UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
POSTGRADO EN MATEMÁTICA

EXTENSIONES UNITARIAS DE ISOMETRÍAS PARCIALES

Autor: MSc. Nieves Amoretti.
Tutor: Dra. Marisela Domínguez.

Tesis Doctoral presentada ante la ilustre Universidad Central de Venezuela para optar al título de Doctor en Ciencias, Mención Matemática.

Caracas, Venezuela
Julio de 2009

Dedicatoria

A Mis Padres.

Agradecimiento

Mi especial agradecimiento a la Dra. Marisela Domínguez por su constante e invalorable asesoría en la realización de este trabajo.

Gracias a Ramón Bruzual y a Marisela Domínguez por la excelente coordinación del Seminario de Análisis.

A Alberto, Marta y Edurne por su paciencia, amor y apoyo.

Al Instituto Pedagógico de Miranda J. M. Siso Martínez (UPEL) por brindarme su colaboración.

Gracias al Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico de la Universidad Central de Venezuela por su colaboración en la edición de este trabajo.

Índice general

Resumen 1

Introducción 2

Capítulo 1. Extensiones unitarias de una isometría parcial y el modelo de Arov-Grossman 4

1. Extensiones unitarias de una isometría parcial 5
2. La clase de Schur 15
3. El modelo de Arov-Grossman 15

Capítulo 2. Extensiones unitarias de dos isometrías parciales 19

1. Conmutatividad débil de isometrías parciales 20

Capítulo 3. Familias multiplicativas de isometrías parciales y ternas de Toeplitz-Cotlar 22

1. Grupos ordenados 23
2. Familias multiplicativas de isometrías parciales 23

Capítulo 4. Extensiones unitarias de familias multiplicativas de isometrías parciales y parametrización 3

1. Extensiones unitarias de isometrías parciales 33
2. Parametrización de extensiones unitarias de isometrías parciales 42

Bibliografía 52

Resumen

Dada una familia multiplicativa de isometrías parciales en el plano discreto con el orden lexicográfico, existen dos operadores especiales A y B que conmutan en cierto sentido débil.

Se da una condición suficiente para que una familia particular de operadores unitarios sea una extensión unitaria de la familia multiplicativa de isometrías parciales dada. Bajo esta condición se presenta una descripción del conjunto de las extensiones.

También se describe el conjunto de todas las extensiones unitarias conmutativas minimales de cualquier par de isometrías parciales que conmutan en el mismo sentido débil en que conmutan A y B.

Introducción

Esta tesis trata de problemas especiales relacionados con extensiones de pares de isometrías parciales a pares de operadores unitarios. Se consideran varios patrones para el par de isometrías parciales tales como conmutatividad o hipótesis especiales de inclusión concernientes a los dominios y los rangos.

Se presta especial atención a las familias multiplicativas de isometrías parciales parametrizadas por un grupo abeliano ordenado.

Un método poderoso en la teoría de extensiones unitarias de operadores isométricos fue creado por D. Z. Arov y L. Z. Grossman. Sus resultados fueron publicados por primera vez sin pruebas en [**5**] y luego con más detalles en [**6**].

El método de Arov-Grossman ha sido aplicado exitosamente en muchos contextos. En particular, el grupo fundado por M. Cotlar ha obtenido muchos resultados interesantes en esa dirección. Los trabajos de R. Arocena [**4**] y M. D. Morán [**15**] en extensiones unitarias de isometrías que conmutan son contribuciones esenciales en esa dirección.

R. Bruzual y M. Domínguez han publicado trabajos en esta línea de investigación [**7, 8**]. Considerando familias multiplicativas de isometrías parciales establecieron el teorema de levantamiento del conmutante correspondiente.

Los resultados más importantes de esta tesis doctoral encajan en la línea de investigación indicada antes y aparecerán en [**3**]. En este trabajo se hace uso sustancial del método de Arov-Grossman y de las ramificaciones dadas por M. D. Morán. Los resultados de esta tesis documentan el poder del modelo de Arov-Grossman el cual es uno de los más importantes métodos en el análisis de Schur.

Este trabajo comienza recordando la noción de extensión unitaria de una isometría parcial y el modelo de Arov-Grossman. Posteriormente se presentan las extensiones unitarias de dos isometrías parciales y algunas condiciones de conmutatividad débil. Luego se consideran familias multiplicativas de isometrías parciales y ternas de Toeplitz-Cotlar.

Estas nociones y resultados se presentan en los primeros capítulos, demostrando algunos resultados conocidos.

Los aportes principales de este trabajo se presentan en el Capítulo 4. Para un tratamiento auto-contenido de ese capítulo, en él se repiten algunas de las definiciones dadas en los capítulos anteriores.

A continuación se presentan los resultados de este trabajo.

Si $(S_{(n,m)})_{(n,m)\geq(0,0)}$ es una familia multiplicativa de isometrías parciales en $\mathbb{Z}^2$ con el orden lexicográfico, entonces $S_{(1,0)}$ y $S_{(0,1)}$ conmutan en cierto sentido débil. Sean $\widetilde{A}$ y $\widetilde{B}$ extensiones unitarias conmutativas de $S_{(1,0)}$ y $S_{(0,1)}$. Se da una condición suficiente para que $(\widetilde{A}^n\widetilde{B}^m)_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}$ sea una extensión unitaria de la familia dada. Bajo esta condición se presenta una descripción del conjunto de las extensiones.

También se describe el conjunto de todas las extensiones unitarias conmutativas minimales de cualquier par de isometrías parciales que conmutan en el mismo sentido débil en que conmutan $S_{(1,0)}$ y $S_{(0,1)}$.

Capítulo 1

Extensiones unitarias de una isometría parcial y el modelo de Arov-Grossman

Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$ y $\mathcal{E}$ subespacios de $\mathcal{H}$ y sea $\theta(z)$ una función a valores operadores en $L(\mathcal{M} \oplus \mathcal{E}, \mathcal{E} \oplus \mathcal{N})$.

En [**5, 6**] Arov y Grossman dieron una condición necesaria y suficiente para que $\theta(z)$ sea la matriz de scattering de algún operador isométrico V con subespacios de defecto $\mathcal{N}$ y $\mathcal{M}$ y con subespacio de escala $\mathcal{E}$.

En el caso en que V está definido en $\mathcal{H}$, las matrices de scattering $S_{U;\mathcal{E}}(z)$ de todas las dilataciones unitarias U de V con subespacio de escala $\mathcal{E}$ fueron descritas por una fórmula.

Sean $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ espacios de Hilbert y $L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ el espacio de los operadores lineales y acotados de $\mathcal{H}_1$ en $\mathcal{H}_2$. Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, se usará $L(\mathcal{H})$ para denotar a $L(\mathcal{H}, \mathcal{H})$.

Con $P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}$ se denotará la proyección ortogonal del espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ cuando $\mathcal{H}$ y $\mathcal{F}$ son subespacios de un espacio de Hilbert más grande, en particular cuando $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$. Si $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ y no hay posibilidad de confusión, se usará $P_{\mathcal{H}}$ en lugar de $P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}$.

Los espacios de Hilbert que se considerarán en este trabajo son separables.

Como es usual sean $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \approx [0, 2\pi)$ y $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

1. Extensiones unitarias de una isometría parcial

A continuación se presentan algunos antecedentes de esta investigación.

Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\mathcal{D}$ y $\mathcal{R}$ subespacios cerrados de $\mathcal{H}$. Se dice que $V : \mathcal{D} \to \mathcal{R}$ es una *isometría parcial* si $V\mathcal{D} = \mathcal{R}$ y

$$\|Vh\| = \|h\| \qquad \text{para todo } h \in \mathcal{D}$$

o equivalentemente,

$$\langle Vh, Vh' \rangle = \langle h, h' \rangle \qquad \text{para todo } h, h' \in \mathcal{D}.$$

Sea V una isometría parcial con dominio $\mathcal{D}$ y rango $\mathcal{R}$, subespacios cerrados de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Una *extensión unitaria* de V es un operador unitario U definido en un espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ el cual contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado tal que $U|_{\mathcal{D}} = V$.

La definición anterior está basada en el siguiente teorema.

Teorema 1.1. *Si $\mathcal{D}$, $\mathcal{R}$ son subespacios cerrados de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y $V : \mathcal{D} \to \mathcal{R}$ es una isometría en $\mathcal{H}$, entonces V puede ser extendida a un operador unitario U en un espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\mathcal{N}$ y $\mathcal{M}$ los complementos ortogonales de $\mathcal{D}$ y $\mathcal{R}$ respectivamente. Sea

$$\mathcal{F} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} = \mathcal{D} \oplus \mathcal{N} \oplus \mathcal{R} \oplus \mathcal{M}.$$

Se define el operador U en $\mathcal{F}$ mediante

$$U(d, n, r, m) = (V^{-1}r, n, Vd, m)$$

donde $d \in \mathcal{D}$, $n \in \mathcal{N}$, $r \in \mathcal{R}$ y $m \in \mathcal{M}$.

Se tiene que U es una extensión de V.

Se verá que U es una isometría.

$$\begin{aligned}\|(V^{-1}r, n, Vd, m)\|^2 &= \|V^{-1}r\|^2 + \|n\|^2 + \|Vd\|^2 + \|m\|^2 \\ &= \|r\|^2 + \|n\|^2 + \|d\|^2 + \|m\|^2 \\ &= \|(d, n, r, m)\|^2.\end{aligned}$$

De donde U es una isometría.

Ahora se probará que U es sobreyectiva. Dado $(d, n, r, m) \in \mathcal{F}$ se tiene que $(V^{-1}r, n, Vd, m) \in \mathcal{F}$. Luego

$$U(V^{-1}r, n, Vd, m) = (V^{-1}(Vd), n, V(V^{-1}r), m) = (d, n, r, m).$$

Por lo tanto U es sobreyectiva.

Luego U es unitario. □

Sea $\bigvee_{n\in\mathbb{Z}} U^n\mathcal{H}$ el espacio vectorial generado por $U^n\mathcal{H}$, con $n \in \mathbb{Z}$.

Una *extensión unitaria minimal* de V es una extensión unitaria U de Vtal que

$$\mathcal{F} = \bigvee_{n\in\mathbb{Z}} U^n\mathcal{H}.$$

Ejemplo 1.2. Sea

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \oplus L^2(\mathbb{T})$$

$$\mathcal{D} = \mathcal{R} = \mathbb{C} \oplus \{0\} \oplus L^2(\mathbb{T})$$

y sea $V = I_{\mathcal{D}}$. Se tiene que V es una isometría parcial.

Para cada $\xi \in \mathbb{T}$ se define

$$U_\xi(z, w, f) = (z, \xi w, f)$$

para cada $z, w \in \mathbb{C}$ y $f \in L^2(\mathbb{T})$.

A continuación se probará que U_ξ es unitario.

Se tiene que

$$\|U_\xi(z, w, f)\|^2_{\mathcal{H}} = \langle (z, \xi w, f), (z, \xi w, f) \rangle_{\mathcal{H}} = \xi\overline{\xi}\, \langle (z, w, f), (z, w, f) \rangle_{\mathcal{H}} = \|(z, w, f)\|^2_{\mathcal{H}}.$$

Por lo tanto U_ξ es una isometría.

Además U_ξ es sobreyectivo. En efecto, dado $(z, w, f) \in \mathcal{H}$ considérese $(z, \overline{\xi} w, f) \in \mathcal{H}$. Se tiene que

$$U_\xi(z, \overline{\xi} w, f) = (z, w, f).$$

De donde U_ξ es unitario.

Como

$$U_\xi(z, 0, f) = (z, 0, f) = V(z, 0, f)$$

sigue que $U_\xi|\mathcal{D} = V$.

Por lo tanto U_ξ es una extensión unitaria de V.

Además U_ξ es minimal ya que actúa en $\mathcal{H}$.

Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ espacios de Hilbert que contienen a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado. Dos extensiones unitarias minimales $U \in L(\mathcal{F})$ y $U' \in L(\mathcal{F}')$ se dice que son $\mathcal{H}$-*isomorfas* si existe un isomorfismo unitario φ de $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{F}'$ el cual deja invariante los elementos de $\mathcal{H}$ y satisface

$$\varphi\widetilde{U}^n = U'^{\,n}\varphi \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

A continuación se presenta una extensión unitaria especial de una isometría.

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Sean $\mathcal{D}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$ subespacios cerrados de $\mathcal{H}$ tales que $\mathcal{N}$ y $\mathcal{M}$ son los complementos ortogonales de $\mathcal{D}$ y $\mathcal{R}$ respectivamente. Sea $V : \mathcal{D} \to \mathcal{R}$ una isometría en $\mathcal{H}$.

Considérese el siguiente espacio de Hilbert

$$\mathcal{F} = \left\{ (f_j)_{j\in\mathbb{Z}} : \quad f_j \in \mathcal{M} \quad \text{si} \;\; j < 0, \quad f_0 \in \mathcal{H}, \quad f_j \in \mathcal{N} \quad \text{si} \;\; j > 0; \quad \sum_{j\in\mathbb{Z}} \|f_j\|^2 < \infty \right\}$$

con el producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle f_j, g_j \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Notación: Los elementos $f = (f_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ de $\mathcal{F}$ se escribirán de la forma

$$f = (..., f_{-1}, \overbrace{f_0}, f_1, ...),$$

usando la llave para indicar el lugar correspondiente a $j = 0$.

Tomando en cuenta al espacio $\mathcal{F}$ se puede identificar a $\mathcal{H}$ como subespacio de $\mathcal{F}$ mediante el conjunto

$$\{f \in \mathcal{F} : f_j = 0 \quad \text{si} \quad j \neq 0\}.$$

Así, $\mathcal{H}$ corresponde a los elementos de la forma

$$f = (..., 0, \overbrace{h}, 0, ...).$$

Se define $U : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ por

$$(Uf)_j = \begin{cases} f_{j-1}, & \text{si} \quad j < 0; \\ f_{-1} + VP_{\mathcal{D}} f_0, & \text{si} \quad j = 0; \\ P_{\mathcal{N}} f_0, & \text{si} \quad j = 1; \\ f_{j-1}, & \text{si} \quad j > 1; \end{cases}$$

con $f = (..., f_{-1}, \overbrace{f_0}, f_1, ...)$. Es decir,

$$Uf = (..., f_{-3}, f_{-2}, \overbrace{f_{-1} + VP_{\mathcal{D}} f_0}, P_{\mathcal{N}} f_0, f_1, f_2, ...).$$

Proposición 1.3. *Sean U y V los definidos anteriormente. Entonces U es extensión unitaria minimal de V y*

$$(VP_{\mathcal{D}})^n = P_{\mathcal{H}}U^n|_{\mathcal{H}} \qquad \text{para todo } n \geq 0.$$

Demostración. Primero se verá que U es una extensión de V. Sea $h \in \mathcal{D}$. Se tiene

$$U(...,0,\overbrace{\ h\ },0,...) = (...,0,\overbrace{VP_{\mathcal{D}}h},P_{\mathcal{N}}h,0,...) = (...,0,\overbrace{Vh},0,...).$$

De donde, $P_{\mathcal{H}}U|_{\mathcal{D}} = V$.

Para probar que U es unitario, basta probar que es isométrico y sobreyectivo.

A continuación se verá que U es isométrico.

$$\begin{aligned}
\|U(...,f_{-1},\overbrace{\ h\ },f_1,...)\|^2 &= \|(...,f_{-2},\overbrace{f_{-1}+VP_{\mathcal{D}}h},P_{\mathcal{N}}h,f_1,...)\|^2 \\
&= \sum_{n\leq -2}\|f_n\|^2 + \|f_{-1}+VP_{\mathcal{D}}h\|^2 + \|P_{\mathcal{N}}h\|^2 + \sum_{n\geq 1}\|f_n\|^2 \\
&= \sum_{n\leq -2}\|f_n\|^2 + \|f_{-1}\|^2 + \|VP_{\mathcal{D}}h\|^2 + \|P_{\mathcal{N}}h\|^2 + \sum_{n\geq 1}\|f_n\|^2 \\
&= \sum_{n\leq -1}\|f_n\|^2 + \|P_{\mathcal{D}}h\|^2 + \|P_{\mathcal{N}}h\|^2 + \sum_{n\geq 1}\|f_n\|^2 \\
&= \sum_{n\leq -1}\|f_n\|^2 + \|h\|^2 + \sum_{n\geq 1}\|f_n\|^2 = \|(...,f_{-1},\overbrace{\ h\ },f_1,...)\|^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto U es isométrico.

