UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
POSTGRADO EN MATEMÁTICA

NÚCLEOS APROXIMADAMENTE TOEPLITZ

Autor: MSc. en Educación Arnaldo de la Barrera Correa
Tutor: Dra. Marisela Domínguez.

Trabajo de Grado de Maestría presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela para optar al título de Magister Scientiarium, Mención Matemática.

Caracas, Venezuela
Marzo de 2009

Dedicatoria

Dedico este trabajo a la memoria de mi señora madre Rafaela Correa, a mi esposa Jenny, y a mi hijo Cristian quienes han tenido paciencia durante el tiempo que le he dedicado a la obtención de este nuevo logro, tiempo que les pertenecía.

Agradecimientos

Agradezco a todos mis profesores de la Universidad Central de Venezuela, porque me aportaron sus valiosos conocimientos, los cuales hicieron posible alcanzar este nuevo logro, en especial agradezco a mi tutora, Doctora Marisela Domínguez quien en forma desinteresada me animó para que continuara con mi proyecto de formación.

A la Universidad de Pamplona por su apoyo en la primera fase del proceso.

A Jei Andrés por su colaboración en el aspecto tecnológico.

Gracias al Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico de la Universidad Central de Venezuela por su colaboración en la edición de este trabajo.

Caracas, 2009.

Resumen

En este trabajo se define un nuevo tipo de núcleo denominado, núcleo aproximadamente Toeplitz, de manera muy similar a como se define una base de Riesz. Se prueba que todo núcleo de Toeplitz es aproximadamente Toeplitz, además se dan condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales dos núcleos aproximadamente Toeplitz resultan ser equivalentes.

Un caso particular de núcleos aproximadamente Toeplitz, se obtiene considerando las covarianzas de procesos estocásticos aproximadamente estacionarios, los cuales fueron introducidos por Strandell.

Finalmente, para núcleos aproximadamente Toeplitz se da un resultado similar al teorema de Paley-Wiener referente a bases de Riesz.

Índice general

Introducción

El objetivo fundamental de este trabajo es definir y dar algunas propiedades de un nuevo tipo de núcleo, al que hemos llamado aproximadamente Toeplitz.

Con el propósito de poder dar esta definición, en el Capítulo 1 se presentan las bases de Schauder, las sucesiones de Bessel y las bases de Riesz. Adicionalemente damos el teorema de Paley-Wiener [**16**] referente a la estabilidad de bases en espacios de Banach.

El Capítulo 2 es una introducción a las sucesiones totales en espacios de Hilbert, en el que presentamos nuevos resultados que generalizan algunos resultados dados por Strandell [**20**] en un contexto probabilístico.

El Capítulo 3 está dedicado a los núcleos definidos positivos y los núcleos de Toeplitz. Las definiciones y los resultados de este capítulo son bien conocidos y son usados en el capítulo siguiente.

En el Capítulo 4, se logra dar la definición de núcleos aproximadamente Toeplitz de manera muy similar a como se define una base de Riesz (ver libro de Young [**21**]). Un caso particular de núcleos aproximadamente Toeplitz, se obtiene considerando las covarianzas de procesos estocásticos aproximadamente estacionarios, los cuales fueron introducidos por Strandell [**20**]. En este trabajo de grado se prueba que todo núcleo de Toeplitz es aproximadamente Toeplitz, además se dan condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales dos núcleos aproximadamente Toeplitz resultan ser equivalentes, en algún sentido. Finalmente para núcleos aproximadamente Toeplitz se da un resultado similar al teorema de Paley-Wiener referente a bases de Riesz.

CAPíTULO 1

Sucesiones de Bessel y Bases de Riesz

1. Bases de Schauder

Definición 1.1. Sea $(X, \| \quad \|)$ un espacio de Banach. Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X es una *base de Schauder* de X si para cada vector $x \in X$ existe una única sucesión de escalares $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n \quad \text{en } \| \quad \|.$$

Un espacio X con una base de Schauder $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puede ser considerado como un espacio de sucesiones identificando cada $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n$ con la única sucesión de coeficientes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Es importante notar que para describir una base de Schauder hay que definir los vectores de la base no sólo como un conjunto, sino que como una sucesión ordenada.

Definición 1.2. Sea X espacio de Banach y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica si es base de Schauder para $\overline{span}(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Teorema 1.3 (Banach). *Todo espacio de Banach de dimensión infinita contiene una sucesión básica.*

Una demostración de este resultado puede verse en [**13**, teorema 1.a.5].

2. Biortogonalidad en espacios de Banach

Sea X un espacio normado con cuerpo de escalares $\mathbb{F}$ (donde $\mathbb{F}$ representa a $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). Consideremos su espacio dual topológico:

$$X^* = \{f : X \to \mathbb{F} \text{ tales que } f \text{ funcional lineal acotado}\}.$$

DEFINICIÓN 1.4. Sea $(x_n)_n$ una sucesión de elementos en un espacio de Banach X y sea $(f_n)_n$ una sucesión en el espacio dual X^*. El sistema $\{x_n, f_m\}_{n,m}$ $(n, m = 1, 2, ...)$ se dice que es un *sistema bi-ortogonal* cuando

$$f_m(x_n) = \begin{cases} 1 & \text{para } m = n \\ 0 & \text{para } m \neq n \end{cases} \tag{1.1}$$

OBSERVACIÓN 1.5. Sean X espacio de Banach, $(x_n)_n$ una base de Schauder para X, $x_n^* \in X^*$. Si $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$, para una sucesión de escalares $(a_n)_n$, entonces

$$x_n^*(x) = x_n^*\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j\right) = a_n \tag{1.2}$$

y $x_n^*(x_m) = \delta_{nm}$ porque $x_n = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{jn} x_j$.

El sistema $\{x_n, x_m^*\}_{n,m}$ es biortogonal.

En algunas ocasiones se dice que $(x_n^*)_n$ es biortogonal a $(x_n)_n$. En este caso $(x_n^*)_n$ resulta ser base para el espacio dual X^*, al funcional lineal x_n^* se le denomina *funcional lineal coordenado.*

DEFINICIÓN 1.6. Sean X un espacio de Banach y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$. Se dice que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *completa* o *total* cuando $\overline{span}\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = X$.

DEFINICIÓN 1.7. Sean X un espacio de Banach y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$. Se dice que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *mínima* cuando $x_j \notin \overline{span}\{x_i\}_{i\neq j}$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

EJEMPLO 1.8. Sea $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal para un espacio de Hilbert H de dimensión infinita y separable. Sea

$$g_n = e_n + e_{n+1}.$$

Entonces $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es mínima y completa.

TEOREMA 1.9. *Sean X espacio de Banach y $\{x_n\}_n$ una sucesión de elementos en X. La sucesión $\{x_n\}_n$ es mínima si y sólo si existe una sucesión $\{f_m\}_m \subset X^*$ tal que $\{x_n, f_m\}_{n,m}$ es biortogonal.*

La demostración puede verse en [**11**].

En el caso de espacios de Hilbert la bi-ortogonalidad se define usando el producto interno en lugar de los funcionales lineales.

Definición 1.10. Sean H un espacio de Hilbert y $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{y_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq H$. Se dice que $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es *bi-ortogonal* a $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ cuando

$$\langle x_i, y_j\rangle = \delta_{i,j}$$

para todo $i, j \in \mathbb{N}$. A la sucesión de pares $\{(x_i, y_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ se le llama *sistema bi-ortogonal.*

3. Sucesiones Equivalentes

En esta sección estudiaremos las sucesiones equivalentes en espacios de Banach, éstas jugarán un papel importante en el desarrollo de las ideas del capítulo siguiente.

Definición 1.11. Sean X, Y espacios de Banach, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sucesiones básicas en X, Y respectivamente (con la posibilidad de que los espacios sean diferentes). Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son equivalentes si:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i \tag{1.3}$$

convergen o divergen juntas, para toda sucesión de escalares $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposición 1.12. *Sean X, Y espacios de Banach, dadas dos sucesiones básicas $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$. Se tiene que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es equivalente a $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si y sólo si existe una constante c, con $0 < c < \infty$, tal que*

$$c^{-1}\left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i\right\|_Y \le \left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right\|_X \le c\left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i\right\|_Y \tag{1.4}$$

para toda sucesión de escalares $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Es decir, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones equivalentes si y sólo si la aplicación $\psi : span\{x_n\} \to span\{y_n\}$, dada por $\psi(x_n) = y_n$, es un isomorfismo.

En este caso se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son *c-equivalentes.*

La demostración del resultado anterior puede verse en [**3**].

Dada una base de Schauder $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para un espacio de Banach X, se definirá la n-ésima proyección. Se consideran los funcionales coordenados $x_n^* : X \to \mathbb{F}$ dados por

$$x_n^*(x) = a_n$$

donde $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$. Y se define la *$n$-ésima proyección* $P_n : X \to span(x_n)$ por

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^*(x) x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

TEOREMA 1.13. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder para un espacio de Banach X, entonces P_n y x_n^* son continuos. Además*

$$k = \sup_n \|P_n\| < \infty.$$

La demostración puede verse en [**3**].

El número k que aparece en el resultado anterior recibe el nombre de *constante base* de la base $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una *sucesión básica con constante* k.

Una *base monótona* es una base con constante base igual a 1.

Sea

$$e^n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) \tag{1.5}$$

donde 1 se encuentra en el n-ésimo lugar.

EJEMPLO 1.14. Si $1 \le p < \infty$ entonces $\{e^n\}_{n\ge 1}$ es una base de Schauder de l_p, conocida como la *base canónica*. Ésta es una base monótona para l_p.

TEOREMA 1.15. *Una sucesión $(x_n)_n$ de vectores, tal que $x_n \neq 0$ para todo n, es una base de Schauder para el espacio de Banach X, si y sólo si*

(i) *$(x_n)_n$ tiene span lineal denso en X, esto es, $\overline{span}\{x_n\} = X$.*
(ii) *Existe una constante k tal que*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \le k \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\| \tag{1.6}$$

para toda sucesión finita de escalares $(a_i)_{i=1}^m$ y para todo $n < m$.

Así, $(x_n)_n$ es una sucesión básica si y sólo si (ii) es verdadero.

La demostración puede verse en [**3**].

Observación 1.16.

(a) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica para cierto espacio de Banach X, y si encontramos alguna sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que satisface

$$c^{-1}\left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i\right\|_Y \leq \left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right\|_X \leq c\left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i\right\|_Y$$

entonces $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también es una sucesión básica equivalente a $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica con constante k, y si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisface la desigualdad anterior, entonces $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene base constante a lo sumo c^2k.

En efecto, de acuerdo a la desigualdad anterior, se tiene que

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i y_i\right\|_Y \leq c\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\|_X \leq ck\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\|_X \leq c^2k\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i y_i\right\|_Y \tag{1.7}$$

con $m \geq n$ y $c, k > 0$

Ejemplo 1.17.

(1) Una sucesión básica $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para un espacio de Banach X es equivalente a la base usual para lp si y sólo si

$$c^{-1}\left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right\|_X \leq c\left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.8}$$

para alguna constante $c > 0$ y para cualquier sucesión de escalares $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(2) Cualquier base ortonormal en un espacio de Hilbert H separable es 1-equivalente $(c = 1)$ a la base canónica de l_2.

Dado un subespacio cerrado M de un espacio normado X, se dice que M es *complementado* en X si existe otro subespacio cerrado N tal que

$$X = M \oplus N.$$

Equivalentemente, M es complementado en X si M es el rango de una proyección lineal continua P sobre X.

Teorema 1.18 (El principio de perturbación pequeña). *Sea $(x_n)_n$ una sucesión básica normalizada en un espacio de Banach X con una constante base k, y suponga que $(y_n)_n \subset X$*

con

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| = \delta \tag{1.9}$$

(i) *Si* $2k\delta < 1$, *entonces* $(y_n)_n$ *es una sucesión básica equivalente a* $(x_n)_n$.

(ii) *Si* $span\{x_n\}_n$ *es complementado por una proyección acotada* $P : X \to X$ *y si*

$$8k\delta\|P\| < 1$$

entonces $span\{y_n\}_n$ *es también complementado en* X.

La demostración puede verse en [**3**].

DEFINICIÓN 1.19. Sea H espacio vectorial y sean $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_1$, dos normas sobre H. Se dice que $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_1$ son *normas equivalentes* cuando existen $m, M > 0$, $M \geq m$ tales que

$$m\|x\| \leq \|x\|_1 \leq M\|x\|$$

para todo $x \in H$. Esto se denota con $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_1$.

DEFINICIÓN 1.20. Sea H espacio vectorial, sean $\langle ., . \rangle$, $\langle ., . \rangle_1$, dos productos internos sobre H. Se dice que $\langle ., . \rangle$ y $\langle ., . \rangle_1$ son *productos internos equivalentes* cuando ellos generan normas equivalentes.

4. Sucesiones de Bessel

DEFINICIÓN 1.21. Sea H un espacio de Hilbert de dimensión infinita y separable. Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ se llama *sucesión de Bessel* si

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle h, x_n \rangle|^2 < +\infty$$

para todo $h \in H$.

OBSERVACIÓN 1.22. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Bessel, entonces la serie

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n$$

es convergente para $a = \{a_n\}_n \in l^2(\mathbb{N})$ y existe una constante $B > 0$ tal que

$$\left\| \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n \right\|^2 \leq B \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2$$

para todo $a \in l^2(\mathbb{N})$.

La constante B recibe el nombre de *cota de Bessel* para la sucesión y viene dada por

$$B = \sup\left\{\left\|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n\right\|^2 : \|a\|_{l^2(\mathbb{N})} = 1\right\} \tag{1.10}$$

La desigualdad de Cauchy Schwartz establece que si X es un espacio vectorial con producto interior, entonces

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\| \tag{1.11}$$

para todo $x, y \in X$. Además la igualdad $|\langle x, y\rangle| = \|x\|\|y\|$ es cierta si y sólo si x, y son linealmente dependientes. En particular, $|\langle x, x\rangle| = \|x\|^2$ para todo $x \in X$.

PROPOSICIÓN 1.23. *Sea H espacio de Hilbert, $\{x_n\} \subseteq H$ sucesión. Si $\{x_n\}$ es una sucesión de Bessel, entonces existe una constante B tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle h, x_n\rangle|^2 \leq B\|h\|^2 \tag{1.12}$$

para todo $h \in H$.

La prueba se puede ver en [**21**].

PROPOSICIÓN 1.24. *Sea H espacio de Hilbert y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ una sucesión. Entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Bessel con cota B si y sólo si la desigualdad*

$$\left\|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n\right\|^2 \leq B\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2$$

se cumple para todo $a = \{a_n\} \in l^2(\mathbb{N})$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de Bessel y $a = \{a_n\} \in l^2(\mathbb{N})$. Se tiene que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle h, x_n\rangle|^2 < +\infty$$

para todo $h \in H$.

