



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Aproximación de polinomios de Bernstein.

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Jorge Chehwaro** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutor: Marisela Domínguez

Caracas, Venezuela

Mayo 2006

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado “**Aproximación de polinomios de Bernstein**”, presentado por el **Br. Jorge Chehwaro**, titular de la Cédula de Identidad **14153781**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Marisela Domínguez
Tutor

Daniel Barráez
Jurado

Ramón Bruzual
Jurado

Agradecimiento

A mis padres Olga y José, por haberme apoyado incondicionalmente, a mis hermanas: Gloria, por ser un ejemplo a seguir y a Jacque, por ser una amiga.

A mi tutora, la profesora Marisela Domínguez, por su colaboración, por su guía y orientación en la realización de este trabajo.

A mis amigos: Alex, Nelson, Glaffo, Cristian, Nico, Laso, Tati (y a sus amigas), Edree, Armando, Jesús, Luis, Myloa, Natacha, Mariana, Diana, Angi, Charo, Iranes, Angel, Gabriel, Chiqui que me han acompañado a lo largo de toda mi carrera, y porsupuesto a tí Yanet Michinel por todo el apoyo que me has brindado.

A los profesores de la Escuela de Matemática en particular a los profesores: Margarita Olivares, Raimundo Popper, Ramón Bruzual, Daniel Barráez, Marisela Domínguez, Jesús Gash, Wilfredo Urbina, Gabriel Padilla.

A la universidad por haber sido mi casa en todo este tiempo , además a todo el personal que labora en ella, en especial al personal del laboratorio de Computación de la escuela de Matemática y al personal de la Biblioteca Central y al de Biblioteca de Ciencias.

También quisiera hacer un especial agradecimiento al Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico de la UCV por el apoyo en la impresión de este trabajo.

Índice general

Introducción	1
Capítulo 1. Probabilidades	2
1. Espacio de Probabilidad.	2
2. Variable Aleatoria.	2
3. Resultados clásicos de probabilidades.	11
Capítulo 2. Fenómeno de Gibbs.	13
1. El Fenómeno de Gibbs para las series de Fourier.	13
2. No hay fenómeno de Gibbs para los polinomios de Bernstein.	14
Capítulo 3. Convergencia de la derivada de los Polinomios de Bernstein	21
Bibliografía	28

Introducción

El objetivo de este trabajo es comprender el artículo “On the approximation properties of Bernstein polynomials via probabilistic tools” de Henryk Gzyl y José Luis Palacios [6].

Gzyl y Palacios en su publicación estudian problemas referentes a propiedades de aproximación de polinomios de Bernstein para algunas funciones definidas en $[0, 1]$: la ausencia del fenómeno de Gibbs en los puntos donde f tiene discontinuidad de salto, y la convergencia de la derivada del polinomio de Bernstein hacia f' . Ambos resultados se obtienen utilizando herramientas probabilísticas clásicas.

En el primer capítulo se hace una revisión de la Teoría de Probabilidades, más precisamente se presentan variables aleatorias, variable aleatoria binomial, valor esperado y desigualdad de Chebyshev.

En el segundo capítulo se desarrolla el artículo de Gzyl y Palacios presentando sus resultados en este trabajo.

CAPÍTULO 1

Probabilidades

1. Espacio de Probabilidad.

DEFINICIÓN 1.1. Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω es una σ -álgebra si satisface las siguientes propiedades:

- (1) $\Omega \in \mathcal{A}$, es decir que la realización del experimento produce un resultado. A Ω lo llamamos el evento cierto o seguro, ya que este evento siempre ocurre.
- (2) $A \in \mathcal{A}$ implica $A^c \in \mathcal{A}$, es decir si A es un evento entonces “ A no ocurre” también es un evento.
- (3) $A_n \in \mathcal{A}$, para $n = 1, 2, \dots$ entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, es decir que la unión numerable de eventos es un evento.

DEFINICIÓN 1.2. Sea Ω un espacio muestral y $\mathcal{A}$ una familia de eventos de Ω . Una medida de probabilidad o probabilidad sobre Ω , es una función P definida sobre $\mathcal{A}$ que satisface los siguientes axiomas:

- P es no negativa, es decir para todo evento $A \in \mathcal{A}$ se cumple que $P(A) \geq 0$.
- P es σ -aditiva, es decir si $\{A_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{A}$ son disjuntos dos a dos entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

- El evento cierto tiene probabilidad 1, es decir $P(\Omega) = 1$.

La terna $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se denomina espacio de probabilidad, el valor $P(A)$ se denomina probabilidad de A .

2. Variable Aleatoria.

2.1. Variable Aleatoria.

DEFINICIÓN 1.3. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad discreto. Una variable aleatoria real es una función

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

que a cada valor $w \in \Omega$ le asocia un único valor real $X(w)$.

DEFINICIÓN 1.4. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad. Una variable aleatoria real es un función

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

que satisface la propiedad de que para todo intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ el conjunto

$$X^{-1}(I) = \{w \in \Omega : X(w) \in I\} \in \mathcal{A}$$

es decir es un evento.