Ahora se verá que U es sobreyectivo. Dada $f = (...,f_{-1},\overbrace{\ h\ },f_1,...) \in \mathcal{F}$ se considera $f' = (...,f'_{-1},\overbrace{\ f'_0\ },f'_1,...)$ dada por

$$f'_n = \begin{cases} f_{n+1}, & \text{si} \quad n \leq -2; \\ P_{\mathcal{M}}h, & \text{si} \quad n = -1; \\ f_1 + V^*P_{\mathcal{R}}h, & \text{si} \quad n = 0; \\ f_{n+1}, & \text{si} \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
Uf' = U(...,f'_{-1},\overbrace{\ f'_0\ },f'_1,...) &= U(...,f_{-1},P_{\mathcal{M}}h,\overbrace{f_1+V^*P_{\mathcal{R}}h},f_2,...) \\
&= (...,f_{-1},\overbrace{P_{\mathcal{M}}h+VP_{\mathcal{D}}(f_1+V^*P_{\mathcal{R}}h)},P_{\mathcal{N}}(f_1+V^*P_{\mathcal{R}}h),f_2,...)
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$Uf' = (..., f_{-1}, \overbrace{P_{\mathcal{M}}h + VP_{\mathcal{D}}f_1 + VP_{\mathcal{D}}V^*P_{\mathcal{R}}h}, P_{\mathcal{N}}f_1 + P_{\mathcal{N}}V^*P_{\mathcal{R}}h, f_2, ...). \tag{1.1}$$

Pero, $VP_{\mathcal{D}}f_1 = 0$ y $P_{\mathcal{N}}f_1 = f_1$, ya que $f_1 \in \mathcal{N}$. Además, como $\mathcal{N}$ es el complemento ortogonal de $\mathcal{D}$ y $V^* : \mathcal{R} \to \mathcal{D}$ entonces $P_{\mathcal{N}}V^* = 0$.

Ahora se verá que $VP_{\mathcal{D}}V^* = VV^* = I_{\mathcal{R}}$, donde $I_{\mathcal{R}}$ es la identidad en $\mathcal{R}$.

La primera igualdad es obvia ya que $V^* : \mathcal{R} \to \mathcal{D}$. Se probará la segunda usando el hecho que si V es isometría siempre se cumple que $V^*V = I_{\mathcal{D}}$. Sea $g \in \mathcal{D}$ y $f = Vg$.

$$\langle f, VV^*f\rangle = \langle V^*f, V^*f\rangle = \langle V^*Vg, V^*Vg\rangle = \langle Vg, VV^*Vg\rangle = \langle Vg, Vg\rangle = \langle f, f\rangle,$$

de donde $VV^*f = f$ para todo $f \in \mathcal{R}$, es decir, $VV^* = I_{\mathcal{R}}$.

Luego, siguiendo con las igualdades de (1.1) se tiene

$$Uf' = (..., f_{-1}, \overbrace{P_{\mathcal{M}}h + P_{\mathcal{R}}h}, f_1, f_2, ...) = (..., f_{-1}, h, f_1, ...)$$

De donde, U es sobreyectivo.

A continuación se probará inductivamente que $P_{\mathcal{H}}U^n|_{\mathcal{H}} = (VP_{\mathcal{D}})^n$ para todo $n \geq 0$.

Se verá que la igualdad se cumple para $n = 1$. Ya se probó que $P_{\mathcal{H}}U|_{\mathcal{D}} = V = VP_{\mathcal{D}}|_{\mathcal{D}}$, es decir,

$$P_{\mathcal{H}}U|_{\mathcal{D}} = VP_{\mathcal{D}}|_{\mathcal{D}}.$$

Falta probar que $P_{\mathcal{H}}U|_{\mathcal{N}} = VP_{\mathcal{D}}|_{\mathcal{N}} = 0$.

Si $h \in \mathcal{N}$,

$$U(..., 0, \overbrace{\ h\ }, 0, ...) = (..., 0, \overbrace{VP_{\mathcal{D}}h}, P_{\mathcal{N}}h, 0, ...)$$

y como $P_{\mathcal{D}}h = 0$, entonces $P_{\mathcal{H}}U|_{\mathcal{N}} = 0$. Además, es obvio que $VP_{\mathcal{D}}|_{\mathcal{N}} = 0$. Luego

$$P_{\mathcal{H}}U|_{\mathcal{N}} = VP_{\mathcal{D}}|_{\mathcal{N}} = 0.$$

Por lo tanto, $P_{\mathcal{H}}U|_{\mathcal{H}} = VP_{\mathcal{D}}$, es decir, se cumple para $n = 1$.

Se supone que la igualdad se cumple para $n = k$ y se verá que es válida para $n = k + 1$. Como $P_{\mathcal{H}} + P_{\mathcal{F}\ominus\mathcal{H}} = I$ se tiene que

$$\begin{aligned}
P_{\mathcal{H}}U^{k+1}|_{\mathcal{H}} &= P_{\mathcal{H}}UP_{\mathcal{H}}U^{k}|_{\mathcal{H}} + P_{\mathcal{H}}UP_{\mathcal{F}\ominus\mathcal{H}}U^{k}|_{\mathcal{H}} \\
&= P_{\mathcal{H}}U|_{\mathcal{H}}(VP_{\mathcal{D}})^{k} + P_{\mathcal{H}}UP_{\mathcal{F}\ominus\mathcal{H}}U^{k}|_{\mathcal{H}} \\
&= VP_{\mathcal{D}}(VP_{\mathcal{D}})^{k} + P_{\mathcal{H}}UP_{\mathcal{F}\ominus\mathcal{H}}U^{k}|_{\mathcal{H}} \\
&= (VP_{\mathcal{D}})^{k+1} + P_{\mathcal{H}}UP_{\mathcal{F}\ominus\mathcal{H}}U^{k}|_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Se debe probar que $P_{\mathcal{H}}UP_{\mathcal{F}\ominus\mathcal{H}}U^{k}|_{\mathcal{H}} = 0$. Por inducción.
Para $k = 1$ se tiene

$$\begin{aligned}
P_{\mathcal{H}}UP_{\mathcal{F}\ominus\mathcal{H}}U(...,0,\overbrace{\;h\;},0,...) &= P_{\mathcal{H}}UP_{\mathcal{F}\ominus\mathcal{H}}(...,0,\overbrace{VP_{\mathcal{D}}h},P_{\mathcal{N}}h,0,...) \\
&= P_{\mathcal{H}}U(...,0,\overbrace{\;0\;},P_{\mathcal{N}}h,0,...) \\
&= P_{\mathcal{H}}(...,0,\overbrace{\;0\;},0,P_{\mathcal{N}}h,0,...) = 0.
\end{aligned}$$

Se supone que se cumple para k y se probará para $k + 1$.

$$\begin{aligned}
P_{\mathcal{H}}UP_{\mathcal{F}\ominus\mathcal{H}}U^{k+1}(...,0,h,0,...) &= P_{\mathcal{H}}UP_{\mathcal{F}\ominus\mathcal{H}}U^{k}(...,0,\overbrace{VP_{\mathcal{D}}h},P_{\mathcal{N}}h,0,...) \\
&= P_{\mathcal{H}}UP_{\mathcal{F}\ominus\mathcal{H}}U^{k}(...,0,\overbrace{VP_{\mathcal{D}}h},0,...)+ \\
&+ P_{\mathcal{H}}UP_{\mathcal{F}\ominus\mathcal{H}}U^{k}(...,0,\overbrace{\;0\;},P_{\mathcal{N}}h,0,...) \\
&= P_{\mathcal{H}}UP_{\mathcal{F}\ominus\mathcal{H}}U^{k}(...,0,\overbrace{\;0\;},P_{\mathcal{N}}h,0,...) \\
&= P_{\mathcal{H}}UP_{\mathcal{F}\ominus\mathcal{H}}U^{k-1}(...,0,\overbrace{\;0\;},0,P_{\mathcal{N}}h,0,...) \\
&\vdots \\
&= P_{\mathcal{H}}UP_{\mathcal{F}\ominus\mathcal{H}}(...,\overbrace{\;0\;},0,...,0,P_{\mathcal{N}}h,0,...) \\
&= P_{\mathcal{H}}U(...,\overbrace{\;0\;},0,...,0,P_{\mathcal{N}}h,0,...) \\
&= P_{\mathcal{H}}(...,\overbrace{\;0\;},0,...,0,P_{\mathcal{N}}h,0,...) = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto queda demostrado que, para todo $k \in \mathbb{N}$, $P_{\mathcal{H}}UP_{\mathcal{F}\ominus\mathcal{H}}U^{k}|_{\mathcal{H}} = 0$ y, con esto, finalmente queda demostrado que $P_{\mathcal{H}}U^{n}|_{\mathcal{H}} = (VP_{\mathcal{D}})^{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

El trabajo [**1**] contiene la demostración detallada de la Proposición 1.3 que se presentó en esta sección.

Ejemplo 1.4. Sea $e_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por $e_n(t) = e^{int}$. Se sabe que $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base del espacio de Lebesgue $L^2(\mathbb{T})$, es decir,

$$L^2(\mathbb{T}) = \bigvee_{n\in\mathbb{Z}} \{\lambda\, e_n : \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Sean

$$\mathcal{H} = \mathcal{D} = H^2(\mathbb{T}) = \bigvee_{n\geq 0} \{\lambda\, e_n : \lambda \in \mathbb{C}\},$$

$$\mathcal{R} = \bigvee_{n\geq 1} \{\lambda\, e_n : \lambda \in \mathbb{C}\}$$

y $V : \mathcal{D} \to \mathcal{R}$ dada por

$$Vf = e_1 f \qquad \text{para } f \in H^2(\mathbb{T}).$$

Sea $U : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ dada por

$$Uf = e_1 f \qquad \text{para } f \in L^2(\mathbb{T}).$$

Entonces

$$U^n e_o = e_n.$$

Se puede verificar que U es un operador unitario y $U\,|_{\mathcal{D}} = V$.

Además

$$L^2(\mathbb{T}) = \bigvee_{n\in\mathbb{Z}} \{\lambda\, e_n : \lambda \in \mathbb{C}\} = \bigvee_{n\in\mathbb{Z}} \{\lambda\, U^n\, e_o : \lambda \in \mathbb{C}\} \subseteq \bigvee_{n\in\mathbb{Z}} U^n\, H^2(\mathbb{T}) \subseteq L^2(\mathbb{T}).$$

Considerando $\mathcal{F} = L^2(\mathbb{T})$, se sigue que U es una extensión unitaria minimal de V.

Seguidamente se presentará otra extensión unitaria minimal de V.

Sea $H^2(\mathbb{D})$ el espacio de Hardy-Hilbert, es decir,

$$H^2(\mathbb{D}) = \left\{ \phi : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \;/\; \phi \text{ es analítica, } \phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ y } \sum_{n\geq 0} |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

Como ϕ es analítica en $\mathbb{D}$ el desarrollo en serie para ϕ que aparece en la expresión anterior es el desarrollo en serie de Taylor y la serie converge uniformemente a ϕ.

Sean $\phi, \psi \in H^2(\mathbb{D})$ dadas por

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \qquad \text{y} \qquad \psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k.$$

El espacio $H^2(\mathbb{D})$ es un espacio de Hilbert con el producto interno dado por

$$\langle \phi, \psi \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \overline{b_k}.$$

El operador shift en $H^2(\mathbb{D})$ es el operador $S : H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ dado por

$$(S\phi)(z) = z\phi(z) \qquad \text{para } z \in \mathbb{D},\ \phi \in H^2(\mathbb{D}).$$

Es decir,

$$(S\phi)(z) = z\phi(z) = z \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, z^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, z^{k+1} = \sum_{j=1}^{\infty} a_{j-1}\, z^j.$$

Se tiene que el operador adjunto de S es el operador $S^* : H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ dado por

$$(S^*\phi)(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j+1}\, z^j.$$

Obsérvese que

$$\|\phi\|^2_{H^2(\mathbb{D})} = |a_o|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = |\phi(0)|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = |\phi(0)|^2 + \sum_{j=0}^{\infty} |a_{j+1}|^2 = \|S^*\phi\|^2_{H^2(\mathbb{D})}.$$

Sean $\mathcal{F}' = H^2(\mathbb{T}) \oplus H^2(\mathbb{D})$ y $U' : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}'$ dado por

$$U'(f, \phi) = (V(f) + \phi(0), S^*\phi).$$

Se tiene que $U' |_{\mathcal{D}} = V$, ya que si $f \in H^2(\mathbb{T})$ entonces

$$U'(f, 0) = (V(f), 0) = V(f).$$

Además U' es una isometría, pues

$$\begin{aligned}
\|U'(f, \phi)\|^2_{\mathcal{F}'} &= \|(V(f) + \phi(0), S^*\phi)\|^2_{\mathcal{F}'} \\
&= \|V(f) + \phi(0)\|^2_{H^2(\mathbb{T})} + \|S^*\phi\|^2_{H^2(\mathbb{D})} \\
&= \|V(f)\|^2_{H^2(\mathbb{T})} + |\phi(0)|^2 + \|S^*\phi\|^2_{H^2(\mathbb{D})} \\
&= \|f\|^2_{H^2(\mathbb{T})} + \|\phi\|^2_{H^2(\mathbb{D})} \\
&= \|(f, \phi)\|^2_{\mathcal{F}'}.
\end{aligned}$$

Para $h \in H^2(\mathbb{T})$, si α es la función constante dada por

$$\alpha_h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(e^{it})dt$$

entonces

$$\langle h, \phi(0) \rangle^2_{H^2(\mathbb{T})} = \overline{\phi(0)}\, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(e^{it})dt = \overline{\phi(0)}\, \alpha_h(z) = \langle \alpha_h, \phi \rangle^2_{H^2(\mathbb{D})}.$$

De esto se sigue que

$$U'^*(h, \psi) = (V^* P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{R}} h, \alpha_h + S\psi).$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\langle (h, \psi), U'^*(f, \phi) \rangle_{\mathcal{F}'} &= \langle (h, \psi), (Vf + \phi(0), S^*\phi) \rangle_{\mathcal{F}'} \\
&= \langle h, Vf + \phi(0) \rangle^2_{H^2(\mathbb{T})} + \langle \psi, S^*\phi \rangle^2_{H^2(\mathbb{D})} \\
&= \langle h, Vf \rangle^2_{H^2(\mathbb{T})} + \langle h, \phi(0) \rangle^2_{H^2(\mathbb{T})} + \langle \psi, S^*\phi \rangle^2_{H^2(\mathbb{D})} \\
&= \langle P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{R}} h, Vf \rangle^2_{H^2(\mathbb{T})} + \langle \alpha_h, \phi \rangle^2_{H^2(\mathbb{D})} + \langle S\psi, \phi \rangle^2_{H^2(\mathbb{D})} \\
&= \langle V^* P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{R}} h, f \rangle^2_{H^2(\mathbb{T})} + \langle \alpha_h + S\psi, \phi \rangle^2_{H^2(\mathbb{D})} \\
&= \langle (V^* P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{R}} h, \alpha_h + S\psi), (f, \phi) \rangle_{\mathcal{F}'}.
\end{aligned}$$

Se puede verificar que U' es sobreyectivo. Por lo tanto U' es unitario. Se sigue que U' es una extensión unitaria minimal de V.

Finalmente es importante resaltar que $U \in L(\mathcal{F})$ y $U' \in L(\mathcal{F}')$ son $\mathcal{H}$-*isomorfas.*

Teorema 1.5. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $\mathcal{D}$ y $\mathcal{R}$ son subespacios cerrados de $\mathcal{H}$ y $V : \mathcal{D} \to \mathcal{R}$ es una isometría parcial. Si $U \in L(F)$ es una extensión unitaria minimal de V entonces $U^{-1} \in L(F)$ es una extensión unitaria minimal de V^*.*

Demostración. Si $h \in \mathcal{R}$ entonces existe $d \in \mathcal{D}$ tal que $h = Vd$. De $U^{-1}U = I$ y $V^*V = I$, se obtiene

$$U^{-1}h = U^{-1}Vd = U^{-1}Ud = d = V^*Vd = V^*h.$$

Se ha probado que

$$U^{-1}h = V^*h$$

para cada $h \in \mathcal{R}$. □

2. La clase de Schur

Sean $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$ dos espacios de Hilbert. Una función $\theta : \mathbb{D} \to L(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ es *analítica* cuando

$$\theta(z) = \sum_{k\geq 0} z^k \theta_k,$$

donde θ_k son operadores lineales acotados de $\mathcal{N}$ en $\mathcal{M}$ y la serie converge para $|z| < 1$ (en el sentido de la convergencia en norma de operadores).

Una función $\theta : \mathbb{D} \to L(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ analítica es *contractiva* cuando

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \|\theta(z)\| \leq 1.$$

La *clase de Schur* $\mathcal{B}(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ es el conjunto de todas las funciones analíticas contractivas $\theta : \mathbb{D} \to L(\mathcal{N}, \mathcal{M})$.

Ejemplo 1.6. Sean $\mathcal{N}$ y $\mathcal{M}$ espacios de Hilbert, $\theta : \mathbb{D} \to L(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ la función definida por

$$\theta(z)x = 0$$

para $z \in \mathbb{D}$, $x \in \mathcal{N}$ (con $0 \in \mathcal{M}$).

Esta función θ es analítica contractiva. Por lo tanto, $\mathcal{B}(\mathcal{N}, \mathcal{M}) \neq \emptyset$.

3. El modelo de Arov-Grossman

Sean $\mathcal{N}, \mathcal{M}$ espacios de Hilbert. Con $\mathcal{B}(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ se denotará la clase de las funciones holomorfas θ en $\mathbb{D}$ tales que $\theta(z)$ es una contracción para cada $z \in \mathbb{D}$.

