbb{Z}$, se tiene que

$$\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}_K^j = \{0\}.$$

Por lo tanto K es regular.

□

Proposición 2.6.

Sean K_1 y K_2 dos núcleos definidos positivos equivalentes. Entonces K_1 es regular si y sólo si K_2 es regular.

DEMOSTRACIÓN.

Con la misma notación de la Proposición 2.2 se tiene que $\Phi(\mathcal{H}_{K_1}^j) = \mathcal{H}_{K_2}^j$ para $j \in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto, se obtiene el resultado.

□

El resultado de representación para núcleos equivalentes a núcleos de Toeplitz definidos positivos

Teorema 2.7.

Sea K un núcleo definido positivo. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) *K es regular y equivalente a un núcleo de Toeplitz definido positivo.*

(ii) *Existe una sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$ y una base de Riesz $\{v_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\mathcal{H}_K$ tal que*

$$[\delta^{(n)}]_K = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j v_{n-j}$$

y

$$\mathcal{H}_K^j = \overline{\operatorname{span}}\{v_n : n \leq j\} \quad \textit{para toda } j \in \mathbb{Z}.$$

Demostración.

Suponga que se cumple (i). Entonces K_1 es un núcleo de Toeplitz definido positivo equivalente a K. De la Proposición 2.6 sigue que K_1 es regular, así que del Teorema 2.5 sigue que existe una sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$ y una base ortonormal $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\mathcal{H}_{K_1}$ tales que

$$[\delta^{(n)}]_{K_1} = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j e_{n-j}$$

y

$$\mathcal{H}_{K_1}^j = \overline{\operatorname{span}}\{e_n : n \leq j\} \quad \text{para todo } j \in \mathbb{Z}.$$

Como K_1 y K son equivalentes, por la Proposición 2.2 existe una aplicación lineal acotada biyectiva, con inversa acotada,

$$\Phi : \mathcal{H}_{K_1} \to \mathcal{H}_K$$

tal que

$$\Phi[\delta^{(n)}]_{K_1} = [\delta^{(n)}]_K.$$

Definiendo v_n por

$$v_n = \Phi e_n$$

se obtiene la primera parte del resultado.

Para la última igualdad basta observar que

$$\Phi(\mathcal{H}_{K_1}^j) = \mathcal{H}_K^j.$$

Suponga que se cumple (ii). Entonces existe una base ortonormal $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{H}_K$ y un operador lineal acotado con inverso acotado $V : \mathcal{H}_K \to \mathcal{H}_K$ tal que $v_n = Ve_n$ para $n \in \mathbb{Z}$.

Luego

$$V^{-1}[\delta^{(n)}]_K = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j e_{n-j}.$$

Sea $K_1 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ el núcleo definido por

$$K_1(n,m) = \langle V^{-1}[\delta^{(m)}]_K, V^{-1}[\delta^{(n)}]_K \rangle_{\mathcal{H}_K}.$$

Sigue que

$$K_1(n,m) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j \overline{a}_{n-m+j},$$

así que K_1 es un núcleo de Toeplitz.

Para una sucesión con soporte finito $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ se tiene que

$$\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} K_1(n,m)\, a_m\, \overline{a_n} = \left\| V^{-1} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n [\delta^{(n)}]_K \right) \right\|_{\mathcal{H}_K}^2 .$$

Como V es acotado con inverso acotado, por la Proposición 2.2 resulta que K y K_1 son equivalentes.

Finalmente la regularidad de K sigue como en el Teorema 2.5.

$\square$

Capítulo 3

Perturbaciones de núcleos de Toeplitz y aplicaciones a procesos estocásticos

3.1. Perturbaciones de núcleos de Toeplitz

El resultado siguiente está relacionado con un teorema de Paley-Wiener acerca de estabilidad de bases [**8**] (ver también [**13**, Teorema 10, página 38]). Un resultado similar para procesos estocásticos fue dado en [**9**, Teorema 2]. El teorema que sigue es nuestro resultado de estabilidad para núcleos definidos positivos.

Teorema 3.1.

Sea K un núcleo definido positivo.

Si $\{g_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \subset \mathcal{H}_K$ satisface

$$\left\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \left([\delta^{(n)}]_K - g_n \right) \right\|_{\mathcal{H}_K} \leq \lambda \left\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n [\delta^{(n)}]_K \right\|_{\mathcal{H}_K}$$

para toda sucesión con soporte finito $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$, donde $\lambda \in (0,1)$, entonces el núcleo K_1 definido por

$$K_1(n,m) = \langle g_n, g_m \rangle_{\mathcal{H}_K}$$

es equivalente a K.

Demostración.

De las hipótesis sigue que existe un operador lineal acotado $J : \mathcal{H}_K \to \mathcal{H}_K$ tal que $\|J\| \leq \lambda$ y

$$J\left(\left[\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \delta^{(n)} \right]_K \right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \left([\delta^{(n)}]_K - g_n \right)$$

para cada sucesión con soporte finito $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$.

Sea $f \in \mathcal{H}_K$ dada por

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n [\delta^{(n)}]_K,$$

donde $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ es una sucesión con soporte finito.

Se tiene que

$$(I - J)\,(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\, g_n$$

y

$$(1-\lambda)\|f\|_{\mathcal{H}_K} \leq \|(I-J)f\|_{\mathcal{H}_K} \leq 2\|f\|_{\mathcal{H}_K},$$

por lo tanto

$$(1-\lambda)^2 \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} K(n,m)\, a_m\, \overline{a_n} \leq \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} K_1(n,m)\, a_m\, \overline{a_n} \leq 4 \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} K(n,m)\, a_m\, \overline{a_n}.$$

□

El resultado siguiente se obtiene del teorema de representación de Riesz y fue tomado de [**13**, Teorema 2, página 151].

Lema 3.2.

Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, sea $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión de escalares y sea $M > 0$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) *Existe $f \in \mathcal{H}$ tal que $\|f\|^2_{\mathcal{H}} \leq M$ y $\langle f, f_n\rangle_{\mathcal{H}} = c_n$ para $n \in \mathbb{Z}$.*

(ii) *Para toda sucesión de escalares con soporte finito $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ se tiene que*

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \overline{c_n}\right|^2 \leq M \left\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n f_n\right\|^2_{\mathcal{H}}.$$

Demostración.

Si se cumple (i) y $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de escalares con soporte finito, entonces

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \overline{c_n}\right|^2 = \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \langle f_n, f\rangle_{\mathcal{H}}\right|^2 = \left|\left\langle \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n f_n, f\right\rangle_{\mathcal{H}}\right|^2 \leq M \left\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n f_n\right\|^2_{\mathcal{H}}.$$

Supóngase (ii). Sea $\mathcal{M}_o$ la variedad lineal generada por $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$. Para una sucesión de escalares con soporte finito $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ se define

$$L\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n f_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \overline{c_n}.$$

De la hipótesis sigue que L está bien definido, que es lineal y que se puede extender a un funcional lineal y continuo $\widetilde{L} : \overline{\mathcal{M}_o} \to \mathbb{C}$ tal que $\|\widetilde{L}\|^2 \leq M$. Del teorema de representación de Riesz sigue el resultado.