EJEMPLO 1.5. Sea c un numero real, la función X definida por $X(w) = c$ es una variable aleatoria, ya que para cualquier intervalo I ,

$$[X \in I] = \begin{cases} \Omega & \text{si } c \in I \\ \emptyset & \text{si } c \in I^c. \end{cases}$$

EJEMPLO 1.6. Sea $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P)$ un espacio de probabilidades, donde $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ son los conjuntos de Borel y P es alguna probabilidad definida sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Sea c un numero real y definamos la función $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$X(w) = w + c.$$

Si I es algún intervalo en $\mathbb{R}$,

$$[X \in I] = \{w : X(w) \in I\} = \{w : w + c \in I\} = \{w : w \in I - c\},$$

donde para un conjunto cualquiera A y c una constante, definimos

$$A + c = \{x : x = a + c, a \in A\}.$$

Por lo tanto el conjunto $I - c = [X \in I]$ es un intervalo, luego un Boreliano. Así X es una variable aleatoria.

DEFINICIÓN 1.7. Una variable aleatoria se denomina discreta, si su rango es un conjunto discreto (finito ó numerable). En este caso existe un conjunto $\{x_n\}_{n \geq 1}$ (conjunto de valores de X) tal que

$$\sum_{n \geq 1} P(X = x_n) = 1.$$

EJEMPLO 1.8. Considerando el ejemplo 1.5 tenemos

$$P(X \in I) = \begin{cases} 1 & \text{si } c \in I \\ 0 & \text{si } c \in I^c \end{cases}$$

por lo tanto X es una variable aleatoria discreta.

DEFINICIÓN 1.9. Dada una variable aleatoria discreta X cuyo conjunto de valores es un conjunto $\{x_n\}_{n \geq 1}$, la función

$$p : \{x_n\}_{n \geq 1} \rightarrow [0, 1]$$

$$x_n \mapsto p(n) = p_n = P(X = x_n)$$

se denomina función de probabilidad de la variable aleatoria X ó función de masa de probabilidad de la variable aleatoria X .

2.2. Función de distribución.

DEFINICIÓN 1.10. Si X es una variable aleatoria, se define la función de distribución de X como la función $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ tal que para cada $y \in \mathbb{R}$

$$F_X(y) = F(y) = P(X \leq y).$$

EJEMPLO 1.11. Sea X una variable aleatoria de rango el conjunto $R(X) = \{1, 2, 3\}$ con $P(X = 1) = P(X = 2) = P(X = 3) = \frac{1}{3}$.

Sea $x \in \mathbb{R}$, la función de distribución de X es:

$$\text{Si } -\infty < x < 1, \quad F(x) = P(X \leq x) = P(\emptyset) = 0.$$

$$\text{Si } 1 \leq x < 2, \quad F(x) = P(X \leq x) = P(X = 1) = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Si } 2 \leq x < 3, \quad F(x) = P(X \leq x) = P(X = 1 \text{ ó } X = 2) = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Si } 3 \leq x < \infty, \quad F(x) = P(X \leq x) = P(X = 1 \text{ ó } X = 2 \text{ ó } X = 3) = 1.$$

EJEMPLO 1.12. Consideremos la variable aleatoria X como el número de caras en tres lanzamientos de una moneda. En este caso la la función de distribución de la variable aleatoria

viene dada de la siguiente forma:

$$F(0) = P(X \leq 0) = P(X = 0) = 1/8.$$

$$F(1) = P(X \leq 1) = P(X = 0 \text{ ó } X = 1) = 1/8 + 3/8 = 1/2.$$

$$F(2) = P(X \leq 2) = P(X = 0 \text{ ó } X = 1 \text{ ó } X = 2) = 1/2 + 3/8 = 7/8.$$

$$F(3) = P(X \leq 3) = 1.$$

TEOREMA 1.13. Si F es la función de distribución de una variable aleatoria X , entonces

- (1) $0 \leq F(t) \leq 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$.
- (2) $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$, para $a < b$.
- (3) $F(a) \leq F(b)$ si $a < b$.
- (4) $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = F(a)$.
- (5) $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$.

DEMOSTRACIÓN.

- (1) Es inmediato ya que por definición tenemos

$$F_X(y) = F(y) = P(X \leq y) \in [0, 1].$$

- (2) Escribimos $\{w \in \Omega : X(w) \leq b\}$ como una unión disjunta

$$\{w \in \Omega : X(w) \leq b\} = \{w \in \Omega : X(w) \leq a\} \cup \{w \in \Omega : a < X(w) \leq b\},$$

aplicando la aditividad de la probabilidad obtenemos

$$P\{w \in \Omega : X(w) \leq b\} = P\{w \in \Omega : X(w) \leq a\} + P\{w \in \Omega : a < X(w) \leq b\},$$

es decir

$$F(b) = P(X \leq b) = P(X \leq a) + P(a < X \leq b) = F(a) + P(a < X \leq b).$$

- (3) Se deduce directamente de (2) ya que

$$0 < P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

para $a < b$.

