



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
POSTGRADO EN MATEMÁTICA

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES DEFINIDAS POSITIVAS EN GRUPOS ORDENADOS

Autor: Lic. Belkys Goncalves

Tutor: Dra. Marisela Domínguez.

Trabajo de Grado de Maestría presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela para optar al título de Magister Scientiarum, Mención Matemática.

Caracas, Venezuela

Enero de 2009

Agradecimiento

Agradezco en primer lugar a Dios, a mi Virgencita que siempre guía mis pasos.

A mi familia. A mis padres, Antonio y Elisabete, por darme todo el apoyo que necesité y por supuesto gracias por toda esa comprensión y ayuda que me brindan siempre.

A mi hermano, Tony, por estar ahí, por preocuparte, simplemente gracias por todo, tus ideas, tu apoyo, y toda esta alegría y confort que me brindas siempre. Te quiero Hermanito.

A mi cuñada, Iliana, quien siempre será mi mejor amiga, mi paño de lágrimas, mi apoyo incondicional.

A todas esas personas, como Jocer, Julian, Jonathan, Angel Padilla, Andrés Pérez y muchas más que fueron un gran apoyo, que se aguantaron algunos de mis malos ratos, que me hicieron reír y que me apoyaron incondicionalmente en esta etapa de mi vida.

A ti, porque sin saberlo quizás, me apoyaste muchísimo, siempre insistías en que hiciera mi tarea, a ti que soportaste muchas de mis lágrimas, eres lo mejor mi ángel.

Al Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico de la Universidad Central de Venezuela por su colaboración en la edición de este trabajo.

Y a la vida, porque hoy nuevamente me ha permitido sonreír al ver que cumplí una de mis metas.

Índice general

Resumen	1
Introducción	2
Capítulo 1. Representación de núcleos de Toeplitz en el caso discreto	4
1. El teorema de Herglotz	5
Capítulo 2. Representación de núcleos de Toeplitz generalizados en el caso discreto	10
1. Formas Bilineales	10
2. Núcleos de Toeplitz generalizados	11
3. La versión del teorema de Herglotz para núcleos de Toeplitz generalizados	14
Capítulo 3. Representación de núcleos de Toeplitz en grupos	22
1. Medida de Haar	22
2. El teorema de Weil	23
Capítulo 4. La versión del teorema de Weil para núcleos de Toeplitz generalizados	28
1. Grupos ordenados	28
2. Núcleos de Toeplitz generalizados en grupos ordenados	28
3. La versión del teorema de Weil para núcleos de Toeplitz generalizados	30
Bibliografía	38

Resumen

En el presente trabajo consideramos núcleos definidos positivos, en especial los núcleos de Toeplitz en grupos y los núcleos de Toeplitz generalizados en grupos ordenados.

Se presenta la demostración de Rudin del teorema de Weil para núcleos de Toeplitz en grupos. Para simplificar la lectura, se presenta previamente un caso particular: la demostración del teorema de Herglotz en el grupo de los enteros.

El principal aporte de este trabajo es dar nuevas demostraciones de los resultados que extienden los dos teoremas anteriores para núcleos de Toeplitz generalizados. Éstos fueron probados originalmente por Cotlar y Sadosky para el caso de los enteros y por Domínguez en el caso general de grupos ordenados.

Introducción

Sea Ω un grupo abeliano localmente compacto y $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función, se dice que ϕ es *definida positiva* en Ω si para cualquier elección de $x_1, \dots, x_N$ en Ω y para cualquier elección de números complejos $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ tenemos que

$$\sum_{n,m=1}^N \lambda_n \overline{\lambda_m} \phi(x_n - x_m) \geq 0.$$

Las funciones definidas positivas surgen naturalmente en la teoría de la transformada de Fourier, ya que, la transformada de Fourier de una medida positiva en un grupo tiene la propiedad de ser definida positiva. El recíproco de este resultado es el teorema de Weil, el cual establece que una función definida positiva es la transformada de Fourier de una medida positiva.

Toda función definida positiva satisface las siguientes propiedades:

- (1) $\phi(-x) = \overline{\phi(x)}$,
- (2) $|\phi(x)| \leq \phi(0)$,
- (3) $|\phi(x) - \phi(y)|^2 \leq 2\phi(0) \operatorname{Re}[\phi(0) - \phi(x - y)]$.

De la propiedad (2) podemos obtener lo siguiente:

- (4) $\phi(0) \geq 0$,
- (5) ϕ es acotada,
- (6) $\|\phi\|_\infty = \phi(0)$,
- (7) $\phi(0) = \max_{x \in \Omega} |\phi(x)|$.

Por otra lado de la propiedad (4) se obtiene que “ ϕ es uniformemente continua si ϕ es continua en cero”.

El concepto de funciones definidas positivas puede extenderse de manera natural para núcleos. Sea $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ un núcleo, se dice que K es *definido positivo* cuando

$$\sum_{n,m=1}^N \lambda_n \overline{\lambda_m} K(x_n, x_m) \geq 0,$$

para cualquier elección de $x_1, \dots, x_N \in \Omega$ y para cualquier elección de números complejos $\lambda_1, \dots, \lambda_N$.

El objetivo fundamental de este trabajo es dar una nueva demostración de la extensión del teorema de Weil para núcleos de Toeplitz generalizados. Esta prueba está inspirada en la demostración de Rudin ([10]), para el caso del núcleos de Toeplitz.

El contenido del Capítulo 1 es una introducción a los resultados y definiciones que se darán en los capítulos posteriores. En este capítulo se presenta un caso particular de la demostración presentada en el libro de Rudin, con la que se demuestra el teorema de Herglotz para núcleos de Toeplitz.

En el Capítulo 2 se estudian las formas bilineales, los núcleos de Toeplitz generalizados y se da una nueva demostración de la versión del teorema de Herglotz para dichos núcleos. La primera demostración de este teorema fue dada por Cotlar y Sadosky en [3].

El Capítulo 3 está dedicado a presentar los grupos abelianos localmente compactos, la medida de Haar y el teorema de Weil, con la demostración dada en [10].

Finalmente, en el Capítulo 4 se da la demostración de la extensión del teorema de Weil para los núcleos de Toeplitz generalizados que son definidos en grupos ordenados. Este teorema fue probado originalmente por Domínguez ([4]) y en este Trabajo de Grado se da una nueva demostración basada en unos lemas que podrían servir de base para obtener otros resultados en análisis armónico.

CAPÍTULO 1

Representación de núcleos de Toeplitz en el caso discreto

Consideremos el espacio $\mathbb{Z}$ de los números enteros. Sea

$$\mathcal{C}(\mathbb{Z}) = \{a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \text{ con soporte finito}\}.$$

Si $a, b \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$, definimos el *producto convolución* $a * b$ por la fórmula

$$a * b(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a(n - m)b(m). \quad (1.1)$$

Dada una sucesión $a = \{a(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, sea $\tilde{a}$ la sucesión dada por

$$\tilde{a}(n) = \overline{a(-n)}.$$

Veamos una de las propiedades de esta sucesión.

PROPOSICIÓN 1.1. *Dada $a \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$. Sean*

$$d_1 = a * \tilde{a},$$

$$d_j = d_{j-1} * d_1, \quad \text{para } j = 1, 2, 3, \dots$$

Entonces la sucesión de sucesiones $\{d_j\}_{j \geq 1}$ satisface $d_j = \tilde{d}_j$.

DEMOSTRACIÓN. A partir de la definición del producto de convolución (1.1) se tiene que

$$\begin{aligned} \tilde{d}_1(n) &= \widetilde{a * \tilde{a}}(n) \\ &= \overline{a * \tilde{a}(-n)} \\ &= \overline{\sum_{m \in \mathbb{Z}} a(-n - m) \tilde{a}(m)} \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \overline{a(-n - m)} \overline{\tilde{a}(m)} \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \overline{a(-n - m)} a(-m) \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \overline{a(-l)} a(n - l) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \tilde{a}(l) a(n - l) \\ &= a * \tilde{a}(n) = d_1(n). \end{aligned}$$

El caso general se obtiene mediante el método de inducción. □

Sea $K : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$. Se dice que K es un *núcleo de Toeplitz* cuando existe una sucesión $\phi = \{\phi(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tal que

$$K(n, m) = \phi(n - m), \quad \text{para todo } n, m \in \mathbb{Z}. \quad (1.2)$$

1. El teorema de Herglotz

Consideremos el círculo $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \approx [0, 2\pi)$ y definamos el siguiente conjunto:

$$\mathcal{M}(\mathbb{T}) = \{\text{medidas regulares a valores complejos en } \mathbb{T}\}.$$

TEOREMA 1.2 (Herglotz). *Sea $K : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ un núcleo de Toeplitz definido positivo. Entonces existe una medida no negativa $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ tal que*

$$K(n, m) = \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} d\mu(t), \quad \text{para todo } n, m \in \mathbb{Z}.$$

DEMOSTRACIÓN.

Como K es un núcleo de Toeplitz definido positivo, se tiene que si $b \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$, entonces

$$\sum_{m, j \in \text{sop}(b)} b(m) \overline{b(j)} K(n, m) \geq 0.$$

A partir de la desigualdad (2) de las propiedades que se presentaron en la Introducción se sigue que K es acotado y por lo tanto se puede asumir $K(0, 0) = 1$.

Sea $T_k : \mathcal{C}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}$ dado por

$$T_k(b) = \sum_{n \in \text{sop}(b)} b(n) K(n, 0), \quad \text{para } b \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}).$$

Entonces T_k es un funcional lineal.

Definamos el siguiente producto:

$$\begin{aligned} \langle a, b \rangle_k &= T_k(a * \tilde{b}) \\ &= \sum_{n \in \text{sop}(a)} \sum_{m \in \text{sop}(b)} a(n) \overline{b(m)} K(n, m). \end{aligned}$$

Si $a, b, c \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces:

- (1) $\langle a, b \rangle_k = \overline{\langle b, a \rangle_k}$,
- (2) $\langle a + b, c \rangle_k = \langle a, c \rangle_k + \langle b, c \rangle_k$,
- (3) $\langle \lambda a, b \rangle_k = \lambda \langle a, b \rangle_k$,
- (4) $\langle a, a \rangle_k \geq 0$.