□

Un resultado similar al siguiente lema aparece como ejercicio en [**13**, página 154].

Lema 3.3.

Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *una sucesión en un espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$, *sea* $\mathcal{M} = \overline{\operatorname{span}}\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *y sea* $\mathcal{L}$ *un subespacio cerrado de* $\ell^2(\mathbb{Z})$. *Suponga que para cada sucesión* $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{L}$ *el problema*

$$\langle f, f_n\rangle_{\mathcal{H}} = x_n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

tiene una solución $f \in \mathcal{H}$.

Entonces, para cada sucesión $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{L}$, *este problema tiene una única solución* $Tx \in \mathcal{M}$ *y la función* $x \mapsto Tx$, *de* $\mathcal{L}$ *en* $\mathcal{M}$, *es lineal y acotada.*

Demostración.

Sea $P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{M}} : \mathcal{H} \to \mathcal{M}$ la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{M}$.

Suponga que $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{L}$. Si $f \in \mathcal{H}$ es una solución de $\langle f, f_n\rangle_{\mathcal{H}} = x_n$, $n \in \mathbb{Z}$, entonces $P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{M}} f$ es la única solución de este problema en $\mathcal{M}$, así que basta tomar $Tx = P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{M}} f$.

Claramente T es lineal, así que basta probar que T es cerrado.

Sea $\{x^{(j)}\}_{j=1}^{+\infty} \subset \mathcal{L}$ una sucesión tal que

$$x^{(j)} \to x \in \mathcal{L} \quad \text{ y } \quad Tx^{(j)} \to y \in \mathcal{M} \quad \text{ cuando } j \to +\infty,$$

entonces, para $n \in \mathbb{Z}$,

$$x_n^{(j)} \to x_n \text{ cuando } j \to +\infty.$$

Como $\langle Tx^{(j)}, f_n\rangle_{\mathcal{H}} = x_n^{(j)}$ para todo j, tomando límite se obtiene

$$\langle y, f_n\rangle_{\mathcal{H}} = \lim_{j\to+\infty} \langle Tx^{(j)}, f_n\rangle_{\mathcal{H}} = x_n,$$

por lo tanto

$$y = Tx.$$

□

Observación 3.4.

Bajo las mimas hipótesis de este último resultado, existe una constante $A > 0$ tal que, para cada sucesión $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{L}$, el problema

$$\langle f, f_n\rangle_{\mathcal{H}} = x_n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

tiene una solución $f \in \mathcal{H}$ tal que

$$\|f\|_{\mathcal{H}}^2 \leq A \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^2.$$

El siguiente resultado está relacionado con el Lema 3.3 de [**9**].

Lema 3.5.

Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y sea $\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión de números tal que $b_n = 1$ ó $b_n = 0$.

Suponga que para cada sucesión $c = \{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ el problema

$$\langle f, f_n\rangle_{\mathcal{H}} = b_n c_n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

tiene una solución $f \in \mathcal{H}$.

Entonces existe una constante $A > 0$ tal que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n b_n|^2 \leq A \left\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n f_n \right\|_{\mathcal{H}}^2$$

para toda sucesión de escalares $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ con soporte finito.

Demostración.

Sea $\mathcal{L} = \{\ \{b_n z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\ : \{z_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})\}$, entonces $\mathcal{L}$ es un subespacio cerrado de $\ell^2(\mathbb{Z})$ y se tiene que, para cada sucesión $w = \{w_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{L}$, el problema

$$\langle f, f_n\rangle_{\mathcal{H}} = w_n \quad \text{para } n \in \mathbb{Z}$$

tiene una solución $f \in \mathcal{H}$.

Del Lema 3.3 (ver también Observación 3.4) sigue que existe $A > 0$, que no depende de w, tal que este problema tiene una solución $f \in \mathcal{H}$ que satisface

$$\|f\|_{\mathcal{H}}^2 \leq A \sum_{n\in\mathbb{Z}} |w_n|^2.$$

En particular, si $z = \{z_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ y $\|z\|_2 \leq 1$, entonces el problema

$$\langle f, f_n\rangle_{\mathcal{H}} = b_n z_n \quad \text{para } n \in \mathbb{Z}$$

tiene una solución $f \in \mathcal{H}$ tal que

$$\|f\|_{\mathcal{H}}^2 \leq A.$$

Así que, del Lema 3.2 sigue que

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n b_n \overline{z_n}\right|^2 \leq A \left\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n f_n\right\|_{\mathcal{H}}^2,$$

para cada sucesión de escalares con soporte finito $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y cada sucesión de escalares $z = \{z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que $\|z\|_2 \leq 1$.

Finalmente, si para una sucesión con soporte finito $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ se considera

$$z_n = \begin{cases} 0 & \text{si } \|\{a_n b_n\}\|_2 = 0, \\ \dfrac{a_n b_n}{\|\{a_n b_n\}\|_2} & \text{en otro caso }, \end{cases}$$

se obtiene

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n b_n|^2 \leq A \left\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n f_n\right\|_{\mathcal{H}}^2.$$

□

Se dice que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ en un espacio de Hilbert es *minimal* si, para cada $p \in \mathbb{Z}$,

$$x_p \notin \overline{\text{span}}\,\{x_n : n \in \mathbb{Z},\ n \neq p\}.$$

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión minimal en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, entonces existe una sucesión $\{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{H}$ que es *biortogonal* a $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, esto es

$$\langle x_n, h_m\rangle_{\mathcal{H}} = \delta_{nm}$$

(más detalles pueden verse en [**13**, página 28]).

Nuestro siguiente resultado prueba que, bajo ciertas condiciones, una perturbación especial de un núcleo de Toeplitz definido positivo es equivalente al núcleo perturbado.

Teorema 3.6.

Sea $K : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ un núcleo de Toeplitz definido positivo tal que la sucesión $\left\{[\delta^{(n)}]_K\right\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{H}_K$ es minimal. Sea $I \subset \mathbb{Z}$ un subconjunto finito y sea $\{e_n\}_{n\in I} \subset \mathcal{H}_K$ un sistema ortonormal.

Entonces existe una constante $B > 0$ tal que para cualquier sucesión de números $\{c_n\}_{n\in I}$ que satisface $0 \leq c_n < B$ el núcleo $K + K_1$ es equivalente al núcleo K, donde

$$K_1(n,m) = \begin{cases} \rho(n,m) + \rho(m,n) + c_n\delta_{nm} & m, n \in I, \\ \rho(n,m) & m \in I, n \notin I, \\ \rho(m,n) & m \notin I, n \in I, \\ 0 & m \notin I, n \notin I \end{cases}$$

y

$$\rho(n,m) = \sqrt{c_m}\left\langle e_m, [\delta^{(n)}]_K \right\rangle_{\mathcal{H}_K}.$$

Demostración.