(4) Sea $a \in \mathbb{R}$, para demostrar que F es continua por la derecha en el punto a , es suficiente verificar que si $(x_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión decreciente de números reales que tiende al punto a , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = F(a).$$

Observe que

$$[X \leq a] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [X \leq x_n].$$

Sea $A_n = [X \leq x_n]$ como $\{A_n\}$ es una sucesión decreciente de eventos, resulta que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X \leq x_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} [X \leq x_n]\right) = P(X \leq a) = F(a).$$

(5) Sea (x_n) una sucesión creciente de números reales tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty,$$

la sucesión de eventos dada por $[X \leq x_n]$ es creciente y

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} [X \leq x_n] = \Omega.$$

Por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X \leq x_n) = P(\Omega) = 1,$$

esto prueba que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$$

Análogamente, si (x_n) es una sucesión decreciente de números reales tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty,$$

entonces la sucesión de eventos dada por $[X \leq x_n]$ es decreciente y

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [X \leq x_n] = \emptyset,$$

por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X \leq x_n) = P(\emptyset) = 0,$$

esto prueba que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0.$$

□

Distribución de Bernoulli.

Consideremos una experiencia aleatoria en la cual hay sólo dos resultados de interés, uno de ellos lo llamaremos “Éxito”, al otro lo llamaremos “Fracaso”.

Una experiencia aleatoria de esta naturaleza se llama prueba de Bernoulli, y su espacio muestral consta únicamente de dos puntos.

Es frecuente definir sobre este espacio muestral una variable aleatoria X que tome el valor 1 si el resultado es un éxito y el valor 0 si el resultado es un fracaso. Si $p \in (0, 1)$ es la probabilidad asignada a un éxito, la función de probabilidad de la variable aleatoria X , será

$$g_b(1; p) = P([X = 1]) = p$$

$$g_b(0; p) = P([X = 0]) = 1 - p.$$

Distribución Binomial.

Consideremos la experiencia aleatoria que consiste en realizar n pruebas independientes de Bernoulli con probabilidad de éxito p . Sea $S_{n,p}$ la variable aleatoria definida como el número total de éxitos en las n pruebas. $S_{n,p}$ se denomina variable aleatoria binomial con parámetros n y p . El rango de $S_{n,p}$ es $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ y su función de distribución viene dada por

$$b(i, n, p) = P(S_{n,p} = i) = \binom{n}{i} p^i (1 - p)^{n-i}$$

con $i = 0, \dots, n$.

EJEMPLO 1.14. Se extraen con reposición cinco cartas de un juego de barajas. Sea $S_{N,p}$ el, número de diamantes en la muestra. ¿Cuál es la probabilidad que haya a lo sumo 2 diamantes?

En este caso la variable aleatoria $S_{N,p}$ considerada tiene distribución Binomial de parámetros $N = 5$, $p = \frac{1}{4}$, obteniendo que

$$P(S_{N,p} \leq 2) = \sum_{n=0}^2 P(S_{N,p} = n) = \sum_{n=0}^2 \binom{5}{n} \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{3}{4}\right)^{5-n}.$$

2.3. Esperanza y Varianza.

DEFINICIÓN 1.15. Sea X una variable aleatoria discreta de rango $R(X) = \{x_n\}_{n \geq 1}$, con función de distribución $p_n = P(X = x_n)$. La esperanza matemática de X se denota por

$\mathbb{E}(X)$ y se define como

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} X(w) dP(w) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n P(X = x_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n p_n,$$

siempre y cuando esta serie sea absolutamente convergente.

TEOREMA 1.16. *Sea X es una variable aleatoria y sean a y b constantes entonces*

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b.$$

Es decir, la esperanza es lineal.

DEMOSTRACIÓN. Sea $p_n = P(X = x_n)$, luego tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(aX + b) &= \sum_{n=0}^{\infty} (ax_n + b)p_n \\ &= a \sum_{n=0}^{\infty} x_n p_n + b \sum_{n=0}^{\infty} p_n \\ &= a\mathbb{E}(X) + b. \end{aligned}$$

□

DEFINICIÓN 1.17. Sea X una variable aleatoria discreta con función de distribución F_X entonces para toda función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se cumple

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{\Omega} g(X(w)) dP(w) = \sum_{x \in R(X)} F_X(x) g(x).$$

TEOREMA 1.18. *Si X e Y son variables aleatorias de esperanza finita, entonces la variable aleatoria $X + Y$ tiene esperanza finita y*

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) &= \int_{\Omega} X(w) dP(w) + \int_{\Omega} Y(w) dP(w) \\ &= \int_{\Omega} (X(w) + Y(w)) dP(w) \end{aligned}$$

que es la la esperanza de $X + Y$, luego

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

□

DEFINICIÓN 1.19. Si X es una variable aleatoria discreta, definimos la varianza de X como la esperanza de $(X - \mathbb{E}(X))^2$, denotando esta cantidad como

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \sum_{x \in R(X)} (x - \mathbb{E}(X))^2.$$