Por lo tanto, $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ es un producto interno (eventualmente degenerado) en $\mathcal{C}(\mathbb{Z})$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz se tiene que

$$|\langle a, b \rangle_k|^2 \leq \langle a, a \rangle_k \langle b, b \rangle_k.$$

Sea δ_0 la sucesión dada por

$$\delta_0(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} \langle a, \delta_0 \rangle_k &= \sum_{n \in \text{sop}(a)} \sum_{m \in \text{sop}(b)} a(n) \overline{\delta_0(m)} K(n, m) \\ &= \sum_{n \in \text{sop}(a)} a(n) K(n, 0) \\ &= T_k(a) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \langle \delta_0, \delta_0 \rangle_k &= \sum_{n \in \text{sop}(b)} \sum_{m \in \text{sop}(b)} \delta_0(n) \overline{\delta_0(m)} K(n, m) \\ &= K(0, 0) = 1. \end{aligned}$$

Si usamos la desigualdad de Cauchy-Schwartz y las igualdades anteriores obtenemos,

$$|T_k(a)|^2 \leq \langle a, a \rangle_k = T_k(a * \tilde{a}), \quad \text{para } a \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}). \quad (1.3)$$

Luego aplicando la desigualdad (1.3) a la sucesión d_j obtenemos lo siguiente

$$|T_k(d_1)|^2 \leq T_k(d_1 * \tilde{d}_1) = T_k(d_1 * d_1) = T_k(d_2).$$

Si se toma $j = 2$ en la sucesión d_j , por un procedimiento análogo se obtiene

$$T_k(d_2) \leq \{T_k(d_2 * \tilde{d}_2)\}^{\frac{1}{2}} = \{T_k(d_2 * d_2)\}^{\frac{1}{2}} = \{T_k(d_4)\}^{\frac{1}{2}}.$$

Uniando las dos desigualdades anteriores resulta

$$T_k(d_1) \leq \{T_k(d_2)\}^{\frac{1}{2}} \leq \{T_k(d_4)\}^{\frac{1}{2}}.$$

Luego, si $j = 2^i$, con $i = 1, 2, 3, 4, \dots$ y aplicamos (1.3) a d_{2^i} , obtenemos

$$|T_k(d_{2^i})|^2 \leq T_k(d_{2^i} * \tilde{d}_{2^i}) = T_k(d_{2^i} * d_{2^i}) = T_k(d_{2^{i+1}}).$$

Por lo tanto

$$|T_k(a)|^2 \leq T_k(d_1) \leq \{T_k(d_2)\}^{\frac{1}{2}} \leq \dots \leq \{T_k(d_{2^n})\}^{\frac{1}{2^n}}. \quad (1.4)$$

Como $\|K\|_\infty = 1$ se sigue que

$$\begin{aligned} |T_k(a)| &= \left| \sum_{n \in \text{sop}(a)} a(n)K(n, 0) \right| \\ &\leq \sum_{n \in \text{sop}(a)} |a(n)| |K(n, 0)| \\ &\leq \|K\|_\infty \sum_{n \in \text{sop}(a)} |a(n)| = \|a\|_1. \end{aligned}$$

Si aplicamos la desigualdad anterior al término d_{2^n} resulta

$$\{T_k(d_{2^n})\}^{\frac{1}{2^n}} \leq \|d_{2^n}\|_1^{\frac{1}{2^n}}.$$

A partir de esta última desigualdad tenemos que (1.4) se puede escribir de la siguiente manera

$$|T_k(a)|^2 \leq \|d_{2^n}\|_1^{\frac{1}{2^n}}.$$

Haciendo $n \rightarrow \infty$ en la expresión anterior tenemos que el último término converge al radio espectral (ver [5]) y esto es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|d_{2^n}\|_1^{\frac{1}{2^n}} = \|\widehat{d}_1\|_\infty,$$

donde $\widehat{d}_1$ es la transformada de Fourier, dada de la siguiente manera

$$\widehat{d}_1(e^{it}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_1(n) e^{-int}, \quad \text{con } t \in [0, 2\pi].$$

Por lo tanto, para $a \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$,

$$|T_k(a)|^2 \leq \|\widehat{d}_1\|_\infty. \quad (1.5)$$

Por propiedades de la transformada de Fourier con respecto a la convolución se tiene que

$$\widehat{d}(e^{it}) = (\widehat{a}(e^{it}))^2.$$

esto implica que $\|\widehat{d}\|_\infty = \|\widehat{a}\|_\infty$. Entonces (1.5) se puede escribir como

$$|T_k(a)|^2 \leq \|\widehat{a}\|_\infty, \quad \text{para } a \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}). \quad (1.6)$$

Dicho esto, observemos que T_k es un funcional lineal y acotado cuyo dominio es el siguiente conjunto

$$A_c(\mathbb{T}) = \left\{ \widehat{a} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } \widehat{a}(e^{it}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) e^{-int} \right\}.$$

Definamos, $F : A_c(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{C}$ mediante

$$F(\widehat{a}) = T_k(a),$$

para cada $\widehat{a} \in A_c(\mathbb{T})$ con $a \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$.

Usando (1.6) y que T_k es lineal se sigue que si $\widehat{a} = \widehat{b}$, entonces

$$T_k(a) = T_k(b).$$

Por lo tanto F está bien definido.

Usando el teorema de Hahn-Banach (para espacios normados) podemos extender al funcional lineal F a un funcional lineal acotado $\widetilde{F}$ en $\mathcal{C}_0(\mathbb{T})$, que es el espacio que contiene todas las funciones continuas de $\mathbb{T}$ en $\mathbb{C}$.

Por el teorema de representación de Riesz para el espacio métrico $\mathcal{C}_0(\mathbb{T})$ al funcional lineal y continuo $\widetilde{F}$ le corresponde una única medida $\mu \in M(\mathbb{T})$, con $\|\mu\| \leq 1$, tal que para todo $\widehat{a} \in M(\mathbb{T})$,

$$T_k(a) = \widetilde{F}(\widehat{a}) = \int_0^{2\pi} \widehat{a} d\mu. \quad (1.7)$$

Además, $\|T_k\| = |\mu|(\mathbb{T})$. Reescribiendo (1.7) a partir de las definiciones de T_k y $\widehat{a}$ respectivamente obtenemos

$$\begin{aligned} T_k(a) &= \int_0^{2\pi} \sum_{n \in \text{sop}(a)} a(n) e^{-int} d\mu(t) \\ &= \sum_{n \in \text{sop}(a)} a(n) \int_0^{2\pi} e^{-int} d\mu(t) \\ &= \sum_{n \in \text{sop}(a)} a(n) K(n, 0). \end{aligned}$$

Tomando

$$\delta_n(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = j, \\ 0 & \text{si } n \neq j, \end{cases}$$

tenemos que

$$K(n, 0) = \int_0^{2\pi} e^{-int} d\mu(t). \quad (1.8)$$

Es decir,

$$K(n, m) = \int_0^{2\pi} e^{-i(n-m)t} d\mu(t).$$

Tomando $n = 0$ en (1.8) se tiene que

$$1 = K(0, 0) = \int_0^{2\pi} d\mu = \mu(\mathbb{T}) \leq \|\mu\| = 1.$$

Por lo tanto

$$\mu(\mathbb{T}) = \|\mu\| \geq 0.$$

Se sigue que $\mu \geq 0$.

□

CAPÍTULO 2

Representación de núcleos de Toeplitz generalizados en el caso discreto

1. Formas Bilineales

Sean X, Y espacios normados y $\mathcal{B} : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ una función. Se pueden considerar para cada $x \in X$ y cada $y \in Y$ las siguientes funciones:

$$\mathcal{B}^x : X \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}^y : Y \rightarrow \mathbb{C},$$

definidas por

$$\mathcal{B}^x(y) = \mathcal{B}(x, y) \quad \text{y} \quad \mathcal{B}^y(x) = \mathcal{B}(x, y).$$

Se dice que $\mathcal{B}$ es una *función bilineal* si $\mathcal{B}^x$ y $\mathcal{B}^y$ son funciones lineales.

Como es natural, se dice que $\mathcal{B}$ es *continua* si es continua con respecto a la topología usual en $X \times Y$.

Se dice que $\mathcal{B}$ es *acotada* cuando

$$\sup_{\|x_1\| \neq 0, \|x_2\| \neq 0} \frac{|\mathcal{B}(x_1, x_2)|}{\|x_1\| \|x_2\|} < +\infty. \quad (2.1)$$

En este caso se define

$$\|\mathcal{B}\| = \sup_{\|x_1\| \neq 0, \|x_2\| \neq 0} \frac{|\mathcal{B}(x_1, x_2)|}{\|x_1\| \|x_2\|}. \quad (2.2)$$

Para las funciones bilineales se cumple que

$$\mathcal{B}(x, y) = 0, \quad \text{cuando} \quad x = 0 \quad \text{ó} \quad y = 0,$$

lo que permite probar lo siguiente si $\mathcal{B}$ es continua en $(0,0)$ entonces $\mathcal{B}$ es continua.

Se tiene que una función bilineal $\mathcal{B}$ es *acotada* si existe $M > 0$ tal que

$$|\mathcal{B}(x_1, x_2)| \leq M \|x_1\| \|x_2\|.$$

A partir de las definiciones anteriores obtenemos los siguientes resultados,

PROPOSICIÓN 2.1. *Sea $\mathcal{B}$ una forma bilineal $\mathcal{B} : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$. Entonces $\mathcal{B}$ es continua, si y sólo si, $\mathcal{B}$ es acotada.*

DEMOSTRACIÓN.

($\Leftarrow$) Si existe $M > 0$ tal que

$$|\mathcal{B}(x_1, x_2)| \leq M\|x_1\|\|x_2\|,$$

es claro que $\mathcal{B}$ es continua en $(0, 0)$ y por lo tanto es una función bilineal continua.

($\Rightarrow$) Como $\mathcal{B}$ es continua, también lo es en el $(0, 0)$. Ahora $|\mathcal{B}(x, y)|$ puede ser tan pequeño como se necesite tomando un (x, y) de norma lo suficientemente pequeña. Por lo tanto, para cierto $\delta > 0$ se cumple que:

$$\|\mathcal{B}(x, y)\| < 1, \quad \text{si } \|y\| < \delta, \|x\| < \delta.$$

Entonces si $y \neq 0$ y $x \neq 0$, considerando

$$x_0 = \frac{x\delta}{2\|x\|} \quad y \quad y_0 = \frac{y\delta}{2\|y\|}.$$

se obtiene

$$\|x_0\| = \frac{\delta}{2} \quad y \quad \|y_0\| = \frac{\delta}{2},$$

luego $|\mathcal{B}(x_0, y_0)| < 1$, es decir

$$\left| \mathcal{B}\left(\frac{x\delta}{2\|x\|}, \frac{y\delta}{2\|y\|}\right) \right| < 1.$$

Como $\mathcal{B}$ es una forma bilineal, tenemos que es lineal en cada una de sus variables según la definición, por lo tanto usando este razonamiento en la igualdad anterior obtenemos

$$|\mathcal{B}(x, y)| \leq \frac{4}{\delta^2} \|x\| \|y\|.$$

□

2. Núcleos de Toeplitz generalizados

Sean:

$$\mathbb{Z}_1 = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\},$$

$$\mathbb{Z}_2 = \{n \in \mathbb{Z} : n < 0\},$$

$$\mathbb{Z}^+ = \{n \in \mathbb{Z} : n > 0\}.$$

Se puede probar que:

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_1 - \mathbb{Z}_1 &= \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}_2 - \mathbb{Z}_2 &= \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}_1 - \mathbb{Z}_2 &= \mathbb{Z}^+ \\ \mathbb{Z}_2 - \mathbb{Z}_1 &= -\mathbb{Z}^+.\end{aligned}$$