Sean

$$\mathcal{N}_V = \mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_V \qquad \text{y} \qquad \mathcal{M}_V = \mathcal{H} \ominus \mathcal{R}_V.$$

Sea U una extensión unitaria minimal en $\mathcal{F}$ de V. La *función holomorfa asociada a U* es la función holomorfa $\theta_U : \mathbb{D} \to \mathcal{B}(\mathcal{N}_V, \mathcal{M}_V)$ dada por

$$\theta_U(z) = P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{M}_V} \left(U(I - zP^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}\ominus\mathcal{H}}U)^{-1}\right) |_{\mathcal{N}_V} .$$

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Se considerará una isometría parcial V definida en un subespacio de $\mathcal{H}$ con espacios de defecto $\mathcal{N}_V$ y$\mathcal{M}_V$.

En [**5, 6**] Arov y Grossman presentaron un modelo funcional que provee una descripción paramétrica de las extensiones unitarias minimales de V.

El modelo de Arov y Grossman puede presentarse bajo la forma que establecen los dos teoremas dados a continuación.

Teorema 1.7 (Arov-Grossman)**.** *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert $\mathcal{D}$ y $\mathcal{R}$ subespacios cerrados de $\mathcal{H}$, $V : \mathcal{D} \to \mathcal{R}$ una isometría parcial con subespacios de defecto $\mathcal{N}_V$ y $\mathcal{M}_V$. Para cada U, extensión unitaria minimal de V en $\mathcal{F}$, sea*

$$\theta_U(z) = P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{M}_V} \left(U(I - zP^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}\ominus\mathcal{H}}U)^{-1}\right) |_{\mathcal{N}_V},$$

para $z \in \mathbb{D}$, entonces

(i) $\theta_U \in \mathcal{B}(\mathcal{N}_V, \mathcal{M}_V)$.

(ii) $VP^{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}} + \theta_U(z)P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{N}_V} = P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}(U(I - zP^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}\ominus\mathcal{H}}U)^{-1}) |_{\mathcal{H}}$ *para cada* $z \in \mathbb{D}$.

(iii) $P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}(U(I - zU)^{-1}) |_{\mathcal{H}} = (VP^{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}} + \theta_U(z)P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{N}_V})[1 - z(VP^{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}} + \theta_U(z))P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{N}_V}]^{-1}$ *para cada* $z \in \mathbb{D}$.

(iv) U' *es una extensión unitaria minimal de* V *en* $\mathcal{F}'$ *unitariamente equivalente a* U *en* $\mathcal{F}$ *si y sólo si* $\theta_U(z) = \theta_{U'}(z)$ *para todo* $z \in \mathbb{D}$.

Demostración. Se dará la idea de la demostración, los detalles pueden verse en [**14**].

(i) Para cada $k \geq 0$ sea

$$\theta_k = P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{M}_V} U(P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}\ominus\mathcal{H}}U)^k |_{\mathcal{N}_V},$$

entonces

$$\theta(z) = \sum_{k\geq 0} z^k \theta_k$$

es analítica y toma valores en $\mathcal{L}(\mathcal{N}_V, \mathcal{M}_V)$.

Usando la siguiente notación

$$U_{11} = P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{M}_V} U |_{\mathcal{N}_V} \qquad U_{12} = P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{M}_V} U |_{\mathcal{F}\ominus\mathcal{H}}$$

$$U_{21} = P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}\ominus\mathcal{H}} U |_{\mathcal{N}_V} \qquad U_{22} = P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}\mathcal{H}} U |_{\mathcal{F}\ominus\mathcal{H}} .$$

Se tiene que

$$\theta(z) = U_{11} + zU_{12}(1 - zU_{22})^{-1}U_{21}$$

y como la isometría parcial

$$U\mid_{\mathcal{N}_V\oplus(\mathcal{F}\ominus\mathcal{H})}: \mathcal{N}_V\oplus(\mathcal{F}\ominus\mathcal{H})\to\mathcal{N}_V\oplus(\mathcal{F}\ominus\mathcal{H})$$

admite la siguiente representación matricial

$$U\mid_{\mathcal{N}_V\oplus(\mathcal{F}\ominus\mathcal{H})}=\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12}\\ U_{21} & U_{22}\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}\mathcal{N}_V\\ \mathcal{F}\ominus\mathcal{H}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\mathcal{M}_V\\ \mathcal{F}\ominus\mathcal{H}\end{pmatrix}$$

entonces

$$||U_{11}x+U_{12}y||^2_{\mathcal{H}}+||U_{21}x+U_{22}y||^2_{\mathcal{F}}=||x||^2_{\mathcal{H}}+||y||^2_{\mathcal{F}}$$

para todo $y\in\mathcal{F}\ominus\mathcal{H}$ y $x\in\mathcal{N}_V$.

Se tiene que, para todo $z\in\mathbb{D}$ y $x\in\mathcal{N}_V$

$$||\theta(z)x||^2_{\mathcal{H}}=||U_{11}x+zU_{12}(1-zU_{22})^{-1}U_{21}x||^2_{\mathcal{H}}\le||x||^2_{\mathcal{H}}.$$

Luego $\theta(z)$ es una contracción.

(ii) Si $z\in\mathbb{D}$

$$VP^{\mathcal{H}}_{\mathcal{D}}=P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}UP^{\mathcal{F}}_{\mathcal{D}}\mid_{\mathcal{H}}=P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}U(1-zP^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}\ominus\mathcal{H}}U)^{-1}P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{D}}\mid_{\mathcal{H}}$$

y

$$P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{M}_V}U(1-zP^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}\ominus\mathcal{H}}U)^{-1}P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{N}_V}\mid_{\mathcal{H}}=P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}U(1-zP^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}\ominus\mathcal{H}}U)^{-1}P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{N}}\mid_{\mathcal{H}}.$$

De esto sigue la igualdad.

(iii) La igualdad se demuestra usando lo obtenido en (ii) y tomando en cuenta que para z en $\mathbb{D}$

$$(1-zP^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}\ominus\mathcal{H}}U)^{-1}[1-zP^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}U(1-zP^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}\ominus\mathcal{H}}U)^{-1}]^{-1}=(1-zU)^{-1}.$$

(iv) Sea $U^{'}$ una extensión unitaria minimal de V en $\mathcal{F}^{'}$ unitariamente equivalente a U. Entonces existe un isomorfismo isométrico $\Gamma:\mathcal{F}\to\mathcal{F}^{'}$ que verifica

$$\Gamma P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}\ominus\mathcal{H}}U=P^{\mathcal{F}^{'}}_{\mathcal{F}^{'}\ominus\mathcal{H}}U^{'}$$

. Entonces para $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathcal{N}_V$, $y \in \mathcal{M}_V$ se tiene

$$\langle P^{\mathcal{F}'}_{\mathcal{M}^V} U (P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}\ominus\mathcal{H}})^n x, y\rangle_{\mathcal{H}} = \langle P^{\mathcal{F}'}_{\mathcal{M}^V} U (P^{\mathcal{F}'}_{\mathcal{F}'\ominus\mathcal{H}})^n x, y\rangle_{\mathcal{H}}$$

Por lo tanto para cada z en $\mathbb{D}$ se tiene que

$$P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{M}_V} U (1 - zP^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}\ominus\mathcal{H}} U)^{-1} \mid_{\mathcal{N}_V} = P^{\mathcal{F}'}_{\mathcal{M}_V} U' (1 - zP^{\mathcal{F}'}_{\mathcal{F}'\ominus\mathcal{H}} U')^{-1} \mid_{\mathcal{N}_V}$$

□

Usando esta función analítica a valores operadores Arov y Grossman [**5, 6**] proporcionaron una biyección entre $\mathcal{U}_V$ el conjunto de todas los clases de equivalencias de las extensiones unitarias minimales de una isometría parcial V definida en $\mathcal{H}$ y la bola unitaria de las funciones analíticas a valores operadores $\mathcal{B}(\mathcal{N}_V, \mathcal{M}_V)$. Este resultado es conocido como el *modelo de Arov-Grossman.*

Teorema 1.8 (Modelo de Arov-Grossman)**.** *Sean $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert,$\mathcal{D}$ y $\mathcal{R}$ subespacios cerrados de $\mathcal{H}$ y $V : \mathcal{D} \to \mathcal{R}$ una isometría parcial con subespacios de defecto $\mathcal{N}_V$ y $\mathcal{M}_V$. La aplicación que a cada U_V extensión unitaria minimal de V en $\mathcal{F}$, le hace corresponder la función holomorfa asociada $\theta_U(z)$, establece una biyección entre $\mathcal{U}_\mathcal{V}$ y $\mathcal{B}(\mathcal{N}, \mathcal{M})$.*

Demostración. Solamente se dará una idea de la prueba.

El teorema anterior garantiza que la aplicación está bien definida y es inyectiva. Para ver que la aplicación es sobreyectiva se construye U', una extensión unitaria minimal de V y se demuestra que $\theta(z)$, la función holomorfa asociada a U', está unívocamente determinada. □

El libro [**14**] contiene una explicación detallada del modelo de Arov-Grossman y aplicaciones del mismo a distintas situaciones.

Capítulo 2

Extensiones unitarias de dos isometrías parciales

Sea (U, V) un par de isometrías parciales, con dominios $\mathcal{D}_U$, $\mathcal{D}_V$, respectivamente, subespacios cerrados de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, tal que $U^k\mathcal{D}_V \subset \mathcal{D}_U$ y $U^kV\mathcal{D}_V \subset \mathcal{D}_U$ para todo $k \geq 0$. En [**4**] Arocena probó que existe una extensión unitaria minimal conmutativa del par (U, V) si y sólo si $\langle U^kVf, Vg\rangle = \langle U^kf, g\rangle$ para todo $f, g \in \mathcal{D}_V$ y $k \geq 0$. Una descripción del conjunto $\mathcal{U}_{U,V}$ de todas las extensiones unitarias minimales conmutativas del par (U, V) fue dada por Morán en [**15**] usando el modelo funcional de Arov-Grossman. Algunas de las ideas técnicas desarrolladas ahí serán usadas en el Capítulo 4 Subsección 2.1.

En [**7**] Bruzual y Domínguez encontraron una condición necesaria y suficiente para la existencia de extensiones unitarias conmutativas de un par de isometrías parciales. Este resultado lo usaron para probar que una función definida positiva a valores operadores definida en un intervalo de $\mathbb{Z}^2$ con el orden lexicográfico puede ser extendida a una función definida positiva en todo el plano discreto.

1. Conmutatividad débil de isometrías parciales

Sea $\mathcal{L}$ un espacio de Hilbert, sea (A, B) un par de isometrías parciales con dominios $\mathcal{D}_A$, $\mathcal{D}_B$ y rangos $\mathcal{R}_A$, $\mathcal{R}_B$, respectivamente, subespacios cerrados de $\mathcal{L}$.

Una *extensión unitaria conmutativa* de (A, B) es un par $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ de operadores unitarios conmutativos $\widetilde{A}$ y $\widetilde{B}$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{F}$, que contiene a $\mathcal{L}$ como subespacio cerrado, que extienden a A y B, respectivamente.

Una *extensión unitaria conmutativa minimal* de (A, B) es una extensión unitaria conmutativa $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ tal que

$$\mathcal{F} = \bigvee_{n,m\in\mathbb{Z}} \widetilde{A}^n \widetilde{B}^m \mathcal{L}.$$

Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ espacios de Hilbert que contienen a $\mathcal{L}$ como subespacio cerrado. Dos pares de operadores unitarios conmutativos $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ en $\mathcal{F}$ y (A', B') en $\mathcal{F}'$ se dice que son $\mathcal{L}$-*isomorfos* si existe un isomorfismo unitario φ de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{F}'$ que deja invariante los elementos de $\mathcal{L}$ y satisface

$$\varphi \widetilde{A}^n \widetilde{B}^m = A'^{\,n} B'^{\,m} \varphi$$

para todo $n, m \in \mathbb{Z}$.

Sea $\mathcal{W}_{A,B}$ el conjunto de todos los pares de operadores unitarios conmutativos (A', B') que son $\mathcal{L}$-*isomorfos* a una extensión unitaria conmutativa minimal $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ de (A, B).

En [**7**] Bruzual y Domínguez probaron el siguiente teorema el cual proporciona una condición de conmutatividad débil, condición necesaria y suficiente para la existencia de extensiones unitarias conmutativas de un par de isometrías parciales. De aquí $\mathcal{W}_{A,B} \neq \emptyset$ si el par (A, B) conmuta débilmente.

Teorema 2.1 (Bruzual-Domínguez). *Sea $\mathcal{L}$ un espacio de Hilbert, sean $\mathcal{D}_A$, $\mathcal{D}_B$, subespacios cerrados de $\mathcal{L}$, y sean A y B isometrías parciales con espacios inciales $\mathcal{D}_A$ y $\mathcal{D}_B$. Si*

(i) $\mathcal{D}_B \subset \mathcal{D}_{A^n}$ *para* $n = 0, 1, 2, \ldots$.

(ii) $\mathcal{R}_B \subset \mathcal{R}_{A^n}$ *para* $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Entonces

$$\langle A^{-n}Bf, Bg\rangle_{\mathcal{L}} = \langle f, A^n g\rangle_{\mathcal{L}} \quad \forall f, g \in \mathcal{D}_B, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

es una condición necesaria y suficiente para la existencia de un espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ que contiene a $\mathcal{L}$ como subespacio cerrado y dos operadores unitarios que conmutan $\tilde{A}$, $\tilde{B} \in L(\mathcal{F})$ tales que $\tilde{A}|_{\mathcal{D}_A} = A$ y $\tilde{B}|_{\mathcal{D}_B} = B$.

Demostración. Es claro que la condición es necesaria.

Sea $\mathcal{N}_0$ un espacio de Hilbert de dimensión infinita y sea $\Delta : \mathcal{D}_A^{\perp} \oplus \mathcal{N}_0 \to \mathcal{N}_0$ un operador unitario.

Sea $\mathcal{N} = \mathcal{L} \oplus \mathcal{N}_0 = \mathcal{D}_A \oplus \mathcal{D}_A^{\perp} \oplus \mathcal{N}_0$ y sea $\tilde{\Delta} : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ definido de la siguiente manera:

$$\tilde{\Delta}(x) = Ax_1 \oplus \Delta(x_2 \oplus x_3) \in \mathcal{L} \oplus \mathcal{N}_0 = \mathcal{N}$$

para $x = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \in \mathcal{N} = \mathcal{D}_A \oplus \mathcal{D}_A^{\perp} \oplus \mathcal{N}_0$.

Se tiene que $\mathcal{N}$ contiene a $\mathcal{L}$ como subespacio cerrado y $\tilde{\Delta} : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ es un operador isométrico que extiende a A. Por lo tanto $\mathcal{R}_B \subset \mathcal{R}_{\tilde{\Delta}^n}$ para todo $n \geq 0$, donde $\mathcal{R}_{\tilde{\Delta}^n}$ es el rango de $\tilde{\Delta}^n$. Además $A^{-n}Bf = \tilde{\Delta}^{-n}Bf$ si $f \in \mathcal{D}_B$.

Sean $f, g \in \mathcal{D}_B$ y $n \geq 0$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\Delta}^n Bg, Bf\rangle_{\mathcal{N}} &= \langle Bg, \tilde{\Delta}^{-n}Bf\rangle_{\mathcal{N}} \\
&= \langle Bg, A^{-n}Bf\rangle_{\mathcal{L}} \\
&= \langle A^n g, f\rangle_{\mathcal{L}} \\
&= \langle \tilde{\Delta}^n g, f\rangle_{\mathcal{N}}.
\end{aligned}$$

Para finalizar la prueba solamente se necesita probar que Δ y B tienen extensiones unitarias conmutativas a un espacio de Hilbert más grande.

Se puede notar que los operadores Δ y B satisfacen las siguientes condiciones:

(1) $\Delta \in L(\mathcal{N})$ es un operador isométrico, luego $\{\Delta^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un semigrupo de isometrías.
(2) $\mathcal{D}_B$, $\mathcal{R}_B \subset \mathcal{N}$ son subespacios cerrados y $B : \mathcal{D}_B \to \mathcal{R}_B$ es una isometría.
(3) $\langle \tilde{\Delta}^n Bg, Bf\rangle_{\mathcal{N}} = \langle \tilde{\Delta}^n g, f\rangle_{\mathcal{N}}$ para todo $f, g \in \mathcal{D}_B$, $n = 0, 1, \ldots$.

Usando la parte (b) del Teorema 1, page 329 de [**4**] se sigue que Δ y B tienen extensiones unitarias conmutativas.

□

Capítulo 3

Familias multiplicativas de isometrías parciales y ternas de Toeplitz-Cotlar

Sea Ω un grupo abeliano localmente compacto y ordenado. Ω tiene la propiedad de dilatación si vale para Ω una extensión especial del teorema de dilatación de Naimark y tiene la propiedad de levantamiento del conmutante si vale para Ω una extensión natural del teorema de levantamiento del conmutante de Sz.-Nagy - Foias.

En [**8**] Bruzual y Domínguez probaron que estas dos condiciones son equivalentes. Además introdujeron el concepto de familia multiplicativa de isometrías parciales y dieron otra condición necesaria y suficiente en términos de extensiones unitarias de estas familias.