Sea $\{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{H}_K$ una sucesión biortogonal a $\left\{[\delta^{(n)}]_K\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Sea $\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión definida por $b_n = 1$ si $n \in I$ y $b_n = 0$ en otro caso.

Si $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, entonces el problema

$$\left\langle f, [\delta^{(n)}]_K \right\rangle_{\mathcal{H}_K} = b_n c_n \quad \text{para } n \in \mathbb{Z}$$

tiene la solución

$$f = \sum_{n\in I} c_n h_n.$$

Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión de escalares con soporte finito.

Del Lema 3.5 sigue que existe una constante $A > 0$ tal que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n b_n|^2 \leq A \left\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n [\delta^{(n)}]_K \right\|^2_{\mathcal{H}_K}.$$

Sea $B > 0$ tal que $AB < 1$. Suponga que $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ también satisface $0 \leq c_n < B$.

Si $\{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{H}_K$ está definido por

$$g_n = \begin{cases} [\delta^{(n)}]_K + \sqrt{c_n} e_n & \text{si } n \in I, \\ [\delta^{(n)}]_K & \text{en otro caso ,} \end{cases}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \left([\delta^{(n)}]_K - g_n\right) \right\|_{\mathcal{H}_K}^2 &= \left\| \sum_{n\in I} a_n \sqrt{c_n}\, e_n \right\|_{\mathcal{H}_K}^2 \\
&\leq B \left\| \sum_{n\in I} a_n\, e_n \right\|_{\mathcal{H}_K}^2 \\
&= B \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n b_n|^2 \\
&\leq AB \left\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n [\delta^{(n)}]_K \right\|_{\mathcal{H}_K}^2 .
\end{aligned}$$

Como

$$K(n,m) + K_1(n,m) = \langle g_n, g_m \rangle_{\mathcal{H}_K}$$

el resultado sigue del Teorema 3.1.

□

3.2. Aplicaciones a procesos estocásticos

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad. El espacio de Hilbert $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se denotará por $L^2(P)$.

Sea $X = \{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ un proceso estocástico. Siempre se supondrá que $X_n \in L^2(P)$ y $\mathbb{E}(X_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Sean

$$\mathcal{H}(X) = \overline{\operatorname{span}}\, \{X_n : n \in \mathbb{Z}\} \subset L^2(P)$$

y

$$\mathcal{H}^j(X) = \overline{\operatorname{span}}\, \{X_n : n \leq j\} \subset L^2(P) \quad \text{para todo } j \in \mathbb{Z}.$$

Se dice que el proceso es *regular* si

$$\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}^j(X) = \{0\}.$$

El núcleo asociado al proceso es el *núcleo de covarianza* K definido por

$$K(n,m) = \operatorname{cov}(X_m, X_n) = \mathbb{E}(X_m \overline{X_n}) = \langle X_m, X_n \rangle_{L^2(P)}.$$

Se tiene que K es un núcleo definido positivo.

Observación 3.7.

Se define $\Psi : \mathcal{H}_K \to \mathcal{H}(X)$ mediante

$$\Psi\left([\delta^{(n)}]_K\right) = X_n.$$

Entonces

$$\left\langle [\delta^{(m)}]_K, [\delta^{(n)}]_K \right\rangle_{\mathcal{H}_K} = K(n,m) = \langle X_m, X_n \rangle_{L^2(P)} = \left\langle \Psi([\delta^{(m)}]_K), \Psi([\delta^{(n)}]_K) \right\rangle_{L^2(P)},$$

luego Ψ es un operador unitario tal que $\Psi(\mathcal{H}_K^j) = \mathcal{H}^j(X)$ para todo $j \in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto el núcleo K es regular si y sólo si el proceso X es regular.

El proceso $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ se dice que es *débilmente estacionario* si

$$\mathbb{E}(X_m \overline{X_n}) = \tau(m-n) \quad \text{para todo } n, m \in \mathbb{Z}$$

para una sucesión $\tau : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, es decir si el núcleo asociado al proceso es de Toeplitz.

Como aplicaciones de nuestros resultados se dan pruebas del Teorema 2, página 292 de [**5**] y del Teorema 6 de [**9**]. También se obtiene un resultado similar al Teorema 3 de [**9**].

Teorema 3.8 (Gihman-Skorokhod)**.** [**5**, Teorema 2, página 292]

Sea $X = \{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ un proceso estocástico. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) *$X = \{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es regular y débilmente estacionario.*

(ii) *Existe una sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$ y una base ortonormal $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\mathcal{H}(X)$ tal que*

$$X_n = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j\, \xi_{n-j}$$

y

$$\mathcal{H}^j(X) = \overline{\operatorname{span}}\,\{\xi_n : n \leq j\} \quad \textit{para todo } j \in \mathbb{Z}.$$

Demostración.

Sea K el núcleo de covarianza del proceso X.

Suponga que se cumple (i). Entonces K es regular y Toeplitz.

Por el Teorema 2.5 existe una sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$ y una base ortonormal $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\mathcal{H}_K$ tal que

$$[\delta^{(n)}]_K = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j\, e_{n-j}$$

y

$$\mathcal{H}_K^j = \overline{\text{span}}\,\{e_n : n \leq j\} \quad \text{para } j \in \mathbb{Z}.$$

Considere el operador unitario $\Psi : \mathcal{H}_K \to \mathcal{H}(X)$ definido por

$$\Psi\left([\delta^{(n)}]_K\right) = X_n \quad \text{para } n \in \mathbb{Z}.$$

Entonces

$$X_n = \Psi\left([\delta^{(n)}]_K\right) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j\, \Psi(e_{n-j}).$$

Para $n \in \mathbb{Z}$, sea

$$\xi_n = \Psi(e_n).$$

Entonces $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}(X)$.

Para $j \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$\mathcal{H}^j(X) = \Psi(\mathcal{H}_K^j) = \overline{\text{span}}\,\{\Psi(e_n) : n \leq j\} = \overline{\text{span}}\,\{\xi_n : n \leq j\}.$$

El recíproco se obtiene usando otra vez el Teorema 2.5.

□

De acuerdo con la definición dada en [**9**, página 17] un proceso estocástico $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ en $L^2(P)$ es *aproximadamente débilmente estacionario* si existen dos constantes positivas A, B con $A \leq B$ y una sucesión definida positiva $\tau : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ tal que

$$A \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \tau(n-m)\, a_m\, \overline{a_n} \leq \left\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\, X_n \right\|_{L^2(P)}^2 \leq B \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \tau(n-m)\, a_m\, \overline{a_n}$$

para toda sucesión con soporte finito $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$.

El siguiente lema caracteriza los procesos aproximadamente débilmente estacionarios en términos del núcleo de covarianza.

Lema 3.9.

Sea $X = \{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ un proceso estocástico en $L^2(P)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) *El proceso es aproximadamente débilmente estacionario.*

(ii) *El núcleo de covarianza, K, del proceso X es equivalente a un núcleo de Toeplitz definido positivo.*

Demostración.