Sea $K : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$. Se dice que la función K es un *núcleo de Toeplitz generalizado* cuando existen cuatro sucesiones $\mathcal{C}_{\alpha,\beta} : \mathbb{Z}_\alpha - \mathbb{Z}_\beta \rightarrow \mathbb{C}$ tales que

$$K(n, m) = \mathcal{C}_{\alpha\beta}(n - m), \text{ si } (n, m) \in \mathbb{Z}_\alpha - \mathbb{Z}_\beta, \text{ con } \alpha, \beta = 1, 2.$$

Sean $K_{\alpha\beta} : \mathbb{Z}_\alpha \times \mathbb{Z}_\beta \rightarrow \mathbb{C}$ dadas por

$$K_{\alpha\beta}(n, m) = \mathcal{C}_{\alpha,\beta}(n - m).$$

se tiene que

$$\begin{aligned}K_{11}(n, m) &= \mathcal{C}_{11}(n - m), \text{ si } n \geq 0 \text{ y } m \geq 0, \\ K_{12}(n, m) &= \mathcal{C}_{12}(n - m), \text{ si } n \geq 0 \text{ y } m < 0, \\ K_{21}(n, m) &= \mathcal{C}_{21}(n - m), \text{ si } n < 0 \text{ y } m \geq 0, \\ K_{22}(n, m) &= \mathcal{C}_{22}(n - m), \text{ si } n < 0 \text{ y } m < 0.\end{aligned}$$

Se tiene que K es un *núcleo de Toeplitz generalizado definido positivo* cuando

$$\sum_{\alpha,\beta=1,2} \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}_\alpha \times \mathbb{Z}_\beta} \lambda_n^\alpha \overline{\lambda_m^\beta} K_{\alpha\beta}(n, m) \geq 0,$$

para todo par de sucesiones de números complejos con soporte finito $\{\lambda_n^1\}$, $\{\lambda_n^2\}$, tales que $\text{sop}(\{\lambda_n^1\}) \subseteq \mathbb{Z}_1$ y $\text{sop}(\{\lambda_n^2\}) \subseteq \mathbb{Z}_2$.

Sea

$$\mathcal{C}(\mathbb{Z}^+) = \{\text{todas las sucesiones } a : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{C} \text{ con soporte finito } \}.$$

A continuación se introducen cuatro funcionales lineales que jugarán un papel fundamental en este capítulo.

Para $\alpha, \beta = 1, 2$ definamos, $T_{K_{\alpha\beta}} : \mathcal{C}(\mathbb{Z}_\alpha - \mathbb{Z}_\beta) \rightarrow \mathbb{C}$ mediante

$$T_{K_{\alpha\beta}}(b) = \sum_{r \in \text{sop}(b)} b(r) \mathcal{C}_{\alpha\beta}(r), \quad (2.3)$$

para cada $b \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}^+)$. Se sigue que $T_{K_{\alpha\beta}}$ es un funcional lineal.

Usando la notación anterior se obtiene el siguiente resultado, el cual es uno de los aportes de este trabajo.

LEMA 2.2. *Sea K un núcleo de Toeplitz generalizado definido positivo. Dadas $a_1, a_2 \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$ con $\text{sop}(a_1) \subseteq \mathbb{Z}_1$ y $\text{sop}(a_2) \subseteq \mathbb{Z}_2$. Sean $\tilde{a}_1(n) = \overline{a_1(-n)}$ y $\tilde{a}_2(n) = \overline{a_2(-n)}$. Entonces:*

- (i) $T_{K_{11}}(a_1 * \tilde{a}_1) \geq 0$,
- (ii) $T_{K_{22}}(a_2 * \tilde{a}_2) \geq 0$,
- (iii) $\overline{T_{K_{12}}(a_1 * \tilde{a}_2)} = T_{K_{21}}(a_2 * \tilde{a}_1)$,
- (iv) *La matriz*

$$D = \begin{pmatrix} T_{K_{11}}(a_1 * \tilde{a}_1) & \overline{T_{K_{12}}(a_1 * \tilde{a}_2)} \\ T_{K_{21}}(a_2 * \tilde{a}_1) & T_{K_{22}}(a_2 * \tilde{a}_2) \end{pmatrix}$$

es hermitica y definida positiva,

- (v) $|T_{K_{12}}(a_1 * \tilde{a}_2)| \leq T_{K_{11}}(a_1 * \tilde{a}_1)T_{K_{22}}(a_2 * \tilde{a}_2)$.

DEMOSTRACIÓN. La parte (i) y la parte (ii) se obtienen de la desigualdad (1.3), es decir:

$$\begin{aligned} T_{K_{11}}(a_1 * \tilde{a}_1) &\geq |T_{K_{11}}(a_1)|^2 \geq 0, \\ T_{K_{22}}(a_2 * \tilde{a}_2) &\geq |T_{K_{22}}(a_2)|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Parte (iii):

A partir de la definición de $T_{K_{\alpha,\beta}}$ y el producto convolución obtenemos

$$\begin{aligned} \overline{T_{K_{12}}(a_1 * \tilde{a}_2)} &= \overline{\sum_{m \in \mathbb{Z}_2} \sum_{n \in \mathbb{Z}_1} a_1(n) \tilde{a}_2(-m) \mathcal{C}_{12}(n-m)} \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}_2} \sum_{n \in \mathbb{Z}_1} \overline{a_1(n)} \overline{\tilde{a}_2(-m)} \overline{\mathcal{C}_{12}(n-m)} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}_2} \sum_{m \in \mathbb{Z}_1} \overline{a_2(n)} \overline{a_1(-m)} \overline{\mathcal{C}_{21}(n-m)}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$T_{K_{21}}(a_2 * \tilde{a}_1) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_2} \sum_{m \in \mathbb{Z}_1} \overline{a_2(n)} \overline{a_1(-m)} \overline{\mathcal{C}_{21}(n-m)}.$$

Entonces,

$$\overline{T_{K_{12}}(a_1 * \tilde{a}_2)} = T_{K_{21}}(a_2 * \tilde{a}_1).$$

Parte (iv):

Por la parte (iii) podemos verificar que efectivamente la matriz D es hermítica. Nos resta verificar que es definida positiva. En efecto, sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Definamos

$$b_1(n) = \lambda_1 a_1(n) \quad \text{y} \quad b_2(n) = \lambda_2 a_2(n).$$

Entonces: $b_1, b_2 \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$, $\text{sop}(b_1) \subseteq \mathbb{Z}_1$ y $\text{sop}(b_2) \subseteq \mathbb{Z}_2$.

Como K es un núcleo de Toeplitz generalizado definido positivo se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{\alpha, \beta=1,2} \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}_\alpha \times \mathbb{Z}_\beta} b_\alpha(n) \overline{b_\beta(-m)} \mathcal{C}_{\alpha\beta}(n-m) \\ &= \sum_{\alpha, \beta=1,2} \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}_\alpha \times \mathbb{Z}_\beta} \lambda_\alpha a_\alpha(n) \overline{\lambda_\beta a_\beta(-m)} \mathcal{C}_{\alpha\beta}(n-m) \\ &= \sum_{\alpha, \beta=1,2} \lambda_\alpha \overline{\lambda_\beta} \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}_\alpha \times \mathbb{Z}_\beta} a_\alpha(n) \overline{a_\beta(-m)} \mathcal{C}_{\alpha\beta}(n-m) \\ &= \sum_{\alpha, \beta=1,2} \lambda_\alpha \overline{\lambda_\beta} \mathbf{T}_{K_{\alpha\beta}}(a_\alpha * \tilde{a}_\beta). \end{aligned}$$

Por lo tanto, D es definida positiva.

Parte (v):

Finalmente como D es una matriz hermítica definida positiva tal que $d_{11} \geq 0$ y $d_{22} \geq 0$ se verifica

$$|d_{12}| \leq d_{11} d_{22}.$$

Es decir,

$$|\mathbf{T}_{K_{12}}(a_1 * \tilde{a}_2)| \leq \mathbf{T}_{K_{11}}(a_1 * \tilde{a}_1) \mathbf{T}_{K_{22}}(a_2 * \tilde{a}_2).$$

□

3. La versión del teorema de Herglotz para núcleos de Toeplitz generalizados

En lo que sigue

$$\mu = \{\mu_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta=1,2} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{bmatrix}$$

denotará una matriz 2×2 cuyas entradas son medidas de Borel complejas finitas en $[0, 2\pi]$.

Se considerarán matrices hermíticas.

DEFINICIÓN 2.3. Se dice que la matriz $\{\mu_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta=1,2}$ es positiva cuando para todo boreliano Δ en $[0, 2\pi]$ la matriz numérica $\{\mu_{\alpha,\beta}(\Delta)\}_{\alpha,\beta=1,2}$ es definida positiva. Es decir, para todo $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^2 \mu_{\alpha,\beta}(\Delta) \lambda_\alpha \overline{\lambda_\beta} \geq 0.$$

Un *polinomio trigonométrico* es una función $\varphi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\varphi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \xi_n e_n(x),$$

donde $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ tiene soporte finito. En este caso $\widehat{\varphi}(n)$ denota ξ_n .

Denotemos por $\mathcal{P}$ el espacio vectorial de todos los polinomios trigonométricos.

PROPOSICIÓN 2.4. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a) *La matriz $\{\mu_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta=1,2}$ es positiva.*
- (b) *Para todo boreliano Δ en $[0, 2\pi]$, se tiene que: $\mu_{11}(\Delta) \geq 0$, $\mu_{22}(\Delta) \geq 0$ y*

$$|\mu_{12}(\Delta)|^2 \leq \mu_{11}(\Delta) \mu_{22}(\Delta).$$

- (c) *Para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$, se tiene que*

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^2 \int_0^{2\pi} \varphi_\alpha \overline{\varphi_\beta} d\mu_{\alpha\beta} \geq 0.$$

La prueba de este resultado puede verse en [2].

El siguiente teorema fue probado en [3] y es una versión del teorema de Herglotz para núcleos de Toeplitz generalizados. Uno de los aportes del presente trabajo es dar una nueva prueba de este resultado.

TEOREMA 2.5 (Cotlar-Sadosky). *Sea $K : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ un núcleo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- a) *K es un núcleo de Toeplitz generalizado definido positivo.*
- b) *Existe una matriz positiva $\{\mu_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta=1,2}$ de medidas de Borel finitas en $[0, 2\pi]$ tales que*

$$K(n, m) = \widehat{\mu_{\alpha\beta}}(n - m) = \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} d\mu_{\alpha\beta}(t),$$

para todo $(n, m) \in \mathbb{Z}_\alpha \times \mathbb{Z}_\beta$.

DEMOSTRACIÓN.

($\Rightarrow$) Sea $V_1 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$V_1(n, m) = \mathcal{C}_{11}(n - m)$$

y sea $V_2 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$V_2(n, m) = \mathcal{C}_{22}(n - m).$$

Se puede ver que estas aplicaciones son funciones definidas positivas.