PROPOSICIÓN 1.20. Sea X una variable aleatoria discreta entonces la varianza se puede escribir como

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea X una variable aleatoria discreta entonces por la definición anterior tenemos

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$$

Además se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) &= \mathbb{E}(X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + (\mathbb{E}(X))^2) \\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2. \end{aligned}$$

□

EJEMPLO 1.21 (Esperanza y Varianza de una Distribución Binomial.). Sea $S_{n,p}$ una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros n y p , a continuación calculamos su esperanza y su varianza.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_{n,p}) &= \sum_{i=0}^n iP(S_{n,p} = i) = \sum_{i=1}^n i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{n(n-1)!}{(i-1)!(n-1-(i-1))!} p p^{i-1} (1-p)^{n-1-(i-1)} \\ &= pn \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} \\ &= pn. \end{aligned}$$

por otra parte, para calcular su varianza primero hallemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_{n,p}^2) &= \sum_{i=0}^n i^2 P(S_{n,p} = i) = \sum_{i=0}^n i^2 \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\
&= \sum_{i=1}^n [i(i-1) + i] \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\
&= \sum_{i=1}^n i(i-1) \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} + \sum_{i=1}^n i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\
&= \sum_{i=1}^n i(i-1) \binom{n}{i} p^n (1-p)^{n-i} + np \\
&= \sum_{i=2}^n i(i-1) \frac{n(n-1)(n-2)!}{i(i-1)(i-2)!(n-2-(i-2))!} p^{i-2} p^2 (1-p)^{n-2-(i-2)} + np \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} p^k (1-p)^{n-2-k} + np \\
&= n(n-1)p^2 + np.
\end{aligned}$$

De aquí se deduce que

$$\mathbb{V}(S_{n,p}) = \mathbb{E}(S_{n,p}^2) - (\mathbb{E}(S_{n,p}))^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p).$$

3. Resultados clásicos de probabilidades.

Desigualdad de Markov.

PROPOSICIÓN 1.22. *Si X es una variable aleatoria con valores no negativos, entonces para $a > 0$,*

$$P(X > a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

DEMOSTRACIÓN. Daremos la prueba en el caso discreto.

Sea $p_j = P(X = x_j)$, luego

$$\mathbb{E}(X) = \sum_j x_j p_j$$

sean $a > 0$ y $A = [j : x_j \leq a]$, por lo tanto se tiene que

$$P(X \geq a) = \sum_{j \in A} p_j$$

luego

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{j \in A} x_j p_j + \sum_{j \in A^c} x_j p_j \geq \sum_{j \in A} x_j p_j \geq \sum_{j \in A} a p_j = a P(X \geq a).$$

□

Desigualdad de Chebyshev.

PROPOSICIÓN 1.23. *Sea X una variable aleatoria a valores reales definida en (Ω, F, P) . Sean $\mathbb{E}(X) = \mu < \infty$ y $\sigma^2 = \mathbb{V}(X)$, entonces para cualquier $\epsilon > 0$ tenemos*

$$P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}.$$

DEMOSTRACIÓN. Como $(X - \mu)^2 > 0$, es una variable aleatoria utilizamos la desigualdad de Markov con $Y = (X - \mu)^2$, $a = \epsilon^2 > 0$, obteniendo así

$$P(|X - \mu| \geq \epsilon) = P((X - \mu)^2 \geq \epsilon^2) \leq \frac{\mathbb{E}[(X - \mu)^2]}{\epsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}.$$

□

Teorema Central del Límite.

TEOREMA 1.24. *Sea $X_1, X_2, \dots$ una sucesión de variables aleatorias independientes, con la misma distribución. Sea $\mathbb{E}(X_k) = \mu$, $0 < \mathbb{V}(X_k) = \sigma^2 < \infty$ con $k = 1, 2, 3, \dots$. Sea*

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Consideremos la variable aleatoria

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

entonces la distribución de Z_n tiende a la distribución normal estándar, cuando hacemos tender $n \rightarrow \infty$.

La demostración de este teorema puede leerse en [4].

CAPÍTULO 2

Fenómeno de Gibbs.

1. El Fenómeno de Gibbs para las series de Fourier.

Sea f una función a valores reales definida en un intervalo I , de la forma $(a, b]$ ó $[a, b)$, entonces f puede ser extendida, en forma natural, a una función de período $T = b - a$, definida en todo $\mathbb{R}$ mediante la siguiente igualdad:

$$f(x + nT) = f(x),$$

para $x \in I$ y $n \in \mathbb{Z}$.

En particular, cuando se consideran funciones de período 2π , es usual definir las en el intervalo $[0, 2\pi)$ o en el intervalo $[-\pi, \pi)$.