Sea

$$h_o = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n \in H.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz, se tiene que

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{a_n}\left\langle h_o, x_n\right\rangle\right|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |\overline{a_n}\langle h_0, x_n\rangle|^2 \leq \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |\overline{a_n}|^2\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle h_o, x_n\rangle|^2\right).$$

Entonces

$$\begin{aligned} |\langle h_o, h_o\rangle|^2 &= \left|\left\langle h_o, \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n\right\rangle\right|^2 = \left|\sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{a_n}\left\langle h_o, x_n\right\rangle\right|^2 \\ &\leq \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |\overline{a_n}|^2\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle h_o, x_n\rangle|^2\right) = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle h_o, x_n\rangle|^2\right). \end{aligned}$$

Usando el caso en que la desigualdad de Cauchy-Schwartz es una igualdad, usando que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$ y que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Bessel se obtiene

$$|\langle h_o, h_o\rangle|^2 = \|h_0\|^4 = \left\|\sum_n a_n x_n\right\|^4 \leq \left(\sum_n |a_n|^2\right)\left(\sum_n |\langle h_o, x_n\rangle|^2\right) < +\infty$$

Por otra parte por 1.23 se tiene que existe $B > 0$ tal que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle h_o, x_n\rangle|^2 \leq B\|h_o\|^2.$$

Luego,

$$|\langle h_o, h_o\rangle|^2 = \left\|\sum_n a_n x_n\right\|^4 \leq B\|h_0\|^2\left(\sum_n |a_n|^2\right) = B\left\|\sum_n a_n x_n\right\|^2\left(\sum_n |a_n|^2\right),$$

esto implica

$$\left\|\sum_n a_n x_n\right\|^2 \leq B\left(\sum_n |a_n|^2\right),$$

donde $B = \sup\left\{\|\sum_n a_n x_n\|^2 : \|a\|_{l^2(\mathbb{N})} = 1\right\}$.

Para el recíproco tenemos H espacio de Hilbert, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ una sucesión y se cumple

$$\left\|\sum_n a_n x_n\right\|^2 \leq B\left(\sum_n |a_n|^2\right),$$

para toda sucesión de escalares $a = \{a_n\} \in l^2(\mathbb{N})$. Sea

$$h_o = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n \in H.$$

Por Cauchy Schwartz tenemos

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{N}}\overline{a_n}\,\langle h_o,x_n\rangle\right|^2\leq\left|\left\langle h_0,\sum_{n\in\mathbb{N}}a_nx_n\right\rangle\right|^2\leq\|h_0\|^2\left\|\sum_n a_nx_n\right\|^2$$

luego

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{N}}\overline{a_n}\,\langle h_o,x_n\rangle\right|^2\leq\|h_0\|^2\,B\left(\sum_n|a_n|^2\right)$$

por lo tanto

$$\left(\sum_n|a_n|^2\right)\left(\sum_n|\langle h_o,x_n\rangle|^2\right)\leq\|h_0\|^2\,B\left(\sum_n|a_n|^2\right)$$

de lo cual se tiene

$$\left(\sum_n|\langle h_o,x_n\rangle|^2\right)\leq B\,\|h_0\|^2<+\infty$$

y así $\{x_n\}$ es una sucesión de Bessel con cota B □

Ejemplo 1.25. Sea $t\in[0,1]$, sea $g_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ dada por $g_n(t)=t^n$. La sucesión $\{g_0,g_1,g_2,...\}$ forma una sucesión de Bessel en $L^2[0,1]$.

En efecto. Sean $f\in L^2([0,1])$ y

$$c_n=\int_0^1 t^nf(t)dt=\langle f,g_n\rangle$$

donde $n\geq 0$.

Entonces

$$|c_n|^2=\left|\int_0^1 t^nf(t)dt\right|^2=|\,\langle f,g_n\rangle\,|^2.$$

Luego

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2\right)^2 &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}|\langle f,g_n\rangle|^2\right)^2\leq\left(\sum_{n=0}^{\infty}\|f\|_2^2\|g_n\|_2^2\right)^2\\ &= \|f\|_2^4\left(\sum_{n=0}^{\infty}\|g_n\|_2^2\right)^2=\|f\|_2^4\left(\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 t^{2n}dt\right)^2\\ &= \|f\|_2^4\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\right)^2\leq\|f\|_2^4\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2\\ &\leq \|f\|_2^4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\|f\|_2^4\frac{\pi^2}{6}\\ &\leq \|f\|_2^4\pi^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \leq \pi \|f\|_2^2 = \pi \int_0^1 |f(t)|^2 dt < +\infty$$

para toda $f \in L^2[0,1]$.

Esto es

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} |\langle f, g_n \rangle|^2 \right) < +\infty$$

para toda $f \in L^2[0,1]$ y así la sucesión $\{g_0, g_1, g_2, ...\}$ forma una sucesión de Bessel en $L^2[0,1]$.

Ahora calculemos la cota de Bessel, B, para esta sucesión. Sea $a_n \geq 0$ para $n = 0, 1, ...$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=0}^{\infty} c_n g_n \right\|_2^2 &= \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} c_n g_n, \sum_{m=0}^{\infty} c_m g_m \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_n \overline{c_m} \langle g_n, g_m \rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_n \overline{c_m} \int_0^1 t^n t^m dt = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_n \overline{c}_m}{m+n+1} \leq \pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2
\end{aligned}$$

Donde se ha utilizado la desigualdad de Hilbert (ver [**21**]).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_n \overline{c_m}}{m+n+1} \leq \pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \tag{1.13}$$

si $a_n \geq 0$ para $n \geq 0$.

Luego

$$B = \sup \left\{ \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x_n \right\|^2 : \|a\|_{l^2(\mathbb{N})} = 1 \right\} = \pi.$$

5. Bases de Riesz

Definición 1.26. Sea H espacio de Hilbert de dimensión infinita y separable. Una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq H$ es una *base de Riesz* para H si

a) $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es total en H, esto es $H = \overline{span}\{x_n\}_n$ o equivalentemente, el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es denso en H, es decir, para todo $h \in H$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe $c_1, c_2, ..., c_s \in \mathbb{C}$ y $n_1, n_2, ..., n_s \in \mathbb{N}$ tales que

$$\left\| h - \sum_{i=1}^{s} c_i x_{n_i} \right\| < \varepsilon. \tag{1.14}$$

b) Existen constantes $A, B > 0$, $A \leq B$ tales que

$$A\sum_{n\in\mathbb{N}}|a_n|^2 \leq \left\|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n\right\|^2 \leq B\sum_{n\in\mathbb{N}}|a_n|^2 \tag{1.15}$$

con $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$.

Proposición 1.27. *Sea H un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en H. Las siguientes afirmaciones son equivalentes,*

(i) *$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Riesz para H.*

(ii) *Existe un operador lineal, acotado e invertible $\psi : H \to H$ y una base ortonormal $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para H tal que*

$$\psi(e_n) = x_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

(iii) *Existe un producto interior $\langle .,. \rangle_1$ sobre el espacio lineal H, equivalente al producto interior sobre H tal que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal para $(H, \langle .,. \rangle_1)$.*

Demostración.

(i)$\Rightarrow$(ii)

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de Riesz para H, entonces se tiene que

(a) X es total en H.

(b) Existen constantes $A, B > 0$, $B \geq A$ tales que

$$A\sum_{n\in\mathbb{N}}|a_n|^2 \leq \left\|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n\right\|^2 \leq B\sum_{n\in\mathbb{N}}|a_n|^2$$

para todo $a = \{a_n\} \in l^2(\mathbb{N})$.

Por otra parte tenemos que todo espacio de Hilbert separable tiene una base ortonormal. Sea $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal para H, entonces

$$\begin{aligned} A\left\|\sum_n a_n e_n\right\|^2 &= A\left\langle \sum_m a_m e_m, \sum_n a_n e_n \right\rangle \\ &= A\sum_m\sum_n a_m\overline{a_n}\langle e_m, e_n\rangle = A\sum_m |a_m|^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$A\sum_n |a_n|^2 \le \left\| \sum_n a_n x_n \right\|^2 \le B \sum_n |a_n|^2.$$

Sea $C = \text{máx}\{B, 1/A\}$. Entonces

$$\frac{1}{C}\sum_n |a_n|^2 \le \left\| \sum_n a_n x_n \right\|^2 \le C \sum_n |a_n|^2.$$

De lo anterior se tiene que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son bases equivalentes.

Sea $T : H \to H$ el operador dado por

$$T\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n$$

donde $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de escalares.

A continuación se probará que

(a) T es lineal.

(b) T es inyectiva.

(c) T es sobreyectiva.

(d) $Te_n = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(e) T es acotado e invertible.

Veámoslo.

(a) Sean $x, y \in H$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Si

$$x = \sum_n \langle x, e_n\rangle e_n, \qquad y = \sum_n \langle y, e_n\rangle e_n$$

entonces

$$\begin{aligned} T(\lambda x + y) &= \sum_n (\lambda\langle x, e_n\rangle + \langle y, e_n\rangle)e_n \\ &= \sum_n \lambda\langle x, e_n\rangle e_n + \sum_n \langle y, e_n\rangle e_n = \lambda T(x) + T(y) \end{aligned}$$

por lo tanto T es lineal.

(b) Sean $x', y' \in H$, dados por

$$x' = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e_n, \qquad y' = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n e_n$$

donde $\{a_n\}_n, \{b_n\}_n$ son sucesiones de escalares.

Si $T(x') = T(y')$ entonces

$$\sum_n a_n x_n = \sum_n b_n x_n.$$

Luego

$$\sum_n (a_n - b_n) x_n = 0$$

por lo tanto $a_n = b_n$ para todo n. Luego $x' = y'$.

Por lo tanto T es inyectiva.

(c) Dado $z \in H$ existe $(a_n)_n$ tal que

$$z = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x_n.$$

Sea

$$x = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n e_n.$$

Entonces existe $x \in H$ y $T(x) = z$, de lo cual se tiene que T es sobreyectiva.

De (a), (b) y (c) se concluye que T es un operador lineal biyectivo.

(d) Dado k, usando la delta de Dirac y la definición de T se obtiene:

$$T(e_k) = T\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \delta_{ik} e_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \delta_{ik} x_i = x_k.$$

(e) Para probar que T es un operador acotado definamos

$$T_n\left(\sum_{i=-n}^{n} a_i e_i\right) = \sum_{i=-n}^{n} a_i x_i.$$

Dado k, usando la delta de Dirac y la definición de T_n se obtiene:

$$T_n(e_k) = T_n\left(\sum_{i=-n}^{n} \delta_{ik} e_i\right) = \sum_{i=-n}^{n} \delta_{ik} x_i = \begin{cases} x_k & \text{para } -n \le k \le n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces

$$T(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n T(e_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x_n = \lim_{n \to \infty} T_n(x)$$

para todo $x \in H$.

Por otra parte, se tiene que

$$\|T_n(x)\|^2 = \left\| \sum_{i=-n}^{n} a_i x_i \right\|^2 \le B \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2 = B\|x\|^2$$

donde

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e_n.$$

Por lo tanto

$$\|T_n(x)\| \le \sqrt{B}\|x\|$$

y así T_n es un operador acotado y además

$$\|T(x)\|^2 = \left\| \lim_{n\to\infty} T_n(x) \right\|^2 \le B\|x\|,$$

luego T es acotado, de donde se tiene que T es continuo.

De (c) y (e) se tiene que T es un operador biyectivo y continuo. Por un corolario del teorema de la aplicación abierta T^{-1} existe y también es continuo. Entonces T^{-1} es acotado, luego tomando $\psi = T$ se tiene garantizada la existencia del operador $\psi : H \to H$ con

$$\psi(e_n) = x_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

(ii)⇒(iii)

Por hipótesis existe un operador lineal acotado e invertible $\psi : H \to H$ y una base ortonormal ortonormal $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para H tal que

$$\psi(e_n) = x_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo anterior existe ψ^{-1} acotado e invertible. Sea

$$\Phi = \psi^{-1}.$$

Entonces

$$\Phi(x_n) = e_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definamos un nuevo producto interior $\langle x, y\rangle_1$ sobre H de la siguiente forma

$$\langle x, y\rangle_1 = \langle \Phi x, \Phi y\rangle .$$

Sea $\|\cdot\|_1$ la norma inducida por este nuevo producto, entonces

$$\langle x, x\rangle_1 = \|x\|_1^2 = \langle \Phi x, \Phi x\rangle = \|\Phi x\|^2.$$

De esto se deduce que

$$\langle \Phi^{-1}x, \Phi^{-1}x\rangle_1 = \langle x, x\rangle.$$

Por lo tanto

$$\left\|\Phi^{-1}x\right\|_1^2 = \|x\|^2.$$

Como Φ es acotado

$$\|x\|_1 = \|\Phi x\| \leq \|\Phi\|\|x\|. \tag{1.16}$$

Como Φ^{-1} es acotado

$$\|x\| = \left\|\Phi^{-1}x\right\|_1 \leq \left\|\Phi^{-1}\right\| \|x\|_1.$$

Luego

$$\frac{\|x\|}{\|\Phi^{-1}\|} \leq \|x\|_1 \tag{1.17}$$

De (1.16) y (1.17) tenemos que

$$\frac{\|x\|}{\|\Phi^{-1}\|} \leq \|x\|_1 \leq \|\Phi\|\|x\|.$$

Tomando $m = \frac{1}{\|\Phi^{-1}\|}$ y $M = \|\Phi\|$, se sigue que

$$m\|x\| \leq \|x\|_1 \leq M\|x\|.$$

Y así $\|\cdot\|_1$ es equivalente a $\|\cdot\|$.

Por otra parte tenemos que de acuerdo como hemos definido el nuevo producto interior se tiene

$$\langle x_i, x_j\rangle_1 = \langle \Phi x_i, \Phi x_j\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$$

y así $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal bajo este producto.

(iii)$\Rightarrow$(i)

Por hipótesis tenemos que dado el producto interior $\langle .,. \rangle$ sobre H y $\{x_n\} \subseteq H$ existe un producto interior $\langle .,. \rangle_1$ sobre H equivalente a $\langle .,. \rangle$ y además $\langle x_n, x_m\rangle_1 = \delta_{n,m}$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$.

Sea $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal para H bajo el producto interior $\langle .,. \rangle$ y definamos el operador $\psi : span\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to H$ mediante

$$\psi\left(\sum_{n=0}^{N} a_n x_n\right) = \sum_{n=0}^{N} a_n e_n$$

con $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$.