1. Grupos ordenados

Sea $(\Omega,+)$ un grupo abeliano con elemento neutro 0. Se dice que Ω es un grupo ordenado cuando existe un conjunto $\Omega_1 \subset \Omega$ tal que:

$$\Omega_1 + \Omega_1 = \Omega_1, \qquad \Omega_1 \cap (-\Omega_1) = \{0\}, \qquad \Omega_1 \cup (-\Omega_1) = \Omega.$$

En este caso, si $x, y \in \Omega$ se escribe $x \leq y$ si $\mathrm{y} - \mathrm{x} \in \Omega_1$, también se escribe $x < y$ si $x \leq y$ y $x \neq y$.

Cuando Ω es un grupo topológico se suele pedir que Ω_1 sea cerrado.

Sean Γ y Λ dos grupos abelianos localmente compactos y ordenados y sea $\Omega = \Gamma \times \Lambda$. El orden lexicográfico en Ω se define de la siguiente manera:

Si (γ_1, λ_1), $(\gamma_2, \lambda_2) \in \Omega$ entonces

$$(\gamma_1, \lambda_1) <_{lex} (\gamma_2, \lambda_2) \quad \text{si y sólo si} \quad \lambda_1 < \lambda_2 \text{ ó } (\lambda_1 = \lambda_2 \text{ y } \gamma_1 < \gamma_2).$$

Es fácil probar que si Λ es discreto entonces, con esta relación y con la topología producto, Ω es un grupo abeliano localmente compacto ordenado.

2. Familias multiplicativas de isometrías parciales

Sea $\mathcal{E}$ un espacio de Hilbert y sea Ω un grupo abeliano ordenado localmente compacto. Como antes, sea

$$\Omega_1 = \{\omega \in \Omega : \omega \geq 0\}.$$

Una *familia multiplicativa de isometrías parciales* en $(\mathcal{E}, \Omega, \Omega_1)$ (ver [**8**]) es una familia $(S_\omega, \mathcal{E}_\omega)_{\omega \in \Omega_1}$ tal que:

(i) Para cada $\omega \in \Omega_1$, $\mathcal{E}_\omega$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$ y $\mathcal{E}_y \subset \mathcal{E}_x$ si $x, y \in \Omega_1$ y $x < y$.

(ii) Para cada $\omega \in \Omega_1$ $S_\omega : \mathcal{E}_\omega \to \mathcal{E}$ es una isometría lineal y $S_0 = I_{\mathcal{E}}$.

(iii) Si $x, y \in \Omega_1$ entonces $S_y \mathcal{E}_{x+y} \subset \mathcal{E}_x$ y $S_{x+y} h = S_x S_y h$ para todo $h \in \mathcal{E}_{x+y}$.

Se dice que $(S_\omega, \mathcal{E}_\omega)_{\omega \in \Omega_1}$ es fuertemente continua si para cada $x \in \Omega_1$, $h \in \mathcal{E}_x$ se tiene que la función $\omega \mapsto S_\omega h$ de $[0, x] = \{\omega \in \Omega : 0 \leq \omega \leq x\}$ en $\mathcal{E}$ es continua.

En lo que sigue $(S, \mathcal{E})$ denotará la familia multiplicativa de isometrías parciales $(S_\omega, \mathcal{E}_\omega)_{\omega \in \Omega_1}$. Se usará $\Omega_2 = -\Omega_1$.

A continuación se dará un ejemplo, sin embargo, antes se deben dar unas definiciones. Sean $(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ un par de espacios de Hilbert.

Definición 3.1. Una terna de Toeplitz-Cotlar, C, en $(\Omega, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ consiste de tres funciones débilmente continuas

$$C_{\alpha\beta} : \Omega_\alpha - \Omega_\beta \to L(\mathcal{H}_\alpha, \mathcal{H}_\beta) \quad \alpha,\ \beta = 1, 2,\ \alpha \leq \beta.$$

Si C es una terna de Toeplitz-Cotlar se define $C_{21}(\omega) = C_{12}(-\omega)^*$ para todo $\omega \in \Omega_2$.

Note que C no es un núcleo puesto que $0 \in \Omega_1 \cap \Omega_2$.

Definición 3.2. Se dirá que la terna de Toeplitz-Cotlar C en $(\Omega, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ es definida positiva cuando

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \sum_{(x,y)\in\Omega_\alpha\times\Omega_\beta} \langle C_{\alpha\beta}(x-y)h_\alpha(x), h_\beta(y)\rangle_{\mathcal{H}_\beta} \geq 0$$

para todo par de funciones $h_\alpha : \Omega_\alpha \to \mathcal{H}_\alpha$ con soporte finito.

Observación 3.3. La condición en la Definición 3.2 también puede escribirse como sigue:

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \int_{\Omega_\alpha} \int_{\Omega_\beta} \langle C_{\alpha\beta}(x-y)\phi_\alpha(x), \phi_\beta(y)\rangle_{\mathcal{H}_\beta}\, d\mu(x)\, d\mu(y) \quad \geq 0$$

para todo par de funciones continuas $\phi_\alpha : \Omega_\alpha \to \mathcal{H}_\alpha$ con soporte compacto, donde μ es la medida de Haar del grupo Ω.

Al trabajar con núcleos de Toeplitz clásicos el conjunto de las traslaciones es un grupo unitario. Un espacio pre-Hilbert y una familia de operadores isométricos corresponde en manera natural a una terna de Toeplitz - Cotlar. En [**8**] los autores indican que las propiedades de esta familia de isometrías fueron la principal motivación para la definición de familia multiplicativa de isometrías parciales.

El ejemplo de familia multiplicativa de isometrías parciales que se quiere presentar es el siguiente:

Sea C una terna de Toeplitz - Cotlar definida positiva en $(\Omega, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$.

Sea $\mathcal{L}$ el espacio vectorial de los pares (f_1, f_2) tales que $f_1 : \Omega_1 \to \mathcal{H}_1$ y $f_2 : \Omega_2 \to \mathcal{H}_2$ son funciones con soporte finito.

Para $(f_1, f_2), (g_1, g_2) \in \mathcal{L}$ se define

$$\langle (f_1, f_2), (g_1, g_2) \rangle_{\mathcal{L}} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \sum_{(x,y)\in\Omega_\alpha\times\Omega_\beta} \langle C_{\alpha\beta}(x-y) f_\alpha(x), g_\beta(y) \rangle_{\mathcal{H}_\beta}.$$

Entonces $\langle\ ,\ \rangle_{\mathcal{L}}$ es una forma sesquilineal no negativa en $\mathcal{L}$. Sea $\mathcal{E}$ el espacio de Hilbert que se obtiene completando $\mathcal{L}$ después del cociente natural.

Para $\omega \in \Omega_1$ sea

$$\mathcal{L}_\omega = \{(f_1, f_2) \in \mathcal{L} \mid supp(f_2) \subset \{x \in \Omega_2 : x \leq -\omega\}\}.$$

donde $supp(f)$ denota el soporte de la función f.

Se define el operador S_ω de la siguiente manera: sea $(f_1, f_2) \in \mathcal{L}_\omega$, entonces

$$S_\omega(f_1, f_2) = (g_1, g_2)$$

si:

$$g_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < \omega; \\ f_1(x-\omega) & \text{si } x \geq \omega. \end{cases}$$

$$g_2(x) = f_2(x-\omega) \quad \text{para } x \in \Omega_2.$$

Se puede probar que $S_\omega : \mathcal{L}_\omega \to \mathcal{L}$ es un operador isométrico.

Sea $\mathcal{E}_\omega$ la clausura del conjunto de las clases de equivalencia de los elementos de $\mathcal{L}_\omega$ en $\mathcal{E}$.

S_ω da origen a una isometría lineal de $\mathcal{E}_\omega$ en $\mathcal{E}$, que también se denotará por S_ω.

Finalmente, se puede probar que $(S_\omega, \mathcal{E}_\omega)_{\omega\in\Omega_1}$ es una familia multiplicativa de isometrías parciales fuertemente continua.

De una manera natural se le ha asociado una familia multiplicativa de isometrías parciales a una terna de Toeplitz - Cotlar definida positiva.

A continuación se presenta un teorema con su prueba tal como fueron dados en [**8**], este resultado establece que si la familia multiplicativa tiene una extensión unitaria entonces la terna puede ser dilatada.

Antes se darán unas definiciones.

Una *extensión unitaria* de una familia multiplicativa de isometrías parciales $(S_\omega, \mathcal{E}_\omega)_{\omega\in\Omega_1}$ en $(\mathcal{E}, \Omega, \Omega_1)$ es un grupo unitario de operadores $(U_\omega)_{\omega\in\Omega}$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{G}$ que contiene a $\mathcal{E}$ como subespacio cerrado tal que

$$U_\omega|_{\mathcal{E}_\omega} = S_\omega$$

para todo $\omega \in \Omega_1$.

Y $(U_\omega)_{\omega\in\Omega}$ es una *extensión unitaria minimal* de $(S_\omega, \mathcal{E}_\omega)_{\omega\in\Omega_1}$ si es una extensión unitaria tal que

$$\mathcal{G} = \bigvee_{\omega\in\Omega} U_\omega \mathcal{E}.$$

Sean $\mathcal{G}$ y $\mathcal{G}'$ espacios de Hilbert que contienen a $\mathcal{E}$ como subespacio cerrado. Dos grupos unitarios de operadores $(U_\omega)_{\omega\in\Omega}$ en $\mathcal{G}$ y $(U'_\omega)_{\omega\in\Omega}$ en $\mathcal{G}'$ se dice que son *$\mathcal{E}$-isomorfos* si existe un isomorfismo unitario φ de $\mathcal{G}$ en $\mathcal{G}'$ que deja invariante los elementos de $\mathcal{E}$ y satisface $\varphi U_\omega = U'_\omega \varphi$ para todo $\omega \in \Omega$.

Sea $\mathcal{W}(S, \mathcal{E})$ el conjunto de todos los grupos unitarios de operadores $(U'_\omega)_{\omega\in\Omega}$ que son *$\mathcal{E}$-isomorfos* a una extensión unitaria minimal $(U_\omega)_{\omega\in\Omega}$ de la familia multiplicativa de isometrías parciales $(S, \mathcal{E})$.

Definición 3.4. Se dice que un grupo Ω abeliano localmente compacto y ordenado tiene la propiedad de dilatación si se cumple lo siguiente:

Para todo par $(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ de espacios de Hilbert y para toda terna de Toeplitz-Cotlar definida positiva, C, en $(\Omega, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ existe un espacio de Hilbert $\mathcal{G}$, dos operadores acotados $\tau_\alpha : \mathcal{H}_\alpha \to \mathcal{G}$ para $\alpha = 1, 2$ y una representación unitaria fuertemente continua $(U_\omega)_{\omega\in\Omega}$ de Ω en $\mathcal{G}$ tal que

$$C_{\alpha\beta}(\omega) = \tau_\beta^* U_\omega \tau_\alpha \text{ para todo } \omega \in \Omega_\alpha - \Omega_\beta \text{ para } \alpha, \beta = 1, 2.$$

Observación 3.5. Si el grupo Ω tiene la propiedad de dilatación en $(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ entonces se puede suponer que $\mathcal{G}$ satisface la siguiente condición de minimalidad:

$$\mathcal{G} = \bigvee_{\omega\in\Omega} U_\omega \tau_1 \mathcal{H}_1 \vee \bigvee_{\omega\in\Omega} U_\omega \tau_2 \mathcal{H}_2$$

Teorema 3.6 (Bruzual-Domínguez). *Sea* $(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ *un par de espacios de Hilbert y sea* Ω *un grupo abeliano localmente compacto y ordenado. Sea* C *una terna de Toeplitz - Cotlar definida positiva en* $(\Omega, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. *Si la familia multiplicativa de isometrías parciales* $(S_\omega, \mathcal{E}_\omega)_{\omega\in\Omega_1}$ *puedes ser extendida a un grupo unitario fuertemente continuo* $(U_\omega)_{\omega\in\Omega}$ *en un espacio de Hilbert más grande* $\mathcal{G}$ *entonces existen dos operadores acotados* $\tau_\alpha : \mathcal{H}_\alpha \to \mathcal{G}$ *para* $\alpha = 1, 2$ *tales que*

$$C_{\alpha\beta}(\omega) = \tau_\beta^* U_\omega \tau_\alpha \text{ para todo } \omega \in \Omega_\alpha - \Omega_\beta \text{ para } \alpha, \beta = 1, 2.$$

Demostración.

Sea $[(f_1, f_2)]$ la clase de equivalencia en $\mathcal{E}$ del elemento $(f_1, f_2) \in \mathcal{L}$. Se denotará por δ_ω la función característica del conjunto $\{\omega\}$.

Si $\omega \in \Omega_1$ y $h_1 \in \mathcal{H}_1$, entonces $[(h_1\delta_0, 0)] \in \mathcal{E}_\omega$ y

$$S_\omega[(h_1\delta_0, 0)] = [(h_1\delta_\omega, 0)].$$

Si $\omega \in \Omega_2$ y $h_2 \in \mathcal{H}_2$, entonces $[(0, h_2\delta_\omega)] \in \mathcal{E}_{-\omega}$ y

$$S_{-\omega}[(0, h_2\delta_\omega)] = [(0, h_2\delta_0)].$$

Por lo tanto

$$U_\omega[(h_1\delta_0, 0)] = [(h_1\delta_\omega, 0)] \;\; \forall\omega \in \Omega_1 \;\; \forall h_1 \in \mathcal{H}_1$$

$$U_\omega[(0, h_2\delta_0)] = [(0, h_2\delta_\omega)] \;\; \forall\omega \in \Omega_2 \;\; \forall h_2 \in \mathcal{H}_2.$$

Sean $\tau_1 : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{G}$ y $\tau_2 : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{G}$ definidas mediante

$$\tau_1(h_1) = [(h_1\delta_0, 0)] \quad \text{y} \quad \tau_2(h_2) = [(0, h_2\delta_0].$$

Se tiene que

$$\| \tau_1(h_1) \|_{\mathcal{G}}^2 = \langle C_{11}(0)h_1, h_1\rangle_{\mathcal{H}_1} \leq \| C_{11}(0) \| \| h_1 \|_{\mathcal{H}_1}^2$$

de donde τ_1 es un operador lineal acotado.

De la misma manera se sigue que τ_2 es un operador lineal acotado.

Sean $x, y \in \Omega_1$, $h_1, h_1' \in \mathcal{H}_1$, entonces

$$\begin{aligned}\langle C_{11}(x-y)h_1, h_1'\rangle_{\mathcal{H}_1} &= \langle [(h_1\delta_x, 0)], [(h_1'\delta_y, 0)]\rangle_{\mathcal{E}} = \langle U_x[(h_1\delta_0, 0)], U_y[(h_1'\delta_0, 0)]\rangle_{\mathcal{G}} \\ &= \langle U_{x-y}\,\tau_1(h_1), \tau_1(h_1')\rangle_{\mathcal{G}} = \langle \tau_1^*\,U_{x-y}\,\tau_1(h_1), h_1'\rangle_{\mathcal{H}_1}.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$C_{11}(\omega) = \tau_1^*\,U_\omega\,\tau_1 \quad \text{para todo } \omega \in \Omega_1 - \Omega_1.$$

De la misma manera se obtiene que:

$$C_{\alpha\beta}(\omega) = \tau_\beta^*\,U_\omega\,\tau_\alpha \quad \text{para todo } \omega \in \Omega_\alpha - \Omega_\beta \quad \text{para } \alpha, \beta = 1, 2.$$

□

Sea $(S_\omega, \mathcal{E}_\omega)_{\omega\in\Omega_1}$ una familia multiplicativa de isometrías parciales en $(\mathcal{E}, \Omega)$, se dice que:

(i) Un subespacio P_1 de $\mathcal{E}$ es un *espacio de salida* si

$$P_1 \subset \bigcap_{\omega\in\Omega_1} \mathcal{E}_\omega \quad \text{y} \quad S_\omega P_1 \subset P_1 \quad \text{para todo} \quad \omega \in \Omega_1.$$

(ii) Un subespacio P_2 de $\mathcal{E}$ es un *espacio de entrada* si

$$P_2 \subset \bigcap_{\omega\in\Omega_1} \mathcal{E}_\omega \quad \text{y} \quad S_\omega^{-1} P_2 \subset P_2 \quad \text{para todo} \quad \omega \in \Omega_1.$$

Definición 3.7. Sea $(S_\omega, \mathcal{E}_\omega)_{\omega\in\Omega_1}$ una familia multiplicativa de isometrías parciales en $(\mathcal{E}, \Omega)$, y sean P_1 un espacio de salida y P_2 un espacio de entrada. Se dice que (P_1, P_2) es un *par generador* para la familia si

$$\mathcal{E}_\omega = P_1 \vee S_\omega^{-1} P_2 \quad \text{para todo} \quad \omega \in \Omega_1.$$

En [**8**] Bruzual y Domínguez probaron el siguiente teorema el cual demuestra la equivalencia entre la propiedad de dilatación y la propiedad del levantamiento del conmutante en un grupo abeliano localmente compacto y ordenado Ω.