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de período 2π , integrable en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Los coeficientes de Fourier de f son

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx & (k = 0, 1, \dots), \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx & (k = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

La serie de Fourier de f es

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx).$$

La sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de f es

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx).$$

DEFINICIÓN 2.1. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y acotado, sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es función continua a trozos en I si f tiene una cantidad finita de discontinuidades de salto, es decir si:

- (i) I se puede dividir en una cantidad finita de sub-intervalos $[z_0, z_1], [z_1, z_2], \dots, [z_{p-1}, z_p]$ ($z_0 < z_1 < \dots < z_p$), tales que f es continua en cada uno de los intervalos (z_{k-1}, z_k) .
- (ii) Para cada $k = 1, \dots, p-1$, los siguientes límites existen y son finitos

$$\lim_{x \rightarrow z_k^+} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow z_k^-} f(x).$$

- (iii) Los siguientes límites existen y son finitos

$$\lim_{x \rightarrow z_0^+} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow z_p^-} f(x).$$

TEOREMA 2.2. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de período 2π , tal que:

- (i) f es continua a trozos en $[0, 2\pi]$.
- (ii) Es posible subdividir $[0, 2\pi]$, de acuerdo a la Definición 2.1, en sub-intervalos $[z_{k-1}, z_k]$, de manera que f sea derivable en (z_{k-1}, z_k) y existen las derivadas laterales

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(z_k + h) - f(z_k^+)}{h} \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(z_k + h) - f(z_k^-)}{h}.$$

Entonces, para cada $x \in \mathbb{R}$, la serie de Fourier de f converge a

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

La convergencia de la serie de Fourier de una función en las cercanías de una discontinuidad de salto muestra ciertas características muy particulares que fueron estudiadas por el matemático J. N. Gibbs alrededor del año 1899.

Sea f una función de período 2π y sea $\{S_n\}$ la sucesión de sumas parciales de su serie de Fourier. Gibbs observó lo siguiente: en un entorno de una discontinuidad de salto S_n siempre difiere de f en un valor que es aproximadamente igual al 9% del tamaño del salto. Esta propiedad se conoce como fenómeno de Gibbs.

2. No hay fenómeno de Gibbs para los polinomios de Bernstein.

Consideremos f una función real definida en $[0, 1]$ con discontinuidad de salto en x_0 entonces el fenómeno de Gibbs no se presenta para el polinomio de Bernstein de f .

Sea $b > a$ consideraremos

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < x_0 \\ b & \text{si } x \geq x_0. \end{cases}$$

Sea $S_{n,x}$ una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros n y x .

El polinomio de Bernstein de f es

$$(2.1) \quad B_n f(x) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} f\left(\frac{i}{n}\right).$$

Usando la definición de f tenemos

$$\begin{aligned} (2.2) \quad B_n f(x) &= \sum_{i < x_0 n} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} a + \sum_{i \geq x_0 n} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} b \\ &= aP\left(\frac{S_{n,x}}{n} < x_0\right) + bP\left(\frac{S_{n,x}}{n} \geq x_0\right) \\ &= a\left(1 - P\left(\frac{S_{n,x}}{n} \geq x_0\right)\right) + bP\left(\frac{S_{n,x}}{n} \geq x_0\right) \end{aligned}$$

desarrollando y luego agrupando convenientemente en (2.2), obtenemos que

$$(2.3) \quad B_n f(x) = a + (b-a)P\left(\frac{S_{n,x}}{n} \geq x_0\right).$$

Luego

$$\begin{aligned} (2.4) \quad B_n f(0) &= a + (b-a)P\left(\frac{S_{n,0}}{n} \geq x_0\right) \\ &= a + (b-a)P(0 \geq x_0) \\ &= a. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2.5) \quad B_n f(1) &= a + (b-a)P\left(\frac{S_{n,1}}{n} \geq x_0\right) \\ &= a + (b-a)P(1 \geq x_0 n) \\ &= a + (b-a) \\ &= b. \end{aligned}$$

Como $0 \leq P\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) \leq 1$

$$0 \leq (b-a)P\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) \leq (b-a)$$

$$a \leq a + (b-a)P\left(\frac{S_{n,x}}{n} \geq x_0\right) \leq a + (b-a) = b.$$

obteniendo así que

$$B_n f(0) = a \leq B_n f(x) \leq b = B_n f(1).$$

Se puede probar que $B_n f$ es una función creciente teniendo en cuenta el hecho de que si $x \leq y$ entonces para $0 \leq k \leq n$ se tiene

$$P(S_{n,x} \geq k) = \sum_{i \geq k} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \leq \sum_{i \geq k} \binom{n}{i} y^i (1-y)^{n-i} = P(S_{n,y} \geq k).$$

Ambos lados de la desigualdad son uno cuando $k = 0$, para otros valores de k uno subtrae las condiciones apropiadas para que se preserve la inecuación.

Sea $[x_1, x_2] \subset [0, 1] - \{x_0\}$.

Considerando primero $x_2 < x_0$.