Luego, tenemos que V_1 y V_2 son dos núcleos de Toeplitz definidos positivos. Por lo tanto usando el teorema de Herglotz para núcleos de Toeplitz (Teorema 1.2) se sigue que existen dos medidas no-negativas $\mu_{11}, \mu_{22} \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ para V_1 y V_2 respectivamente, tales que:

$$K_{11}(n, m) = \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} d\mu_{11}(t),$$

$$K_{22}(n, m) = \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} d\mu_{22}(t).$$

Sea $V_0 : \mathbb{Z}_1 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$V_0(n, m) = \mathcal{C}_{12}(n - m).$$

Se probará que existe una medida $\mu_{12} \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ tal que

$$K_{12}(n, m) = \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} d\mu_{12}(t).$$

Dadas $a_1, a_2 \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$ con $\text{sop}(a_1) \subseteq \mathbb{Z}_1$ y $\text{sop}(a_2) \subseteq \mathbb{Z}_2$, sean $\tilde{a}_1(n) = \overline{a_1(-n)}$ y $\tilde{a}_2(n) = \overline{a_2(-n)}$. Se definen

$$h_{a_1} = a_1 * \tilde{a}_1,$$

$$h_{a_2} = a_2 * \tilde{a}_2,$$

$$d_j = d_{j-1} * d_1,$$

donde $d_1 = h_{a_\alpha}$, con $\alpha = 1, 2$.

Si $d_1 = h_{a_\alpha}$ y $\widetilde{a_\alpha(n)} = \overline{a_\alpha(-n)}$ resulta $d_1 = \tilde{d}_1$.

Sea $T_{K_{\alpha\beta}}$ el funcional definido como en (2.3). Por el Lema 2.2 se obtiene la siguiente desigualdad

$$|T_{K_{12}}(a_1 * \tilde{a}_2)|^2 \leq T_{K_{11}}(a_1 * \tilde{a}_1) T_{K_{22}}(a_2 * a_2) = T_{K_{11}}(h_{a_1}) T_{K_{22}}(h_{a_2}). \quad (2.4)$$

Usando que $d_j = d_{j-1} * d_1$ con $d_1 = h_{a_\alpha}$ y la desigualdad

$$|\mathbf{T}_{K_{11}}(a_1)|^2 \leq \mathbf{T}_{K_{11}}(a_1 * \tilde{a}_1) = \mathbf{T}_{K_{11}}(h_{a_1})$$

obtenida en el Capítulo 2, se tiene que

$$\mathbf{T}_{K_{11}}(h_{a_1}) \leq \{\mathbf{T}_{K_{11}}(d_2)\}^{\frac{1}{2}} \leq \cdots \{\mathbf{T}_{K_{11}}(d_{2^n})\}^{\frac{1}{2^n}}$$

tomando $j = 2_n$.

Luego, como $|\mathbf{T}_{K_{11}}(a_1)| \leq \|a_1\|_1$, si $a = d_{2^n}$ dicha desigualdad se puede escribir como sigue,

$$\{\mathbf{T}_{K_{11}}(d_{2^n})\}^{\frac{1}{2^n}} \leq \|d_{2^n}\|_1^{\frac{1}{2^n}}$$

es decir,

$$\mathbf{T}_{K_{11}}(h_{a_1}) \leq \|d_{2^n}\|_1^{\frac{1}{2^n}} = \|(h_{a_1})^{2^n}\|_1^{2^{-n}}.$$

Haciendo $n \rightarrow \infty$ en la expresión anterior tenemos que el último término converge al radio espectral y esto es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(h_{a_n})^{2^n}\|_1^{2^{-n}} = \|\widehat{h_{a_1}}\|_\infty$$

donde $\widehat{h_{a_1}}$ es la transformada de Fourier, definida por

$$\widehat{h_{a_1}}(e^{it}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{a_1}(n) e^{-int}$$

con $t \in [0, 2\pi]$.

Por lo tanto,

$$\mathbf{T}_{K_{11}}(h_{a_1}) \leq \|\widehat{h_{a_1}}\|_\infty.$$

Si $d = h_{a_2}$ usando el razonamiento anterior obtenemos

$$\mathbf{T}_{K_{22}}(h_{a_2}) \leq \|\widehat{h_{a_2}}\|_\infty.$$

Sustituyendo ambas desigualdades en (2.4) resulta lo siguiente,

$$|\mathbf{T}_{K_{12}}(a_1 * \tilde{a}_2)| \leq \|\widehat{h_{a_1}}\|_\infty \|\widehat{h_{a_2}}\|_\infty. \quad (2.5)$$

Por propiedades de la transformada de Fourier con respecto a la convolución se tiene que

$$\widehat{d}(e^{it}) = (\widehat{a}(e^{it}))^2$$

esto implica que $\|\widehat{d}\|_\infty = \|\widehat{a}\|_\infty$. Entonces (2.5) se re-escribe como,

$$|\mathbf{T}_{K_{12}}(a_1 * \tilde{a}_2)|^2 \leq \|\widehat{a_1}\|_\infty \|\widehat{a_2}\|_\infty.$$

Sean:

$$A_1(\mathbb{T}) = \left\{ \widehat{a}_1 : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } \widehat{a}_1(e^{it}) = \sum_{n \geq 0} a_1(n) e^{-int} \text{ con } \text{sop}(a_1) \text{ finito} \right\},$$

$$A_2(\mathbb{T}) = \left\{ \widehat{a}_2 : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } \widehat{a}_2(e^{it}) = \sum_{n < 0} a_2(n) e^{-int} \text{ con } \text{sop}(a_2) \text{ finito} \right\}.$$

Definamos $\mathcal{B}_0 : A_1(\mathbb{T}) \times A_2(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{C}$, donde para $\widehat{a}_1 \in A_1(\mathbb{T})$ y $\widehat{a}_2 \in A_2(\mathbb{T})$ con $a_1, a_2 \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$,

$$\mathcal{B}_0(\widehat{a}_1, \widehat{a}_2) = T_{K_{12}}(a_1 * \widetilde{a}_2).$$

$\mathcal{B}_0$ es una forma bilineal acotada pues

$$|\mathcal{B}_0(\widehat{a}_1, \widehat{a}_2)| \leq \|\widehat{a}_1\|_\infty \|\widehat{a}_2\|_\infty.$$

A continuación relacionaremos esta forma bilineal acotada con un funcional lineal acotado.

Sean

$$A_o(\mathbb{T}) = \left\{ \phi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } \phi(e^{it}) = \sum_{n > 0} \phi^\vee(n) e^{-int} \text{ con } \text{sop}(\phi^\vee) \text{ finito} \right\}$$

y $L : A_o(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$L(\phi) = \sum_{n > 0} \phi^\vee(n) \mathcal{C}_{12}(n).$$

Sean $\widehat{a}_1 \in A_1(\mathbb{T})$ y $\widehat{a}_2 \in A_2(\mathbb{T})$ con $a_1, a_2 \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$ entonces

$$L(\widehat{a}_1 \widehat{a}_2) = \sum_{n > 0} (\widehat{a}_1 \widehat{a}_2)^\vee(n) \mathcal{C}_{12}(n).$$

Se puede probar que $\overline{\widehat{a}_2} = \widehat{\widetilde{a}_2}$, de donde

$$\begin{aligned} L(\widehat{a}_1 \widehat{a}_2) &= \sum_{n > 0} (\widehat{a}_1 \widehat{a}_2)^\vee(n) \mathcal{C}_{12}(n) \\ &= \sum_{n > 0} (\widehat{a_1 * \widetilde{a}_2})^\vee(n) \mathcal{C}_{12}(n) \\ &= \sum_{n > 0} (a_1 * \widetilde{a}_2)(n) \mathcal{C}_{12}(n) \\ &= T_{K_{12}}(a_1 * \widetilde{a}_2) \\ &= \mathcal{B}_0(\widehat{a}_1, \widehat{a}_2). \end{aligned}$$

Usando el teorema de Hahn-Banach (para espacios normados) podemos extender al funcional lineal L a un funcional lineal acotado $\widetilde{L}$ en $\mathcal{C}_0(\mathbb{T})$.

Por el teorema de representación de Riesz para el espacio métrico $\mathcal{C}_0(\mathbb{T})$ al funcional lineal y continuo $\tilde{L}$ le corresponde una única medida de Borel ν finita en $[0, 2\pi]$ tal que

$$\tilde{L}(\phi) = \int_0^{2\pi} \phi d\nu$$

para toda $\phi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{T})$.

En particular, para $\hat{a}_1 \in A_1(\mathbb{T})$ y $\hat{a}_2 \in A_2(\mathbb{T})$ con $a_1, a_2 \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$ se tiene que

$$T_{K_{12}}(a_1 * \tilde{a}_2) = \tilde{L}(\hat{a}_1 \widehat{\tilde{a}_2}) = \int_0^{2\pi} \hat{a}_1 \widehat{\tilde{a}_2} d\nu = \int_0^{2\pi} \widehat{a_1 * \tilde{a}_2} d\nu. \quad (2.6)$$

Además, $\|T_{k_{12}}\| = |\nu|([0, 2\pi])$. Reescribiendo (2.6) a partir de las definiciones de $T_{k_{12}}$ y $\widehat{a_\alpha}$ ($\alpha = 1, 2$), se obtiene

$$\begin{aligned} T_{K_{12}}(a_1 * \tilde{a}_2) &= \int_0^{2\pi} (\widehat{a_1 * \tilde{a}_2})(t) d\nu(t) \\ &= \int_0^{2\pi} \sum_{n>0} (a_1 * \tilde{a}_2)(n) e^{-int} d\nu(t) \\ &= \sum_{n>0} (a_1 * \tilde{a}_2)(n) \int_0^{2\pi} e^{-int} d\nu(t) \\ &= \sum_{n>0} (a_1 * \tilde{a}_2)(n) \hat{\nu}(n). \end{aligned}$$

Tomando

$$\delta_n(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = j, \\ 0 & \text{si } n \neq j. \end{cases}$$

Tenemos que

$$K_{12}(n, 0) = \hat{\nu}(n), \quad \text{si } n > 0.$$

De donde

$$K_{12}(n, m) = \hat{\nu}(n - m), \quad \text{si } n \geq 0, m < 0.$$

Sean:

$$\nu_{11} = \mu_{11}, \quad \nu_{12} = \nu, \quad \nu_{21} = \bar{\nu}, \quad \nu_{22} = \mu_{22}.$$

Sean $\varphi_1 \in \mathcal{P}$ un polinomio analítico y $\varphi_2 \in \mathcal{P}$ un polinomio anti-analítico. Entonces

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^2 \int_0^{2\pi} \varphi_\alpha \overline{\varphi_\beta} d\nu_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha, \beta=1,2} \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}_\alpha \times \mathbb{Z}_\beta} \lambda_{\alpha n} \overline{\lambda_{\beta m}} K_{\alpha\beta}(n, m).$$

Como K es un núcleo de Toeplitz generalizado definido positivo se tiene que

$$\sum_{\alpha, \beta=1,2} \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}_\alpha \times \mathbb{Z}_\beta} \lambda_{\alpha n} \overline{\lambda_{\beta m}} K_{\alpha\beta}(n, m) \geq 0.$$

De donde

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^2 \int_0^{2\pi} \varphi_\alpha \overline{\varphi_\beta} d\nu_{\alpha\beta} \geq 0,$$

para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{P}$, tales que φ_1 es polinomio analítico y φ_2 es polinomio anti-analítico.