Teorema 3.8 (Bruzual-Domínguez). *Sea $(\Omega, +)$ un grupo abeliano localmente compacto y ordenado con elemento neutro 0 y $\Omega_1 = \{\omega \in \Omega : \omega \geq 0\}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *Si $\mathcal{E}$ es un espacio de Hilbert y $(S_\omega, \mathcal{E}_\omega)_{\omega\in\Omega}$ es una familia multiplicativa de isometrías parciales fuertemente continua con par generador, entonces existe un espacio de Hilbert $\mathcal{G}$ que contiene a $\mathcal{E}$ como subespacio cerrado y un grupo de operadores unitarios fuertemente continuos $(U_\omega)_{\omega\in\Omega} \subset L(\mathcal{G})$ tal que*

$$S_\omega = U_\omega \mid_{\mathcal{E}_\omega}$$

para todo $\omega \in \Omega$.

(ii) *Ω tiene la propiedad de dilatación.*

(iii) *Ω tiene la propiedad del levantamiento del conmutante.*

Ahora se considerará el caso $\Omega = \Gamma \times \mathbb{Z}$, donde Γ es un grupo abeliano localmente compacto ordenado y $\mathbb{Z}$ es el grupo de los enteros.

Si A es una isometría parcial en el espacio de Hilbert $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}_A$ denotará el dominio de A y $\mathcal{R}_A$ el rango de A.

Proposición 3.9 (Bruzual-Domínguez). *Sea Γ un grupo abeliano localmente compacto ordenado y sea $\Omega = \Gamma \times \mathbb{Z}$ con el orden lexicográfico y la topología producto.*

Sea $(S_\omega, \mathcal{E}_\omega)_{\omega\in\Omega_1}$ una familia multiplicativa de isometrías parciales fuertemente continua en $(\mathcal{E}, \Omega)$ y sea $B = S_{(0,1)}$. Entonces se tiene que:

(i) *$\mathcal{D}_B = \mathcal{E}_{(0,1)} \subset \mathcal{E}_{(\gamma,0)}$ para todo $\gamma \in \Gamma_1$.*

(ii) *$\mathcal{R}_B \subset \mathcal{R}_{S_{(\gamma,0)}}$ para todo $\gamma \in \Gamma_1$.*

(iii) *$\langle S^{-1}_{(\gamma,0)} Bf, Bg\rangle_{\mathcal{E}} = \langle f, S_{(\gamma,0)} g\rangle_{\mathcal{E}}$ para todo $\gamma \in \Gamma_1$, $f, g \in \mathcal{D}_B$.*

Demostración.

(i) Como $(\gamma, 0) < (0, 1)$ para todo $\gamma \in \Gamma_1$ el resultado se obtiene de la definición de familia multiplicativa de isometrías parciales.

(ii) Sea $f \in \mathcal{D}_B = \mathcal{E}_{(0,1)}$ y sea $\gamma \in \Gamma_1$. Como $(-\gamma, 1) \leq (0,1)$ se tiene que $\mathcal{E}_{(0,1)} \subset \mathcal{E}_{(-\gamma,1)}$ y $S_{(-\gamma,1)} f \in \mathcal{E}_{((0,1)-(-\gamma,1))} = \mathcal{E}_{(\gamma,0)}$. Luego

$$Bf = S_{(0,1)} f = S_{(\gamma,0)} S_{(-\gamma,1)} f \in \mathcal{R}_{S_{(\gamma,0)}}.$$

(iii) Sean $f, g \in \mathcal{D}_B = \mathcal{E}_{(0,1)}$ y sea $\gamma \in \Gamma_1$. Como en (ii) se tiene que

$$Bf = S_{(0,1)} f = S_{(\gamma,0)} S_{(-\gamma,1)} f$$

y de la misma manera, como $(\gamma, 0) < (0,1)$, es fácil probar que

$$Bg = S_{(0,1)} g = S_{(-\gamma,1)} S_{(\gamma,0)} g.$$

Luego

$$\begin{aligned}
\langle S_{(\gamma,0)}^{-1} Bf, Bg \rangle_{\mathcal{E}} &= \langle S_{(\gamma,0)}^{-1} S_{(\gamma,0)} S_{(-\gamma,1)} f, S_{(-\gamma,1)} S_{(\gamma,0)} g \rangle_{\mathcal{E}} \\
&= \langle S_{(-\gamma,1)} f, S_{(-\gamma,1)} S_{(\gamma,0)} g \rangle_{\mathcal{E}} \\
&= \langle f, S_{(\gamma,0)} g \rangle_{\mathcal{E}}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 3.10 (Bruzual-Domínguez). *Sea Γ un grupo abeliano localmente compacto y ordenado y sea $\Omega = \Gamma \times \mathbb{Z}$ con el orden lexicográfico y la topología producto.*

Si Γ tiene la propiedad del levantamiento del conmutante entonces Ω también tiene la propiedad del levantamiento del conmutante.

Capítulo 4

Extensiones unitarias de familias multiplicativas de isometrías parciales y parametrización

Si $(S_{(n,m)})_{(n,m)\geq(0,0)}$ es una familia multiplicativa de isometrías parciales en $\mathbb{Z}^2$ con el orden lexicográfico, entonces $S_{(1,0)}$ y $S_{(0,1)}$ conmutan en cierto sentido débil. Sean $\widetilde{A}$ y $\widetilde{B}$ extensiones unitarias conmutativas de $S_{(1,0)}$ y $S_{(0,1)}$. Se da una condición suficiente para que $(\widetilde{A}^n\widetilde{B}^m)_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}$ sea una extensión unitaria de la familia dada. Bajo esta condición se presenta una descripción del conjunto de las extensiones.

También se describe el conjunto de todas las extensiones unitarias conmutativas minimales de cualquier par de isometrías parciales que conmutan en el mismo sentido débil en que conmutan $S_{(1,0)}$ y $S_{(0,1)}$.

Una extensión unitaria conmutativa de un par de isometrías parciales (U, V) en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un par $(\widetilde{U}, \widetilde{V})$ de operadores unitarios conmutativos $\widetilde{U}$ y $\widetilde{V}$, en un espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio, que extienden a U y V, respectivamente.

Una extensión unitaria conmutativa minimal de (U, V) en $\mathcal{H}$ es una extensión unitaria conmutativa $(\widetilde{U}, \widetilde{V})$ en $\mathcal{G}$ de (U, V) tal que

$$\mathcal{G} = \bigvee_{-\infty<n,m<\infty} \widetilde{U}^n \widetilde{V}^m H.$$

En la Sección 1 se introducen las nociones de extensión unitaria y extensión unitaria minimal de una familia multiplicativa de isometrías parciales en un grupo abeliano ordenado.

Para el caso de $\mathbb{Z}^2$ con el orden lexicográfico, se presentan relaciones entre extensiones unitarias de una familia multiplicativa de isometrías parciales $(S_{(n,m)})_{(n,m)\geq(0,0)}$ y extensiones unitarias conmutativas $\widetilde{A}$ y $\widetilde{B}$ de $S_{(1,0)}$ y $S_{(0,1)}$, respectivamente. Se dan condiciones suficientes para que $(\widetilde{A}^n \widetilde{B}^m)_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}$ sea una extensión unitaria de $(S_{(n,m)})_{(n,m)\geq(0,0)}$.

En la Sección 2 se consideran dos isometrías parciales A y B con dominios $\mathcal{D}_A$, $\mathcal{D}_B$ y rangos $\mathcal{R}_A$, $\mathcal{R}_B$, respectivamente. En este trabajo también se considera la descripción de las extensiones unitarias conmutativas minimales de un par de isometrías parciales (A, B) tal que

$$\mathcal{D}_B \subseteq \mathcal{D}_{A^k}, \qquad \mathcal{R}_B \subseteq \mathcal{R}_{A^k}$$

para todo $k \geq 0$ y conmutan en el siguiente sentido débil:

$$\langle A^{-k} Bf, Bg\rangle_{\mathcal{H}} = \langle f, A^k g\rangle_{\mathcal{H}}$$

para todo $f, g \in \mathcal{D}_B$.

Las isometrías parciales $A = S_{(1,0)}$ y $B = S_{(0,1)}$ dan un ejemplo de un par que conmuta en este sentido débil. Esta noción de conmutatividad débil apareció en [**7**].

La descripción de las extensiones unitarias conmutativas minimales se obtiene a través de los métodos de Arov-Grossman.

Hay un enfoque alternativo bien conocido. Sea (U, V) un par de isometrías parciales, con dominios $\mathcal{D}_U$, $\mathcal{D}_V$, respectivamente, subespacios cerrados de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, y tal que

$$U^k \mathcal{D}_V \subset \mathcal{D}_U, \qquad U^k V \mathcal{D}_V \subset \mathcal{D}_U$$

para todo $k \geq 0$.

En [**4**] se probó que existe una extensión unitaria conmutativa minimal del (U, V) si y sólo si

$$(U^k V f, V g) = (U^k f, g)$$

para todo $f, g \in \mathcal{D}_V$ y $k \geq 0$.

Usando el modelo funcional de Arov-Grossman, en [**15**] se obtuvo una descripción del conjunto $\mathcal{U}_{U,V}$ de todas las extensiones unitarias conmutativas minimales del par (U, V).

Algunas de las ideas técnicas de ese trabajo se usan en la Sub-sección 2.1.

Finalmente, en la Sub-sección 2.2, bajo ciertas hipótesis, se da una descripción del conjunto de las extensiones unitarias minimales de una familia multiplicativa de isometrías parciales para el grupo $\mathbb{Z}^2$ con el orden lexicográfico.

1. Extensiones unitarias de isometrías parciales

1.1. Extensiones unitarias conmutativas de un par de isometrías parciales.

Para un tratamiento auto-contenido de este capítulo se recordarán algunas nociones bien conocidas, presentadas en los capítulos anteriores.

Sea A una isometría parcial con dominio $\mathcal{D}_A$ y rango $\mathcal{R}_A$, subespacios cerrados de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Una *extensión unitaria* de A es un operador unitario $\widetilde{A}$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{F}$, que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado, que extiende a A. Una *extensión unitaria minimal* de A es una extensión unitaria $\widetilde{A}$ tal que

$$\mathcal{F} = \bigvee_{n \in \mathbb{Z}} \widetilde{A}^n \mathcal{H}.$$

Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ espacios de Hilbert que contienen a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado. Dos operadores unitarios $\widetilde{A}$ en $\mathcal{F}$ y A' en $\mathcal{F}'$ se dice que son $\mathcal{H}$-*isomorfos* si existe un isomorfismo unitario $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ que satisface $\varphi(f) = f$ para todo $f \in \mathcal{H}$ y

$$\varphi \widetilde{A}^n = A'^{\,n} \varphi$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

La extensión unitaria minimal está unívocamente determinada salvo $\mathcal{H}$-isomorfismo. Para detalles adicionales y resultados acerca de extensiones unitarias de una isometría parcial, ver [**19, 20**].

Sea $\mathcal{U}_A$ el conjunto de todos los operadores unitarios A' que son $\mathcal{H}$-*isomorfos* a una extensión unitaria minimal $\widetilde{A}$ de A.

Sea (A, B) un par de isometrías parciales con dominios $\mathcal{D}_A$, $\mathcal{D}_B$ y rangos $\mathcal{R}_A$, $\mathcal{R}_B$, respectivamente, subespacios cerrados de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

Una *extensión unitaria conmutativa* de (A, B) es un par $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ de operadores unitarios conmutativos $\widetilde{A}$ y $\widetilde{B}$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{F}$, que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado, que extienden a A y B, respectivamente.

Una *extensión unitaria conmutativa minimal* de (A, B) es una extensión unitaria conmutativa $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ tal que

$$\mathcal{F} = \bigvee_{n,m \in \mathbb{Z}} \widetilde{A}^n \widetilde{B}^m \mathcal{H}.$$

Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ espacios de Hilbert que contienen a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado. Dos pares de operadores unitarios conmutativos $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ en $\mathcal{F}$ y (A', B') en $\mathcal{F}'$ se dice que son $\mathcal{H}$-*isomorfos* si existe un isomorfismo unitario φ de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{F}'$ que deja invariante los elementos de $\mathcal{H}$ y satisface

$$\varphi \widetilde{A}^n \widetilde{B}^m = A'^{\,n} B'^{\,m} \varphi$$

para todo $n, m \in \mathbb{Z}$.

Sea $\mathcal{W}_{A,B}$ el conjunto de todos los pares de operadores unitarios conmutativos (A', B') que son $\mathcal{H}$-*isomorfos* a una extensión unitaria conmutativa minimal $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ de (A, B).

Un problema básico es describir el conjunto $\mathcal{W}_{A,B}$.

Sean $A : \mathcal{D}_A \to \mathcal{R}_A$ y $B : \mathcal{D}_B \to \mathcal{R}_B$ dos isometrías parciales tales que

$$\mathcal{D}_B \subseteq \mathcal{D}_{A^k}, \qquad \mathcal{R}_B \subseteq \mathcal{R}_{A^k}$$

para todo $k \geq 0$.

Definición. Se dice que el par (A, B) *conmuta débilmente* cuando

$$\langle A^{-k}Bf, Bg\rangle_{\mathcal{H}} = \langle f, A^k g\rangle_{\mathcal{H}}$$

para todo $f, g \in \mathcal{D}_B$, para todo $k \geq 0$.

Esta noción de conmutatividad débil es una condición necesaria y suficiente para la existencia de una extensión unitaria conmutativa de (A, B) (ver [**7**, Teorema 3.1]). Por lo tanto

$$\mathcal{W}_{A,B} \neq \emptyset$$

si el par (A, B) conmuta débilmente.

Se está interesado en dar una descripción del cojunto $\mathcal{W}_{A,B}$ para este caso. Esto se hace en la Sección 2.1.

1.2. Extensiones unitarias de familias multiplicativas de isometrías parciales.

Sea $(\Omega, +)$ un grupo abeliano con elemento neutro 0. Ω es un grupo ordenado si existe un conjunto cerrado $\Omega_1 \subset \Omega$ tal que:

$$\Omega_1 + \Omega_1 = \Omega_1, \qquad \Omega_1 \cap (-\Omega_1) = \{0\}, \qquad \Omega_1 \cup (-\Omega_1) = \Omega.$$

En este caso si $x, y \in \Omega$ se escribe $x \leq y$ si $\mathrm{y} - \mathrm{x} \in \Omega_1$, también se escribe $x < y$ si $x \leq y$ y $x \neq y$.

Sea $\mathcal{E}$ un espacio de Hilbert y sea Ω un grupo abeliano ordenado localmente compacto. Sea

$$\Omega_1 = \{\omega \in \Omega : \omega \geq 0\}.$$

Una *familia multiplicativa de isometrías parciales* en $(\mathcal{E}, \Omega, \Omega_1)$ (ver [**8**]) es una familia $(S_\omega, \mathcal{E}_\omega)_{\omega \in \Omega_1}$ tal que:

(i) Para cada $\omega \in \Omega_1$, $\mathcal{E}_\omega$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$ y $\mathcal{E}_y \subset \mathcal{E}_x$ si $x, y \in \Omega_1$ y $x < y$.

(ii) Para cada $\omega \in \Omega_1$, $S_\omega : \mathcal{E}_\omega \to \mathcal{E}$ es una isometría lineal y $S_0 = I_{\mathcal{E}}$.

(iii) Si $x, y \in \Omega_1$ entonces $S_y \mathcal{E}_{x+y} \subset \mathcal{E}_x$ y $S_{x+y} h = S_x S_y h$ para todo $h \in \mathcal{E}_{x+y}$.

En lo que sigue $(S, \mathcal{E})$ denotará la familia multiplicativa de isometrías parciales $(S_\omega, \mathcal{E}_\omega)_{\omega \in \Omega_1}$.

A continuación se introducen las nociones de extensión unitaria y extensión unitaria minimal de una familia multiplicativa de isometrías parciales.

Definición. Una *extensión unitaria* de una familia multiplicativa de isometrías parciales $(S_\omega, \mathcal{E}_\omega)_{\omega \in \Omega_1}$ en $(\mathcal{E}, \Omega, \Omega_1)$ es un grupo unitario de operadores $(U_\omega)_{\omega \in \Omega}$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ que contiene a $\mathcal{E}$ como subespacio cerrado tal que $U_\omega|_{\mathcal{E}_\omega} = S_\omega$ para todo $\omega \in \Omega_1$.

Y $(U_\omega)_{\omega \in \Omega}$ es una *extensión unitaria minimal* de $(S_\omega, \mathcal{E}_\omega)_{\omega \in \Omega_1}$ si es una extensión unitaria tal que

$$\mathcal{F} = \bigvee_{\omega \in \Omega} U_\omega \mathcal{E}.$$

Definición. Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ espacios de Hilbert que contienen a $\mathcal{E}$ como subespacio cerrado. Dos grupos unitarios de operadores $(U_\omega)_{\omega \in \Omega}$ en $\mathcal{F}$ y $(U'_\omega)_{\omega \in \Omega}$ en $\mathcal{F}'$ se dice que son *$\mathcal{E}$-isomorfos* si existe un isomorfismo unitario φ de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{F}'$ que deja invariante los elementos de $\mathcal{E}$ y satisface $\varphi U_\omega = U'_\omega \varphi$ para todo $\omega \in \Omega$.