Es claro que ψ es lineal, sea $x \in span\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, entonces

$$\|x\|_1^2 = \left\|\sum_{n=0}^{N} a_n x_n\right\|_1^2 = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N} a_n\overline{a_m}\langle x_n, x_m\rangle_1 = \sum_{n=0}^{N} |a_n|^2.$$

Por otra parte tenemos

$$\sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N} a_n\overline{a_m}\langle e_n, e_m\rangle = \left\|\sum_{n=0}^{N} a_n e_n\right\|^2 = \|\psi(x)\|^2$$

luego

$$\|x\|_1 = \|\psi(x)\| \tag{1.18}$$

para todo $x \in span\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Por hipótesis $\langle ., .\rangle$ es equivalente a $\langle ., .\rangle_1$. Luego $\|\cdot\|_1$ es equivalente a $\|\cdot\|$. De donde existen constantes $m, M > 0$ tales que

$$m\|x\| \leq \|x\|_1 \leq M\|x\| \tag{1.19}$$

para todo $x \in H$. De la desigualdad anterior y de (1.18) se tiene que

$$m\|x\| \leq \|\psi(x)\| \leq M\|x\|$$

para todo $x \in span\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Luego ψ es un operador lineal acotado superior e inferiormente. Entonces ψ puede ser extendido por continuidad a un operador $\tilde{\psi}$ definido en $\overline{span}\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Tenemos que $\tilde{\psi} : H \to H$ dada por

$$\tilde{\psi}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e_n.$$

Si $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n$ se tiene que

$$\|x\|_1^2 = \left\|\tilde{\psi}(x)\right\|^2 = \left\|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e_n\right\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2. \tag{1.20}$$

Combinando esto con (1.19) se sigue que

$$m^2\|x\|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2 \leq M^2\|x\|^2. \tag{1.21}$$

De (1.21) concluimos que

$$\frac{1}{M^2}\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2 \leq \|x\|^2 \leq \frac{1}{m^2}\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2.$$

Sean

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n.$$

Tomando $A = \frac{1}{M^2}$ y $B = \frac{1}{m^2}$ se tiene que

$$A \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2 \leq \left\| \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n \right\|^2 \leq B \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2$$

Por lo tanto $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Riesz para H. □

Observación 1.28. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Riesz para H, entonces ésta es una sucesión de Bessel y existe una única sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en H la cual es bi-ortogonal a $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. La sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también es una base de Riesz para H y para todo $h \in H$ se tiene que

$$h = \sum_n \langle h, y_n \rangle x_n, \qquad h = \sum_n \langle h, x_n \rangle y_n. \tag{1.22}$$

6. Estabilidad de bases en espacios de Banach y teorema de Paley -Wiener

El criterio fundamental de estabilidad, e históricamente el primero, se debe a Paley - Wiener [**16**]. Este se basa en el hecho elemental de que un operador lineal acotado T sobre un espacio de Banach es invertible cuando

$$\|I - T\| < 1.$$

Teorema 1.29 (Paley -Wiener). *Sea $\{x_n\}$ una base para un espacio de Banach X, y suponga que $\{y_n\}$ es una sucesión de elementos en X tal que*

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} c_n (x_n - y_n) \right\| \leq \lambda \left\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \right\| \tag{1.23}$$

para alguna constante λ, con $0 \leq \lambda < 1$ y para cualquier sucesión de escalares $\{c_n\}$. Entonces $\{y_n\}$ es una base para X equivalente a $\{x_n\}$.

Demostración. Por hipótesis se tiene que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ es convergente entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x_n - y_n)$ es convergente. Definamos la aplicación $T : X \to X$ mediante

$$T\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (x_n - y_n).$$

Evidentemente T es lineal y acotada y $\|T\| \leq \lambda < 1$. Luego el operador $I - T$ es invertible.

Como $(I-T)(x_n) = y_n$ para todo n, se sigue el resultado.

□

La estructura de espacios de Hilbert permite reformular el Teorema 1.29 de la siguiente manera.

TEOREMA 1.30 (Criterio de Paley-Wiener). *Sea* $\{e_n\}$ *una base ortonormal para un espacio de Hilbert* H *y sea* $\{z_n\} \subseteq H$ *una sucesión que satisface*

$$\left\| \sum_n c_n(e_n - z_n) \right\| \leq \lambda \left(\sum_n |c_n|^2 \right)^{1/2} \tag{1.24}$$

para alguna constante λ*, con* $0 \leq \lambda < 1$ *y para toda sucesión de escalares* $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*. Entonces* $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una base de Riesz para* H*.*

A continuación presentaremos un resultado de Kadec (ver libro de Young [**21**, p. 42]), que nos permitirá presentar un ejemplo de una base de Riesz.

TEOREMA 1.31 (Teorema 1/4 de Kadec). *Si* $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de numeros reales para el cual se cumple*

$$|\lambda_n - n| \leq l < \frac{1}{4} \tag{1.25}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$*. Entonces La sucesión* $\left\{e^{i\lambda_n t}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *satisface el criterio de Paley - Wiener y por tanto forma una base de Riesz para* $L^2[-\pi, \pi]$*.*

EJEMPLO 1.32. Sean $1 < p < \infty$ y $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que

$$|\lambda_n - n| \leq \frac{1}{2p}.$$

Se puede probar que la sucesión $\left\{e^{i\lambda_n t}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Riesz para $L^p[-\pi, \pi]$ (ver libro de Young [**21**, p. 118]).

CAPíTULO 2

Sucesiones totales en espacios de Hilbert

DEFINICIÓN 2.1. Un operador A definido en un espacio normado E se llama *densamente definido* si su dominio es un subconjunto denso de E, esto es

$$\overline{\mathrm{Dom}(A)} = E.$$

EJEMPLO 2.2. El operador diferencial $D = \frac{d}{dx}$ es densamente definido en $L^2(\mathbb{R})$ porque el subespacio de funciones diferenciales es denso en $L^2(\mathbb{R})$.

DEFINICIÓN 2.3. Sean A y B operadores en un espacio vectorial E. Si se cumple $\mathrm{Dom}\, A \subset \mathrm{Dom}\, B$ y $Ax = Bx$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(A)$ se dice que B es una *extensión* de A y se escribe $A \subset B$.

En lo que sigue H denotará un espacio de Hilbert separable. Sea $\langle ., . \rangle$ el producto interior en H.

Se usarán sucesiones bilaterales en lugar de las sucesiones usuales, es decir el subíndice de la sucesión estará en $\mathbb{Z}$ en lugar de $\mathbb{N}$.

Sea $\{x_n\}_n \subset H$, podemos definir el espacio de Hilbert generado por esta sucesión de la siguiente manera

$$H\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} := \overline{span}\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

En este caso se tiene que $\{x_n\}_n$ es una sucesión total en $H\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Además se tiene que $H\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset H$, como subespacio cerrado.

PROPOSICIÓN 2.4. *Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sucesiones en H, se tiene que*

$$\langle x_n, x_m \rangle = \langle y_n, y_m \rangle$$

para todo $n, m \in \mathbb{Z}$ si y sólo si existe una isometría sobreyectiva $\Phi : H\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \to H\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que

$$\Phi(x_n) = y_n$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sucesiones en H tales que

$$\langle x_n, x_m\rangle = \langle y_n, y_m\rangle$$

para todo $n, m \in \mathbb{Z}$. Entonces para cualquier sucesión finita de escalares $\{a_n\}_{n=p}^{q}$ y $\{b_n\}_{n=p}^{q}$ tenemos que

$$\begin{aligned}\left\langle \sum_{n=p}^{q} a_n x_n, \sum_{m=p}^{q} b_m x_m \right\rangle &= \sum_{n,m=p}^{q} a_n \overline{b_m} \langle x_n, x_m\rangle \\ &= \sum_{n,m=p}^{q} a_n \overline{b_m} \langle y_n, y_m\rangle \\ &= \left\langle \sum_{n=p}^{q} a_n y_n \sum_{m=p}^{q} b_m y_m \right\rangle .\end{aligned}$$

Luego

$$\left\langle \sum_{n=p}^{q} a_n x_n, \sum_{m=p}^{q} b_m x_m \right\rangle = \left\langle \sum_{n=p}^{q} a_n y_n, \sum_{m=p}^{q} b_m y_m \right\rangle .$$

Consideremos el operador $\Phi_o : span\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \to span\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ dado por $\Phi_o(x_n) = y_n$ y extendido linealmente.

Miremos que Φ_o preserva la norma. En efecto

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{n=p}^{q} a_n x_n \right\|^2 &= \left\langle \sum_{n=p}^{q} a_n x_n, \sum_{m=p}^{q} a_m x_m \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{n=p}^{q} a_n y_n, \sum_{n=p}^{q} a_m y_m \right\rangle \\ &= \left\| \sum_{n=p}^{q} a_n y_n \right\|^2 .\end{aligned}$$

Luego

$$\left\| \sum_{n=p}^{q} a_n x_n \right\| = \left\| \sum_{n=p}^{q} a_n y_n \right\| .$$

Pero de acuerdo a como hemos definido Φ_o tenemos que

$$\left\| \Phi_o \left(\sum_{n=p}^{q} a_n x_n \right) \right\| = \left\| \sum_{n=p}^{q} a_n \Phi_o(x_n) \right\| = \left\| \sum_{n=p}^{q} a_n y_n \right\| = \left\| \sum_{n=p}^{q} a_n x_n \right\| .$$

Y así Φ_o es una isometría.

Como Φ_o es una isometría, es claro que Φ_o es un operador acotado. Luego podemos extender por continuidad a una isometría definida sobre $H(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} = \overline{span\{x_n\}}_{n\in\mathbb{Z}}$. Esto es, si

$$a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x_n \in \overline{span\{x_n\}}_{n\in\mathbb{Z}},$$

entonces existe

$$a_N = \sum_{n=-N}^{N} a_k x_k \in span\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

tal que $\lim_{N\to\infty} a_N = a$.

Para definir la extensión $\Phi : \overline{span}\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \to \overline{span}\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ se procede de la siguiente manera.

Si $h \in \overline{span}\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ entonces

$$h = \lim_{N\to\infty} h_N$$

donde $h_N \in span\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Sea

$$\Phi(h) = \lim_{N\to\infty} \Phi(h_N).$$

Luego

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n x_n\right) &= \lim_{N\to\infty} \Phi_o\left(\sum_{n=-N}^{N} a_k x_k\right) = \Phi_o\left(\lim_{N\to\infty} \sum_{k=n}^{N} a_k y_k\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} a_k \Phi_o(x_k) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} a_k y_k \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n y_n
\end{aligned}$$

y además $\Phi x_n = y_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ por la linealidad de Φ.

Es claro que para todo

$$b = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n y_n \in \overline{span}\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

existe

$$a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x_n \in \overline{span}\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

tal que $\Phi(a) = b$ luego Φ es sobre.

Además

$$\begin{aligned}\left\| \Phi\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n x_n\right)\right\| &= \left\| \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=-n}^{n} a_k \Phi_o x_k\right)\right\| = \left\| \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=-n}^{n} a_k y_k\right)\right\| \\ &= \left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k y_k\right\| = \lim_{n\to\infty}\left\| \sum_{k=-n}^{n} a_k x_k\right\| \\ &= \left\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n x_n\right\| .\end{aligned}$$

Por lo tanto Φ es una isometría sobreyectiva.

Recíprocamente. Sea $\Phi : H\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \to H\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una isometría sobreyectiva tal que $\Phi x_n = y_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Como Φ es isometría se tiene que

$$\|\Phi x\| = \|x\|$$

para todo $x \in X$

$$\langle \Phi x, \Phi y\rangle = \langle x, y\rangle$$

para todo $x, y \in X$.

Luego

$$\langle y_n, y_m\rangle = \langle \Phi x_n, \Phi x_m\rangle = \langle x_n, x_m\rangle$$

para todo $n, m \in \mathbb{Z}$. □

1. Partición del conjunto de las sucesiones totales

PROPOSICIÓN 2.5. *Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sucesiones en H, y sea $\tau : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ tal que $\langle y_n, y_m\rangle = \tau(n-m)$ para todo $n, m \in \mathbb{Z}$. Se tiene que*

$$\langle x_n, x_m\rangle = \tau(n-m)$$

para todo $n, m \in \mathbb{Z}$ si y sólo si existe una isometría sobreyectiva $\Phi : H\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \to H\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que

$$\Phi(x_n) = y_n$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Esta proposición se deduce de la Proposición 2.4.

Definamos los siguientes conjuntos de sucesiones bilaterales a valores complejos

$$\mathbf{F} = \{\tau : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \text{ tal que existe } \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset H, \langle x_n, x_m\rangle = \tau(n-m)\}$$

y para $r \in \mathbb{N}$ ó $r = \infty$ el conjunto

$$\mathbf{F}(r) = \left\{ \begin{array}{c} \tau \in \mathbf{F} : \text{ existe } \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset H, \langle x_n, x_m\rangle = \tau(n-m) \\ \text{y } \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \text{ total en un subespacio de dimensión } r \text{ de } H \end{array} \right\}.$$

Proposición 2.6. *La familia*

$$\{\mathbf{F}(r) : r \in \mathbb{N} \quad \text{ó} \quad r = \infty\}$$

es una partición de $\mathbf{F}$.

Demostración. Suponga que $\mathbf{F}(r_1) \cap \mathbf{F}(r_2) \neq \emptyset$ para algunos $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$. Se sigue que existe $\tau \in \mathbf{F}(r_1) \cap \mathbf{F}(r_2)$.

Por la definición de $\mathbf{F}(\cdot)$ existen sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ en H tales que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es total en un subespacio de dimensión r_1 de H, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es total en un subespacio de dimensión r_2 de H y

$$\langle x_n, x_m\rangle = \langle y_n, y_m\rangle = \tau(n-m).$$

Por la Proposición 2.5, se sigue que existe un operador lineal acotado e invertible de $H\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ en $H\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Entonces $r_1 = r_2$. Luego

$$\mathbf{F}(r_1) = \mathbf{F}(r_2).$$

Lo anterior prueba que la familia de conjuntos

$$\{\mathbf{F}(r) : r \in \mathbb{N} \text{ ó } r = \infty\}$$

es una partición de $\mathbf{F}$. □

Tal como veremos a continuación, dado que para cualquier par de subespacios cerrados de H de alguna dimensión r existe una aplicación isométrica y sobreyectiva de uno en el otro, se tiene que para cualquier subespacio cerrado de dimension r y para cualquier sucesión $\tau \in \mathbf{F}(r)$ existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ la cual es total en ese subespacio tal que

$$\langle x_n, x_m\rangle = \tau(n-m).$$

COROLARIO 2.7. *Sea* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset H$. *Entonces se tiene que*

$$\langle x_n, x_m\rangle = \tau(n-m)$$

para algún $\tau \in \mathbf{F}(r)$ *si y sólo si* x_n *puede escribirse como*

$$x_n = \Phi^n x_0$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$ *para alguna isometría sobreyectiva* $\Phi : H\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \to H\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

DEMOSTRACIÓN. Dada $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión en H, sea

$$y_n = x_{n+1}.$$

Entonces $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión en H.

Sea $\tau \in \mathbf{F}(r)$. Aplicando la Proposición 2.5, se tiene que existe una isometría sobreyectiva $\Phi : H\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \to\ H\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que

$$\Phi(x_n) = y_n$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$\Phi(x_n) = x_{n+1}.$$

Probaremos por inducción que

$$x_n = \Phi^n x_0$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

(1) Miremos que es cierto para $n = 1$

Como $\Phi(x_n) = x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, entonces $\Phi(x_0) = x_1$. Luego la propiedad se cumple para $n = 1$.