El resultado se obtiene de las definiciones y de la siguiente igualdad

$$\left\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\, X_n\right\|^2_{L^2(P)} = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} K(n,m)\, a_m\, \overline{a_n}.$$

□

A continuación se da una nueva demostración de un resultado de Strandell.

Teorema 3.10 (Strandell)**.** [**9**, Teorema 6]

Sea $X = \{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ un proceso estocástico en $L^2(P)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) *$X = \{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es regular y aproximadamente débilmente estacionario.*

(ii) *Existe una sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})$ y una base de Riesz $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\mathcal{H}(X)$ tal que*

$$X_n = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j\, \xi_{n-j}$$

y

$$\mathcal{H}^j(X) = \overline{\operatorname{span}}\,\{\xi_n : n \leq j\} \qquad \textit{para } j \in \mathbb{Z}.$$

Demostración.

Sea K el núcleo de covarianza del proceso X. Suponga que $X = \{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es regular y aproximadamente débilmente estacionario. Por el Lema 3.9 el núcleo K es equivalente a un núcleo de Toeplitz definido positivo K_1.

Usando el Teorema 2.7 se obtiene la demostración de manera similar a la prueba del Teorema 3.8. □

Nuestro siguiente resultado es similar al Teorema 3 de [**9**].

Teorema 3.11.

Sea $S = \{S_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ un proceso débilmente estacionario tal que la sucesión $\{S_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es minimal. Entonces para cada proceso ortonormal $\{e_n\}_{n\in I} \subset \mathcal{H}(S)$, donde I es un subconjunto finito de $\mathbb{Z}$, existe una constante $B > 0$, tal que para cualquier sucesión de números $\{c_n\}_{n\in I}$

tales que $0 \leq c_n < B$*, el proceso estocástico* X *definido por*

$$X_n = \begin{cases} S_n + \sqrt{c_n} e_n & n \in I, \\ S_n & \textit{otro caso} \ , \end{cases}$$

es aproximadamente débilmente estacionario.

Demostración.

Sea K el núcleo dado por $K(n,m) = \operatorname{cov}(S_m, S_n)$. Entonces K es un núcleo de Toeplitz.

Sea $\Psi : \mathcal{H}_K \to \mathcal{H}(S)$ definida por

$$\Psi\left([\delta^{(n)}]_K\right) = S_n$$

(ver Observación 3.7).

Como $\{S_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es minimal se tiene que $\{[\delta^{(n)}]_K\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es minimal.

Por el Teorema 3.6 existe una constante $B > 0$ tal que para cualquier sucesión de números $\{c_n\}_{n\in I}$ que satisface $0 \leq c_n < B$ el núcleo $K + K_1$ es equivalente al núcleo K, donde

$$K_1(n,m) = \begin{cases} \rho(n,m) + \rho(m,n) + c_n\delta_{nm} & m,n \in I, \\ \rho(n,m) & m \in I, n \notin I, \\ \rho(m,n) & m \notin I, n \in I, \\ 0 & m \notin I, n \notin I \end{cases}$$

y

$$\rho(n,m) = \sqrt{c_m}\left\langle e_m, [\delta^{(n)}]_K \right\rangle_{\mathcal{H}_K}.$$

Como

$$\operatorname{cov}(X_m, X_n) = K(n,m) + K_1(n,m),$$

sigue que el núcleo de covarianza de $X = \{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es equivalente al núcleo de Toeplitz K.

Del Lema 3.9 sigue que el proceso $X = \{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es aproximadamente débilmente estacionario.

$\square$

Capítulo 4

Núcleos definidos positivos a valores operadores, el teorema de descomposición de Kolmogorov y el teorema de Naimark

4.1. El espacio de Hilbert asociado a un núcleo definido positivo a valores operadores

Considere una familia $\{\mathcal{H}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de espacios de Hilbert. Un *núcleo a valores operadores de* $\mathbb{Z}$ *en* $\{\mathcal{H}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una aplicación $K : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \bigcup_{m,n\in\mathbb{Z}}\mathcal{L}(\mathcal{H}_m,\mathcal{H}_n)$ tal que $K(n,m)\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_m,\mathcal{H}_n)$ para $n,m\in\mathbb{Z}$.

En este capítulo y el que sigue, salvo que se diga lo contrario, los núcleos a considerar son a valores operadores.

Una sucesión $\{h_n\}$ en $\oplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{H}_n$ se dice que tiene *soporte finito* si $h_n = 0$ excepto para un número finito de enteros n.

Un núcleo a valores operadores K de $\mathbb{Z}$ en $\{\mathcal{H}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ se dice que es un *núcleo definido positivo* si

$$\sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \langle K(n,m)h_m, h_n\rangle_{\mathcal{H}_n} \geq 0,$$

para toda sucesión $\{h_n\}$ en $\oplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{H}_n$ con soporte finito.

Sea K un núcleo definido positivo. Sea $\mathcal{F}$ el espacio lineal de elementos de $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{H}_n$ y $\mathcal{F}_o$ el espacio de elementos de $\mathcal{F}$ con soporte finito.

Se define $B_K : \mathcal{F}_o\times\mathcal{F}_o \to \mathbb{C}$ por la fórmula

$$B_K(f,g) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \langle K(n,m)f_m, g_n\rangle_{\mathcal{H}_n}, \tag{4.1}$$

para $f,g\in\mathcal{F}_o$, $f=\{f_n\}$, $g=\{g_n\}$, $f_n,g_n\in\mathcal{H}_n$.

Observe que B_K satisface todas las propiedades de un producto interno, excepto por el hecho de que el conjunto

$$\mathcal{N}_K = \{h\in\mathcal{F}_o : B_K(h,h)=0\}$$

podría ser no trivial.

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que

$$\mathcal{N}_K = \{h \in \mathcal{F}_o : B_K(h, g) = 0, \text{ para todo } g \in \mathcal{F}_o\},$$

de donde sigue que $\mathcal{N}_K$ es un subespacio lineal de $\mathcal{F}_o$.

El espacio cociente $\mathcal{F}_o/\mathcal{N}_K$ es también un espacio lineal. Si $[h]$ denota la clase en $\mathcal{F}_o/\mathcal{N}_K$ de el elemento h entonces la aplicación dada por la fórmula

$$\langle [h], [g] \rangle = B_K(h, g), \qquad h, g \in \mathcal{F}_o$$

está bien definida, es decir, es independiente de la escogencia de los representantes. Se prueba fácilmente que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interior sobre $\mathcal{F}_o/\mathcal{N}_K$.

La completación de $\mathcal{F}_o/\mathcal{N}_K$ con respecto a la norma inducida por este producto interior es un espacio de Hilbert que se denotará por $\mathcal{H}_K$ y que es conocido como el *espacio de Hilbert asociado al núcleo definido positivo* K. El producto y la norma en $\mathcal{H}_K$ se denotarán por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_K}$ y $\| \cdot \|_{\mathcal{H}_K}$ respectivamente. Esta norma se llamará *la norma inducida por* K.