Sea $\mathcal{W}(S,\mathcal{E})$ el conjunto de todos los grupos unitarios de operadores $(U'_\omega)_{\omega\in\Omega}$ que son $\mathcal{E}$-*isomorfos* a una extensión unitaria minimal $(U_\omega)_{\omega\in\Omega}$ de la familia multiplicativa de isometrías parciales $(S,\mathcal{E})$.

Se considerará a $\mathbb{Z}^2$ con el orden lexicográfico: Esto es si $(k,l),(n,m)\in\mathbb{Z}^2$ entonces

$$(k,l) <_{lex} (n,m) \quad \text{si y sólo si} \quad l<m \text{ ó } (l=m \text{ y } k<n).$$

Es bien conocido que, con esta relación, $\mathbb{Z}^2$ es un grupo ordenado.

Se sigue que $\mathbb{Z}^2_1$ es el semi-espacio

$$\mathbb{Z}^2_1 = \{(n,m)\in\mathbb{Z}^2 : m>0 \text{ ó } (m=0 \text{ y } n>0)\}.$$

Con $(\mathcal{E},\mathbb{Z}^2,<_{lex})$ se denotará a $(\mathcal{E},\mathbb{Z}^2,\mathbb{Z}^2_1)$ y, en ese caso, $(S,\mathcal{E})$ denotará la familia multiplicativa de isometrías parciales $(S_{(n,m)},\mathcal{E}_{(n,m)})_{(n,m)\geq(0,0)}$.

Observación 4.1. Sea $(S,\mathcal{E})$ una familia multiplicativa de isometrías parciales en $(\mathcal{E},\mathbb{Z}^2,<_{lex})$ y sea

$$A=S_{(1,0)} \qquad \text{y} \qquad B=S_{(0,1)}.$$

(a) De [**8**, Proposición 3] se sigue que:
   (i) $\mathcal{D}_B=\mathcal{E}_{(0,1)}\subseteq\mathcal{E}_{(k,0)}=\mathcal{D}_{A^k}$ para todo $k\geq 0$.
   (ii) $\mathcal{R}_B\subseteq\mathcal{R}_{A^k}$ para todo $k\geq 0$.
   (iii) $\langle A^{-k}Bf,Bg\rangle_{\mathcal{E}}=\langle f,A^kg\rangle_{\mathcal{E}}$ para todo $k\geq 0,\ f,g\in\mathcal{D}_B$.
   Luego el par $(S_{(1,0)},S_{(0,1)})$ conmuta débilmente.

(b) De [**7**, Teorema 3.1] se sigue que existe una extensión unitaria conmutativa de $(S_{(1,0)},S_{(0,1)})$.

Proposición 4.2. *Sea $(S,\mathcal{E})$ una familia multiplicativa de isometrías parciales en $(\mathcal{E},\mathbb{Z}^2,<_{lex})$. Si $(U_{(n,m)})_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}$ es una extensión unitaria de $(S,\mathcal{E})$ entonces el par $(U_{(1,0)},U_{(0,1)})$ es una extensión unitaria conmutativa del par $(S_{(1,0)},S_{(0,1)})$.*

Lema 4.3. *Sea* $(S, \mathcal{E})$ *una familia multiplicativa de isometrías parciales en* $(\mathcal{E}, \mathbb{Z}^2, <_{lex})$ *y sea* $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ *una extensión unitaria conmutativa de* $(S_{(1,0)}, S_{(0,1)})$*. Si* $m \geq 0$ *y* $n \geq 0$ *entonces*

$$\widetilde{A}^n \widetilde{B}^m f = S_{(n,0)} S_{(0,m)} f = S_{(n,m)} f \qquad \textit{para todo } \ f \in \mathcal{E}_{(n,m)}.$$

Demostración. Sea $f \in \mathcal{E}_{(n,m)}$. Recordar que

$$\widetilde{A}^n g = S_{(n,0)} g \qquad \text{si } g \in \mathcal{E}_{(n,0)}.$$
$$\widetilde{B}^m h = S_{(0,m)} h \qquad \text{si } h \in \mathcal{E}_{(0,m)}.$$

Como $(n, m) \geq (0, m)$ se tiene que $\mathcal{E}_{(n,m)} \subseteq \mathcal{E}_{(0,m)}$. Luego $f \in \mathcal{E}_{(0,m)}$ y

$$\widetilde{B}^m f = S_{(0,m)} f.$$

Como $S_{(0,m)} \mathcal{E}_{(n,m)} \subseteq \mathcal{E}_{(n,0)}$, se tiene que $S_{(0,m)} f \in \mathcal{E}_{(n,0)}$. Luego se puede considerar a $S_{(n,0)} S_{(0,m)} f$. Por lo tanto

$$\widetilde{A}^n \widetilde{B}^m f = \widetilde{A}^n S_{(0,m)} f = S_{(n,0)} S_{(0,m)} f = S_{(n,m)} f.$$

□

Lema 4.4. *Sea* $(S, \mathcal{E})$ *una familia multiplicativa de isometrías parciales en* $(\mathcal{E}, \mathbb{Z}^2, <_{lex})$ *y sea* $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ *una extensión unitaria conmutativa de* $(S_{(1,0)}, S_{(0,1)})$ *y sea* $k \geq 1$*. Si*

$$\widetilde{A}^{-k} \widetilde{B} f = S_{(-k,1)} f \qquad \textit{para todo } \ f \in \mathcal{E}_{(-k,1)}$$

entonces

$$\widetilde{A}^{-k} \widetilde{B}^m f = S_{(-k,m)} f \qquad \textit{para todo } \ f \in \mathcal{E}_{(-k,m)}, \qquad \textit{para todo } \ m \geq 1.$$

Demostración. El resultado es cierto para $m = 1$.

Sea $m > 1$. Supóngase que

$$\widetilde{A}^{-k} \widetilde{B}^m g = S_{(-k,m)} g$$

para todo $g \in \mathcal{E}_{(-k,m)}$.

Sea $f \in \mathcal{E}_{(-k,m+1)}$. Como $S_{(0,1)} \mathcal{E}_{(-k,m+1)} \subseteq \mathcal{E}_{(-k,m)}$ se tiene que

$$\widetilde{B} f = S_{(0,1)} f \in \mathcal{E}_{(-k,m)}.$$

Luego

$$\begin{aligned}\widetilde{A}^{-k}\widetilde{B}^{m+1}f &= \widetilde{A}^{-k}\widetilde{B}^{m}\widetilde{B}f\\ &= S_{(-k,m)}\widetilde{B}f\\ &= S_{(-k,m+1)}f.\end{aligned}$$

La última igualdad se sigue de $\mathcal{E}_{(-k,m+1)} \subseteq \mathcal{E}_{(0,1)}$.

El resultado se obtiene en forma inductiva. $\square$

Teorema 4.5. *Sea $(S,\mathcal{E})$ una familia multiplicativa de isometrías parciales en $(\mathcal{E},\mathbb{Z}^2,<_{lex})$ y sea $(\widetilde{A},\widetilde{B})$ una extensión unitaria conmutativa de $(S_{(1,0)},S_{(0,1)})$ tal que para todo $k \geq 1$*

$$\widetilde{A}^{-k}\widetilde{B}f = S_{(-k,1)}f \qquad \textit{para todo } \ f \in \mathcal{E}_{(-k,1)}$$

entonces $(\widetilde{A}^n\widetilde{B}^m)_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}$ es una extensión unitaria de $(S,\mathcal{E})$ en $\mathcal{F}$.

Demostración. Se define $U_{(n,m)} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ mediante

$$U_{(n,m)} = \widetilde{A}^n\widetilde{B}^m.$$

Es fácil probar que $(U_{(n,m)})_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}$ es un grupo unitario de operadores.

Paso 1: $n \geq 0$ y $m \geq 0$.

Del Lema 4.3

$$U_{(n,m)}f = \widetilde{A}^n\widetilde{B}^m f = S_{(n,m)}f \qquad \text{si } \ f \in \mathcal{E}_{(n,m)}.$$

Paso 2: $n < 0$ y $m > 0$.

Del Lema 4.4.

$$U_{(n,m)}f = \widetilde{A}^n\widetilde{B}^m f = S_{(n,m)}f \qquad \text{si } \ f \in \mathcal{E}_{(n,m)}.$$

En vista de los Pasos 1 y 2,

$$S_{(n,m)} = U_{(n,m)}\,|_{\mathcal{E}_{(n,m)}} \qquad \text{para todo } \ (n,m) \geq (0,0).$$

Por lo tanto $(\widetilde{A}^n\widetilde{B}^m)_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}$ es una extensión unitaria de $(S,\mathcal{E})$. $\square$

Lema 4.6. *Sea $(S,\mathcal{E})$ una familia multiplicativa de isometrías parciales en $(\mathcal{E},\mathbb{Z}^2,<_{lex})$ y sea $(\widetilde{A},\widetilde{B})$ una extensión unitaria conmutativa de $(S_{(1,0)},S_{(0,1)})$. Suponga que existen $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$, subespacios de $\mathcal{E}$, tales que $\mathcal{P}_1\subseteq\mathcal{E}_{(0,1)}$ y $\mathcal{P}_2\subseteq S_{(0,1)}\mathcal{E}_{(0,1)}$. Sea $k\geq 1$, si*

$$\mathcal{E}_{(-k,1)}=\mathcal{P}_1\vee S^{-1}_{(-k,1)}\mathcal{P}_2$$

entonces

$$\widetilde{A}^{-k}\widetilde{B}f=S_{(-k,1)}f\qquad \textit{para todo}\;\; f\in\mathcal{E}_{(-k,1)}.$$

Demostración. Para probar el resultado basta probar que

(i) $\widetilde{A}^{-k}\widetilde{B}f=S_{(-k,1)}f$ para todo $f\in\mathcal{P}_1$.
(ii) $\widetilde{A}^{-k}\widetilde{B}f=S_{(-k,1)}f$ para todo $f\in S^{-1}_{(-k,1)}\mathcal{P}_2$.

(i) Si $f\in\mathcal{P}_1$ entonces $f\in\mathcal{E}_{(0,1)}$. Como $S_{(-k,1)}\mathcal{E}_{(0,1)}\subseteq\mathcal{E}_{(k,0)}$, se tiene que $S_{(-k,1)}f\in\mathcal{E}_{(k,0)}$. Se sigue que

$$S_{(k,0)}S_{(-k,1)}f=S_{(0,1)}f.$$

Luego

$$\widetilde{A}^{k}S_{(-k,1)}f=\widetilde{B}f.$$

Por lo tanto

$$S_{(-k,1)}f=\widetilde{A}^{-k}\widetilde{B}f.$$

(ii) Sea $f\in S^{-1}_{(-k,1)}\mathcal{P}_2$. Entonces existe una $g\in\mathcal{P}_2$ tal que

$$f=S^{-1}_{(-k,1)}g.$$

Por hipótesis $\mathcal{P}_2\subset S_{(0,1)}\mathcal{E}_{(0,1)}$ así que $g\in S_{(0,1)}\mathcal{E}_{(0,1)}$. Luego $S^{-1}_{(0,1)}g\in\mathcal{E}_{(0,1)}$. Sea $h\in\mathcal{E}_{(0,1)}$ dada por

$$h=S^{-1}_{(0,1)}g.$$

Como $S_{(k,0)}\mathcal{E}_{(0,1)}\subseteq\mathcal{E}_{(-k,1)}$, se tiene que $S_{(k,0)}h\in\mathcal{E}_{(-k,1)}$. Se sigue que

$$S_{(-k,1)}S_{(k,0)}h=S_{(0,1)}h.$$

Luego

$$S_{(-k,1)}S_{(k,0)}S^{-1}_{(0,1)}g=g.$$

Aplicando $S_{(-k,1)}^{-1}$ se obtiene

$$S_{(k,0)}S_{(0,1)}^{-1}g = S_{(-k,1)}^{-1}g.$$

Como $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ es una extensión unitaria conmutativa de $(S_{(1,0)}, S_{(0,1)})$ se obtiene

$$\widetilde{B}^{-1}\widetilde{A}^k g = \widetilde{A}^k \widetilde{B}^{-1} g = S_{(-k,1)}^{-1} g.$$

Entonces

$$\widetilde{B}^{-1}\widetilde{A}^k S_{(-k,1)} f = S_{(-k,1)}^{-1} S_{(-k,1)} f = f.$$

De donde

$$S_{(-k,1)} f = \widetilde{A}^{-k}\widetilde{B} f.$$

□

Definición. Sea $(S, \mathcal{E})$ una familia multiplicativa de isometrías parciales en $(\mathcal{E}, \mathbb{Z}^2, <_{lex})$. Se dice que $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ es un *par generador de salto de línea* para la familia si $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son subespacios de $\mathcal{E}$ tales que

(a) $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{E}_{(0,1)}$,
(b) $\mathcal{P}_2 \subseteq S_{(0,1)}\mathcal{E}_{(0,1)}$.
(c) $\mathcal{E}_{(-k,1)} = \mathcal{P}_1 \vee S_{(-k,1)}^{-1}\mathcal{P}_2$ para todo $k \geq 1$.

El principal resultado de esta sección es el teorema siguiente.

Teorema 4.7. *Sea $(S, \mathcal{E})$ una familia multiplicativa de isometrías parciales en $(\mathcal{E}, \mathbb{Z}^2, <_{lex})$ con par generador de salto de línea. Entonces $(\widetilde{A}^n\widetilde{B}^m)_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}$ es una extensión unitaria de $(S, \mathcal{E})$ en $\mathcal{F}$ donde $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ es una extensión unitaria conmutativa de $(S_{(1,0)}, S_{(0,1)})$.*

Este resultado se sigue de la Observación 4.1, el Lema 4.6 y el Teorema 4.5.

Observación 4.8. Sea $(S, \mathcal{E})$ una familia multiplicativa de isometrías parciales en $(\mathcal{E}, \mathbb{Z}^2, <_{lex})$ y sea $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ una extensión unitaria conmutativa de $(S_{(1,0)}, S_{(0,1)})$ en $\mathcal{F}$. Suponga que $(\widetilde{A}^n\widetilde{B}^m)_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}$ es una extensión unitaria de $(S, \mathcal{E})$ en $\mathcal{F}$.

Entonces la familia $(\widetilde{A}^n\widetilde{B}^m)_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}$ es una extensión unitaria minimal de $(S, \mathcal{E})$ si y sólo si

$$\mathcal{F} = \bigvee_{n,m\in\mathbb{Z}} \widetilde{A}^n\widetilde{B}^m\mathcal{E}.$$

2. Parametrización de extensiones unitarias de isometrías parciales

Se fijará alguna notación. Sea $\mathcal{D}$ un subespacio cerrado del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Para un operador unitario U en $\mathcal{H}$ sea

$$\mathcal{T}_{U,\mathcal{D}} = \bigvee_{k\in\mathbb{Z}} U^k\mathcal{D}.$$

Para dos operadores unitarios conmutativos U y V en $\mathcal{H}$ sea

$$\mathcal{T}_{U,V,\mathcal{D}} = \bigvee_{n,m\in\mathbb{Z}} U^n V^m\mathcal{D}.$$

Luego una extensión unitaria minimal de A es una extensión unitaria $\widetilde{A}$ en $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F} = \mathcal{T}_{\widetilde{A},\mathcal{H}}$ y una extensión unitaria conmutativa minimal de (A, B) es una extensión unitaria conmutativa $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ en $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F} = \mathcal{T}_{\widetilde{A},\widetilde{B},\mathcal{H}}$.

El conjunto auxiliar $\mathcal{Z}_{A,B}$ se define de la siguiente manera. Dadas dos isometrías parciales $A : \mathcal{D}_A \to \mathcal{R}_A$ y $B : \mathcal{D}_B \to \mathcal{R}_B$ tales que $\mathcal{D}_B \subseteq \mathcal{D}_{A^k}$ y $\mathcal{R}_B \subseteq \mathcal{R}_{A^k}$ para todo $k \geq 0$, sea $\mathcal{Z}_{A,B}$ el conjunto de los pares (U, V_U) tales que $U : \mathcal{T}_{U,\mathcal{H}} \to \mathcal{T}_{U,\mathcal{H}}$ es una extensión unitaria minimal de A y existe un operador isométrico $V_U : \mathcal{T}_{U,\mathcal{D}_B} \to \mathcal{T}_{U,\mathcal{R}_B}$ tal que

(a) V_U es una extensión de B.

(b) $V_U U^k f = U^k B f$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ y $f \in \mathcal{D}_B$.

(c) $UV_U = V_U U \mid_{\mathcal{D}_{V_U}}$.

(d) $U(\mathcal{D}_{V_U}) = \mathcal{D}_{V_U}$ y $U(\mathcal{R}_{V_U}) = \mathcal{R}_{V_U}$.