(2) Suponemos que se cumple para $k = n-1$

$$x_{n-1} = \Phi^{n-1}(x_0).$$

Se probará que se cumple para $k = n$.

Tenemos que $x_{n-1} = \Phi^{n-1}x_0$ por hipótesis de inducción. Luego

$$\Phi(x_{n-1}) = \Phi(\Phi^{n-1}x_0) = \Phi^n x_0.$$

Pero

$$\Phi(x_{n-1}) = x_n$$

por lo tanto

$$x_n = \Phi^n x_0.$$

De (1) y (2), se tiene que $x_n = \Phi^n x_0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

□

2. El caso de espacios de dimensión finita

PROPOSICIÓN 2.8. *Sea W un espacio de dimensión finita r. Entonces existe un isomorfismo unitario (lineal, biyectivo e isométrico) $\psi : W \to \mathbb{C}^r$. Esto se abrevia mediante $W \cong \mathbb{C}^r$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\gamma = \{x_1, x_2, ..., x_r\}$ una base ortonormal para W (el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt garantiza la existencia de esta base).

Se define $\psi : W \to \mathbb{C}^r$ mediante

$$\psi(x) = (\langle x, x_1\rangle_W, \ldots, \langle x, x_r\rangle_W)$$

para $x \in W$ dado por

$$x = \sum_{i=1}^{r} \langle x, x_i\rangle_W x_i.$$

Es sencillo probar que ψ es lineal.

Veamos que ψ es una isometría. Sean x, y elementos en W, se tiene que

$$x = \sum_{i=1}^{r} \langle x, x_i\rangle_W x_i, \qquad y = \sum_{i=1}^{r} \langle y, x_i\rangle_W x_i.$$

Luego

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle_W &= \left\langle \sum_{i=1}^{r} \langle x, x_i\rangle_W x_i, \sum_{j=1}^{r} \langle y, x_j\rangle_W x_j \right\rangle_W \\
&= \sum_{i,j=1}^{r} \langle x, x_i\rangle_W \langle \overline{y, x_j}\rangle_W \langle x_i, x_j\rangle_W \\
&= \sum_{i=1}^{r} \langle x, x_i\rangle_W \langle \overline{y, x_i}\rangle_W \\
&= \langle \psi(x), \psi(y)\rangle_{\mathbb{C}^r}
\end{aligned}$$

De donde ψ es una isometría.

Además ψ es inyectiva porque ψ es lineal e isométrica. En efecto, $\psi(x) = \psi(y)$ implica

$$0 = \|\psi(x) - \psi(y)\| = \|\psi(x - y)\| = \|x - y\|.$$

Luego $x = y$.

Veamos que ψ es sobreyectiva. Dado $(z_1, \cdots, z_r) \in \mathbb{C}^r$ sea

$$x = \sum_{i=1}^{r} z_i x_i.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \langle x, x_i \rangle_W &= \left\langle \sum_{j=1}^{r} z_j x_j, x_i \right\rangle_W \\ &= \sum_{j=1}^{r} z_j \langle x_j, x_i \rangle_W \\ &= z_i. \end{aligned}$$

De donde

$$\psi(x) = (\langle x, x_1 \rangle_W, \ldots, \langle x, x_r \rangle_W) = (z_1, \ldots, z_r).$$

□

Observación 2.9. El siguiente hecho de álgebra lineal es bien conocido: Sean β una base ordenada de $\mathbb{C}^r$ y $\Phi : \mathbb{C}^r \to \mathbb{C}^r$ un operador lineal con matriz $[\Phi]_\beta$ con respecto a esa base. Si Φ es una isometría entonces $[\Phi]_\beta$ es una matriz unitaria.

Proposición 2.10. *Sean W un espacio de dimensión finita con base ordenada β y $\Phi : W \to W$ un operador lineal con matriz $[\Phi]_\beta$ con respecto a esa base. Si Φ es una isometría entonces $[\Phi]_\beta$ es una matriz unitaria.*

La prueba de esta proposición se sigue de la Proposición 2.8 y de la Observación 2.9.

Corolario 2.11. *Sean $r \in \mathbb{N}$ y $\tau : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ una sucesión. Se tiene que: $\tau \in \mathbf{F}(r)$ si y sólo si existe una matriz unitaria A en $M_{r\times r}(\mathbb{C})$ tal que*

$$\tau(n) = \langle A^n \lambda, \lambda \rangle_{\mathbb{C}^r}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{C}^r$, $\lambda \neq 0$.

Demostración.

($\Rightarrow$) Sea $\tau \in \mathbf{F}(r)$, luego por definición del conjunto $\mathbf{F}(r)$ tenemos que $\tau \in \mathbf{F}$ y existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ en H tal que

$$\langle x_n, x_m \rangle = \tau(n-m)$$

y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ total en un subespacio de dimensión r de H, luego

$$\tau(n) = \langle x_n, x_0 \rangle.$$

Por el Corolario 2.7 se tiene existe una isometría sobreyectiva $\Phi : H\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \to H\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que

$$x_n = \Phi^n x_0$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. De donde

$$\tau(n) = \langle \Phi^n x_0, x_0 \rangle_{H\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}}. \tag{2.1}$$

Sea $\psi : H\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}^r$ el isomorfismo unitario dado por la Proposición 2.8. Entonces

$$\langle x, y \rangle_{H(x_n)} = \langle \psi(x), \psi(y) \rangle_{\mathbb{C}^r}$$

para todo $x, y \in H\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Tomando

$$x = \Phi^n x_0, \qquad y = x_0$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\tau(n) &= \langle \Phi^n x_0, x_0 \rangle_{H(x_n)} \\
&= \langle \psi(\Phi^n x_0), \psi(x_0) \rangle_{\mathbb{C}^r} \\
&= \langle [\Phi^n x_0]_\gamma, [x_0]_\gamma \rangle_{\mathbb{C}^r} \\
&= \left\langle [\Phi]_\gamma^n [x_0]_\gamma, [x_0]_\gamma \right\rangle_{\mathbb{C}^r} \\
&= \langle A^n \lambda, \lambda \rangle_{\mathbb{C}^r}.
\end{aligned}$$

con $\lambda = [x_0]_\gamma \in \mathbb{C}^r$ y $[\Phi]_\gamma = A$.

Luego

$$\tau(n) = \langle A^n \lambda, \lambda \rangle_{\mathbb{C}^r}.$$

Como ψ y Φ son unitarios se sigue que A es una matriz unitaria. $\square$

CAPíTULO 3

Núcleos definidos positivos y núcleos de Toeplitz

1. Núcleos definidos positivos

Sea $A = (a_{jk})_{j,k=1}^{n}$ una matriz sobre el cuerpo de los números complejos, se dice que A es una *matriz definida positiva* cuando para todo $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\sum_{j,k=1}^{n} c_j \overline{c_k} a_{jk} \geq 0. \tag{3.1}$$

Se dice que una matriz es hermitiana cuando $a_{jk} = \overline{a_{kj}}$ para $j, k = 1, 2, ..., n$.

Es bien conocido que si A es definida positiva entonces A es hermitiana y los autovalores de A son todos no negativos.

Sea X un conjunto no vacío. Un *núcleo* en X es una función $\varphi : X \times X \to \mathbb{C}$.

Se dice que la función φ es un *núcleo simétrico* cuando

$$\varphi(y, x) = \varphi(x, y)$$

para todo $x, y \in X$.

Se dice que la función φ es un *núcleo hermitiano* cuando

$$\varphi(y, x) = \overline{\varphi(x, y)}$$

para todo $x, y \in X$.

Se dice que φ es un *núcleo definido positivo* cuando

$$\sum_{j,k=1}^{n} c_j \overline{c_k} \varphi(x_j, x_k) \geq 0 \tag{3.2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, para todo $\{x_1, ..., x_n\} \subset X$ y para todo $\{c_1, ..., c_n\} \subset \mathbb{C}$.

EJEMPLO 3.1. Dado un núcleo constante $\varphi(x, y) = c$ se tiene que: φ es definido positivo si y sólo si $c \geq 0$.

Observación 3.2. Si X es un conjunto finito, no vacío, dado por $X = \{x_1, x_{2,...,} x_n\}$ y $\varphi : X \times X \to \mathbb{C}$ es una función, se puede considerar la matriz A, de tamaño $n \times n$, dada por

$$A = (\varphi(x_j, x_k))_{j,k=1}^{n}.$$

Se tiene que: φ es definido positivo si y sólo si A es definida positiva.

Proposición 3.3. *Un núcleo $\varphi : X \times X \to \mathbb{C}$ es definido positivo si y sólo si para todo subconjunto finito $X_0 \subset X$ la restricción de φ a $X_0 \times X_0$ es un núcleo definido positivo.*

Proposición 3.4. *Sea $\varphi : X \times X \to \mathbb{C}$ un núcleo definido positivo, entonces:*

(1) $\varphi(x, x) \geq 0$ *para todo* $x \in X$.
(2) φ *es hermitiano.*
(3) $|\varphi(x, y)|^2 \leq \varphi(x, x)\, \varphi(y, y)$ *para todo* $x, y \in X$.

Proposición 3.5. *Sea φ un núcleo a valor reales, es decir $\varphi : X \times X \to \mathbb{R}$. Se tiene que: φ es definido positivo si y sólo si φ es simétrico y además*

$$\sum_{j,k=1}^{n} c_j \overline{c_k} \varphi(x_j, x_k) \geq 0.$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, para todo $\{x_1, ..., x_n\} \subset X$ y para todo $\{c_1, ..., c_n\} \subset \mathbb{C}$.

Proposición 3.6. *Dada una función arbitraria $f : X \to \mathbb{C}$ sea $\varphi_f : X \times X \to \mathbb{C}$ dada por*

$$\varphi_f(x, y) := f(x)\overline{f(y)}.$$

Entonces φ_f es un núcleo definido positivo.

Proposición 3.7. *Sea H un espacio pre-Hilbert con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre el cuerpo de los números complejos. Entonces $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un núcleo definido positivo.*

Demostración. Sean $x, y \in H$, φ un núcleo cualquiera. Sean $c_1, ..., c_n \in \mathbb{C}$ y

$$\varphi(x, y) = \langle x, y \rangle.$$

Luego

$$\sum_{j,k=1}^{n} c_j \overline{c_k} \langle x_j, y_k \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \sum_{k=1}^{n} c_k y_k \right\rangle = \left\| \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \right\|^2 \geq 0.$$

Por lo tanto $\langle ., . \rangle$ es definido positivo. $\square$

Teorema 3.8. *Sean* φ_1, $\varphi_2 : X \times X \to \mathbb{C}$ *dos núcleos definidos positivos. Entonces* $\varphi_1 \cdot \varphi_2 : X \times X \to \mathbb{C}$ *es un núcleo definido positivo.*

La demostración puede verse en [**2**, Capítulo 3, Teorema 1.12].

Teorema 3.9. *Sea* $\varphi : X \times X \to \mathbb{C}$ *núcleo hermitiano. Entonces* φ *es definido positivo si y sólo si*

$$\det\left(\varphi\left(x_j, x_k\right)_{j,k=1}^{n}\right) \geq 0$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ *y todo* $\{x_1, ..., x_n\} \subset X$.

La demostración puede verse en [**2**, Capítulo 3, Teorema 1.17].

2. Representación de núcleos definidos positivos en espacios de Hilbert

Para desarrollar esta sección se ha usado ampliamente la Sección 3 del Capítulo 3 del libro de Berg, Christensen y Ressel [**2**].

Sea X un conjunto no vacío y $\varphi : X \times X \to \mathbb{C}$ un núcleo definido positivo. Para $x \in X$ fijo consideraremos la función $\varphi_x : X \to \mathbb{C}$ dada por

$$\varphi_x(y) = \varphi(x, y).$$

Sea

$$H_0 = span\{\varphi_x : x \in X\}$$

la variedad lineal de

$$\mathbb{C}^X = \{g : X \to \mathbb{C} \text{ tal que } g \text{ es una función}\}.$$

Si $f, g \in H_0$ y vienen dadas por

$$f = \sum_j c_j \varphi_{x_j}, \qquad g = \sum_k d_k \varphi_{y_k}$$

entonces se tiene que

$$f(y_k) = \sum_j c_j \varphi_{x_j}(y_k) = \sum_j c_j \varphi(x_j, y_k)$$

y

$$g(x_j) = \sum_k d_k \varphi_{y_k}(x_j) = \sum_k d_k \varphi(y_k, x_j).$$

Es fácil ver que

$$\sum_k \overline{d_k} f(y_k) = \sum_j c_j \overline{g(x_j)} = \sum_{j,k} c_j \overline{d_k} \varphi(x_j, y_k).$$

Además este valor no depende de la representación seleccionada para f y g la cual podría no ser única.

Se define $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi : H_0 \times H_0 \to \mathbb{C}$ mediante

$$\langle f, g \rangle_\varphi := \sum_{j,k} c_j \overline{d_k} \varphi(x_j, y_k). \tag{3.3}$$

Es sencillo probar que $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi$ es una forma sesquilineal y hermítica.

Como φ es definido positivo se tiene que

$$\langle f, f \rangle_\varphi = \sum_{j,k=1}^{n} c_j \overline{c_k}\, \varphi(x_j, x_k) \geq 0.$$

Por lo tanto, $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi$ es un producto interno (eventualmente degenerado) en H_0. Se cumple la desigualdad de Cauchy-Schwartz:

$$|\langle f, g \rangle_\varphi|^2 \leq \langle f, f \rangle_\varphi \langle g, g \rangle_\varphi.$$

Una consecuencia inmediata de la igualdad (3.3) es

$$\langle f, \varphi_x \rangle = \sum_j c_j \varphi(x_j, x) = f(x)$$

para todo $f \in H_0$ y $x \in X$.

De donde

$$\langle f, \varphi_x \rangle = f(x)$$

para todo $f \in H_0$ y $x \in X$. Esta propiedad es conocida como la *propiedad reproductiva.*

A continuación daremos otra expresión para $\langle f, g \rangle_\varphi$.

Sean

$$f_j = c_j \varphi_{x_j} \qquad \text{y} \qquad g_k = d_k \varphi_{y_k}.$$

Se tiene que

$$\langle f_j, g_k \rangle_\varphi = \langle c_j \varphi_{x_j}, d_k \varphi_{y_k} \rangle_\varphi = c_j \overline{d_k} \varphi(x_j, y_k).$$

Por lo tanto

$$\langle \varphi_{x_j}, \varphi_{y_k} \rangle_\varphi = \varphi(x_j, y_k). \tag{3.4}$$

De donde

$$\langle f, g\rangle_\varphi = \sum_{j,k} c_j \overline{d_k} \langle \varphi_{x_j}, \varphi_{y_k}\rangle_\varphi.$$

Además de (3.4) se sigue que

$$\langle \varphi_x, \varphi_y\rangle_\varphi = \varphi(x, y)$$

para todo $x, y \in X$.