4.2. El teorema de descomposición de Kolmogorov

El siguiente teorema es una versión de un resultado clásico de Kolmogorov (para una revisión de la historia de este resultado ver [**4**]).

Teorema 4.1 (Kolmogorov)**.**

Sea $\{\mathcal{H}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ *una familia de espacios de Hilbert y sea* $K : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \bigcup_{m,n \in \mathbb{Z}} \mathcal{L}(\mathcal{H}_m, \mathcal{H}_n)$ *un núcleo a valores operadores definido positivo. Entonces existe una aplicación* V *definida sobre* $\mathbb{Z}$ *tal que* $V(n) \in L(\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_K)$ *para cada* $n \in \mathbb{Z}$ *y*

(a) $K(n, m) = V^*(n)V(m)$ *si* $n, m \in \mathbb{Z}$.

(b) $\mathcal{H}_K = \bigvee_{n \in \mathbb{Z}} V(n)\mathcal{H}_n$.

(c) *La descomposición es única en el siguiente sentido: si* $\mathcal{H}'$ *es otro espacio de Hilbert y* V' *definida sobre* $\mathbb{Z}$ *es una aplicación tal que* $V'(n) \in L(\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_K)$ *para cada* $n \in \mathbb{Z}$ *que satisfacen* (a) *y* (b)*,entonces existe un operador unitario* $\Phi : \mathcal{H}_K \to \mathcal{H}'$ *tal que* $\Phi V(n) = V'(n)$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$.

Este teorema y su prueba pueden verse en [**3**, Teorema 3.1]. A continuación se presenta un esbozo de la prueba.

Sea $\mathcal{H}_K$ el espacio de Hilbert asociado por el núcleo definido positivo K.

Si $h \in \mathcal{H}_n$, entonces el elemento $h_n \in \mathcal{F}_o$ se define como sigue:

$$h_n(m) = \begin{cases} h & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases} \tag{4.2}$$

por lo tanto

$$\|[h_n]\|^2_{\mathcal{H}_K} = \langle [h_n], [h_n] \rangle_{\mathcal{H}_K} = \langle K(n,n)h, h \rangle_{\mathcal{H}_n}.$$

La aplicación V se puede definir mediante la fórmula $V(n) : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_K$ donde

$$V(n)h = [h_n] = [h\delta_n], \qquad h \in \mathcal{H}_n,$$

donde δ_n es la delta Kronecker. Entonces se tiene

$$\|V(n)h\|^2_{\mathcal{H}_K} = \langle K(n,n)h, h \rangle_{\mathcal{H}_n} \leq \|K(n,n)\| \, \|h\|^2_{\mathcal{H}_n}, \qquad h \in \mathcal{H}_n.$$

Lo cual muestra que $V(n) \in L(\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_K)$.

Una aplicación V la cual satisface la propiedad (a) de el anterior teorema se llama una descomposición de *Kolmogorov del núcleo* K o simplemente una *descomposición del núcleo* K (ver [**3**]). La propiedad (b) es conocida como la *propiedad minimal* de la descomposición de Kolmogorov. El significado de la propiedad (c) es que, bajo la condición minimal (b) la descomposición de Kolmogorov es esencialmente única.

4.3. Teorema de Naimark

Existe un caso particular en el que la familia $\{\mathcal{H}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ se reduce a un solo espacio de Hilbert, es decir $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. En este caso un núcleo a valores operadores es una aplicación $K : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$. En este caso se pueden considerar los núcleos de Toeplitz, que presentamos a continuación.

Un núcleo $K : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es un *núcleo de Toeplitz a valores operadores* cuando

$$K(n,m) = W(m-n) \qquad \text{para todo} \qquad n, m \in \mathbb{Z}$$

para alguna aplicación $W : \mathbb{Z} \to L(\mathcal{H})$.

En el caso de un núcleo de Toeplitz, la construcción que aparece en el Teorema 4.1 se enriquece y se obtiene el teorema clásico de Naimark [**7**] el cual es presentado a continuación.

Este teorema se demostrará a partir del Teorema 4.1 siguiendo el esquema que aparece en [**3**, Theorem 3.2].

Teorema 4.2 (Naimark)**.**

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea $K : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to L(\mathcal{H})$ un núcleo de Toeplitz definido positivo. Entonces existe un operador unitario S en $L(\mathcal{H}_K)$ y un operador Q en $L(\mathcal{H}, \mathcal{H}_K)$ tal que

(a) $K(n,m) = Q^* S^{m-n} Q$, $n, m \in \mathbb{Z}$.
(b) $\mathcal{H}_K = \bigvee_{n\in\mathbb{Z}} S^n Q\mathcal{H}$.
(c) *La descomposición es única en el siguiente sentido: si $\mathcal{H}'$ es un espacio de Hilbert tal que existen un operador unitario S' en $L(\mathcal{H}')$ y un operador Q' en $L(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ que satisfacen condiciones similares a las (a) y (b), entonces existe un operador unitario $\Phi : \mathcal{H}_K \to \mathcal{H}'$ tal que $\Phi Q h = Q' h$ para todo $h \in \mathcal{H}$ y $S'\Phi = \Phi S$.*

Además $Q = V(0)$ donde $V : \mathbb{Z} \to L(\mathcal{H}, \mathcal{H}_K)$ es la descomposición de Kolmogorov del núcleo K.

Demostración.

Por el Teorema 4.1, existe una aplicación $V : \mathbb{Z} \to L(\mathcal{H}, \mathcal{H}_K)$ tal que las siguientes afirmaciones son ciertas

(i) $K(n,m) = V^*(n)V(m)$, para todo $n, m \in \mathbb{Z}$
(ii) $\mathcal{H}_K = \bigvee_{n\in\mathbb{Z}} V(n)\mathcal{H}$.

Sea $\{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión en $\mathcal{H}$ con soporte finito

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} V(n+1)h_n \right\|^2_{\mathcal{H}_K} &= \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \langle V(m+1)h_m, V(n+1)h_n\rangle_{\mathcal{H}_K} \\
&= \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \langle V^*(n+1)V(m+1)h_m, h_n\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \langle K(n+1,m+1)h_m, h_n\rangle_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Análogamente

$$\left\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} V(n)h_n \right\|^2_{\mathcal{H}_K} = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \langle K(n,m)h_m, h_n\rangle_{\mathcal{H}}.$$

Dado que K es un núcleo de Toeplitz, se tiene que $K(n+1, m+1) = K(n, m)$ para $n, m \in \mathbb{Z}$. Luego,

$$\sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \langle K(n+1, m+1)h_m, h_n\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \langle K(n, m)h_m, h_n\rangle_{\mathcal{H}}.$$

Por lo tanto

$$\left\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} V(n+1)h_n \right\|_{\mathcal{H}_K}^2 = \left\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} V(n)h_n \right\|_{\mathcal{H}_K}^2 .$$

Luego, si para una sucesión a soporte finito $\{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{H}$ se define

$$S\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} V(n)h_n \right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} V(n+1)h_n,$$

se tiene que S es un operador lineal que está bien definido, que es isométrico y cuyo dominio y rango son variedades lineales densas en $\mathcal{H}_K$. Por lo tanto S se extiende a un operador unitario de $\mathcal{H}_K$ en $\mathcal{H}_K$, que se seguirá denotando por S.