Lema 4.9. *Sean $A : \mathcal{D}_A \to \mathcal{R}_A$ y $B : \mathcal{D}_B \to \mathcal{R}_B$ isometrías parciales tales que $\mathcal{D}_B \subseteq \mathcal{D}_{A^k}$, $\mathcal{R}_B \subseteq \mathcal{R}_{A^k}$ para todo $k \geq 0$ y tales que el par (A, B) conmuta débilmente. Sea $U : \mathcal{T}_{U,\mathcal{H}} \to \mathcal{T}_{U,\mathcal{H}}$ una extensión unitaria minimal de A. Entonces existe un único operador isométrico $V_U : \mathcal{T}_{U,\mathcal{D}_B} \to \mathcal{T}_{U,\mathcal{R}_B}$ tal que $(U, V_U) \in \mathcal{Z}_{A,B}$.*

Demostración. Observe que $U : \mathcal{T}_{U,\mathcal{H}} \to \mathcal{T}_{U,\mathcal{H}}$ es un operador unitario y

$$\langle U^{-k}Bf, Bg\rangle_{\mathcal{H}} = \langle A^{-k}Bf, Bg\rangle_{\mathcal{H}} = \langle f, A^k g\rangle_{\mathcal{H}} = \langle f, U^k g\rangle_{\mathcal{H}}$$

para todo $k \geq 0$, $f, g \in \mathcal{D}_B$.

Luego

$$V_o\left(\sum_{k=-N}^{N} U^k f\right) = \sum_{k=-N}^{N} U^k B f$$

define un operador isométrico de la cápsula lineal de los elementos de la forma

$$\sum_{k=-N}^{N} U^k f \qquad (\text{con } f \in \mathcal{D}_B)$$

en la cápsula lineal de los elementos de la forma

$$\sum_{k=-N}^{N} U^k B f \qquad (\text{con } f \in \mathcal{D}_B).$$

Por lo tanto, se puede extender V_o a un operador isométrico $V_U : \mathcal{T}_{U,\mathcal{D}_B} \to \mathcal{T}_{U,\mathcal{R}_B}$, tal que V_U extiende a B y V_U conmuta con U.

Claramente (d) se sigue de las definiciones de $\mathcal{T}_{U,\mathcal{D}_B}$, $\mathcal{T}_{U,\mathcal{R}_B}$ y V_U. □

Corolario 4.10. *Sean $A : \mathcal{D}_A \to \mathcal{R}_A$ y $B : \mathcal{D}_B \to \mathcal{R}_B$ isometrías parciales tales que $\mathcal{D}_B \subseteq \mathcal{D}_{A^k}$ y $\mathcal{R}_B \subseteq \mathcal{R}_{A^k}$ para todo $k \geq 0$. Si el par (A, B) conmuta débilmente entonces $\mathcal{Z}_{A,B} \neq \emptyset$.*

Proposición 4.11. *Sean $A : \mathcal{D}_A \to \mathcal{R}_A$ y $B : \mathcal{D}_B \to \mathcal{R}_B$ isometrías parciales tales que $\mathcal{D}_B \subseteq \mathcal{D}_{A^k}$, $\mathcal{R}_B \subseteq \mathcal{R}_{A^k}$ para todo $k \geq 0$ y tales que el par (A, B) conmuta débilmente. Si $(U, V_U) \in \mathcal{Z}_{A,B}$ entonces*

(a) $\mathcal{W}_{U,B} = \mathcal{W}_{U,V_U}$.

(b) $\mathcal{W}_{U,V_U} \subseteq \mathcal{W}_{A,B}$.

Demostración.

(a) De la definición de V_U se sigue que

$$\mathcal{W}_{U,B} = \mathcal{W}_{U,V_U}.$$

(b) Sea $(X, Y) \in \mathcal{W}_{U,V_U}$. Entonces (X, Y) es un par de operadores unitarios conmutativos, esto es (X, Y) es $\mathcal{T}_{U,\mathcal{H}}$-isomorfo a una extensión unitaria conmutativa minimal $(\widetilde{U}, \widetilde{V})$ de (U, V_U). Como $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{T}_{U,\mathcal{H}}$, U extiende a A y V_U extiende a B, se sigue que (X, Y) es un par de operadores unitarios conmutativos, esto es, $\mathcal{H}$-isomorfo a una extensión unitaria conmutativa minimal $(\widetilde{U}, \widetilde{V})$ de (A, B). Luego $(X, Y) \in \mathcal{W}_{A,B}$. □

2.1. Parametrización de extensiones unitarias conmutativas de un par de isometrías parciales.

En esta sub-sección se usará el modelo de Arov-Grossman y se seguirán las ideas de Morán.

Se usará $P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}$ para denotar la proyección ortogonal del espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ cuando $\mathcal{H}$ y $\mathcal{F}$ son subespacios de un espacio de Hilbert más grande, en particular cuando $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$. Si $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ y no hay posibilidad de confusión, se usará $P_{\mathcal{H}}$ en lugar de $P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}}$.

Como es usual se denotará

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Sean $\mathcal{N}, \mathcal{M}$ el espacio de Hilbert. Con $\mathcal{B}(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ se denotará la clase de todas las funciones holomorfas θ en $\mathbb{D}$ tales que $\theta(z)$ es una contracción para cada $z \in \mathbb{D}$.

Se tomarán

$$\mathcal{N}_A = \mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_A \qquad \text{y} \qquad \mathcal{M}_A = \mathcal{H} \ominus \mathcal{R}_A.$$

Sea $\widetilde{A}$ una extensión unitaria minimal en $\mathcal{F}$ de A. La *función holomorfa asociada a* $\widetilde{A}$ es la función holomorfa $\theta_{\widetilde{A}} : \mathbb{D} \to \mathcal{B}(\mathcal{N}_A, \mathcal{M}_A)$ dada por

$$\theta_{\widetilde{A}}(z) = P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{M}_A} \, (\widetilde{A}(I - zP^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}\ominus\mathcal{H}}\widetilde{A})^{-1}) \mid_{\mathcal{N}_A} .$$

Usando esta función analítica a valores operadores Arov y Grossman [**5, 6**] construyeron una biyección entre el conjunto $\mathcal{U}_A$ y la bola unidad de las funciones analíticas a valores operadores $\mathcal{B}(\mathcal{N}_A, \mathcal{M}_A)$. Este resultado jugará un papel importante en lo que sigue.

Teorema 4.12. *Sean $A : \mathcal{D}_A \to \mathcal{R}_A$ y $B : \mathcal{D}_B \to \mathcal{R}_B$ isometrías parciales tales que $\mathcal{D}_B \subseteq \mathcal{D}_{A^k}$, $\mathcal{R}_B \subseteq \mathcal{R}_{A^k}$ para todo $k \geq 0$ y tales que el par (A, B) conmuta débilmente. Para $(U, V_U) \in \mathcal{Z}_{A,B}$ sea $I_U : \mathcal{W}_{U,V_U} \to \mathcal{W}_{A,B}$ dada por*

$$I_U(X, Y) = (X, Y)$$

entonces:

(a) I_U *es una función bien definida.*

(b) I_U *es una función inyectiva.*

(c) *Sea* (X, Y) *un elemento de* $\mathcal{W}_{A,B}$. (X, Y) *pertenece al rango de* I_U *si y sólo si existe un isomorfismo unitario* $\varphi : \mathcal{T}_{X,\mathcal{H}} \to \mathcal{T}_{U,\mathcal{H}}$ *que deja invariantes los elementos de* $\mathcal{H}$ *tales que* $U\,\varphi = \varphi\, X \mid_{\mathcal{T}_{X,\mathcal{H}}}$.

DEMOSTRACIÓN.

(a) Esta parte se sigue inmediatamente de la Proposición 4.11 (b).

(b) Sean (X_1, Y_1) y $(X_2, Y_2) \in \mathcal{W}_{U,V_U}$.

De la Proposición 4.11 (b) se tiene que $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2) \in \mathcal{W}_{A,B}$.

Suponga que (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) son $\mathcal{H}$-isomorfas. Entonces existe un isomorfismo unitario $\varphi : \mathcal{T}_{X_1,Y_1,\mathcal{H}} \to \mathcal{T}_{X_2,Y_2,\mathcal{H}}$ que deja invariantes los elementos de $\mathcal{H}$ y satisface

$$\varphi X_1^n Y_1^m = X_2^n Y_2^m \varphi \qquad \text{para todo } n, m \in \mathbb{Z}.$$

Como X_1 y X_2 extienden a U, se sigue que

$$\varphi U^n = U^n \varphi \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Luego φ deja invariantes los elementos de $\mathcal{T}_{U,\mathcal{H}}$. Entonces (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) son $\mathcal{T}_{U,\mathcal{H}}$-isomorfas. Por lo tanto I_U es inyectiva.

(c) Sea $(X, Y) \in \mathcal{W}_{A,B}$.

Si (X, Y) pertenece al rango de I_U, entonces existe una extensión unitaria conmutativa minimal (X', Y') de (U, V_U).

Como U extiende a A y V_U extiende a B se sigue que (X', Y') es una extensión unitaria conmutativa minimal del par (A, B), para el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Luego existe un isomorfismo unitario $\Phi : \mathcal{T}_{X,Y,\mathcal{H}} \to \mathcal{T}_{X',Y',\mathcal{H}}$ que deja invariantes los elementos de $\mathcal{H}$ y tal que

$$\Phi X^n Y^m = X'^{\,n} Y'^{\,m} \Phi.$$

Sea φ la restricción de Φ a $\mathcal{T}_{X,\mathcal{H}}$. Entonces $\varphi : \mathcal{T}_{X,\mathcal{H}} \to \mathcal{T}_{U,\mathcal{H}}$ es un isomorfismo unitario que deja invariantes los elementos de $\mathcal{H}$ y tal que

$$\varphi\, X \mid_{\mathcal{T}_{X,\mathcal{H}}} = X' \varphi = U \varphi.$$

Recíprocamente, sea (X,Y) un elemento de $\mathcal{W}_{A,B}$ y suponga que existe un isomorfismo unitario $\varphi : \mathcal{T}_{X,\mathcal{H}} \to \mathcal{T}_{U,\mathcal{H}}$ que deja invariantes los elementos de $\mathcal{H}$ tal que

$$U\,\varphi = \varphi\, X\mid_{\mathcal{T}_{X,\mathcal{H}}} .$$

Sea

$$X' = X\mid_{\mathcal{T}_{X,\mathcal{H}}} \qquad \text{y} \qquad V_{X'} = Y\mid_{\mathcal{T}_{X',\mathcal{H}}} .$$

Como (X,Y) es una extensión unitaria conmutativa minimal del par $(X',V_{X'})$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ entonces $V_{X'}$ es una extensión isométrica de Y que conmuta con X' tal que el dominio y el rango de $V_{X'}$ son invariantes por X'.

Sea $\Psi : \mathcal{W}_{X',V_{X'}} \to \{\beta \in \mathcal{B}(\mathcal{N}_{V_{X'}}, \mathcal{M}_{V_{X'}}) : X'\beta(z) = \beta(z)X'\mid_{\mathcal{N}_{V_{X'}}}\}$ dada por

$$\Psi(X,Y)(z) = \theta_Y(z) = P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{M}_{V_{X'}}}\left(Y\left(I - zP^{\mathcal{F}}_{\mathcal{T}_{Y,\mathcal{H}}\ominus\mathcal{H}}Y\right)^{-1}\right)\mid_{\mathcal{N}_{V_{X'}}}$$

donde θ_Y es la función holomorfa asociada a Y. Por [**15**, Proposición 6]) Ψ es una biyección bien definida.

Entonces existe una función holomorfa $\theta \in \mathcal{B}(\mathcal{T}_{X',\mathcal{H}} \ominus \mathcal{T}_{X',\mathcal{D}_V}, \mathcal{T}_{X',\mathcal{H}} \ominus \mathcal{T}_{X',\mathcal{R}_V})$ tal que

$$\Psi(X,Y) = \theta \qquad \text{y} \qquad X'\theta = \theta X'\mid_{\mathcal{T}_{X',\mathcal{H}}\ominus\mathcal{T}_{X',\mathcal{D}_V}} .$$

Observe que

$$\varphi(\mathcal{T}_{X',\mathcal{D}_V}) = \varphi(\mathcal{T}_{X,\mathcal{D}_V}) = \bigvee_{k\in\mathbb{Z}}\varphi X^k\mathcal{D}_V = \bigvee_{k\in\mathbb{Z}}U^k\varphi\mathcal{D}_V = \bigvee_{k\in\mathbb{Z}}U^k\mathcal{D}_V = \mathcal{T}_{U,\mathcal{D}_V}$$

y

$$\varphi(\mathcal{T}_{X',\mathcal{R}_V}) = \varphi(\mathcal{T}_{X,\mathcal{R}_V}) = \bigvee_{k\in\mathbb{Z}}\varphi X^k\mathcal{R}_V = \bigvee_{k\in\mathbb{Z}}U^k\varphi\mathcal{R}_V = \bigvee_{k\in\mathbb{Z}}U^k\mathcal{R}_V = \mathcal{T}_{U,\mathcal{R}_V}.$$

Se define

$$\beta = \varphi\theta\varphi^{-1}\mid_{\mathcal{T}_{U,\mathcal{H}}\ominus\mathcal{T}_{U,\mathcal{D}_V}} .$$

Entonces $\beta \in \mathcal{B}(\mathcal{T}_{U,\mathcal{H}} \ominus \mathcal{T}_{U,\mathcal{D}_V}, \mathcal{T}_{U,\mathcal{H}} \ominus \mathcal{T}_{U,\mathcal{R}_V})$ y

$$\beta U\mid_{\mathcal{T}_{U,\mathcal{H}}\ominus\mathcal{T}_{U,\mathcal{R}_V}} = U\beta.$$

De [**15**, Proposición 6]) se sigue que existe $(\widetilde{U},\widetilde{V}) \in \mathcal{W}_{U,V_U}$ tal que

$$\Psi(\widetilde{U},\widetilde{V}) = \beta.$$

Como $(\widetilde{U},\widetilde{V})$ y (X,Y) son $\mathcal{T}_{U,\mathcal{H}}$-isomorfas, se sigue que (X,Y) pertenece al rango de I_U. $\square$

Teorema 4.13. *Sean $A:\mathcal{D}_A\to\mathcal{R}_A$ y $B:\mathcal{D}_B\to\mathcal{R}_B$ isometrías parciales tales que $\mathcal{D}_B\subseteq\mathcal{D}_{A^k}$, $\mathcal{R}_B\subseteq\mathcal{R}_{A^k}$ para todo $k\geq 0$ y tales que el par (A,B) conmuta débilmente. Sea A^θ la extensión unitaria minimal de A con función holomorfa asociada θ.*

(a) *Existe una biyección entre $\mathcal{W}_{A,B}$ y*

$$\bigcup_{\theta\in\mathcal{B}(\mathcal{N}_A,\mathcal{M}_A)}\mathcal{W}_{A^\theta,B}\,.$$

(b) *Existe una biyección entre $\mathcal{W}_{A,B}$ y*

$$\bigcup_{\theta\in\mathcal{B}(\mathcal{N}_A,\mathcal{M}_A)}\{\beta\in\mathcal{B}(\mathcal{T}_{A^\theta,\mathcal{H}}\ominus\mathcal{T}_{A^\theta,\mathcal{D}_B},\mathcal{T}_{A^\theta,\mathcal{H}}\ominus\mathcal{T}_{A^\theta,\mathcal{R}_B}):A^\theta\beta=\beta A^\theta\mid(\mathcal{T}_{A^\theta,\mathcal{H}}\ominus\mathcal{T}_{A^\theta,\mathcal{R}_B})\}\,.$$

DEMOSTRACIÓN.

$(\widetilde{A},\widetilde{B})\in\mathcal{W}_{A,B}$ si y sólo si existe una extensión unitaria minimal A' de A tal que $(\widetilde{A},\widetilde{B})$ es una extensión unitaria conmutativa minimal de (A',B). Por el modelo de Arov-Grossman [**5, 6**] existe una biyección entre el conjunto $\mathcal{U}_A$ y la bola unidad de las funciones analíticas a valores operadores $\mathcal{B}(\mathcal{N}_A,\mathcal{M}_A)$. Por lo tanto se obtiene (a).

De [**15**, Proposición 8] se tiene que existe una biyección entre $\mathcal{W}_{A^\theta,B}$ y el conjunto

$$\{\beta\in\mathcal{B}(\mathcal{T}_{A^\theta,\mathcal{H}}\ominus\mathcal{T}_{A^\theta,\mathcal{D}_B},\mathcal{T}_{A^\theta,\mathcal{H}}\ominus\mathcal{T}_{A^\theta,\mathcal{R}_B}):A^\theta\beta=\beta A^\theta\mid_{\mathcal{T}_{A^\theta,\mathcal{H}}\ominus\mathcal{T}_{A^\theta,\mathcal{D}_B}}\}\,,$$

así que (b) se sigue de (a). $\square$

Sea $\mathcal{D}$ un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, para una isometría parcial A en $\mathcal{H}$ sea

$$\mathcal{T}_{A,\mathcal{D}}{}^{+}=\bigvee_{k\geq 0}A^k\mathcal{D}.$$

Para $k\in\mathbb{Z}$, sea $e_k:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ la función dada por $e_k(t)=e^{ikt}$. Como es usual sea

$$H^2(\mathcal{M}_A)=\left\{\sum_{k\geq 0}e_k\,h_k\quad\text{tal que }\{h_k\}_{k\geq 0}\subset\mathcal{M}_A\text{ y }\sum_{k\geq 0}\|h_k\|^2_{\mathcal{H}}<\infty\right\},$$

$$H^2_-(\mathcal{N}_A)=\left\{\sum_{k<0}e_k\,h_k\quad\text{tal que }\{h_k\}_{k<0}\subset\mathcal{N}_A\text{ y }\sum_{k<0}\|h_k\|^2_{\mathcal{H}}<\infty\right\}.$$

Cuando $\mathcal{H} = \mathcal{D}_A$ el operador $A^+ : \mathcal{H} \oplus H^2(\mathcal{M}_A) \to \mathcal{H} \oplus H^2(\mathcal{M}_A)$ definido por

$$A^+(f \oplus \{h_k\}_{k\geq 0}) = (Af + h_0) \oplus \{h_{k+1}\}_{k\geq 0}$$

es la extensión unitaria minimal de A.