Notemos que

$$\begin{aligned} (2.6) \quad P\left(\frac{S_{n,x}}{n} \geq x_0\right) &= P\left(\frac{S_{n,x}}{n} + x - x \geq x_0\right) \\ &\leq P\left(\left|\frac{S_{n,x}}{n} - x\right| \geq x_0 - x\right). \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Chebyshev resulta que

$$(2.7) \quad P\left(\frac{S_{n,x}}{n} \geq x_0\right) \leq \frac{x(1-x)}{n(x_0-x)^2}.$$

Como $0 < x < 1$, entonces

$$(2.8) \quad P\left(\frac{S_{n,x}}{n} \geq x_0\right) \leq \frac{1}{4n(x_0-x)^2},$$

fijando $x = x_2$ obtenemos que

$$(2.9) \quad P\left(\frac{S_{n,x}}{n} \geq x_0\right) \leq \frac{1}{4n(x_0-x_2)^2},$$

haciendo $n \rightarrow \infty$ resulta que

$$P\left(\frac{S_{n,x}}{n} \geq x_0\right) \rightarrow 0.$$

Por lo tanto

$$B_n f(x) = a + (b-a)P\left(\frac{S_{n,x}}{n} \geq x_0\right) \rightarrow a = f(x).$$

Un resultado similar se obtiene para $x_0 < x_1$.

Por lo anterior $B_n f(x)$ converge uniformemente a f en el intervalo $[x_1, x_2]$.

Por otra lado, considerando el punto de discontinuidad x_0 y de (2.3) sabemos que

$$B_n f(x_0) = a + (b-a)P\left(\frac{S_{n,x_0}}{n} \geq x_0\right).$$

Considerando X_i , con $1 \leq i \leq n$, variables aleatorias independientes de Bernoulli con probabilidad x_0 , entonces

$$\begin{aligned} P\left(\frac{S_{n,x_0}}{n} \geq x_0\right) &= P(S_{n,x_0} - nx_0 \geq 0) \\ &= P\left(\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) - nx_0 \geq 0\right) \\ &= P\left(\left(\sum_{i=1}^n X_i - x_0\right) \geq 0\right) \\ &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - x_0)}{\sqrt{nx_0(1-x_0)}} \geq 0\right), \end{aligned}$$

tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$ en (2.18) y utilizando el teorema central del límite, obtenemos que

$$(2.10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_{n,x_0}}{n} \geq x_0\right) \approx \phi(0) = 1/2.$$

Como

$$(2.11) \quad \left|B_n f(x_0) - \frac{a+b}{2}\right| = \left|a + (b-a)P\left(\frac{S_{n,x_0}}{n} \geq x_0\right) - \frac{a+b}{2}\right|$$

tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$ en y utilizando (2.10) nos queda que

$$(2.12) \quad \left|B_n f(x_0) - \frac{a+b}{2}\right| = |b-a| \left|P\left(\frac{S_{n,x_0}}{n} \geq x_0\right) - \frac{1}{2}\right| \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

Por lo anterior, hemos demostrado que $B_nf(x_0)$ converge al promedio de los límites derecho e izquierdo de f en x_0 .

Como B_nf es creciente, tenemos

$$(2.13) \quad \max_{|x_0-x|\leq\delta} B_nf(x) - \min_{|x_0-x|\leq\delta} B_nf(x) = B_nf(x_0+\delta) - B_nf(x_0-\delta)$$

haciendo tender $n \rightarrow \infty$, y usando que la convergencia es uniforme en los puntos donde f es continua

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\max_{|x_0-x|\leq\delta} B_nf(x) - \min_{|x_0-x|\leq\delta} B_nf(x) \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (B_nf(x_0+\delta) - B_nf(x_0-\delta)) \\ &= |f(x_0+\delta) - f(x_0-\delta)| \\ &= |f(x_0+0) - f(x_0-0)| \end{aligned}$$

por lo tanto no se cumple el fenómeno de Gibbs.

En lo que sigue presentamos los gráficos de f y de B_nf correspondientes para $a = 1$, $b = 2$ y $x_0 = 1/2$ en los casos $n = 4$, $n = 10$ y $n = 20$.

Cuando en Maple colocamos la instrucciones para $n = 4$:

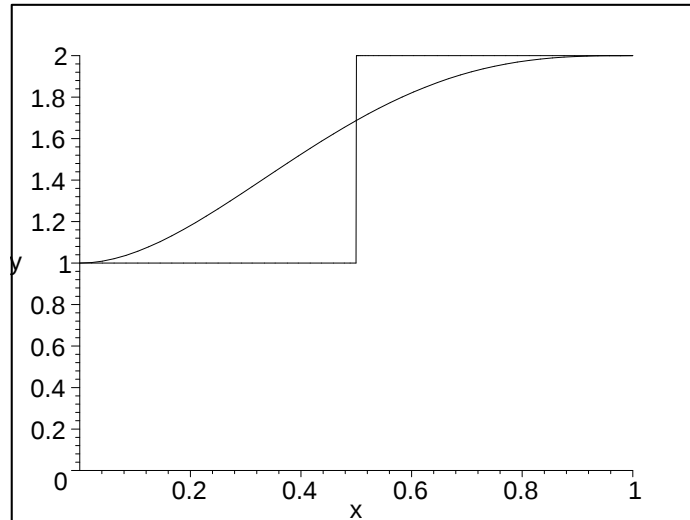
```
f:=piecewise(x<1/2,1,2);
```

```

      { 1          x < 1/2
f := {
      { 2          otherwise
```

```
B4f(x):=(1-x)^4+4*x*(1-x)^3+12*x^2*(1-x)^2+8*x^3*(1-x)+2*x^4;
```