De la definición de S, sigue que

$$SV(n) = V(n+1),$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Luego, para $n, m \in \mathbb{Z}$ y $m > n$, se cumple

$$S^{m-n}V(0) = V(m-n),$$

por lo tanto

$$K(n, m) = K(0, m-n) = V^*(0)V(m-n) = V^*(0)S^{m-n}V(0).$$

Tomando $Q = V(0)$, se tiene la prueba de (a).

La parte (b) sigue inmediatamente de (ii) y la definición de S.

La parte (c) se obtiene de la última parte del Teorema 4.1.

$\square$

Usualmente al operador S se le conoce como *dilatación de Naimark* o *shift* en $\mathcal{H}_K$.

Observación 4.3.

La primera parte de el resultado previo puede ser ilustrada por el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_K \arrow[r, "S^{m-n}"] & \mathcal{H}_K \arrow[d, "Q^*"] \\
\mathcal{H} \arrow[u, "Q"] \arrow[r, "K(n,m)"] & \mathcal{H}
\end{tikzcd}$$

Capítulo 5

Algunas resultados para núcleos definidos positivos a valores operadores

5.1. Núcleos definidos positivos equivalentes a valores operadores

En lo que sigue asumiremos que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert separable. En este capítulo se generalizan algunos de los resultados de los Capítulos 2 y 3 al contexto de núcleos a valores operadores.

Definición 5.1. Sean $K_1, K_2 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to L(\mathcal{H})$ dos núcleos definidos positivos.

Se dice que K_1 y K_2 son *equivalentes* si existen dos constantes A, B con $0 < A \leq B$ tales que

$$A\|[h]_{K_1}\|^2_{\mathcal{H}_{K_1}} \leq \|[h]_{K_2}\|^2_{\mathcal{H}_{K_2}} \leq B\|[h]_{K_1}\|^2_{\mathcal{H}_{K_1}}$$

para $h \in \mathcal{F}_o$.

Observación 5.2.

Sea $K : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to L(\mathcal{H})$ un núcleo definido positivo. Sean $h \in \mathcal{F}_o$ y $\{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión en $\mathcal{H}$ con soporte finito.

De la definición de la norma inducida por el núcleo K y el teorema de descomposición de Kolmogorov se tiene que

$$\begin{aligned}\|[h]\|^2_{\mathcal{H}_K} = \langle [h], [h] \rangle_{\mathcal{H}_K} &= \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \langle K(n,m)h_m, h_n \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \langle V_K(n)^* V_K(m)h_m, h_n \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \left\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} V_K(n)h_n \right\|^2_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

Usando el teorema de descomposición de Kolmogorov, se prueba siguiente resultado, que es análogo a la Proposición 2.2.

El siguiente es uno de nuestros resultados para núcleos a valores operadores.

Teorema 5.3.

Sean $K_1, K_2 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ dos núcleos definidos positivos. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) *Los núcleos K_1 y K_2 son equivalentes.*

(ii) *Existe una aplicación lineal acotada biyectiva, con inversa acotada,*

$$\Phi : \mathcal{H}_{K_1} \to \mathcal{H}_{K_2}$$

tal que

$$\Phi V_{K_1}(n) = V_{K_2}(n) \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

(iii) *Existen dos constantes A, B con $0 < A \leq B$ tales que*

$$A \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \langle K_1(n,m)h_m, h_n \rangle_{\mathcal{H}} \leq \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \langle K_2(n,m)h_m, h_n \rangle_{\mathcal{H}} \leq B \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \langle K_1(n,m)h_m, h_n \rangle_{\mathcal{H}},$$

para toda sucesión con soporte finito $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathcal{H}$.

Demostración.

Sean V_{K_1} y V_{K_2} las descomposiciones de Kolmogorov de los núcleos K_1, K_2 y sean $\mathcal{H}_{K_1}$, $\mathcal{H}_{K_2}$ los espacios de Hilbert asociados.

La Observación 5.2 permite escribir la condición (iii) de la siguiente manera. Existen dos constantes A y B con $0 < A \leq B$ tales que

$$A \|[h]_{K_1}\|^2_{\mathcal{H}_{K_1}} \leq \|[h]_{K_2}\|^2_{\mathcal{H}_{K_2}} \leq B \|[h]_{K_1}\|^2_{\mathcal{H}_{K_1}}$$

para $h \in \mathcal{F}_o$.

En consecuencia las condiciones (i) y (iii) son equivalentes.

Supóngase que la condición (ii) es cierta. Dado que Φ es un operador lineal acotado invertible, entonces existen dos constantes a_o, b_o con $0 < a_o \leq b_o$ tales que

$$a_o \|f\|_{\mathcal{H}_{K_1}} \leq \|\Phi(f)\|_{\mathcal{H}_{K_2}} \leq b_o \|f\|_{\mathcal{H}_{K_1}},$$

para todo $f \in \mathcal{H}_{K_1}$.

Sea $f \in \mathcal{H}_{K_1}$ dado por

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} V_{K_1}(n) h_n,$$

donde $\{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión en $\mathcal{H}$ con soporte finito.

Entonces

$$a_o^2 \left\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} V_{K_1}(n)h_n \right\|^2_{\mathcal{H}_{K_1}} \leq \left\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} V_{K_2}(n)h_n \right\|^2_{\mathcal{H}_{K_2}} \leq b_o^2 \left\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} V_{K_1}(n)h_n \right\|^2_{\mathcal{H}_{K_1}} .$$

Por otro lado dado que K_1 y K_2 son núcleos definidos positivos, del teorema de descomposición de Kolmogorov se tiene que

$$K_1(n,m) = V_{K_1}^*(n)V_{K_1}(m), \qquad m,n\in\mathbb{Z}$$

y

$$K_2(n,m) = V_{K_2}^*(n)V_{K_2}(m), \qquad m,n\in\mathbb{Z}.$$

Considerando estas expresiones se tiene que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} V_{K_1}(n)h_n \right\|^2_{\mathcal{H}_{K_1}} &= \left\langle \sum_{m\in\mathbb{Z}} V_{K_1}(m)h_m, \sum_{n\in\mathbb{Z}} V_{K_1}(n)h_n \right\rangle_{\mathcal{H}_{K_1}} \\ &= \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \langle V_{K_1}(n)^* V_{K_1}(m)h_m, h_n\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \langle K_1(n,m)h_m, h_n\rangle_{\mathcal{H}} , \end{aligned}$$

análogamente

$$\left\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} V_{K_2}(n)h_n \right\|^2_{\mathcal{H}_{K_2}} = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \langle K_2(n,m)h_m, h_n\rangle_{\mathcal{H}} .$$

Así, tomando $A = a_o^2$ y $B = b_o^2$ se tiene

$$A \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \langle K_1(n,m)h_m, h_n\rangle_{\mathcal{H}} \leq \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \langle K_2(n,m)h_m, h_n\rangle_{\mathcal{H}} \leq B \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \langle K_1(n,m)h_m, h_n\rangle_{\mathcal{H}}$$

donde $\{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión en $\mathcal{H}$ con soporte finito.