Por el teorema de F. y M. Riesz existe una función h del espacio de Hardy H^1 , tal que

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^2 \int_0^{2\pi} \varphi_\alpha \overline{\varphi_\beta} d\nu_{\alpha\beta} + \int_\Delta h(t) dt \geq 0,$$

para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{P}$.

Sea μ_{12} la medida de Borel finita en $[0, 2\pi]$ dada por

$$\mu_{12}(\Delta) = \nu(\Delta) + \int_\Delta h(t) dt$$

para todo boreliano Δ en $[0, 2\pi]$.

Entonces

$$\widehat{\mu_{12}}(n - m) = K_{12}(n, m) \quad \text{si } n \geq 0 \text{ y } m < 0.$$

Además

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^2 \int_0^{2\pi} \varphi_\alpha \overline{\varphi_\beta} d\mu_{\alpha\beta} \geq 0$$

para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{P}$. Usando la Proposición 2.4 se sigue que $\{\mu_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1,2}$ es positiva.

($\Leftarrow$)

Supongamos que existe una matriz positiva $\{\mu_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1,2}$ de medidas de Borel finitas en $[0, 2\pi]$, tal que

$$K(n, m) = \widehat{\mu_{\alpha\beta}}(n - m) = \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} d\mu_{\alpha\beta}(t),$$

para todo $(n, m) \in \mathbb{Z}_\alpha \times \mathbb{Z}_\beta$.

Se sigue que K es un núcleo de Toeplitz generalizado.

A continuación se probará que K es un núcleo definido positivo.

Considere un par de sucesiones de números complejos con soporte finito $\{\lambda_n^1\}, \{\lambda_n^2\}$ tales que $\text{sop}(\{\lambda_n^1\}) \subseteq \mathbb{Z}_1$ y $\text{sop}(\{\lambda_n^2\}) \subseteq \mathbb{Z}_2$. Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{m,n} \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \lambda_n^\alpha \overline{\lambda_m^\beta} K(n,m) &= \sum_{m,n} \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \lambda_n^\alpha \overline{\lambda_m^\beta} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} d\mu_{\alpha\beta}(t) \\
&= \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \int_0^{2\pi} \sum_{m,n} \lambda_n^\alpha \overline{\lambda_m^\beta} e^{i(n-m)t} d\mu_{\alpha\beta}(t) \\
&= \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \int_0^{2\pi} \left(\sum_n \lambda_n^\alpha e^{int} \right) \left(\sum_m \overline{\lambda_m^\beta} e^{-imt} \right) d\mu_{\alpha\beta}(t) \geq 0.
\end{aligned}$$

La última desigualdad se sigue de la Proposición 2.4 ya que $\{\mu_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1,2}$ es una matriz positiva.

Por lo tanto K es un núcleo definido positivo. □

CAPÍTULO 3

Representación de núcleos de Toeplitz en grupos

1. Medida de Haar

Sea Ω un grupo abeliano localmente compacto.

Para todo grupo Ω existe una medida regular no negativa m que llamaremos *medida de Haar de Ω* , la cual no es idénticamente cero y es invariante bajo traslaciones, es decir,

$$m(\Delta + w) = m(\Delta), \text{ para todo } w \in \Omega \text{ y todo Boreliano } \Delta \in \Omega.$$

Definimos $\mathcal{M}(\Omega)$ como el conjunto de todas las medidas de Haar regulares a valores complejos en Ω .

Supongamos que dx es la medida de Haar en Ω . Como es usual, por $L^p(\Omega)$ denotaremos al espacio de las funciones integrables con respecto a la medida de Haar, es decir,

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es medible y } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\},$$

y cuya norma se denotará por $\|\cdot\|_p$.

Si $f, g \in L^p(\Omega)$, definimos el *producto convolución* $f * g$ de la siguiente manera

$$f * g(w) = \int_{\Omega} f(w - v)g(v)dv, \text{ para } w, v \in \mathbb{C}. \quad (3.1)$$

Sea

$$\mathcal{C}_c(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ continua, acotada con soporte compacto}\}.$$

A lo largo de este capítulo G es un grupo abeliano localmente compacto.

Una función compleja $\gamma : G \rightarrow \mathbb{C}$ es llamada *caracter de G* , si

- (1) $|\gamma(t)| = 1$, para todo $t \in G$,
- (2) $\gamma(t + s) = \gamma(t)\gamma(s)$, para todo $t, s \in G$.

El conjunto de todos los caracteres continuos de G forman un grupo que llamaremos Γ ó $\widehat{G}$, el *grupo dual* de G , si la suma en Γ es definida por el producto usual de funciones en G ,

$$(\gamma_1, \gamma_2)(t) = \gamma_1(t)\gamma_2(t), \text{ para } t \in G \text{ y } \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma.$$

Sea $f \in L^1(\Gamma)$. La *transformada de Fourier de f* es la función $\widehat{f} : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\widehat{f}(\gamma) = \int_G \gamma(-t)f(t)dt = \int_G \gamma^{-1}(t)f(t)dt. \quad \text{para } \gamma \in \Gamma. \quad (3.2)$$

Sea $K : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$. Se dice que la función K es un *núcleo de Toeplitz* en Γ si existe una función $\mathcal{C} : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$, tal que

$$K(\gamma, \sigma) = \mathcal{C}(\gamma - \sigma), \text{ para cada } (\gamma, \sigma) \in \Gamma \times \Gamma.$$

2. El teorema de Weil

Basándonos en la definición de los núcleos de Toeplitz, enunciamos el teorema de Weil para dichos núcleos.

TEOREMA 3.1 (Weil). *Sea K un núcleo de Toeplitz definido positivo. Entonces existe una medida no negativa $\mu \in \mathcal{M}(G)$, tal que*

$$K(\gamma, \sigma) = \int_G (\gamma - \sigma)(t)d\mu(t), \quad \text{para todo } \gamma, \sigma \in \Gamma \quad (3.3)$$

DEMOSTRACIÓN.

($\Rightarrow$)

Sea $f \in \mathcal{C}_c(G)$ con soporte

$$A = \bigcup_{i=1}^n \Delta_i,$$

donde Δ_i son conjuntos disjuntos de A . Entonces

$$f(\gamma)\overline{f(\sigma)}K(\gamma, \sigma)$$

es uniformemente continua en $A \times A$ tal que, con $\gamma_i \in \Delta_i$

$$\sum_{i,j=1}^n f(\gamma_i)\overline{f(\gamma_j)}K(\gamma_i, \gamma_j)m(\Delta_i)m(\Delta_j)$$

difiera de la integral,

$$\int_{\Gamma} \int_{\Gamma} f(\gamma)\overline{f(\sigma)}K(\gamma, \sigma)d\gamma d\sigma \quad (3.4)$$

en lo más mínimo posible.

Como K es definida positiva, se tiene que

$$\sum_{i,j=1}^n f(\gamma_i)\overline{f(\gamma_j)}K(\gamma_i, \gamma_j)m(\Delta_i)m(\Delta_j) \geq 0.$$

Lo que implica que (3.4) también lo es. Por lo tanto, como $\mathcal{C}_c(\Gamma)$ es denso en $L^1(\Gamma)$, obtenemos que (3.4) es no negativo para $f \in L^1(\Gamma)$.

Sea $T_k : \mathcal{C}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ dado por

$$T_k(f) = \int_{\Gamma} f(\gamma) K(\gamma, 0) d\gamma, \text{ para } f \in \mathcal{C}(\Gamma).$$

Entonces T_k es un funcional lineal.

Definamos el siguiente producto:

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_k &= T_k(f * \tilde{g}) \\ &= \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} f(\gamma) \overline{g(\sigma)} K(\gamma, \sigma) d\gamma d\sigma \end{aligned}$$

para $f, g \in \mathcal{C}(\Gamma)$ y $\tilde{g}(\gamma) = \overline{g(-\gamma)}$.

Para este producto se puede verificar lo siguiente, con $f, g, h \in \mathcal{C}(\Gamma)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$:

- (1) $\langle f, g \rangle_k = \overline{\langle g, f \rangle_k}$,
- (2) $\langle f + g, h \rangle_k = \langle f, h \rangle_k + \langle g, h \rangle_k$,
- (3) $\langle \lambda f, g \rangle_k = \lambda \langle f, g \rangle_k$,
- (4) $\langle f, f \rangle_k \geq 0$.

Por lo tanto, $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ es un producto interno (eventualmente degenerado) en $\mathcal{C}(\Gamma)$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz, se tiene que

$$|\langle f, g \rangle_k|^2 \leq \langle f, f \rangle_k \langle g, g \rangle_k.$$

Tomando

$$g(j) = \begin{cases} \frac{1}{m(V)} & \text{si } j \in V, \\ 0 & \text{si no,} \end{cases}$$

donde V es una vecindad del cero.

Se tiene que:

$$\langle f, g \rangle_k - T_k(f) = \int_{\Gamma} f(\gamma) \frac{1}{m(V)} \int_V [K(\gamma, \sigma) - K(\gamma, 0)] d\gamma d\sigma \quad (3.5)$$

y

$$\langle g, g \rangle_k - 1 = \frac{1}{(m(V))^2} \int_V \int_V [K(\gamma, \sigma) - 1] d\gamma d\sigma. \quad (3.6)$$

Si usamos la desigualdad de Cauchy-Schwartz y las igualdades (3.5) y (3.6), tomando V lo más pequeño posible, obtenemos

$$|T_k(f)|^2 \leq \langle f, f \rangle_k = T_k(f * \tilde{f}), \text{ para } f \in \mathcal{C}(\Gamma). \quad (3.7)$$

Sean:

$$h_1 = f * \tilde{f},$$

$$h_j = h_{j-1} * h_1, \text{ con } j = 1, 2, 3, \dots$$

Entonces a partir de la proposición 1.1, la sucesión de funciones $\{h_j\}_{j \geq 1}$ satisface $h_j = \widetilde{h}_j$.