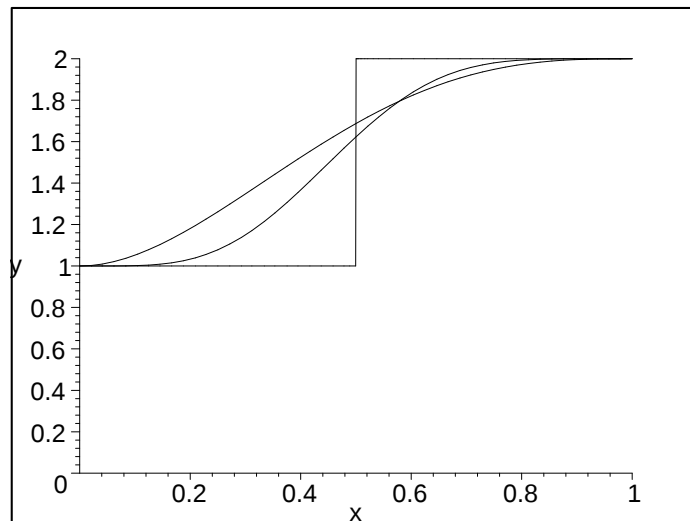
obtenemos el siguiente gráfico



La instrucción, para $n = 10$ es

```
B10f(x):=(1-x)^10+10*x*(1-x)^9+45*x^2*(1-x)^8+120*x^3*(1-x)^7
+210*x^4*(1-x)^6+504*x^5*(1-x)^5+420*x^6*(1-x)^4+240*x^7*(1-x)^3
+90*x^8*(1-x)^2+20*x^9*(1-x)+2*x^10;
```

Obtenemos el siguiente gráfico

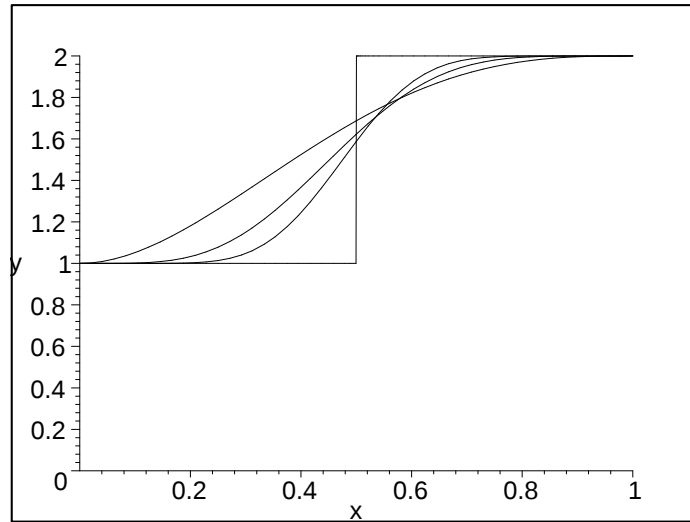


Por último consideramos la instrucción para $n = 20$.

```
B20f(x):=(1-x)^20+20*x*(1-x)^19+190*x^2*(1-x)^18+1140*x^3*(1-x)^17
+4845*x^4*(1-x)^16+15504*x^5*(1-x)^15+38760*x^6*(1-x)^14
```

$$\begin{aligned}
&+77520x^7(1-x)^{13}+125970x^8(1-x)^{12}+167960x^9(1-x)^{11} \\
&+184756x^{10}(1-x)^{10}+2335920x^{11}(1-x)^9+251940x^{12}(1-x)^8 \\
&+155040x^{13}(1-x)^7+77520x^{14}(1-x)^6+31008x^{15}(1-x)^5 \\
&+9690x^{16}(1-x)^4+2280x^{17}(1-x)^3+380x^{18}(1-x)^2+40x^{19}(1-x) \\
&+2x^{20};
\end{aligned}$$

Con esto obtenemos



En las gráficas anteriores se observa que no se cumple el fenómeno de Gibbs.

CAPÍTULO 3

Convergencia de la derivada de los Polinomios de Bernstein

Sea f una función real definida en el intervalo $[0, 1]$, como ya se dijo antes el polinomio de Bernstein de f es

$$B_n f(x) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} f\left(\frac{i}{n}\right).$$