Veamos que el producto interno $\langle \cdot, \cdot\rangle_\varphi$ es no degenerado. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que

$$|f(x)|^2 = |\langle f, \varphi_x\rangle_\varphi|^2 \leq \langle f, f\rangle_\varphi \langle \varphi_x, \varphi_x\rangle_\varphi.$$

Por lo tanto

$$|f(x)|^2 \leq \langle f, f\rangle_\varphi \, \varphi(x, x).$$

De la desigualdad anterior es inmediato que $\langle f, f\rangle_\varphi = 0$ si y sólo si $f = 0$. De donde el producto interno $\langle \cdot, \cdot\rangle_\varphi$ es no degenerado.

De esta forma hemos definido un producto interior sobre H_0 a partir del núcleo φ. Por lo tanto, H_0 es un espacio pre-Hilbert y su completación o clausura H es un espacio de Hilbert (en el cual H_0 es un subespacio denso). Se dice que φ es el núcleo reproductor del espacio de Hilbert H.

Se puede probar que existe un único espacio de Hilbert, cuyos elementos son funciones definidas en X, que tiene a φ como su núcleo reproductor. Este espacio de Hilbert es usualmente llamado el espacio de Hilbert con núcleo reproductor (RKHS) asociado con φ. Si φ es de valor real entonces, H puede ser escogido como un espacio de funciones reales.

Es importante resaltar que $\langle \cdot, \cdot\rangle_\varphi$ es un núcleo definido positivo sobre $H_0 \times H_0$. Esto es consecuencia de la Proposición 3.7.

Sean $\varphi : X \times X \to \mathbb{C}$ un núcleo definido positivo y sea H el espacio de Hilbert con núcleo reproductor φ. Sea $\Psi : H \to \mathbb{C}^X$ dada por

$$\Psi(f) = g$$

para $f \in H$, donde

$$g(x) = \langle f, \varphi_x\rangle$$

para todo $x \in X$. Se puede probar que la aplicación Ψ es lineal e inyectiva.

Por lo cual el espacio de Hilbert H puede ser visto como un subespacio de $\mathbb{C}^X$, esto es como un espacio de funciones y no como en otras situaciones similares en las que debe considerarse, el espacio de Hilbert que surge, como un espacio de clases de equivalencia de funciones.

De lo anterior se puede asumir que existe un espacio de Hilbert $H \subseteq \mathbb{C}^X$ y una aplicación $x \to \varphi_x$ de X a H tal que

$$\varphi(x, y) = \langle \varphi_x, \varphi_y \rangle$$

para $x, y \in X$.

Para concluir esta sección enunciamos un resultado referente a los subespacios cerrados de H.

Proposición 3.10. *Sea $\varphi : X \times X \to \mathbb{C}$ un núcleo definido positivo y sea H el espacio de Hilbert asociado a φ. Entonces cualquier subespacio cerrado de H es el espacio de Hilbert con núcleo reproductor para algún núcleo definido positivo sobre $X \times X$.*

3. Operadores definidos positivos

Un operador T sobre un espacio de dimensión finita V dotado de producto interno se dice que es un *operador definido positivo*, si T es auto-adjunto y

$$\langle T(x), x \rangle > 0$$

para $x \neq 0$.

Un operador T sobre un espacio de dimensión finita V dotado de producto interno se dice un *operador semidefinido positivo*, si T es auto-adjunto y

$$\langle T(x), x \rangle \geq 0$$

para todo $x \neq 0$.

Proposición 3.11. *Sean T y U operadores lineales auto-adjuntos sobre un espacio vectorial V de dimensión finita, dotado de producto interno, sea β una base ortonormal para V y $A = [T]_\beta$, la matriz asociada al operador*

Las siguientes afirmaciones son ciertas.

(1) *T es definido positivo si y sólo si todos los autovalores son positivos.*

(2) *T es semidefinido positivo si y sólo si todos los autovalores son no negativos.*

(3) *T es definido positivo si y sólo si*

$$\sum_{j,k=1}^{n} A_{ij} a_j \overline{a_i} > 0$$

para todo $\{a_1, a_2, ...a_n\} \subset \mathbb{C}$ donde $a_i \neq 0$ para todo i.

(4) *T es semidefinido positivo si y sólo si $A = B^*B$ para alguna matriz cuadrada B.*

(5) *Si T y U son operadores semidefinidos positivos tal que $T^2 = U^2$ entonces $T = U$.*

(6) *Si T y U son operadores semidefinidos positivos tal que $TU = UT$, entonces TU es definido positivo.*

(7) *T es definido positivo [semidefinido] si y sólo si A es definido positivo [semidefinido].*

La demostración de esta proposición puede verse en diferentes libros de álgebra lineal, ya que se refiere a espacios de dimensión finita.

4. Núcleos de Toeplitz

A continuación desarrollaremos algunas ideas relacionadas con los núcleos Toeplitz.

Sea $K : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, se dice que K es un *núcleo de Toeplitz* cuando

$$K(m+1, n+1) = K(m, n)$$

para todo $m, n \in \mathbb{Z}$.

Proposición 3.12. *Un núcleo K es de Toeplitz si y sólo si*

$$K(n, m) = K(n-m, 0)$$

para todo $m, n \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo 3.13. Sea μ medida de probabilidad sobre el intervalo $[0, 2\pi)$.

$L^2(\mu)$ es un espacio de Hilbert, sea

$$\gamma_n(e^{it}) = e^{int}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Consideremos los coeficientes de Fourier de μ, los cuales están definidos por

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} d\mu(t)$$

para $n \in \mathbb{Z}$.

La aplicación $A : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ definida por

$$A(j,k) = A_{k-j}$$

para $j, k \in \mathbb{Z}$ es un núcleo definido positivo. En efecto, dados $n \geq 0$ y $\{\lambda_{o,}\lambda_{1,\ldots}\lambda_n\} \subseteq \mathbb{C}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k=0}^{n} A(j,k)\lambda_k\overline{\lambda_j} &= \sum_{j,k=0}^{n} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(k-j)t} d\mu(t) \right) \lambda_k\overline{\lambda_j} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{j,k=0}^{n} e^{-i(k-j)t} \lambda_k\overline{\lambda_j} \right) d\mu(t) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{j,k=0}^{n} e^{-ikt}\overline{e^{-ijt}} \lambda_k\overline{\lambda_j} \right) d\mu(t)
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k=0}^{n} A(j,k)\lambda_k\overline{\lambda_j} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=0}^{n} e^{-ikt}\lambda_k \overline{\sum_{j=0}^{n} e^{-ijt}\lambda_j} \right) d\mu(t) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\| \sum_{j=0}^{n} \lambda_j e^{-ijt} \right\|^2 d\mu(t) \geq 0.
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.14. Sea (Ω, F, P) espacio de probabilidad, donde F es una σ-álgebra de subconjuntos de Ω y P es una medida de probabilidad sobre F, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ proceso estocástico, $L^2(P)$ el espacio de Hilbert de F funciones medibles sobre Ω de cuadrado integrables, esto es

$$L^2(P) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C}\, f \text{ medible } \int_\Omega |f(\omega)|^2 dP(\omega) < +\infty \right\}$$

dotado con el producto interior

$$\langle f, g \rangle_{L^2(P)} = \int_\Omega f(\omega)\overline{g(\omega)} dP(\omega).$$

Consideremos solamente procesos estocásticos con variables en $L^2(P)$.

La media del proceso viene dada por

$$m_n = E(X_n) = \int_\Omega X_n(\omega)dP(\omega)$$

Supongamos $m_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

La covarianza del proceso viene dada por

$$A(m,n) = A_{mn} = \langle X_n, X_m \rangle_{L^2(P)} = \int_\Omega X_n(\omega)\overline{X_m(\omega)}dP(\omega)$$

para todo $m, n \in \mathbb{Z}$.

Es claro que la covarianza de este proceso es un núcleo definido positivo, porque

$$\sum_{i,j=m}^{n} A_{ij}\lambda_j\overline{\lambda}_i = \sum_{i,j=m}^{n} \langle X_j, X_i \rangle_{L^2(P)}\lambda_j\overline{\lambda}_i = \sum_{i,j=m}^{n} \langle \lambda_j X_j, \lambda_i X_i \rangle_{L^2(P)} = \left\| \sum_{j=m}^{n} \lambda_j X_j \right\|_{L^2(P)}^2 \geq 0$$

para todo $m, n \in \mathbb{Z}, m \leq n$, y $\lambda_k \in \mathbb{C} \quad (k = m, m+1, ..., n)$.

Observación 3.15. Si en el ejemplo anterior se asume que el proceso estocástico $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es estacionario, esto es

$$A_{mn} = \langle X_n, X_m \rangle = A_{n-m}$$

para todo $n, m \in \mathbb{Z}$, entonces este núcleo de covarianza es Toeplitz. Se puede probar que este núcleo es definido positivo.

Ejemplo 3.16. Como ejemplo de núcleo de Toeplitz definido positivo tenemos los núcleos de autocorrelación (covarianza) de procesos estocásticos estacionarios discretos (sobre espacios de Hilbert), donde las variables aleatorias vienen dadas por funciones $X : \Omega \to E$ con E espacio de Hilbert y núcleo de autocorrelación

$$K(m,n) = \langle X(m), X(n) \rangle_{L^2(P)} = \int_\Omega \langle X_n(\omega), X_m(\omega) \rangle_E \, dP(\omega).$$

Sea $\tau : Z \to C$ una sucesión. Se dice que τ es una *sucesión definida positiva* si satisface:

$$\sum_{m,n} \tau(m-n)\lambda(m)\overline{\lambda(n)} \geq 0 \tag{3.5}$$

para toda función $\lambda : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ con soporte finito.

PROPOSICIÓN 3.17. *Sea H un espacio con producto interno, sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset H$ y sea $\tau : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(a) *Para todo $n, m \in \mathbb{Z}$ se tiene que*

$$\langle f_n, f_m \rangle = \tau(n-m).$$

(b) *Para toda sucesión finita de escalares $\{a_n\}_{n=p}^{q}$ se tiene que*

$$\left\| \sum_{j=p}^{q} a_j f_j \right\|^2 = \sum_{j=p}^{q} \sum_{l=p}^{q} a_j \overline{a_l}\, \tau(j-l).$$

DEMOSTRACIÓN.

$(a) \Rightarrow (b)$ Si existe $\tau : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, tal que

$$\langle f_n, f_m \rangle = \tau(n-m)$$

para todo $n, m \in \mathbb{Z}$ entonces

$$\left\| \sum_{n=p}^{q} a_n f_n \right\|^2 = \sum_{n=p}^{q} \sum_{l=p}^{q} a_n \overline{a_l}\, \langle f_n, f_l \rangle = \sum_{n=p}^{q} \sum_{l=p}^{q} a_n \overline{a_l}\, \tau(n-l)$$

para toda sucesión finita de escalares $\{a_n\}_{n=p}^{q}$

$(b) \Rightarrow (a)$ Suponga que existe $\tau : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ tal que

$$\left\| \sum_{j=p}^{q} a_j f_j \right\|^2 = \sum_{j=p}^{q} \sum_{l=p}^{q} a_j \overline{a_l}\, \tau(j-l)$$

para toda sucesión finita de escalares $\{a_n\}_{n=p}^{q}$.

En particular

$$\|a_j f_j + a_l f_l\|^2 = a_j \overline{a_j}\, \tau(0) + a_j \overline{a_l}\, \tau(j-l) + a_l \overline{a_j}\, \tau(l-j) + a_l \overline{a_l}\, \tau(0).$$

Por lo tanto

$$\|f_j + f_l\|^2 = \tau(0) + \tau(j-l) + \tau(l-j) + \tau(0),$$

$$\|f_j - f_l\|^2 = \tau(0) - \tau(j-l) - \tau(l-j) + \tau(0),$$

$$\|f_j + i f_l\|^2 = \tau(0) - i\, \tau(j-l) + i\, \tau(l-j) - \tau(0),$$

$$\|f_j - i f_l\|^2 = \tau(0) + i\, \tau(j-l) - i\, \tau(l-j) - \tau(0).$$

Como

$$\langle f_j, f_l\rangle = \frac{1}{4}\left(\|f_j + f_l\|^2 - \|f_j - f_l\|^2 + i\|f_j + if_l\|^2 - i\|f_j - if_l\|^2\right)$$

se sigue que

$$\begin{aligned}
\langle f_j, f_l\rangle &= \frac{1}{4}\left(\tau(0) + \tau(j-l) + \tau(l-j) + \tau(0) - (\tau(0) - \tau(j-l) - \tau(l-j) + \tau(0))\right)\\
&+ \frac{1}{4}\left(i(\tau(0) - i\,\tau(j-l) + i\,\tau(l-j) - \tau(0)) - i(\tau(0) + i\,\tau(j-l) - i\,\tau(l-j) - \tau(0)\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\tau(j-l) + \tau(l-j) + \tau(j-l) + \tau(l-j)\right)\\
&+ \frac{1}{4}\left(i(-i\,\tau(j-l) + i\,\tau(l-j)) - i(i\,\tau(j-l) - i\,\tau(l-j)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\tau(j-l) + \tau(l-j)\right)\\
&+ \frac{1}{4}\left(\tau(j-l) - \tau(l-j) + \tau(j-l) - \tau(l-j)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\tau(j-l) + \tau(l-j)\right) + \frac{1}{2}\left(\tau(j-l) - \tau(l-j)\right)\\
&= \tau(j-l).
\end{aligned}$$

Luego existe una sucesión $\tau \in \mathbf{F}$ y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset H$ tal que

$$\langle f_j, f_l\rangle = \tau(j-l)$$

para todo $j, l \in \mathbb{Z}$. □

Observación 3.18. Dada una medida finita positiva μ sobre el círculo unitario $\mathbb{T}$, sea τ dada por

$$\tau(n) = \widehat{\mu}(n) := \int_T e^{-int} d\mu$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$ y sea $K : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ dado por

$$K(m,n) := \tau(m-n).$$

Entonces K es un núcleo de Toeplitz definido positivo (ver Ejemplo 3.13).

A continuación presentamos el teorema de Herglotz - Bochner.

TEOREMA 3.19. *Un núcleo* $K : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ *es definido positivo y Toeplitz si y sólo si existe una única medida finita y positiva* μ *sobre el círculo unitario* $\mathbb{T}$ *tal que*

$$K(m,n) = \hat{\mu}(m-n) \tag{3.6}$$

para todo $m,n \in \mathbb{Z}$.

Otra manera de enunciar este resultado es la siguiente:

TEOREMA 3.20. *Una sucesión* $s : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ *es definida positiva si y sólo si existe una única medida finita y positiva* μ *sobre el círculo unitario* $\mathbb{T}$ *tal que*

$$s(n) = \hat{\mu}(n) \tag{3.7}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Se puede ver que el teorema de Herglotz-Bochner da una representación integral de las formas Toeplitz definidas positivas.