Supóngase que la condición (iii) se cumple.

Se define la aplicación $\Phi_o : \mathcal{F}_{o,K_1} \to \mathcal{F}_{o,K_2}$ como sigue

$$\Phi_o\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} V_{K_1}(n)h_n \right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} V_{K_2}(n)h_n,$$

donde $\{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión en $\mathcal{H}$ con soporte finito. Se prueba fácilmente que Φ_o es un operador lineal.

A continuación se probará que Φ_o es un operador acotado superior e inferiormente.

Por el teorema de descomposición de Kolmogorov, se obtiene

$$\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \langle K_2(n,m)h_m, h_n\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \langle V_{K_2}(n)^* V_{K_2}(m)h_m, h_n\rangle_{\mathcal{H}}\,.$$

Considerando esto y la manera como fue definido el operador Φ_o se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \langle K_2(n,m)h_m, h_n\rangle_{\mathcal{H}} &= \left\langle \sum_{m\in\mathbb{Z}} V_{K_2}(m)h_m, \sum_{n\in\mathbb{Z}} V_{K_2}(n)h_n \right\rangle_{\mathcal{H}_{K_2}} \\ &= \left\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} V_{K_2}(n)h_n \right\|^2_{\mathcal{H}_{K_2}} \\ &= \left\| \Phi_o\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} V_{K_1}(n)h_n\right) \right\|^2_{\mathcal{H}_{K_2}}\,.\end{aligned}$$

De manera similar sigue que

$$\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \langle K_1(n,m)h_m, h_n\rangle_{\mathcal{H}} = \left\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} V_{K_1} h_n \right\|^2_{\mathcal{H}_{K_1}}\,.$$

Por (iii)

$$A\left\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} V_{K_1}(n)h_n \right\|^2_{\mathcal{H}_{K_1}} \leq \left\| \Phi_o\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} V_{K_1}(n)h_n\right) \right\|^2_{\mathcal{H}_{K_2}} \leq B\left\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} V_{K_1}(n)h_n \right\|^2_{\mathcal{H}_{K_1}}\,. \tag{5.1}$$

Lo anterior muestra que Φ_o es un operador acotado superior e inferiormente. Además el dominio y el rango de Φ_o son densos en los espacios $\mathcal{H}_{K_1}$ y $\mathcal{H}_{K_2}$ respectivamente. Luego este operador puede extenderse a un operador acotado con inverso acotado $\Phi : \mathcal{H}_{K_1} \to \mathcal{H}_{K_2}$.

Por construcción

$$\Phi V_{K_1}(n) = V_{K_2}(n) \qquad \text{para todo} \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

□

El Teorema 5.3 tiene similitudes con resultados referentes a sucesiones básicas equivalentes en espacios de Banach, para más detalles sobre el tema (ver [**2, 6**]).

En el ambiente de los núcleos equivalentes, es posible dar una versión de un resultado que aparece en el libro de Young (ver[**13**], Teorema 10 página 38) referente a bases equivalentes.

Nuestro siguiente resultado es la versión a valores operadores de nuestro teorema de estabilidad (Teorema 3.1).

En primer lugar fijaremos la notación. Dados dos núcleos definidos positivos $K : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to L(\mathcal{H})$ y $K_1 : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to L(\mathcal{H})$, sean V_K y V_{K_1} las descomposiciones de Kolmogorov de K y de K_1 respectivamente y sean $\mathcal{H}_K$ y $\mathcal{H}_{K_1}$ los espacios de Hilbert asociados.

Teorema 5.4.

Sean $K : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to L(\mathcal{H})$ y $K_1 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to L(\mathcal{H})$ dos núcleos definidos positivos. Si $V_{K_1}(n) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_K)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y satisface

$$\left\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} (V_K(n) - V_{K_1}(n))h_n \right\|_{\mathcal{H}_K} \leq \lambda \left\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} V_K(n)h_n \right\|_{\mathcal{H}_K},$$

para cualquier sucesión con soporte finito $\{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{H}$, donde $\lambda \in (0,1)$, entonces K_1 es equivalente a K.

Demostración.

Definamos el operador $T : \mathcal{H}_K \to \mathcal{H}_K$ como sigue

$$T\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} V_K(n)h_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (V_K(n) - V_{K_1}(n))h_n,$$

con $\{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión en $\mathcal{H}$ con soporte finito, por la hipótesis T está bien definido y se tiene que T es un operador lineal.

De la definición del operador T y la hipótesis sigue que

$$\left\| T\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} V_K(n)h_n\right) \right\|^2_{\mathcal{H}_K} \leq \lambda^2 \left\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} V_K(n)h_n \right\|^2_{\mathcal{H}_K}.$$

Luego, T es un operador acotado y además

$$\|T\| \leq |\lambda| < 1.$$

Considérese el operador $I - T : \mathcal{H}_K \to \mathcal{H}_K$, donde como es usual $I : \mathcal{H}_K \to \mathcal{H}_K$ es el operador identidad. Dado que $\|T\| < 1$, por un resultado conocido de análisis funcional $I - T$ es un operador lineal acotado invertible.

Además

$$\begin{aligned}(I-T)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} V_K(n)h_n\right) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} V_K(n)h_n - T\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} V_K(n)h_n\right)\\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} V_K(n)h_n - \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}(V_K(n)-V_{K_1}(n))h_n\right)\\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} V_{K_1}(n)h_n.\end{aligned}$$

De lo anterior se sigue que existen constantes positivas m y M, con $m \leq M$ tales que

$$\begin{aligned} m\left\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} V_K(n)h_n\right\|_{\mathcal{H}_K} &\leq \left\|(I-T)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} V_K(n)h_n\right)\right\|_{\mathcal{H}_K}\\ &= \left\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} V_{K_1}(n)h_n\right\|_{\mathcal{H}_K}\\ &\leq M\left\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} V_K(n)h_n\right\|_{\mathcal{H}_K}.\end{aligned}$$

Por la Observación 5.2

$$\left\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} V_K(n)h_n\right\|^2_{\mathcal{H}_K} = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \langle K(n,m)h_m, h_n\rangle_{\mathcal{H}}.$$

Por hipótesis $V_{K_1}(n) \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H}_K)$ para todo $n\in\mathbb{Z}$, así que $V_{K_1}(n)h_n \in \mathcal{H}_K$. Luego

$$\begin{aligned}\sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \langle K_1(n,m)h_m, h_n\rangle_{\mathcal{H}} &= \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \langle V_{K_1}(n)^* V_{K_1}(m)h_m, h_n\rangle_{\mathcal{H}}\\ &= \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \langle V_{K_1}(m)h_m, V_{K_1}(n)h_n\rangle_{\mathcal{H}_K}\\ &= \left\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} V_{K_1}(n)h_n\right\|^2_{\mathcal{H}_K}.\end{aligned}$$

Reemplazando estas expresiones en las desigualdades se obtiene que existen constantes positivas A y B con $A \leq B$ tales que

$$A\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \langle K(n,m)h_m, h_n\rangle_{\mathcal{H}} \leq \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \langle K_1(n,m)h_m, h_n\rangle_{\mathcal{H}} \leq B\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \langle K(n,m)h_m, h_n\rangle_{\mathcal{H}}$$

para toda sucesión $\{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ en $\mathcal{H}$ con soporte finito.