Si aplicamos la desigualdad (3.7) a la sucesión h_j , obtenemos lo siguiente

$$|T_k(h_1)|^2 \leq T_k(h_1 * \widetilde{h}_1) = T_k(h_1 * h_1) = T_k(h_2).$$

Si se toma $j = 2$ en la sucesión h_j , por un procedimiento análogo se obtiene

$$T_k(h_2) \leq \{T_k(h_2 * \widetilde{h}_2)\}^{\frac{1}{2}} = \{T_k(h_2 * h_2)\}^{\frac{1}{2}} = \{T_k(h_4)\}^{\frac{1}{2}}.$$

Uniendo las dos desigualdades anteriores resulta

$$T_k(h_1) \leq \{T_k(h_2)\}^{\frac{1}{2}} \leq \{T_k(h_4)\}^{\frac{1}{2}}.$$

Luego, si $j = 2^i$, con $i = 1, 2, 3, 4, \dots$ y aplicamos (3.7) a h_{2^i} , obtenemos

$$|T_k(h_{2^i})|^2 \leq T_k(h_{2^i} * \widetilde{h}_{2^i}) = T_k(h_{2^i} * h_{2^i}) = T_k(h_{2^{i+1}}).$$

Por lo tanto,

$$|T_k(f)|^2 \leq T_k(h_1) \leq \{T_k(h_2)\}^{\frac{1}{2}} \leq \dots \leq \{T_k(h_{2^n})\}^{\frac{1}{2^n}}. \quad (3.8)$$

Por la propiedad 2 de las funciones definidas positivas, podemos asumir $K(0, 0) = 1$. Por lo que obtenemos $\|K\|_\infty = 1$. Entonces

$$\begin{aligned} |T_k(f)| &= \left| \int_{\Gamma} f(\gamma) K(\gamma, 0) d\gamma \right| \\ &\leq \int_{\Gamma} |f(\gamma)| |K(\gamma, 0)| d\gamma \\ &\leq \|K\|_\infty \int_{\Gamma} |f(\gamma)| d\gamma = \|f\|_1. \end{aligned}$$

Si aplicamos la desigualdad anterior al término h_{2^n} , resulta

$$\{T_k(h_{2^n})\}^{\frac{1}{2^n}} \leq \|h_{2^n}\|_1^{\frac{1}{2^n}}.$$

A partir de esta última desigualdad tenemos que (3.8) se puede escribir de la siguiente manera

$$|T_k(f)|^2 \leq \|h_{2^n}\|_1^{\frac{1}{2^n}}.$$

Haciendo $n \rightarrow \infty$ en la expresión anterior, tenemos que el último término converge al radio espectral y esto es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|h_{2^n}\|_1^{\frac{1}{2^n}} = \|\widehat{h}_1\|_\infty,$$

donde $\widehat{h}_1$ es la transformada de Fourier dada en (3.2).

Por lo tanto, para $f \in \mathcal{C}_C(\Gamma)$,

$$|T_k(f)|^2 \leq \|\widehat{h}_1\|_\infty. \quad (3.9)$$

Por propiedades de la transformada de Fourier con respecto a la convolución se tiene que

$$\widehat{h}(\gamma) = (\widehat{f}(\gamma))^2$$

Esto implica que $\|\widehat{h}\|_\infty = \|\widehat{f}\|_\infty$. Entonces (3.9) se reescribe como

$$|T_k(f)|^2 \leq \|\widehat{f}\|_\infty \quad \text{para } f \in \mathcal{C}_C(\Gamma). \quad (3.10)$$

Dicho esto, observemos que T_k es un funcional lineal acotado cuyo dominio es el siguiente conjunto

$$A(G) = \left\{ \widehat{f} : G \rightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } \widehat{f}(\gamma) = \int_\Gamma \gamma(-t)f(t)dt \right\}.$$

Definamos, $F : A(G) \rightarrow \mathbb{C}$, donde, para $\widehat{f} \in A(G)$ con $f \in \mathcal{C}_C(\Gamma)$,

$$F(\widehat{f}) = T_k(f).$$

Usando (3.10) y que T_k es lineal se sigue que si $\widehat{f} = \widehat{g}$, entonces $T_k(f) = T_k(g)$. Por lo tanto F está bien definido.

Usando el teorema de Hahn-Banach (para espacios normados) podemos extender el funcional lineal F a un funcional lineal acotado $\widetilde{F}$ en $\mathcal{C}_0(G)$ que es el espacio que contiene todas las funciones $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ continuas.

Por el teorema de representación de Riesz para el espacio métrico $\mathcal{C}_0(G)$, a cada funcional lineal y continuo $\widetilde{F}$ le corresponde una única medida $\mu \in M(G)$, $\|\mu\| \leq 1$, tal que para todo $\widehat{a} \in M(G)$,

$$T_k(f) = \widetilde{F}(\widehat{f}) = \int_G \widehat{f} d\mu. \quad (3.11)$$

Además, $\|T_k\| = |\mu|(G)$. Reescribiendo (3.11) a partir de las definiciones de T_k y $\widehat{f}$ respectivamente, obtenemos

$$T_k(f) = \int_G \widehat{f}(-\gamma) d\mu = \int_\Gamma f(t) dt \int_G \gamma(-t) d\mu.$$

Luego, tenemos que

$$K(\gamma, 0) = \int_G \gamma(-t) d\mu. \quad (3.12)$$

Es decir,

$$K(\gamma, \sigma) = \int_G (\gamma - \sigma)(t) d\mu(t).$$

Tomando $\gamma = 0$ en (3.12) se tiene que

$$1 = K(0, 0) = \int_G d\mu = \mu(G) \leq \|\mu\| = 1.$$

Por lo tanto

$$\mu(G) = \|\mu\| \geq 0.$$

Lo que implica $\mu \geq 0$.

□

CAPÍTULO 4

La versión del teorema de Weil para núcleos de Toeplitz generalizados

1. Grupos ordenados

Sea $(\Gamma, +)$ un grupo abeliano con elemento neutro e . Se dice que Γ es un *grupo ordenado*, si existe un conjunto $\Gamma_+ \subset \Gamma$ tal que:

$$\Gamma_+ + \Gamma_+ = \Gamma_+, \quad \Gamma_+ \cap (-\Gamma_+) = \{e\}, \quad \Gamma_+ \cup (-\Gamma_+) = \Gamma.$$

En este caso, si $x, y \in \Gamma$, escribimos $x \leq y$, si $y - x \in \Gamma_+$. También $x < y$, si $x \leq y$ y $x \neq y$.

Luego

$$\Gamma_+ = \{\gamma \in \Gamma : \gamma \geq e\}.$$

En el caso en que Γ es un grupo abeliano localmente compacto es usual suponer que Γ_+ es un conjunto cerrado.

Si $a, b \in \Gamma$ y $a < b$, es usual la siguiente notación

$$(a, b) = \{x \in \Gamma : a < x < b\}, \quad [a, b] = \{x \in \Gamma : a \leq x \leq b\}, \quad \text{etc.}$$

EJEMPLO 4.1. Consideremos el grupo ordenado de los números enteros $\mathbb{Z}$. El *orden lexicográfico* en $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se define de la siguiente manera: Sean $(k, l), (n, m) \in \mathbb{Z}^2$. Entonces

$$(k, l) <_{lex} (n, m), \text{ si y sólo si, } l < m \text{ ó } (l = m \text{ y } k < n).$$

Se puede probar que $\mathbb{Z}^2$ es un grupo ordenado.

Se sigue que $\mathbb{Z}_+^2$ es el siguiente semiplano

$$\mathbb{Z}_1^2 = \{(n, m) \in \mathbb{Z}^2 : m > 0 \text{ ó } (m = 0 \text{ y } n > 0)\}.$$

2. Núcleos de Toeplitz generalizados en grupos ordenados

Definamos los siguientes conjuntos:

$$\Gamma_1 = \{\gamma \in \Gamma : \gamma \geq e\},$$

$$\Gamma_2 = \{\gamma \in \Gamma : \gamma < e\},$$

$$\Gamma_0 = \{\gamma \in \Gamma : \gamma > e\}.$$

Sea $K : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$. Se dice que la función K es un *núcleo de Toeplitz generalizado* en Γ cuando existen cuatro funciones $\mathcal{C}_{\alpha,\beta} : \Gamma_\alpha - \Gamma_\beta \rightarrow \mathbb{C}$, tales que

$$K(\gamma, \sigma) = \mathcal{C}_{\alpha,\beta}(\gamma - \sigma), \text{ si } (\gamma, \sigma) \in \Gamma_\alpha - \Gamma_\beta, \text{ con } \alpha, \beta = 1, 2.$$

Sea

$$\mathcal{C}(\Gamma_0) = \{f : \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{C} \text{ continua, acotada con soporte compacto}\}.$$

Definamos, $T_{K_{\alpha,\beta}} : \mathcal{C}(\Gamma_0) \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$T_{K_{\alpha,\beta}}(f) = \int_{\Gamma_0} f(\gamma) \mathcal{C}_{\alpha,\beta}(\gamma) d\gamma, \quad (4.1)$$

con $f \in \mathcal{C}(\Gamma_0)$, el cual es un funcional lineal.

LEMA 4.2. *Sea K un núcleo de Toeplitz generalizado definido positivo. Sean $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(\Gamma_0)$ y sean $\tilde{f}_1(\gamma) = \overline{f_1(-\gamma)}$ y $\tilde{f}_2(\gamma) = \overline{f_2(-\gamma)}$. Entonces*

- (i) $T_{K_{11}}(f_1 * \tilde{f}_1) \geq 0$,
- (ii) $T_{K_{22}}(f_2 * \tilde{f}_2) \geq 0$,
- (iii) $\overline{T_{K_{12}}(f_1 * \tilde{f}_2)} = T_{K_{21}}(f_2 * \tilde{f}_1)$,
- (iv) *La matriz*

$$D = \begin{pmatrix} T_{K_{11}}(f_1 * \tilde{f}_1) & \overline{T_{K_{12}}(f_1 * \tilde{f}_2)} \\ T_{K_{21}}(f_2 * \tilde{f}_1) & T_{K_{22}}(f_2 * \tilde{f}_2) \end{pmatrix}$$

es hermitica y definida positiva,

- (v) $|T_{K_{12}}(f_1 * \tilde{f}_2)| \leq T_{K_{11}}(f_1 * \tilde{f}_1) T_{K_{22}}(f_2 * \tilde{f}_2)$.

DEMOSTRACIÓN. Parte (i) y parte (ii):

Se demostraron en el Capitulo 3 (3.7). Es decir:

$$T_{K_{11}}(f_1 * \tilde{f}_1) \geq |T_{K_{11}}(f_1)|^2 \geq 0,$$

$$T_{K_{22}}(f_2 * \tilde{f}_2) \geq |T_{K_{22}}(f_2)|^2 \geq 0.$$

Parte (iii):

A partir de la definición de $T_{K_{\alpha,\beta}}$ y el producto convolución obtenemos:

$$\begin{aligned} \overline{T_{K_{12}}(f_1 * \tilde{f}_2)} &= \overline{\int_{\Gamma} \int_{\Gamma} f_1(\gamma) \overline{f_2(-\sigma)} \mathcal{C}_{12}(\gamma - \sigma) d\gamma d\sigma} \\ &= \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \overline{f_1(\gamma)} f_2(-\sigma) \overline{\mathcal{C}_{12}(\gamma - \sigma)} d\gamma d\sigma \\ &= \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \overline{f_2(\sigma)} f_1(-\gamma) \overline{\mathcal{C}_{21}(\gamma - \sigma)} d\sigma d\gamma. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$T_{K_{21}}(f_2 * \tilde{f}_1) = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \overline{f_2(\sigma)} f_1(-\gamma) \overline{\mathcal{C}_{21}(\gamma - \sigma)} d\sigma d\gamma.$$

Entonces

$$\overline{T_{K_{12}}(f_1 * \tilde{f}_2)} = T_{K_{21}}(f_2 * \tilde{f}_1)$$

Parte (iv):

Por la parte (iii) podemos verificar que ,efectivamente, la matriz D es hermítica. Nos resta verificar que es definida positiva. En efecto, sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Definamos:

$$h_1(\gamma) = \lambda_1 f_1(\gamma) \quad \text{y} \quad h_2(\gamma) = \lambda_2 f_2(\gamma).$$

Entonces $h_1, h_2 \in \mathcal{C}(\Gamma_0)$.