Un *polinomio trigonométrico* sobre $\mathbb{T}$ es una función de la forma

$$f = \sum_n c_n e^{int}$$

donde la suma es una suma finita.

Sea P el conjunto de todos los polinomios trigonométricos sobre $\mathbb{T}$.

Una *forma sesquilineal* en P es una función $B : P \times P \to \mathbb{C}$ que es lineal en la primera variable y anti-lineal en la segunda variable.

Sea $e_n : [0, 2\pi) \to \mathbb{C}$ dada por

$$e_n(t) = e^{int}.$$

Dado un núcleo hermitiano $K : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ se define la forma sesquilineal asociada $B_K : P \times P \to \mathbb{C}$ mediante

$$B_K(e_m, e_n) = K(m,n),$$

para todo $m, n \in \mathbb{Z}$.

Se dice que B es una *forma positiva* cuando $B(f,f) \geq 0$ para todo $f \in P$. Esto se denota por $B \geq 0$.

Proposición 3.21. *Una forma B es positiva si y sólo si el correspondiente núcleo K es definido positivo.*

El *operador shift* en P es $S : P \to P$ dado por

$$S(f) = e_1 f.$$

Se tiene que

$$S^n(f) = e_n f.$$

Sea B una forma sesquilineal. Se dice que B es una *forma de Toeplitz* o una *forma S-invariante* en $P \times P$ cuando B es invariante bajo el operador shift, esto es

$$B(Sf, Sg) = B(f, g)$$

para toda $(f, g) \in P \times P$.

Proposición 3.22. *Un núcleo K es Toeplitz si y sólo si la correspondiente forma B es invariante bajo el operador shift, S.*

El teorema de Herglotz-Bochner se enuncia en términos de formas de la siguiente manera: B es una forma positiva y S-invariante en $P \times P$ si y sólo si existe $\mu \geq 0$ tal que

$$B(f, g) = \int f\overline{g} d\mu$$

para toda $f, g \in P$.

Proposición 3.23. *Una forma B es de Toeplitz si y sólo si*

$$B(S^n f, S^n g) = B(f, g)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$, $f, g \in P$, donde S es el shift en P.

Sea

$$l_0(\mathbb{Z}) = \{a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} : a \text{ con soporte finito}\}.$$

Entonces todo polinomio trigonométrico $f \in P$ es de la forma

$$f = \sum_n a_n e_n$$

para alguna $a \in l_0(\mathbb{Z})$.

Sea $\tau : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ es una sucesión fija, se puede definir el funcional lineal $L_\tau : P \to \mathbb{C}$ de la siguiente forma

$$L_\tau \left(\sum_n a_n e_n \right) = \sum_n a_n \tau_n.$$

En particular $L_\tau(e_n) = \tau(n)$

Es claro que existe una correspondencia biunívoca entre los funcionales L y las sucesiones τ. Para cada sucesión τ el funcional correspondiente L_τ viene dado por

$$L_\tau(f) = L_\tau \left(\sum_n a_n e_n \right) = \sum_n a_n \tau_n$$

para todo $a \in l_0(\mathbb{Z})$.

Análogamente, toda forma sesquilineal $B : P \times P \to \mathbb{C}$ queda determinada dando los valores

$$K(m,n) = B(e_{n,} e_m),$$

de modo que existe una correspondencia biunívoca entre todas las formas B y los núcleos $K : P \times P \to \mathbb{C}$.

Para todo núcleo K la forma B_K correspondiente está dada por

$$B_K \left(\sum_n a_n e_n, \sum_m b_m e_m \right) = \sum_{n,m} K(n,m)\, a_n \overline{b_m}$$

para todo $a, b \in l_0(\mathbb{Z})$.

También se puede decir que todo funcional lineal $L : P \to \mathbb{C}$ da origen a una forma sesquilineal $B_L : P \times P \to \mathbb{C}$ definida por

$$B_L(f,g) = L(f\overline{g}).$$

En particular toda medida μ da origen a un funcional y genera una forma B_μ, esto es $L = L_\tau$.

De lo anterior se tiene que

$$B_L \left(\sum_n a_n e_n, \sum_m b_m e_m \right) = \sum_{n,m} L(e_{n-m}) a_n \overline{b_m} = \sum_{n,m} \tau(n-m)\, a_n \overline{b_m}.$$

Proposición 3.24. *Un núcleo K es de Toeplitz si y sólo si existe una sucesión $\tau : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ tal que*

$$K(n,m) = \tau(n-m).$$

Demostración. Dado un núcleo de Toeplitz K sea $\tau : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\tau(n) = K(n, 0).$$

Entonces

$$K(n, m) = \tau(n - m).$$

Recíprocamente, si existe $s : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ tal que $K(n, m) = \tau(n - m)$ entonces

$$K(n + 1, m + 1) = \tau(n + 1 - (m + 1)) = \tau(n - m) = K(n, m).$$

Por lo tanto K es Toeplitz. □

Proposición 3.25. *Una forma $B : P \times P \to \mathbb{C}$ es Toeplitz si sólo si existe una sucesión $\tau : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ tal que*

$$B\left(\sum_n a_n e_n, \sum_m b_m e_m\right) = \sum_{n,m} \tau(n - m)\, a_n \overline{b_m}$$

para toda $a, b \in l_0(\mathbb{Z})$.

Demostración. Dada una forma de Toeplitz $B : P \times P \to \mathbb{C}$ sea $\tau : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\tau(n) = B(e_n, e_0).$$

Entonces

$$\tau(n - m) = B(e_{n-m}, e_0) = B(S^m e_{n-m}, S^m e_0) = B(e_n, e_m).$$

Por lo tanto

$$B\left(\sum_n a_n e_n, \sum_m b_m e_m\right) = \sum_n \sum_m a_n \overline{b_m}\, B(e_n, e_m) = \sum_{n,m} \tau(n - m)\, a_n \overline{b_m}.$$

Recíprocamente, supongamos que existe $s : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ tal que

$$B\left(\sum_n a_n e_n, \sum_m b_m e_m\right) = \sum_{n,m} \tau(n - m)\, a_n \overline{b_m}$$

para toda $a, b \in l_0(\mathbb{Z})$.

Sean $f, g \in P$ dadas por

$$f = \sum_n c_n e_n \qquad\qquad g = \sum_m d_m e_m$$

con $c, d \in l_0(\mathbb{Z})$.

Entonces

$$B(Sf,Sg) = B\left(S\left(\sum_n c_n e_n\right), S\left(\sum_m d_m e_m\right)\right) = B\left(\left(\sum_n c_n S e_n\right), \left(\sum_m d_m S e_m\right)\right)$$
$$= B\left(\left(\sum_n c_n e_{n+1}\right), \left(\sum_m d_m e_{m+1}\right)\right) = B\left(\left(\sum_n c_{n-1} e_n\right), \left(\sum_{m-1} d_{m-1} e_m\right)\right)$$

Luego

$$\begin{aligned} B(Sf,Sg) &= \sum_{n,m} \tau(n-m)\, c_{n-1}\overline{d_{m-1}} \\ &= \sum_{n,m} \tau(n-1-(m-1))\, c_{n-1}\overline{d_{m-1}} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$B(Sf,Sg) = \sum_{n',m'} \tau(n'-m')\, c_{n'}\overline{d_{m'}} = B\left(\sum_{n'} c_{n'} e_{n'}, \sum_{m'} d_{m'} e_{m'}\right) = B(f,g)$$

De donde

$$B(Sf,Sg) = B(f,g)$$

para todo $(f,g) \in P \times P$. Es decir, B es una forma de Toeplitz. □

PROPOSICIÓN 3.26. *Una forma B es Toeplitz si y sólo si existe un funcional $L : P \to \mathbb{C}$ tal que $B = B_L$ donde*

$$B_L(f,g) = L(f\overline{g}).$$

DEMOSTRACIÓN. Dada una forma de Toeplitz B sea $L : P \to \mathbb{C}$ dada por

$$L\left(\sum_n a_n e_n\right) = \sum_n a_n B(e_n, e_0)$$

para $a \in l_0(\mathbb{Z})$. En particular

$$L(e_n) = B(e_n, e_0),$$

$$L(e_{n-m}) = B(e_{n-m}, e_0) = B(S^m e_{n-m}, S^m e_0) = B(e_n, e_m).$$

Sean $f, g \in P$ dadas por

$$f = \sum_n a_n e_n \qquad\qquad g = \sum_m b_m e_m.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
B(f,g) &= B\left(\sum_n a_n e_n, \sum_m b_m e_m\right) = \sum_n \sum_m a_n \overline{b_m}\, B(e_n, e_m) \\
&= \sum_n \sum_m a_n \overline{b_m}\, L(e_{n-m}) = L\left(\sum_n \sum_m a_n \overline{b_m} e_{n-m}\right) \\
&= L\left(\left(\sum_n a_n e_n\right)\left(\sum_m \overline{b_m e_m}\right)\right) = L(f\overline{g}) \\
&= B_L(f,g).
\end{aligned}$$

Recíprocamente, suponga que existe un funcional $L : P \to \mathbb{C}$ tal que $B = B_L$ donde $B_L(f,g) = L(f\overline{g})$.

Sean $(f,g) \in P \times P$, como $e_1\overline{e_1} = 1$ entonces

$$B(Sf, Sg) = B_L(Sf, Sg) = L(Sf\overline{Sg}) = L(e_1 f\overline{e_1 g}) = L(f\overline{g}) = B_L(f,g) = B(f,g).$$

Por lo tanto B es una forma de Toeplitz. $\square$

En resumen:

(1) Un núcleo K es definido positivo, si la forma correspondiente, B_K, es una forma positiva.

(2) La sucesión $s : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ es definida positiva si lo es el núcleo $K : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ dado por

$$K(n,m) = s(n-m).$$

(3) Una forma de Toeplitz $B : P \times P \to \mathbb{C}$ es positiva si y sólo si existe una medida $\mu \geq 0$ tal que $B = B_\mu$ es decir

$$B(f,g) = \mu(f\overline{g}).$$

(4) Un núcleo de Toeplitz $K : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ es definido positivo si y sólo si existe una medida $\mu \geq 0$ tal que

$$K(n,m) = \widehat{\mu}(n-m)$$

para todo $m, n \in \mathbb{Z}$

(5) Una sucesión $s : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ es definida positiva si y sólo si existe una medida $\mu \geq 0$ tal que

$$s(n) = \widehat{\mu}(n)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Observación 3.27. Si E es un espacio vectorial y si $B : E \times E \to \mathbb{C}$ es una forma sesquilineal positiva, $B(f, f) \geq 0$ para todo $f \in E$, entonces

$$(f, g)_B = B(f, g)$$

tiene todas las propiedades de un producto interior, salvo que $B(f, f)$ puede ser 0 sin que f lo sea. En particular vale la desigualdad de Schwartz:

$$|B(f, g)| \leq B(f, f)^{\frac{1}{2}} B(g, g)^{\frac{1}{2}}$$

y $\|f\|_B = B(f, f)^{\frac{1}{2}}$ es una seminorma.

CAPíTULO 4

Núcleos Aproximadamente Toeplitz

En este capítulo queremos definir un nuevo tipo de núcleo al que hemos denominado núcleo aproximadamente Toeplitz.

Como en capítulos anteriores H será un espacio de Hilbert separable.

Sea $K : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ un núcleo definido positivo, si existe $\{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset H$ tal que

$$K(n, m) = \langle g_n, g_m \rangle$$

se define el *espacio de Hilbert generado por el núcleo* K de la siguiente manera

$$H_K := \overline{span}\{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

En este caso se tiene que la sucesión $\{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es total en H_K.

Observación 4.1. Sean $\mathbf{F}$ y $\mathbf{F}(r)$ como en el Capítulo 2. Se sabe que dado $\tau \in \mathbf{F}$, existe una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset H$ tal que

$$\langle f_n, f_m \rangle = \tau(n - m)$$

y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ total en un subespacio de H. Luego τ define una forma sesquilineal

$$B(f, g) = \langle f, g \rangle_\tau$$

en H_τ donde H_τ está inyectado en H, de modo que

$$B(f, g) = \langle f, g \rangle.$$

Éste es un producto eventualmente degenerado ya que $\langle f, g \rangle$ induce una seminorma.

Definición 4.2. Sean $K : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ un núcleo. Diremos que K es *aproximadamente Toeplitz* si existen $\tau : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ y dos constantes A, B con $0 < A \leq B$ tales que

$$A \sum_{j=p}^{q} \sum_{l=p}^{q} a_j \overline{a_l}\, \tau(j - l) \leq \sum_{j=p}^{q} \sum_{l=p}^{q} a_j \overline{a_l}\, K(j, l) \leq B \sum_{j=p}^{q} \sum_{l=p}^{q} a_j \overline{a_l}\, \tau(j - l)$$

para toda sucesión finita de escalares $\{a_n\}_{n=p}^{q}$.

DEFINICIÓN 4.3. Sean $K : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ un núcleo. Diremos que K es *aproximadamente Toeplitz de tipo positivo* si existen $\tau : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ definida positiva y dos constantes A, B con $0 < A \leq B$ tales que

$$A \sum_{j=p}^{q} \sum_{l=p}^{q} a_j \overline{a_l}\, \tau(j-l) \leq \sum_{j=p}^{q} \sum_{l=p}^{q} a_j \overline{a_l}\, K(j,l) \leq B \sum_{j=p}^{q} \sum_{l=p}^{q} a_j \overline{a_l}\, \tau(j-l)$$

para toda sucesión finita de escalares $\{a_n\}_{n=p}^{q}$.

Si además $\dim H_K = r$ y $\tau \in \mathbf{F}(r)$ diremos que K tiene dimensión asociada r.

EJEMPLO 4.4. Sean $X = \{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ un proceso estocástico en $L^2(P)$ y $H(X)$ el espacio de Hilbert generado por el proceso X, es decir,

$$H(X) := \overline{span}\{X_n : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq L^2(P).$$

Sea $r = \dim H(X)$, se dice que X es *aproximadamente estacionario* (ver [**20**]) si existen $\tau : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $\tau \in \mathbf{F}(r)$ y dos constantes A, B, $0 < A \leq B$ tales que

$$A \sum_{k=p}^{q} \sum_{l=p}^{q} a_k \overline{a_l}\, \tau(k-l) \leq \sum_{k=p}^{q} \sum_{l=p}^{q} a_k \overline{a_l}\, \langle X_k, X_l \rangle_{L^2(P)} \leq B \sum_{k=p}^{q} \sum_{l=p}^{q} a_k \overline{a_l}\; \tau(k-l)$$

para toda sucesión finita de escalares $\{a_n\}_{n=p}^{q}$.

Por lo tanto, la función de covarianza de X es un núcleo aproximadamente Toeplitz de tipo positivo.

PROPOSICIÓN 4.5.