Siguiendo el mismo enfoque de [**15**] se obtienen los siguientes resultados.

Corolario 4.14. *Sean $A : \mathcal{D}_A \to \mathcal{R}_A$ y $B : \mathcal{D}_B \to \mathcal{R}_B$ isometrías parciales tales que $\mathcal{D}_B \subseteq \mathcal{D}_{A^k}$, $\mathcal{R}_B \subseteq \mathcal{R}_{A^k}$ para todo $k \geq 0$ y tales que el par (A, B) conmuta débilmente. Suponga que $\mathcal{H} = \mathcal{D}_A$. Entonces*

$\mathcal{W}_{A,B}$ tiene un único elemento si y sólo si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

(a) *$\mathcal{H} \oplus H^2(\mathcal{M}_A) = \Upsilon_1$ donde*

$$\Upsilon_1 = \mathcal{T}_{A,\mathcal{D}_B}{}^+ \vee \bigvee_{n\leq -1} \left\{ (A^{-1}P_{\mathcal{R}_A})^{-n} f + \sum_{k=0}^{-n-1} e_k\, P_{\mathcal{M}_A}(A^{-1}P_{\mathcal{R}_A})^{-n-1-k} f \ \textit{para}\ f \in \mathcal{D}_B \right\}.$$

(b) *$\mathcal{H} \oplus H^2(\mathcal{M}_A) = \Upsilon_2$ donde*

$$\Upsilon_2 = \mathcal{T}_{A,\mathcal{R}_B}{}^+ \vee \bigvee_{n\leq -1} \left\{ (A^{-1}P_{\mathcal{R}_A})^{-n} f + \sum_{k=0}^{-n-1} e_k\, P_{\mathcal{M}_A}(A^{-1}P_{\mathcal{R}_A})^{-n-1-k} f \ \textit{para}\ f \in \mathcal{R}_B \right\}.$$

(c) *Las sucesiones $\Gamma_1' = \{A_1^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y $\Gamma_2' = \{A_2^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ son dos representaciones unitarias disjuntas de $\mathbb{Z}$, donde Υ_1 y Υ_2 son como antes y*

$$A_1 = A^+ \mid (\mathcal{H} \oplus H^2(\mathcal{M}_A) \ominus \Upsilon_1)$$

y

$$A_2 = A^+ \mid (\mathcal{H} \oplus H^2(\mathcal{M}_A) \ominus \Upsilon_2).$$

DEMOSTRACIÓN. El resultado se sigue de [**15**, Proposición 8] y del Teorema 4.12. $\square$

Cuando $\mathcal{H} = \mathcal{R}_A$, se define el operador $A^- : \mathcal{H} \oplus H^2_-(\mathcal{N}_A) \to \mathcal{H} \oplus H^2_-(\mathcal{N}_A)$ mediante

$$A^- \left(f \oplus \sum_{k\leq -1} e_k\, h_k \right) = AP_{\mathcal{D}_A} f \oplus \left(e_{-1}\, P_{\mathcal{N}_A} f + \sum_{k\leq -1} e_{k-1}\, h_k \right)$$

Observar que el dominio de A^- es

$$\mathcal{H} \oplus H^2_-(\mathcal{N}_A) = \mathcal{D}_A \oplus \mathcal{N}_A \oplus H^2_-(\mathcal{N}_A).$$

Además observar que

$$A^- \mid_{\mathcal{D}_A} = A$$

y

$$A^- \mid_{\mathcal{N}_A \oplus H^2_-(\mathcal{N}_A)}$$

es el operador de multiplicación por e_{-1}. Más aún el rango es

$$\mathcal{R}_A \oplus e_{-1}\mathcal{N}_A \oplus e_{-1}H^2_-(\mathcal{N}_A) = \mathcal{H} \oplus H^2_-(\mathcal{N}_A)$$

ya que

$$H^2_-(\mathcal{N}_A) = e_{-1}\mathcal{N}_A \oplus e_{-1}H^2_-(\mathcal{N}_A).$$

Luego se puede probar que A^- es un operador unitario.

Corolario 4.15. *Sean $A : \mathcal{D}_A \to \mathcal{R}_A$ y $B : \mathcal{D}_B \to \mathcal{R}_B$ isometrías parciales tales que $\mathcal{D}_B \subseteq \mathcal{D}_{A^k}$, $\mathcal{R}_B \subseteq \mathcal{R}_{A^k}$ para todo $k \geq 0$ y tales que el par (A, B) conmuta débilmente. Suponga que $\mathcal{H} = \mathcal{R}_A$.*

$\mathcal{W}_{A,B}$ tiene un único elemento si y sólo si las sucesiones $\Gamma''_1 = \{A_1^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $\Gamma''_2 = \{A_2^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ son dos representaciones unitarias disjuntas de $\mathbb{Z}$, donde

$$A_1 = A^- \mid (\mathcal{H} \oplus H^2_-(\mathcal{N}_A) \ominus \mathcal{T}_{U,\mathcal{D}_A}),$$

y

$$A_2 = A^- \mid (\mathcal{H} \oplus H^2_-(\mathcal{N}_A) \ominus \mathcal{T}_{U,\mathcal{R}_A}).$$

La prueba es análoga a la prueba del último corolario.

Corolario 4.16. *Sean $A : \mathcal{D}_A \to \mathcal{R}_A$ y $B : \mathcal{D}_B \to \mathcal{R}_B$ isometrías parciales tales que $\mathcal{D}_B \subseteq \mathcal{D}_{A^k}$, $\mathcal{R}_B \subseteq \mathcal{R}_{A^k}$ para todo $k \geq 0$ y tales que el par (A, B) conmuta débilmente.*

Si $\dim \mathcal{N}_A = 0$ ó $\dim \mathcal{M}_A = 0$ entonces existe una biyección entre $\mathcal{W}_{A,B}$ y

$$\left\{ \begin{array}{ll} \theta \in \mathcal{B}(\mathcal{N}_A, \mathcal{M}_A) & : P_{\mathcal{R}_A}(BP_{\mathcal{D}_B} + \theta(z)P_{\mathcal{N}_B})[I - z(BP_{\mathcal{D}_B} + \theta(z)P_{\mathcal{N}_B})]^{-1}A \\ & \\ & = AP_{\mathcal{D}_A}(BP_{\mathcal{D}_B} + \theta(z)P_{\mathcal{N}_B})[I - z(BP_{\mathcal{D}_B} + \theta(z)P_{\mathcal{N}_B})]^{-1} \mid \mathcal{H} \end{array} \right\}.$$

Demostración. El resultado se sigue de [**15**, Sección 2]. $\square$

2.2. Parametrización de extensiones unitarias de familias multiplicativas de isometrías parciales.

Sea $\mathcal{W}(S,\mathcal{E})$ el conjunto de todos los grupos unitarios $(U'_\omega)_{\omega\in\Omega}$ que son $\mathcal{H}$-*isomorfos* a una extensión unitaria minimal $(U_\omega)_{\omega\in\Omega}$ de la familia multiplicativa de isometrías parciales $(S,\mathcal{E})$.

Del Teorema 4.7 se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 4.17. *Sea $(S,\mathcal{E})$ una familia multiplicativa de isometrías parciales en $(\mathcal{E},\mathbb{Z}^2,<_{lex})$ con par generador de salto de línea. Entonces la clase $\mathcal{W}(S,\mathcal{E})$ es no vacía.*

Se describirá el conjunto $\mathcal{W}(S,\mathcal{E})$.

Teorema 4.18. *Sea $(S,\mathcal{E})$ una familia multiplicativa de isometrías parciales en $(\mathcal{E},\mathbb{Z}^2,<_{lex})$ con par generador de salto de línea.*

Para $\theta\in\mathcal{B}(\mathcal{E}\ominus\mathcal{E}_{(1,0)},\mathcal{E}\ominus S_{(1,0)}\mathcal{E}_{(1,0)})$ sea A^θ la extensión unitaria minimal de $S_{(1,0)}$ con función holomorfa asociada θ.

Existe una biyección entre $\mathcal{W}(S,\mathcal{E})$ y

$$\bigcup_{\theta\in\mathcal{B}(\mathcal{E}\ominus\mathcal{E}_{(1,0)},\mathcal{E}\ominus S_{(1,0)}\mathcal{E}_{(1,0)})}\left\{\begin{array}{l}\beta\in\mathcal{B}(\mathcal{T}_{A^\theta,\mathcal{E}}\ominus\mathcal{T}_{A^\theta,\mathcal{E}_{(0,1)}},\mathcal{T}_{A^\theta,\mathcal{E}}\ominus\mathcal{T}_{A^\theta,S_{(0,1)}\mathcal{E}_{(0,1)}}):\\ \\ A^\theta\beta=\beta A^\theta\mid(\mathcal{T}_{A^\theta,\mathcal{E}}\ominus\mathcal{T}_{A^\theta,S_{(0,1)}\mathcal{E}_{(0,1)}})\end{array}\right\}.$$

Demostración. Por [**8**, Proposición 3] el par $(S_{(1,0)},S_{(0,1)})$ conmuta débilmente (ver Observación 4.1).

Usando el Teorema 4.13 se obtiene la biyección. □

Corolario 4.19. *Sea $(S,\mathcal{E})$ una familia multiplicativa de isometrías parciales en $(\mathcal{E},\mathbb{Z}^2,<_{lex})$ con par generador de salto de línea. Sean Υ_1, Υ_2, Γ'_1, Γ'_2, Γ''_1 y Γ''_2 como en la sección previa, pero para el espacio de Hilbert $\mathcal{E}$ y las isometrías parciales $A=S_{(1,0)}$ y $B=S_{(0,1)}$.*

$\mathcal{W}(S,\mathcal{E})$ tiene un único elemento si y sólo si alguna de las siguientes condiciones se cumple:

(a) *$\mathcal{E}=\mathcal{E}_{(1,0)}$ y $\mathcal{E}\oplus H^2(\mathcal{E}\ominus S_{(1,0)}\mathcal{E}_{(1,0)})=\Upsilon_1$.*

(b) *$\mathcal{E}=\mathcal{E}_{(1,0)}$ y $\mathcal{E}\oplus H^2(\mathcal{E}\ominus S_{(1,0)}\mathcal{E}_{(1,0)})=\Upsilon_2$.*

(c) *$\mathcal{E}=\mathcal{E}_{(1,0)}$ y las sucesiones Γ'_1, Γ'_2 son dos representaciones unitarias disjuntas de $\mathbb{Z}$.*

(d) $\mathcal{E} = S_{(1,0)}\mathcal{E}_{(1,0)}$ *y las sucesiones* Γ''_1, Γ''_2 *son dos representaciones unitarias disjuntas de* $\mathbb{Z}$.

El resultado previo se sigue de los Corolarios 4.14 y 4.15. Y el corolario siguiente se sigue del Corolario 4.16.

Corolario 4.20. *Sea* $(S, \mathcal{E})$ *una familia multiplicativa de isometrías parciales en* $(\mathcal{E}, \mathbb{Z}^2, <_{lex})$ *con par generador de salto de línea.*

Sean $\mathcal{N}_A = \mathcal{E} \ominus \mathcal{E}_{(1,0)}$, $\mathcal{M}_A = \mathcal{E} \ominus S_{(1,0)}\mathcal{E}_{(1,0)}$ *y* $\mathcal{N} = \mathcal{E} \ominus \mathcal{E}_{(0,1)}$.

Si $\dim \mathcal{N}_A = 0$ *ó* $\dim \mathcal{M}_A = 0$ *existe una biyección entre* $\mathcal{W}(S, \mathcal{E})$ *y el conjunto de las funciones* $\theta \in \mathcal{B}(\mathcal{N}_A, \mathcal{M}_A)$ *tales que*

$$P_{S_{(1,0)}\mathcal{E}_{(1,0)}}(S_{(0,1)}P_{\mathcal{E}_{(0,1)}} + \theta(z)P_{\mathcal{N}})[I - z(S_{(0,1)}P_{\mathcal{E}_{(0,1)}} + \theta(z)P_{\mathcal{N}})]^{-1}S_{(1,0)} =$$
$$= S_{(1,0)}P_{\mathcal{E}_{(1,0)}}(S_{(0,1)}P_{\mathcal{E}_{(0,1)}} + \theta(z)P_{\mathcal{N}})[I - z(S_{(0,1)}P_{\mathcal{E}_{(0,1)}} + \theta(z)P_{\mathcal{N}})]^{-1} \mid \mathcal{H}.$$

Bibliografía

[1] M.A. Allen. *Dilataciones unitarias y cadenas de Markov*. Trabajo Especial de Grado (Licenciatura en Matemática) dirigido por la Dra. Marisela Domínguez. Universidad Central de Venezuela (1995). Citado en página(s) 12

[2] I. Ajuria. *Teorema de Pick-Nevanlinna en el disco y en el bidisco.* Trabajo de Grado (de Maestría en Matemática), dirigido por la Dra. María D. Morán. Universidad Central de Venezuela (2008).

[3] N. Amoretti, M. Domínguez. *Unitary extensions of partial isometries.* Mathematische Nachrichten, aceptado en el año 2009. Citado en página(s): 2

[4] R. Arocena. *On the Extension Problem for a class of translation invariant positive forms.* J. Operator Theory, **21**, (1989), 323 - 347. Citado en página(s): 2, 19, 21, 33

[5] D. Z. Arov, L. Z. Grossman. *Scattering matrices in the teory of dilations of isometric operators.* (English. Russian original) Sov. Math., Dokl. 27, 518-522 (1983); translation from Dokl. Akad. Nauk SSSR 270, 17-20 (1983). Citado en página(s): 2, 4, 16, 18, 44, 47

[6] D. Z. Arov, L. Z. Grossman. *Scattering matrices in the theory of unitary extension of isometric operators.* Math. Nachr. 157, 105-123 (1992). Citado en página(s): 2, 4, 16, 18, 44, 47

[7] R. Bruzual, M. Domínguez. *Extensions of operator valued positive definite functions on an interval of $\mathbb{Z}^2$ with the lexicographic order.* Acta Sci. Math. (Szeged) 66 (2000), 623-631. Citado en la página(s): 2, 19, 20, 32, 35, 37

[8] R. Bruzual, M. Domínguez. *Equivalence between the dilation and lifting properties of an ordered group through multiplicative families of isometries. A version of the commutant lifting theorem on some lexicographic groups.* Integral Equations Oper. Theory 40 (2001) 1-15. Citado en página(s): 2, 22, 23, 24, 25, 28, 36, 37, 50

[9] R. Bruzual and M. Domínguez. *Dilatación, Extensión y Representación de Formas Definidas Positivas.* Publicaciones del Postgrado en Matemática de la Facultad de Ciencias de la UCV, 30 Aniversario (2006).

[10] M. Cotlar, R. Bruzual, P. Alegría, M. Domínguez, J. Giménez y S. Marcantognini. *Extensión y Representación de Formas Invariantes en la Teoría de Interpolación, Predicción y Dilatación.* Tercera Escuela Venezolana de Matemáticas (1990).

[11] M. Cotlar, R. Cignoli. *An introduction to functional analysis.* North Holland, (1974).

[12] H. Dym, H.P. McKean. *Fourier Series and Integrals.* Academic Press (1972).

[13] J. Garnett. *Bounded analytic functions*. Academic Press, 1981.

[14] S. Marcantognini, M. Morán. *El modelo de Arov-Grossman y sus aplicaciones*. Decimotercera Escuela Venezolana de Matemática (2000). Citado en página(s): 16, 18

[15] M.D. Morán. *On commuting isometries*. J. Oper. Theory 24, No.1, 75-83 (1990). Citado en página(s): 2, 19, 33, 46, 47, 48, 49

[16] N. Nikol'skii. *Treatise on the Shift Operator*. Springer-Verlag (1986).

[17] H.L. Royden. *Real Analysis*, Collier Macmillan International Editions (1968).

[18] W. Rudin. *Fourier analysis on groups*. Interscience, 1962.

[19] B. Sz.-Nagy. *Sur les contractions de l'espace de Hilbert*. Acta Sci. Math. 15, 87-92 (1953). Citado en página(s): 34

[20] B. Sz.-Nagy, C. Foias. *Harmonic analysis of operators on Hilbert space*. North Holland Publishing Co. 1970. Citado en página(s): 34