Como K es un núcleo de Toeplitz generalizado, se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{\alpha, \beta=1,2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} h_{\alpha}(\gamma) \overline{h_{\beta}(-\gamma)} \mathcal{C}_{\alpha\beta}(\gamma - \sigma) d\mu_{\alpha\beta}(\gamma) d\mu_{\alpha\beta}(\sigma) \\ &= \sum_{\alpha, \beta=1,2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \lambda_{\alpha} f_{\alpha}(\gamma) \overline{\lambda_{\beta} f_{\beta}(-\sigma)} \mathcal{C}_{\alpha\beta}(\gamma - \sigma) d\mu_{\alpha\beta}(\gamma) d\mu_{\alpha\beta}(\sigma) \\ &= \sum_{\alpha, \beta=1,2} \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} f_{\alpha}(\gamma) \overline{f_{\beta}(-\sigma)} \mathcal{C}_{\alpha\beta}(\gamma - \sigma) d\mu_{\alpha\beta}(\gamma) d\mu_{\alpha\beta}(\sigma) \\ &= \sum_{\alpha, \beta=1,2} \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} T_{K_{\alpha\beta}}(f_{\alpha} * \tilde{f}_{\beta}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, D es definida positiva.

Parte (v):

Finalmente como D es una matriz hermítica definida positiva, tal que $d_{11} \geq 0$ y $d_{22} \geq 0$, se verifica que

$$|d_{12}| \leq d_{11} d_{22}.$$

Es decir,

$$|T_{K_{12}}(f_1 * \tilde{f}_2)| \leq T_{K_{11}}(f_1 * \tilde{f}_1) T_{K_{22}}(f_2 * \tilde{f}_2).$$

□

3. La versión del teorema de Weil para núcleos de Toeplitz generalizados

En lo que sigue

$$\mu = \{\mu_{\alpha, \beta}\}_{\alpha, \beta=1,2} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{bmatrix}$$

denotará una matriz 2×2 cuyas entradas son medidas de Borel complejas finitas en el grupo G .

Se considerarán matrices hermiticas.

DEFINICIÓN 4.3. Se dice que la matriz $\{\mu_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta=1,2}$ es positiva cuando para todo boreliano Δ en G la matriz numérica $\{\mu_{\alpha,\beta}(\Delta)\}_{\alpha,\beta=1,2}$ es definida positiva. Es decir, para todo $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^2 \mu_{\alpha,\beta}(\Delta) \lambda_\alpha \overline{\lambda_\beta} \geq 0.$$

Un *polinomio trigonométrico* es una función $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\varphi(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \widehat{\varphi}(\gamma) \gamma(x)$$

y $\text{sop } \widehat{\varphi}$ es finito.

Denotemos por $\mathcal{P}_G$ el espacio vectorial de todos los polinomios trigonométricos.

PROPOSICIÓN 4.4. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a) *La matriz $\{\mu_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta=1,2}$ es positiva.*
- (b) *Para todo boreliano Δ en G , se tiene que: $\mu_{11}(\Delta) \geq 0$, $\mu_{22}(\Delta) \geq 0$ y*

$$|\mu_{12}(\Delta)|^2 \leq \mu_{11}(\Delta) \mu_{22}(\Delta).$$

- (c) *Para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{P}_G \times \mathcal{P}_G$, se tiene que*

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^2 \int_G \varphi_\alpha \overline{\varphi_\beta} d\mu_{\alpha\beta} \geq 0.$$

La prueba de este resultado es análoga a la de la Proposición 2.4.

El siguiente teorema fue probado en [4] y es una versión del teorema de Weil para núcleos de Toeplitz generalizados. El principal aporte del presente trabajo de grado es dar una nueva prueba de este resultado.

TEOREMA 4.5 (Domínguez). *Sea $K : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ un núcleo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- a) *K es núcleo de Toeplitz generalizado definido positivo,*
- b) *Existe una matriz positiva $\{\mu_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1,2}$ de medidas de Borel finitas en G , tales que*

$$K(\gamma, \sigma) = \widehat{\mu_{\alpha\beta}}(\gamma - \sigma) = \int_G (\gamma - \sigma)(t) d\mu_{\alpha\beta}(t)$$

para todo $(\gamma, \sigma) \in \Gamma_\alpha \times \Gamma_\beta$.

DEMOSTRACIÓN.

($\Rightarrow$)

Consideremos $W_1 : \Gamma_1 \times \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$W_1(\gamma, \sigma) = \mathcal{C}_{11}(\gamma - \sigma)$$

y sea $W_2 : \Gamma_2 \times \Gamma_2 \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$W_2(\gamma, \sigma) = \mathcal{C}_{22}(\gamma - \sigma)$$

Se puede demostrar que W_1 y W_2 son funciones definidas positivas.

Luego, se tiene que W_1 y W_2 son dos núcleos de Toeplitz definidos positivos. Por lo tanto, usando el teorema de Weil para núcleos de Toeplitz (Teorema 3.1), se sigue que existen dos medidas no-negativas $\mu_{11}, \mu_{22} \in \mathcal{M}(G)$, para W_1 y W_2 , respectivamente, tales que:

$$K_{11}(\gamma, \sigma) = \int_G (\gamma - \sigma)(t) d\mu_{11}(t),$$

$$K_{22}(\gamma, \sigma) = \int_G (\gamma - \sigma)(t) d\mu_{22}(t).$$

Sea $W_0 : \Gamma_1 \times \Gamma_2 \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$W_0(\gamma, \sigma) = \mathcal{C}_{12}(\gamma - \sigma).$$

Se probará que existe una medida no negativa $\mu_{12} \in \mathcal{M}(G)$ tal que

$$K_{12}(\gamma, \sigma) = \int_G (\gamma - \sigma)(t) d\mu_{12}(t).$$

Dadas $f_1, f_2 : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}$ con $\text{sop}(f_1) \subseteq \Gamma_1$ y $\text{sop}(f_2) \subseteq \Gamma_2$. Sean:

$$h_{f_1} = f_1 * \tilde{f}_1,$$

$$h_{f_2} = f_2 * \tilde{f}_2,$$

$$d_j = d_{j-1} * d_1,$$

donde $d_1 = h_{f_\alpha}$, con $\alpha = 1, 2$.

Si $d_1 = h_{f_\alpha}$ y $\widetilde{f_\alpha(n)} = \overline{f_\alpha(-n)}$, resulta $d_1 = \tilde{d}_1$.

Sea $T_{K_{\alpha\beta}}$ el funcional definido como en (4.1). Por el Lema 4.2 se obtiene la siguiente desigualdad

$$|T_{k_{12}}(f_1 * \tilde{f}_2)|^2 \leq T_{k_{11}}(f_1 * \tilde{f}_1) T_{k_{22}}(f_2 * \tilde{f}_2) = T_{k_{11}}(h_{f_1}) T_{k_{22}}(h_{f_2}). \quad (4.2)$$

Usando que $d_j = d_{j-1} * d_1$, con $d_1 = h_{f_\alpha}$ y la desigualdad

$$|T_{k_{11}}(f_1)|^2 \leq T_{k_{11}}(f_1 * \tilde{f}_1) = T_{k_{11}}(h_{f_1}),$$

tenemos que

$$T_{k_{11}}(h_{f_1}) \leq \{T_{k_{11}}(d_2)\}^{\frac{1}{2}} \leq \cdots \leq \{T_{k_{11}}(d_{2^n})\}^{\frac{1}{2^n}},$$

tomando $j = 2^n$.

Luego, como $|T_{k_{11}}(f_1)| \leq \|f_1\|_1$, si $f = d_{2^n}$, entonces dicha desigualdad se puede escribir como sigue

$$\{T_{k_{11}}(d_{2^n})\}^{\frac{1}{2^n}} \leq \|d_{2^n}\|_1^{\frac{1}{2^n}}.$$

Es decir,

$$T_{k_{11}}(h_{f_1}) \leq \|d_{2^n}\|_1^{\frac{1}{2^n}} = \|(h_{f_1})^{2^n}\|^{2^{-n}}.$$

Haciendo $n \rightarrow \infty$ en la expresión anterior, tenemos que el último término converge al radio espectral, y esto es,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(h_{f_1})^{2^n}\|_1^{2^{-n}} = \|\widehat{h_{f_1}}\|_\infty,$$

donde $\widehat{h_{f_1}}$ es la transformada de Fourier.

Por lo tanto

$$T_{k_{11}}(h_{f_1}) \leq \|\widehat{h_{f_1}}\|_\infty.$$

Si $d = h_{f_2}$, usando el razonamiento anterior obtenemos

$$T_{k_{22}}(h_{f_2}) \leq \|\widehat{h_{f_2}}\|_\infty.$$

Sustituyendo ambas desigualdades en (4.2) resulta lo siguiente

$$T_{k_{12}}(f_1 * \tilde{f}_2) \leq \|\widehat{h_{f_1}}\|_\infty \|\widehat{h_{f_2}}\|_\infty. \quad (4.3)$$

Por propiedades de la transformada de Fourier con respecto a la convolución se tiene que,

$$\widehat{d}(\gamma) = (\widehat{f}(\gamma))^2$$

Esto implica que $\|\widehat{d}\|_\infty = \|\widehat{f}\|_\infty$. Entonces (4.3) se puede escribir como

$$|T_{k_{12}}(f_1 * \tilde{f}_2)|^2 \leq \|\widehat{f_1}\|_\infty \|\widehat{f_2}\|_\infty,$$

para $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(\Gamma_0)$.

Sean:

$$A_1(G) = \left\{ \widehat{f}_1 : G \rightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } \widehat{f}_1(\gamma) = \int_{\Gamma_1} \gamma(-t) f_1(t) dt \text{ con } \text{sop}(f_1) \text{ compacto} \right\},$$

$$A_2(G) = \left\{ \widehat{f}_2 : G \rightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } \widehat{f}_2(\gamma) = \int_{\Gamma_2} \gamma(-t) f_2(t) dt \text{ con } \text{sop}(f_2) \text{ compacto} \right\}.$$

Definamos, $\mathcal{B}_0 : A_1(G) \times A_2(G) \rightarrow \mathbb{C}$, donde para $\widehat{f}_1 \in A_1(G)$ y $\widehat{f}_2 \in A_2(G)$ con $f_1, f_2 \in \mathcal{C}_c(G)$,

$$\mathcal{B}_0(\widehat{f}_1, \widehat{f}_2) = T_{k_{12}}(f_1 * \widetilde{f}_2).$$

Resulta que $\mathcal{B}_0$ es una forma bilineal acotada pues,

$$|\mathcal{B}_0(\widehat{f}_1, \widehat{f}_2)| \leq \|\widehat{f}_1\|_\infty \|\widehat{f}_2\|_\infty.$$

A continuación relacionaremos esta forma bilineal acotada con un funcional lineal acotado.