(a) *Si K es un núcleo de Toeplitz, entonces K es aproximadamente Toeplitz.*

(b) *Si K es un núcleo de Toeplitz definido positivo, entonces K es aproximadamente Toeplitz de tipo positivo.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $K : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ un núcleo de Toeplitz definido positivo y $\{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset H$ una sucesión total en H_K tal que

$$K(n,m) = \langle g_n, g_m \rangle.$$

Como K es un núcleo de Toeplitz, existe $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $h \in \mathbf{F}(r)$, donde $r = \dim H_K$, tal que

$$K(n,m) = h(n-m) = \langle g_n, g_m \rangle$$

por otra parte tenemos que

$$\left\langle \sum_{n=p}^{q} a_n g_n, \sum_{m=p}^{q} a_m g_m \right\rangle = \sum_{n=p}^{q}\sum_{m=p}^{q} a_n \overline{a_m} \langle g_n, g_m \rangle = \sum_{n=p}^{q}\sum_{m=p}^{q} a_n \overline{a_m} h(n-m)$$

para toda sucesión finita de escalares $\{a_n\}_{n=p}^{q}$ y se cumple que K es aproximadamente Toeplitz, tomando $A = B = 1, \tau = h$. □

PROPOSICIÓN 4.6. *Si K es aproximadamente Toeplitz de tipo positivo, entonces existe un núcleo de Toeplitz definido positivo K_τ y constantes A, B con $0 < A \leq B$ tales que*

$$A \sum_{j=p}^{q}\sum_{l=p}^{q} a_j \overline{a_l}\, K_\tau(j,l) \leq \sum_{j=p}^{q}\sum_{l=p}^{q} a_j \overline{a_l}\, K(j,l) \leq B \sum_{j=p}^{q}\sum_{l=p}^{q} a_j \overline{a_l}\, K_\tau(j,l)$$

para toda sucesión finita de escalares $\{a_n\}_{n=p}^{q}$

DEMOSTRACIÓN. Sea $r = \dim H_K$, como K es aproximadamente Toeplitz de tipo positivo entonces existe $\tau : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $\tau \in \mathbf{F}(r)$ y dos constantes A, B con $0 < A \leq B$ tales que

$$A \sum_{j=p}^{q}\sum_{l=p}^{q} a_j \overline{a_l}\, \tau(j-l) \leq \sum_{j=p}^{q}\sum_{l=p}^{q} a_j \overline{a_l}\, K(j,l) \leq B \sum_{j=p}^{q}\sum_{l=p}^{q} a_j a_l\, \tau(j-l).$$

Ahora por la definición de $\mathbf{F}(r)$ sabemos que dado $\tau \in \mathbf{F}$ existe una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ en H tal que

$$\langle f_n, f_m \rangle = \tau(n-m)$$

y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ total en un subespacio de dimensión r de H. Sea $K_\tau(j,l) = \tau(j-l)$ entonces

$$\sum_{j=p}^{q}\sum_{l=p}^{q} a_j \overline{a_l}\, K_\tau(j,l) = \sum_{j=p}^{q}\sum_{l=p}^{q} a_j \overline{a_l}\, \tau(j-l) = \sum_{j=p}^{q}\sum_{l=p}^{q} a_j \overline{a_l} \langle f_j, f_l \rangle = \left\| \sum_{j=p}^{q} a_j f_j \right\|^2 \geq 0.$$

Por lo tanto K_τ es definido positivo y Toeplitz. Además se cumple

$$A \sum_{j=p}^{q}\sum_{l=p}^{q} a_j \overline{a_l}\, K_\tau(j,l) \leq \sum_{j=p}^{q}\sum_{l=p}^{q} a_j \overline{a_l} K(j,l) \leq B \sum_{j=p}^{q}\sum_{l=p}^{q} a_j a_l\, K_\tau(j,l)$$

para toda sucesión finita de escalares $\{a_n\}_{n=p}^{q}$ y $0 < A \leq B$. □

1. Núcleos equivalentes.

DEFINICIÓN 4.7. Sean $K_1 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $K_2 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ núcleos definidos positivos y sean $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $\{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sucesiones en H con $H_{K_1} = \overline{span}\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $H_{K_2} = \overline{span}\{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y además

$$K_1(n,m) = \langle f_n, f_m\rangle, \qquad K_2(n,m) = \langle g_n, g_m\rangle.$$

Se dice que K_1 y K_2 son *núcleos equivalentes* si se existe un operador lineal, acotado e invertible $\psi : H_{K_1} \to H_{K_2}$ tal que

$$\psi(f_n) = g_n$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

OBSERVACIÓN 4.8. Es claro que si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es total en H_{K_1}. Entonces $\{\psi(f_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es total en H_{K_2},

$$K_2(n,m) = \langle \psi(f_n), \psi(f_m)\rangle.$$

En analogía con la equivalencia entre las bases de Riesz y las bases ortonormales (ver Proposición 1.27) se tiene lo siguiente.

TEOREMA 4.9. *Un núcleo $K : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ es aproximadamente Toeplitz si y sólo si existe un núcleo de Toeplitz $K_\tau : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ tal que K y K_τ son equivalentes.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos $K : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ es un núcleo aproximadamente Toeplitz. Sea $r = \dim H_K$ entonces existe una función $\tau \in \mathbf{F}(r)$, $\tau : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ y dos constantes A, B con $0 < A \leq B$ tales que

$$A\sum_{j=p}^{q}\sum_{l=p}^{q} a_j\overline{a_l}\,\tau(j-l) \leq \sum_{j=p}^{q}\sum_{l=p}^{q} a_j\overline{a_l}K(j,l) \leq B\sum_{j=p}^{q}\sum_{l=p}^{q} a_j\overline{a_l}\,\tau(j-l)$$

para toda sucesión finita de escalares $\{a_n\}_{n=p}^{q}$.

De la definición de los conjuntos $\mathbf{F}$ y $\mathbf{F}(r)$ garantizamos la existencia de una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset H$ total en un subespacio de dimensión r de H para la cual se cumple $\tau : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ y

$$\tau(n-m) = \langle f_n, f_m\rangle.$$

Por lo tanto de la desigualdad anterior se sigue que

$$A\left\langle \sum_{j=p}^{q} a_j f_j, \sum_{l=p}^{q} a_l f_l \right\rangle \leq \sum_{j=p}^{q}\sum_{l=p}^{q} a_j \overline{a_l} K(j,l) \leq B\left\langle \sum_{j=p}^{q} a_j f_j, \sum_{l=p}^{q} a_l f_l \right\rangle$$

o equivalentemente

$$A\left\| \sum_{j=p}^{q} a_j f_j \right\|^2 \leq \sum_{j=p}^{q}\sum_{l=p}^{q} a_j \overline{a_l} K(j,l) \leq B\left\| \sum_{j=p}^{q} a_j f_j \right\|^2$$

Definamos el operador $\psi : span\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \to H_K$ mediante

$$\psi\left(\sum_{n=p}^{q} a_n f_n \right) = \sum_{n=p}^{q} a_n g_n$$

donde $\{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset H_K$. Se sigue que $\psi(f_n) = g_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Se probará que ψ es un operador lineal y acotado.

A continuación se probará la linealidad.

Sean $\{a_n\}_{n=p}^{q}$, $\{a'_n\}_{n=p}^{q}$ sucesiones finitas de escalares y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

$$\begin{aligned}\psi\left(\sum_{n=p}^{q} (a_n + \lambda a'_n) f_n \right) &= \sum_{n=p}^{q} (a_n + \lambda a'_n) g_n \\ &= \sum_{n=p}^{q} a_n g_n + \lambda \sum_{n=p}^{q} a'_n g_n \\ &= \psi\left(\sum_{n=p}^{q} a_n f_n \right) + \lambda\psi\left(\sum_{n=p}^{q} a'_n f_n \right)\end{aligned}$$

y se tiene la linealidad.

A continuación se probará la continuidad.

$$\begin{aligned}\left\| \psi\left(\sum_{n=p}^{q} a_n f_n \right) \right\|^2 &= \left\| \sum_{n=p}^{q} a_n \psi(f_n) \right\|^2 = \left\| \sum_{n=p}^{q} a_n g_n \right\|^2 \\ &= \left\langle \sum_{n=p}^{q} a_n g_n, \sum_{l=p}^{q} a_l g_l \right\rangle = \sum_{n=p}^{q}\sum_{l=p}^{q} a_n \overline{a_l} \langle g_n, g_l \rangle \\ &\leq B \sum_{n=p}^{q}\sum_{l=p}^{q} a_n \overline{a_l}\, \tau(n-l) = B \left\| \sum_{n=p}^{q} a_n f_n \right\|^2.\end{aligned}$$

Luego ψ es un operador lineal y acotado. Por lo tanto ψ es continuo.

Por otra parte se tiene que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es total en H_K, luego podemos extender este operador a todo H_K por continuidad, de la siguiente manera.

Para definir $\widetilde{\psi} : H_K = \overline{span}\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \to H_K$ tomamos $y \in \overline{span}\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Entonces existe $y_N \in span\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que

$$y = \lim_{N\to\infty} y_N.$$

Se define

$$\widetilde{\psi}(y) = \lim_{N\to\infty} \psi(y_N).$$

Se sigue que $\widetilde{\psi}(f_n) = \psi(f_n) = g_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Además por hipótesis se tiene que

$$\langle f_n, f_m\rangle = \tau(n-m),$$
$$\left\langle \widetilde{\psi}(f_n), \widetilde{\psi}(f_m)\right\rangle = \langle g_n, g_m\rangle = K(n,m).$$

Sea K_τ el núcleo dado por

$$K_\tau(n,m) = \tau(n-m).$$

Entonces

(1) K_τ es un núcleo de Toeplitz, $\{\widetilde{\psi}(f_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es total en H_K.

(2) Además

$$A\left\|\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n f_n\right\|^2 \leq \left\|\widetilde{\psi}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n f_n\right)\right\|^2 \leq B\left\|\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n f_n\right\|^2.$$

Se sigue que $\widetilde{\psi}$ es un operador lineal acotado superior e inferiormente y por lo tanto $\widetilde{\psi}$ es invertible, y además $\widetilde{\psi}(f_n) = g_n$. Lo anterior implica que K_τ y K son equivalentes.

Recíprocamente, supongamos K_τ es un núcleo de Toeplitz y que K_τ es equivalente a K, sean $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $\{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset H$,

$$K_\tau(n,m) = \langle f_n, f_m\rangle, \qquad K(n,m) = \langle g_n, g_m\rangle.$$

Como K_τ es equivalente a K, tenemos que existe un operador lineal acotado e invertible $\psi : H_\tau \to H_K$ tal que

$$\psi(f_n) = g_n$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$ con $\{\psi(f_n)\}$ total en H_K y $\{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset H$.

Sea $f = \sum_{n=p}^{q} a_n f_n \in H_\tau$ para una sucesión finita de escalares $\{a_n\}_{n=p}^{q}$. Como ψ es un operador lineal acotado e invertible, existen constantes positivas A, B con $A \leq B$ tales que

$$A\|f\| \leq \|\psi(f)\| \leq B\|f\|.$$

Luego

$$\begin{aligned} A^2 \left\| \sum_{n=p}^{q} a_n f_n \right\|^2 &= A^2 \sum_{n=p}^{q} \sum_{l=p}^{q} a_n \overline{a_l} \langle f_n, f_l \rangle \leq \left\| \sum_{n=p}^{q} a_n g_n \right\|^2 \\ &= \sum_{n=p}^{q} \sum_{l=p}^{q} a_n \overline{a_l} \langle g_n, g_l \rangle \leq B^2 \sum_{n=p}^{q} \sum_{l=p}^{q} a_n \overline{a_l} \langle f_n, f_l \rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto, existen constantes A', B' con $0 < A' \leq B'$ tales que

$$A' \sum_{n=p}^{q} \sum_{l=p}^{q} a_n \overline{a_l}\, \tau(n-l) \leq \sum_{n=p}^{q} \sum_{l=p}^{q} a_n \overline{a_l}\, K(n,l) \leq B' \sum_{n=p}^{q} \sum_{l=p}^{q} a_n \overline{a_l}\, \tau(n-l)$$

para toda sucesión finita de escalares $\{a_n\}_{n=p}^{q}$.

Luego K es aproximadamente Toeplitz. □

Dada τ se usará K_τ para denotar al núcleo dado por

$$K_\tau(n,m) = \tau(n-m).$$

Sea $r \in \mathbb{N}$ ó $r = \infty$, dado $K : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ definimos

$$\mathbf{F}(r,K) = \left\{ \begin{array}{c} \tau \in \mathbf{F}(r) : K_\tau \sim K \text{ y para toda } \{f_n\} \subset H, \\ K_\tau(n,m) = \langle f_n, f_m \rangle \end{array} \right\}$$

Proposición 4.10. *Sean H espacio de Hilbert de dimension infinita y separable, $\{f_n\}_n$, $\{f'_n\}_n$ sucesiones en H y $K : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $K' : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ núcleos aproximadamente Toeplitz no equivalentes tales que $H_K = H_{K'}$. Entonces*

$$\mathbf{F}(r,K) \cap \mathbf{F}(r,K') = \emptyset.$$

Demostración. Realizamos la prueba por reducción al absurdo.

Sean

$$\mathbf{F}(r,K) = \left\{ \begin{array}{c} \tau \in \mathbf{F}(r) : K_\tau \sim K \text{ y para toda } \{f_n\} \subset H, \\ K_\tau(n,m) = \tau(n-m) = \langle f_n, f_m \rangle \end{array} \right\}$$

$$\mathbf{F}\left(r, K'\right) = \left\{ \begin{array}{c} \tau' \in \mathbf{F}(r) : K_{\tau'} \sim K' \text{ y para toda } \{f'_n\} \subset H, \\ K_{\tau'}(n,m) = \tau'(n-m) = \langle f'_n, f'_m \rangle \end{array} \right\}.$$

Supongamos $\mathbf{F}(r, K)$ y $\mathbf{F}(r, K')$ dados de acuerdo a la hipótesis y

$$\mathbf{F}(r, K) \cap \mathbf{F}(r, K') \neq \emptyset.$$

Entonces existe $\tau \in \mathbf{F}(r, K) \cap (r, K')$, de donde $\tau \in \mathbf{F}(r, K)$ y $\tau \in \mathbf{F}(r, K')$.

Por la definición de $\mathbf{F}(r, K)$ y $\mathbf{F}(r, K')$ tenemos que $\tau \in \mathbf{F}(r)$ y además $K_\tau \sim K$, $K'_\tau \sim K$ y

$$K_\tau(n,m) = \tau(n-m) = \langle f_n, f_m \rangle = \langle f'_n, f'_m \rangle$$

para toda $\{f_n\}$, $\{f'_n\}$ en H.