Aplicando el Teorema 5.3 se sigue que K_1 es equivalente a K.

$\square$

5.2. Núcleos aproximadamente Toeplitz a valores operadores

Los siguientes corolarios también son resultados originales.

Definición 5.5. Sea $K : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to L(\mathcal{H})$ un núcleo definido positivo. Se dice que K es *aproximadamente Toeplitz* si existe un núcleo de Toeplitz definido positivo K_1 tal que K y K_1 son equivalentes.

Corolario 5.6.

Sea $K : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to L(\mathcal{H})$ un núcleo definido positivo. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) *El núcleo K es aproximadamente Toeplitz.*

(ii) *Existen un núcleo de Toeplitz definido positivo $K_1 : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to L(\mathcal{H})$ y dos constantes A y B con $0 < A \leq B$ tales que*

$$A\|[h]_{K_1}\|^2_{\mathcal{H}_{K_1}} \leq \|[h]_K\|^2_{\mathcal{H}_K} \leq B\|[h]_{K_1}\|^2_{\mathcal{H}_{K_1}}$$

para toda $h \in \mathcal{F}_o$.

(iii) *Existen un núcleo de Toeplitz definido positivo $K_1 : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to L(\mathcal{H})$ y una aplicación lineal acotada biyectiva, con inversa acotada,*

$$\Phi : \mathcal{H}_{K_1} \to \mathcal{H}_K$$

tales que

$$\Phi V_{K_1}(n) = V_K(n) \qquad \textit{para todo} \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

(iv) *Existen una sucesión definida positiva $W : \mathbb{Z} \to L(\mathcal{H})$ y dos constantes A, B con $0 < A \leq B$ tales que*

$$A \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \langle W(m-n)h_m, h_n\rangle_{\mathcal{H}} \leq \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \langle K(n,m)h_m, h_n\rangle_{\mathcal{H}} \leq B \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \langle W(m-n)h_m, h_n\rangle_{\mathcal{H}}\,,$$

donde $\{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión en $\mathcal{H}$ con soporte finito.

El resultado se obtiene directamente del Teorema 5.3.

A continuación se darán condiciones para que un núcleo sea aproximadamente Toeplitz.

Sea $K : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to L(\mathcal{H})$ un núcleo hermitiano definido positivo, supongamos K bastante cercano, en algún sentido, a un núcleo K_1 hermitiano Toeplitz definido positivo.

¿Bajo qué condiciones K es aproximadamente Toeplitz?

La respuesta a la pregunta anterior la suministra el Corolario 5.7, sin embargo fijaremos antes la notación.

Sea $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert de dimensión infinita y separable, sean $K : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ y $K_1 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ dos núcleos definidos positivos, $\mathcal{H}_K$ y $\mathcal{H}_{K_1}$ los espacios de Hilbert asociados y sean V_K y V_{K_1} las descomposiciones de Kolmogorov de K y K_1 respectivamente. Supongamos que K_1 es un núcleo de Toeplitz dado por $K_1(n,m) = W(m-n)$ para alguna sucesión de operadores $W : \mathbb{Z} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Corolario 5.7.

Si $V_K(n) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_{K_1})$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y existe $\lambda \in (0,1)$ tal que

$$\left\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} (V_{K_1}(n) - V_K(n))h_n \right\|^2_{\mathcal{H}_{K_1}} \leq \lambda^2 \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \langle W(m-n)h_m, h_n \rangle_{\mathcal{H}},$$

para cualquier sucesión $\{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ en $\mathcal{H}$ con soporte finito, entonces K es aproximadamente Toeplitz.

El resultado se obtiene directamente del Teorema 5.4.

Bibliografía

[1] R. Bruzual, A. De la Barrera, M. Domínguez. *On positive definite kernels, related problems and applications*. Extracta Mathematicae, Vol. 29, N. 1-2, (2014), 97-115. Citado en página(s): 2

[2] N. L. Carothers. *A Short course on Banach Space Theory*. Cambridge University Press, 2005. Citado en página(s): 6, 37

[3] T. Constantinescu. *Schur Parameters, Factorization and Dilation Problems* (1st ednt.), Birkhäuser Verlag, 1996. Citado en página(s): 29, 30, 31

[4] D. E. Evans, J. T. Lewis. *Dilations of Irreversible Evolutions in Algebraic Quantum Theory*, Communications of the Dublin Institute of Advanced Studies, Series A (Theoretical Physics), 1977. Citado en página(s): 29

[5] I. I. Gihman, A. V. Skorokhod. *The theory of stochastic processes. I.* Translated from the Russian by S. Kotz. Springer-Verlag. VIII, 1974. Citado en página(s): 1, 2, 24

[6] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri. *Classical Banach Spaces I.* Springer Verlag, 1977. Citado en página(s): 6, 37

[7] M. A. Naimark. *Self-adjonnt extensions of the second kind of a symmetric operator*, Bulletnn Acad. Scn. URSS (Ser. Math.), 4 (1940), pp. 53-104. Citado en página(s): 30

[8] R. Paley, N. Wiener. *Fourier transforms in the complex domain*. Am. Math. Soc. Colloq. Publ. 19, New York: Am. Math. Soc. VIII, 1934. Citado en página(s): 1, 7, 17

[9] G. Strandell. *Stationary in Hilbert spaces*, U.U.D.M. Report 2001:31, ISSN 1101-3591, http://www2.math.uu.se/research/pub/Strandell1.pdf, Publications of the Department of Mathematics, Uppsala University, (2001), pp. 13 - 32. Citado en página(s): 2, 17, 20, 24, 25, 26

[10] B. Sz.-Nagy, C. Foias. *Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space*, North Holland Publishing Co., 1970. Citado en página(s): 1, 9, 13

[11] H. O. A. Wold. *A study in the analysis of stationary time series*. With an appendix by Peter Whittle. 2nd ed. Stockholm: Almqvist & Wiksell VIII, 1954. Citado en página(s): 1

[12] H. O. A. Wold. *A large sample test for moving averages. J. R. Stat. Soc., Ser. B 11*, (1949), 297-305. Citado en página(s): 1

[13] R. M. Young. *An introduction to Nonharmonic Fourier Series*, Academic Press, New York, 1980. Citado en página(s): 6, 7, 17, 18, 19, 21, 37