Sean

$$A_o(G) = \left\{ \phi : G \rightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } \phi(\gamma) = \int_{\Gamma_0} \gamma(-t) \phi^\vee(t) dt \text{ con } \text{sop}(\phi^\vee) \text{ compacto} \right\}$$

y $L : A_o(G) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$L(\phi) = \int_{\Gamma_0} \phi^\vee(\gamma) \mathcal{C}_{12}(\gamma) d\gamma.$$

Sean $\widehat{f}_1 \in A_1(G)$ y $\widehat{f}_2 \in A_2(G)$ con $f_1, f_2 \in \mathcal{C}_c(\Gamma)$ entonces

$$L(\widehat{f}_1 \widehat{f}_2) = \int_{\Gamma_0} (\widehat{f}_1 \widehat{f}_2)^\vee(\gamma) \mathcal{C}_{12}(\gamma) d\gamma.$$

Se puede probar que $\overline{\widehat{f}_2} = \widehat{\widetilde{f}_2}$, de donde

$$\begin{aligned} L(\widehat{f}_1 \widehat{f}_2) &= \int_{\Gamma_0} (\widehat{f}_1 \widehat{f}_2)^\vee(\gamma) \mathcal{C}_{12}(\gamma) d\gamma \\ &= \int_{\Gamma_0} \widehat{(f_1 * \widetilde{f}_2)}^\vee(\gamma) \mathcal{C}_{12}(\gamma) d\gamma \\ &= \int_{\Gamma_0} (f_1 * \widetilde{f}_2)(\gamma) \mathcal{C}_{12}(\gamma) d\gamma \\ &= T_{K_{12}}(f_1 * \widetilde{f}_2) \\ &= \mathcal{B}_0(\widehat{f}_1, \widehat{f}_2). \end{aligned}$$

Usando el teorema de Hahn-Banach (para espacios normados) podemos extender al funcional lineal L a un funcional lineal acotado $\widetilde{L}$ en $\mathcal{C}_0(G)$.

Por el teorema de representación de Riesz para el espacio métrico $\mathcal{C}_0(G)$ al funcional lineal y continuo $\tilde{L}$ le corresponde una única medida de Borel ν finita en G tal que

$$\tilde{L}(\phi) = \int_G \phi d\nu$$

para toda $\phi \in \mathcal{C}_0(G)$.

En particular, para $\hat{f}_1 \in A_1(G)$ y $\hat{f}_2 \in A_2(G)$ con $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(\Gamma)$ se tiene que

$$T_{K_{12}}(f_1 * \tilde{f}_2) = \tilde{L}(\widehat{f_1 \tilde{f}_2}) = \int_G \widehat{f_1 \tilde{f}_2} d\nu = \int_G \widehat{f_1 * \tilde{f}_2} d\nu. \quad (4.4)$$

Además $\|T_{k_{12}}\| = |\nu|(G)$. Reescribiendo la igualdad (4.4) a partir de las definiciones de $T_{k_{12}}$ y $\hat{f}_\alpha$ ($\alpha = 1, 2$) se obtiene

$$\begin{aligned} T_{k_{12}}(f_1 * \tilde{f}_2) &= \int_G \widehat{f_1 * \tilde{f}_2} d\nu \\ &= \int_G \int_\Gamma (f_1 * \tilde{f}_2)(\gamma) \gamma(-t) d\gamma d\nu(t) \\ &= \int_\Gamma (f_1 * \tilde{f}_2)(\gamma) \int_G \gamma(-t) d\nu(t) d\gamma \\ &= \int_\Gamma (f_1 * \tilde{f}_2)(\gamma) K_{12}(\gamma, 0) d\gamma. \end{aligned}$$

Se sigue que

$$K_{12}(\gamma, 0) = \int_G \gamma(-t) d\nu(t).$$

De donde,

$$K_{12}(\gamma, \sigma) = \int_G (\gamma - \sigma)(t) d\nu(t).$$

Sean:

$$\nu_{11} = \mu_{11}, \quad \nu_{12} = \nu, \quad \nu_{21} = \bar{\nu}, \quad \nu_{22} = \mu_{22}.$$

Sean $\varphi_1 \in \mathcal{P}_G$ un polinomio analítico y $\varphi_2 \in \mathcal{P}_G$ un polinomio anti-analítico. Entonces

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^2 \int_G \varphi_\alpha \overline{\varphi_\beta} d\nu_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha, \beta=1, 2} \sum_{(\gamma, \sigma) \in \Gamma_\alpha \times \Gamma_\beta} \lambda_{\alpha\gamma} \overline{\lambda_{\beta\sigma}} K_{\alpha\beta}(\gamma, \sigma).$$

Como K es un núcleo de Toeplitz generalizado definido positivo se tiene que

$$\sum_{\alpha, \beta=1, 2} \sum_{(\gamma, \sigma) \in \Gamma_\alpha \times \Gamma_\beta} \lambda_{\alpha\gamma} \overline{\lambda_{\beta\sigma}} K_{\alpha\beta}(\gamma, \sigma) \geq 0.$$

De donde

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^2 \int_G \varphi_\alpha \overline{\varphi_\beta} d\nu_{\alpha\beta} \geq 0,$$

para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{P}_G$, tales que φ_1 es polinomio analítico y φ_2 es polinomio anti-analítico.

Para $\alpha, \beta = 1, 2$ sea

$$d\nu_{\alpha\beta} = w_{\alpha\beta}dt + d\nu_{\alpha\beta}^s$$

donde $\nu_{\alpha\beta}^s$ es singular con respecto a la medida de en G y $w_{\alpha\beta} \in L^1(G)$.

La Proposición 1 de [7] garantiza

$$\sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 \int_G f_{\alpha}(t) \overline{f_{\beta}(t)} w_{\alpha\beta}(t) dt \geq 0$$

para todo $f_1 \in \mathcal{P}_1$ y $f_2 \in \mathcal{P}_2$.

Por la versión del teorema de F. y M. Riesz para grupos ordenados (ver [10]) existe una función $h \in H^1(G)$ (es decir, $h \in L^1(G)$ con $\widehat{h}(\gamma) = 0$ para todo $\gamma < e$) tal que

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^2 \int_G \varphi_{\alpha}(t) \overline{\varphi_{\beta}(t)} w_{\alpha\beta}(t) dt + \int_{\Delta} h(t) dt \geq 0,$$

para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{P}_G$.

Sea μ_{12} la medida de Borel finita en G dada por

$$\mu_{12}(\Delta) = \int_{\Delta} (w_{\alpha\beta}(t) + h(t)) dt$$

para todo boreliano Δ en G .

Entonces

$$\widehat{\mu_{12}}(\gamma - \sigma) = K_{12}(\gamma, \sigma) \quad \text{si } \gamma \geq 0 \text{ y } \sigma < 0.$$

Además

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^2 \int_G \varphi_{\alpha} \overline{\varphi_{\beta}} d\mu_{\alpha\beta} \geq 0$$

para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{P}_G$.

Usando un resultado, para grupos ordenados, análogo a la Proposición 2.4 se sigue que $\{\mu_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta=1,2}$ es positiva.

($\Leftarrow$) Supongamos que existe una matriz positiva $\{\mu_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1,2}$ de medidas de Borel finitas en G tal que, para todo $(\gamma, \sigma) \in \Gamma_{\alpha} \times \Gamma_{\beta}$,

$$K(\gamma, \sigma) = \widehat{\mu_{\alpha\beta}}(\gamma - \sigma) = \int_G (\gamma - \sigma)(t) d\mu_{\alpha\beta}(t).$$

Se sigue que K es un núcleo de Toeplitz generalizado.

A continuación se probará que K es un núcleo definido positivo.

Consideremos un par de sucesiones de números complejos con soporte finito $\{\lambda_\gamma^1\}$, $\{\lambda_\gamma^2\}$ tales que $\text{sop}(\{\lambda_\gamma^1\}) \subseteq \Gamma_1$ y $\text{sop}(\{\lambda_\gamma^2\}) \subseteq \Gamma_2$.

Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma, \sigma} \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \lambda_\gamma^\alpha \overline{\lambda_\sigma^\beta} K(\gamma, \sigma) &= \sum_{\gamma, \sigma} \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \lambda_\gamma^\alpha \overline{\lambda_\sigma^\beta} \int_G (\gamma - \sigma)(t) d\mu_{\alpha\beta}(t) \\ &= \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \int_G \sum_{\gamma, \sigma} \lambda_\gamma^\alpha \overline{\lambda_\sigma^\beta} \gamma(t) \overline{\sigma(t)} d\mu_{\alpha\beta}(t) \\ &= \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \int_G \left(\sum_{\gamma} \lambda_\gamma^\alpha \gamma(t) \right) \left(\sum_{\sigma} \overline{\lambda_\sigma^\beta} \overline{\sigma(t)} \right) d\mu_{\alpha\beta}(t) \geq 0. \end{aligned}$$

La última desigualdad se sigue del resultado análogo a la Proposición 2.4, ya que $\{\mu_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta=1,2}$ es una matriz positiva.

Por lo tanto K es un núcleo definido positivo.

□

Bibliografía

- [1] R. Bruzual and M. Domínguez. *Dilatación, Extensión y Representación de Formas Definidas Positivas*. Publicaciones del Postgrado en Matemática de la Facultad de Ciencias de la UCV, 30 Aniversario, 2006.
- [2] M. Cotlar, R. Bruzual, P. Alegría, M. Domínguez, J. Giménez y S. Marcantognini. *Extensión y Representación de Formas Invariantes en la Teoría de Interpolación, Predicción y Dilatación*. Tercera Escuela Venezolana de Matemáticas, 1990. Citado en página(s) 15
- [3] M. Cotlar, C. Sadosky. *On the Helson-Szegő theorem and a related class of modified Toeplitz kernels*. Proc. Symp. Pure Math. AMS., 35-I, 1979, pp. 383 - 407. Citado en página(s) 3, 15
- [4] M. Domínguez. *Interpolation and prediction problems for connected compact abelian groups*. Integral Equations Oper. Theory 40 (2001) 212-230. Citado en página(s) 3, 31
- [5] R. Douglas. *Banach algebra techniques in operator theory*. Academic press, 1972. Citado en página(s) 7
- [6] H. Dym, H. P. Mc Kean. *Fourier series and integrals*. Academic Press, 1972.
- [7] T. Nakazi, T. Yamamoto. *A lifting theorem and uniform algebras*. Trans. Amer. Math. Soc., **305**, 1988, pp. 79 - 94. 36
- [8] Z. Nehari *On bounded bilinear forms*. Annals of Mathematics, 65-1, 1957, pp. 153 - 162.
- [9] V. Paulsen. *Completely bounded maps and dilations*. Pitman Research Notes in Mathematics Series, 146, 1986.
- [10] W. Rudin. *Fourier analysis on groups*. Interscience, 1962. Citado en página(s) 3, 36
- [11] W. Rudin. *Functional Analysis*. Mc Graw Hill, 1973.
- [12] Z. Sasvári. *Positive definite and definitizable functions*. Akademie Verlag, 1994.
- [13] A. Weil. *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*. Gauthiers-Villars, Paris, 1938.