Por la Proposición 2.5 se tiene que existe una isometría sobreyectiva $\Phi : H\{f_n\} \to H\{f'_n\}$ tal que

$$\Phi(f_n) = f'_n$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Por hipótesis también se tiene que

$$H_{K_\tau} = H_K = H_{K'}$$

y existen operadores lineales acotados e invertibles $\psi : H\{f_n\} \to H_K$ y $\psi' : H\{f'_n\} \to H'_K$ tales que $\psi(f_n) = g_n$ y $\psi'(f'_n) = g'_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Luego

$$\psi'(\Phi(\psi^{-1}(f_n))) = \psi'(\Phi(f_n)) = \psi'(f'_n) = g'_n.$$

Sea

$$\varphi = \psi' \Phi \psi^{-1}.$$

Entonces φ es un operador lineal acotado e invertible.

Luego K es equivalente a K' y esto es una contradicción. $\square$

Como es usual, se dice que K es un *núcleo acotado* cuando existe $M > 0$ tal que

$$|K(n,m)| \leq M.$$

Observación 4.11. Una buena pregunta respecto a los núcleos es la siguiente: ¿Son todos los núcleos acotados en H aproximadamente Toeplitz? Sean K y K_τ núcleos equivalentes, K un núcleo aproximadamente Toeplitz y K_τ un núcleo de Toeplitz. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sucesión en H, convergente en norma a un límite en H esto es $\|f_n\| \to f$ cuando $n \to \infty$. Además supongamos

$$K(n,m) = \langle f_n, f_m\rangle.$$

Es claro que K es un núcleo acotado, porque existe $M > 0$ tal que

$$|K(n,m)| = |\langle f_n, f_m\rangle| \leq \|f_n\|\|f_m\| \leq M$$

porque toda sucesión convergente es acotada.

Sea K_τ un núcleo de Toeplitz, $\{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sucesión en H y

$$K_\tau(n,m) = \langle g_n, g_m\rangle = \tau(n-m)$$

con $\tau : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$.

Supongamos además $\|g_n\| \to g$ cuando $n \to \infty$ con $g \in H$. Entonces

$$\tau(m) = \langle g_{n+m}, g_n\rangle \to \langle g, g\rangle,$$

cuando $n \to \infty$ para todo $m \in \mathbb{Z}$, por lo tanto τ es una función constante, de lo cual se tiene que $\{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión constante. Pero por hipótesis K es equivalente a K_τ, entonces existe un operador acotado e invertible $\psi : H_\tau \to H_K$ tal que $\psi(g_n) = f_n$.

De donde se tiene que $\{\psi(g_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión constante, de aquí K es constante. Por lo tanto existen núcleos acotados que no son aproximadamente Toeplitz.

2. Núcleos bi-Toeplitz.

Teorema 4.12. *Sea $K : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ un núcleo y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión en H.*

Si K es aproximadamente Toeplitz con $K(n,m) = \langle f_n, f_m\rangle$. Entonces para cualquier $\tau \in \mathbf{F}(r,K)$, existe una única sucesión $\{g_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset H_K$ tal que

$$\langle f_n, g_m\rangle = \tau(n-m)$$

para todo $n, m \in \mathbb{Z}$.

Además el núcleo $G : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ con $G(n,m) = \langle g_n, g_m\rangle$ es también aproximadamente Toeplitz. En este caso diremos que (F,G) es un par de núcleos bi-Toeplitz.

DEMOSTRACIÓN. Existencia

Como K es aproximadamente Toeplitz, por el Teorema 4.9, existe $K_\tau : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ Toeplitz, tal que K y K_τ son equivalentes.

Ahora por definición de núcleos equivalentes se tiene que existe un operador lineal, acotado e invertible $\psi : H_K \to H_\tau$ tal que $\{\psi(f_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es total en H_K y además, $\psi(f_n) = g_n$,

$$K_\tau(n, m) = \langle g_n, g_m \rangle = \langle \psi(f_n), \psi(f_m) \rangle.$$

Por otra parte, $\tau \in \mathbf{F}(r, K)$ y por la definición de $\mathbf{F}(r, K)$ tenemos que $K_\tau \sim K$ y

$$K_\tau(n, m) = \langle g_n, g_m \rangle = \tau(n - m)$$

para todo $n, m \in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto para todo $n, m \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$\langle f_n, \psi^*\psi(f_m) \rangle = \langle \psi(f_n), \psi(f_m) \rangle = K_\tau(n, m) = \tau(n - m).$$

Tomando

$$g_m = \psi^*\psi f_m$$

para todo $m \in \mathbb{Z}$, se sigue la existencia de $\{g_m\} \subset H_K$ tal que

$$\langle f_n, g_m \rangle = \tau(n - m).$$

Unicidad

Supongamos que existiese otra sucesión $\{g'_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ con la propiedad, esto es

$$\langle f_n, g_m \rangle = \langle f_n, g'_m \rangle = \tau(n - m)$$

para todo $n, m \in \mathbb{Z}$.

Sean $n, m \in \mathbb{Z}$, con m fijo. Entonces

$$\langle f_n, g_m \rangle - \langle f_n, g'_m \rangle = 0,$$

luego

$$\langle f_n, g_m - g'_m \rangle = 0$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. De donde $g_m - g'_m = 0$ y así $g_m = g'_m$.

Por tanto se tiene la unicidad de la sucesión $\{g_m\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset H_K$. $\square$

3. Condiciones para que un núcleo sea aproximadamente Toeplitz.

Sea $K : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ un núcleo, supongamos K bastante cercano, en algún sentido, a un núcleo Toeplitz K_τ.

¿Bajo qué condiciones K es aproximadamente Toeplitz?

La respuesta a la pregunta anterior la suministra el siguiente teorema, el cual muestra un resultado similar al teorema de Paley-Wiener [**16**] (ver también [**21**, p. 38]) y a un resultado de Strandell [**20**] referente a procesos estocásticos aproximadamente estacionarios.

Teorema 4.13. *Sean $K : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ un núcleo, $\tau : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ una sucesión definida positiva. Sean $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y $\{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ dos sucesiones en H tales que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es total en H_τ y $\{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es total en H_K tales que*

$$\langle f_n, f_m \rangle = \tau(n-m), \qquad \langle g_n, g_m \rangle = K(n,m).$$

Si existe $\lambda \in (0,1)$ tal que

$$\left\| \sum_{n=p}^{q} a_n (f_n - g_n) \right\|_\tau^2 \leq \lambda^2 \sum_{k=p}^{q} \sum_{l=p}^{q} a_k \overline{a_l}\, \tau(k-l)$$

para toda sucesión finita de escalares $\{a_n\}_{n=p}^{q}$ entonces K es aproximadamente Toeplitz.

Demostración. Sean $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subseteq H$, $K_\tau : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $K : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ núcleos dados por

$$K_\tau(n,m) = \langle f_n, f_m \rangle = \tau(n-m) \qquad \text{y} \qquad K(n,m) = \langle g_n, g_m \rangle.$$

Definamos el operador $\psi : span\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \to H_K$, donde

$$\psi \left(\sum_{n=p}^{q} a_n f_n \right) = \sum_{n=p}^{q} a_n (f_n - g_n)$$

para toda sucesión finita de escalares $\{a_n\}_{n=p}^{q}$.

Dado que

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=p}^{q} a_n f_n\right\|^2 &= \left\langle \sum_{n=p}^{q} a_n f_n, \sum_{l=p}^{q} a_l f_l \right\rangle \\ &= \sum_{n=p}^{q}\sum_{l=p}^{q} a_n \overline{a_l} \langle f_n, f_l\rangle \\ &= \sum_{n=p}^{q}\sum_{l=p}^{q} a_n \overline{a_l}\, \tau(n-l).\end{aligned}$$

A continuación se probará que

(a) ψ es un operador lineal.

(b) ψ es un operador acotado.

Veámoslo.

(a) Sean $\beta \in \mathbb{C}$, $f, h \in span\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ dadas por

$$f = \sum_{n=p}^{q} a_n f_n, \qquad h = \sum_{n=p}^{q} a'_n f_n$$

para unas sucesiones finitas $\{a_n\}$ y $\{a'_n\}$. Entonces

$$\psi(f+\beta h) = \psi\left(\sum_{n=p}^{q} (a_n + \beta a'_n) f_n\right) = \sum_{n=p}^{q} (a_n + \beta a'_n)(f_n - g_n) = \psi(f) + \beta\psi(h).$$

(b) Se tiene que

$$\begin{aligned}\left\|\psi\left(\sum_{n=p}^{q} a_n f_n\right)\right\|^2 &= \left\|\sum_{n=p}^{q} a_n (f_n - g_n)\right\|^2 \\ &\le \lambda^2 \sum_{k=p}^{q}\sum_{l=p}^{q} a_k \overline{a_l}\, \tau(k-l) \\ &= \lambda^2 \left\|\sum_{n=p}^{q} a_n f_n\right\|^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left\|\psi\left(\sum_{n=p}^{q} a_n f_n\right)\right\| \le |\lambda| \left\|\sum_{n=p}^{q} a_n f_n\right\|$$

y así ψ es un operador acotado.

Además

$$\|\psi\| \le |\lambda| < 1.$$

Por lo anterior ψ es un operador continuo. Entonces puede extenderse de manera continua de la siguiente forma $\widetilde{\psi} : H_\tau \to H_K$.

Por otra parte, como $\|\psi\| \leq |\lambda| < 1$ se tiene que

$$\|\widetilde{\psi}\| \leq |\lambda| < 1.$$

Definamos el operador $I - \widetilde{\psi} : \ H_\tau \to H_K$ mediante

$$\sum_{n=p}^{q} a_n f_n \to \left(I - \widetilde{\psi}\right)\left(\sum_{n=p}^{q} a_n f_n\right).$$

Observemos que

$$\begin{aligned}\left(I - \widetilde{\psi}\right)\left(\sum_{n=p}^{q} a_n f_n\right) &= \sum_{n=p}^{q} a_n f_n - \widetilde{\psi}\left(\sum_{n=p}^{q} a_n f_n\right)\\ &= \sum_{n=p}^{q} a_n f_n - \sum_{n=p}^{q} a_n f_n + \sum_{n=p}^{q} a_n g_n\\ &= \sum_{n=p}^{q} a_n g_n.\end{aligned}$$

Tenemos que I y $\widetilde{\psi}$ son operadores acotados, miremos que $I - \widetilde{\psi}$ también lo es. En efecto, sea $f \in H_\tau$, entonces

$$\begin{aligned}\|f\| - \left\|\widetilde{\psi}\right\| \|f\| &\leq \|I(f)\| - \left\|\widetilde{\psi}(f)\right\|\\ &\leq \left\|\left(I - \widetilde{\psi}\right)(f)\right\|\\ &\leq \|I(f)\| + \left\|\widetilde{\psi}(f)\right\|\\ &\leq \|f\| + \left\|\widetilde{\psi}\right\| \|f\|.\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\|f\|\left(1 - \left\|\widetilde{\psi}\right\|\right) &\leq \left\|\left(I - \widetilde{\psi}\right)(f)\right\|\\ &\leq \left(1 + \left\|\widetilde{\psi}\right\|\right)\|f\|.\end{aligned}$$

Sean $M = 1 + \left\|\widetilde{\psi}\right\|$, $m = 1 - \left\|\widetilde{\psi}\right\|, \|\widetilde{\psi}\| < 1$.

Luego existen constantes $M, m > 0, M \geq m$ tal que

$$m\|f\| \leq \left\|\left(I - \widetilde{\psi}\right)(f)\right\| \leq M\,\|f\|.$$

Y así $I - \widetilde{\psi}$ es un operador acotado superior e inferiormente, por lo tanto $I - \widetilde{\psi}$ es invertible. Además, dado que

$$\left(I - \widetilde{\psi}\right)(f_n) = g_n$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Esto implica que K y K_τ son equivalentes.

Por lo tanto, aplicando el Teorema (4.9) se tiene que K es aproximadamente Toeplitz. $\square$

Bibliografía

[1] N. Akiezer I. Glazman, Theory of linear operators in Hilbert space, Trans. from the Russian(Two volumes bound as one), Repr. of the 1961 and 1963 transl, New York, NY: Dover Publications, xiv, 147, iv, 1993.

[2] C. Berg, J. P. Christensen, P Ressel, Harmonic Analysis on semigroups. Springer - Verlag, New York, 1984. Citado en página(s) 37

[3] N. L. Carotheres, A Short course on Banach Space Theory, Department of Mathematics and statics, Bowling Green state University, Summer, 2000. Citado en página(s) 10, 11, 13

[4] T. Constantinescu, Schur Parameters, Factorization and Dilation Problems, Birkhäuser Verlag, 1996.

[5] M. Cotlar, R. Bruzual, P. Alegría, M. Domínguez, J. Giménez y S. Marcantognini. *Extensión y Representación de Formas Invariantes en la Teoría de Interpolación, Predicción y Dilatación.* Tercera Escuela Venezolana de Matemáticas (1990).

[6] M. Cotlar, A. Maestripieri, Representaciones de Fourier, Factorizaciones Triangulares y operadores diferenciales canónicos, Universidad Central de Venezuela, 2004.

[7] M. Cotlar, C. Sadosky. *On the Helson-Szegö theorem and a related class of modified Toeplitz kernels.* Proc. Symp. Pure Math. AMS., **35-I**, (1979), pp. 383–407.

[8] L. Debnath, P. Mikusinski, Hilbert spaces with a applications, Third Edition, Academic Press, 2000.

[9] R. Douglas, Banach álgebra techniques in operator theory. Academic press, 1972.

[10] H. Dym, H. P. Mc Kean, Fourier series and integrals, Academic Press, 1972.

[11] S. Hanai, On Biorthogonal system in Banach spaces, Nagaoka Technical College, Comm. by S. Kakeya, M.I.A., oct. 12 1944, vol. 20. Citado en página(s) 9

[12] I. A. Ibragimov, Y. A. Rozanov, Gaussian Processes, Applications of Mathematics 9, Springer Verlag 1978.

[13] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I.* Springer Verlag, 1977. Citado en página(s) 8

[14] A. G. Miamee, M. Pourahmadi, Degenerate multivariate stationary processes: Basicity, past and future, and autoregressive representation, Sankhya, Ser. A 49, No. 3, 316-334, 1987.

[15] B. Sz. Nagy, C. Foias, Harmonic analysis of operators on Hilbert space, North Holland Publishing Co. 1970.

[16] R. Paley, N. Wiener, Fourier transforms in the comple domain , Am. Math. Soc. Colloq. Publ. Vol. 19. Am. Math. Soc., New York, 1934. Citado en página(s) 7, 24, 63

[17] W. Rudin, Fourier analysis on groups, Interscience, 1962.

[18] C. Sadosky, Lifting of Kernels shift-invariont in scattering systems, Holormorphic space, MSRI publications, volume 33, 1998.

[19] Z. Sasvári, Positive definite and definitizable functions, Akademie Verlag, 1994.

[20] G. Strandell, Stationary in Hilbert spaces, U.U.D.M. Report 2001:31, ISSN 1101-3591, Department of Mathematics, Uppsala University, 2001. Citado en página(s) 7, 54, 63

[21] R. M. Young, An introduction to Nonharmonic Fourier Series, Academic Press, New York, 1980. Citado en página(s) 7, 14, 17, 25, 63