PROPOSICIÓN 3.1. *La derivada del polinomio de Bernstein $B_n f$ puede ser expresada por*

$$(B_n f)'(x) = \mathbb{E} \left[\left(\frac{S_{n,x} - nx}{\sqrt{nx(1-x)}} \right)^2 D(n, f)(x) \right],$$

donde

$$D(n, f)(x) = \frac{f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) - f(x)}{\frac{S_{n,x}}{n} - x}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $B_n f$ el polinomio de Bernstein de f

$$(3.1) \quad B_n f(x) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} f\left(\frac{i}{n}\right) = \mathbb{E} \left[f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) \right]$$

derivando (3.1) con respecto a x nos queda

$$\begin{aligned} (B_n f)'(x) &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} i x^{i-1} (1-x)^{n-i} f\left(\frac{i}{n}\right) \\ &\quad - \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (n-i) (1-x)^{n-i-1} f\left(\frac{i}{n}\right) \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} (B_n f)'(x) &= \frac{1}{x} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} i x^i (1-x)^{n-i} f\left(\frac{i}{n}\right) \\ &\quad - \frac{1}{1-x} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (n-i) (1-x)^{n-i} f\left(\frac{i}{n}\right). \end{aligned}$$

Por (3.1) tenemos

$$(B_n f)'(x) = \frac{1}{x} \mathbb{E} \left[S_{n,x} f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) \right] - \frac{1}{1-x} \mathbb{E} \left[(n - S_{n,x}) f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) \right]$$

luego

$$(B_n f)'(x) = \frac{\left((1-x) \mathbb{E} \left[S_{n,x} f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) \right] \right) - x \mathbb{E} \left[(n - S_{n,x}) f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) \right]}{x(1-x)}.$$

Como la esperanza matemática es lineal se sigue que

$$\begin{aligned} (B_n f)'(x) &= \frac{\mathbb{E} \left[(1-x) S_{n,x} f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) \right] + \mathbb{E} \left[x(S_{n,x} - n) f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) \right]}{x(1-x)} \\ &= \frac{\mathbb{E} \left[(1-x) S_{n,x} f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) + x(S_{n,x} - n) f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) \right]}{x(1-x)} \end{aligned}$$

multiplicando los términos y luego simplificando queda que

$$(B_n f)'(x) = \frac{\mathbb{E} \left[S_{n,x} f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) - x S_{n,x} f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) + x S_{n,x} f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) - nx f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) \right]}{x(1-x)}$$

luego

$$(B_n f)'(x) = \frac{\mathbb{E} \left[S_{n,x} f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) - nx f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) \right]}{x(1-x)} = \frac{\mathbb{E} \left[(S_{n,x} - nx) f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) \right]}{x(1-x)}.$$

Sumando y restando $f(x)$ resulta que

$$(B_n f)'(x) = \frac{\mathbb{E} \left[(S_{n,x} - nx) \left(f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) + f(x) - f(x) \right) \right]}{x(1-x)}$$

agrupando convenientemente y utilizando propiedades de la esperanza nos queda que

$$(3.2) \quad (B_n f)'(x) = \frac{\mathbb{E} \left[(S_{n,x} - nx) \left(f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) - f(x) \right) \right]}{x(1-x)} + \frac{\mathbb{E} [(S_{n,x} - nx) f(x)]}{x(1-x)}.$$

Puesto que $S_{n,x}$ es una variable aleatoria binomial con parámetros n y x , el segundo sumando de (3.2) nos queda

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E} [(S_{n,x} - nx) f(x)]}{x(1-x)} &= \frac{\mathbb{E} [S_{n,x} f(x) - nx f(x)]}{x(1-x)} \\ &= \frac{\mathbb{E} [S_{n,x} f(x)]}{x(1-x)} + \frac{\mathbb{E} [-nx f(x)]}{x(1-x)} \\ &= \frac{f(x) \mathbb{E} [S_{n,x}]}{x(1-x)} - \frac{nx f(x)}{x(1-x)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

De lo anterior y de (3.2) se sigue que

$$\begin{aligned} (B_n f)'(x) &= \mathbb{E} \left[\frac{(S_{n,x} - nx) \left(f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) - f(x) \right)}{x(1-x)} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\frac{(S_{n,x} - nx)^2}{x(1-x)} \frac{f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) - f(x)}{S_{n,x} - nx} \right]. \end{aligned}$$

De donde

$$(B_n f)'(x) = \mathbb{E} \left[\frac{(S_{n,x} - nx)^2}{x(1-x)} \frac{f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) - f(x)}{n\left(\frac{S_{n,x}}{n} - x\right)} \right]$$

luego

$$(B_n f)'(x) = \mathbb{E} \left[\frac{(S_{n,x} - nx)^2}{nx(1-x)} \frac{f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) - f(x)}{\left(\frac{S_{n,x}}{n} - x\right)} \right] = \mathbb{E} \left[\left(\frac{S_{n,x} - nx}{\sqrt{nx(1-x)}} \right)^2 \frac{f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) - f(x)}{\left(\frac{S_{n,x}}{n} - x\right)} \right].$$

Por la definición de $D(n, f)$ obtenemos que

$$(B_n f)'(x) = \mathbb{E} \left[\left(\frac{S_{n,x} - nx}{\sqrt{nx(1-x)}} \right)^2 D(n, f)(x) \right].$$

□

En la Proposición 3.3. se estudiará la convergencia puntual de $(B_n f)'$, para eso se necesita hacer referencia al siguiente resultado (ver [1, 5]).

LEMA 3.2. *Sea $S_{n,x}$ una variable aleatoria binomial con n eventos independientes y probabilidad de éxito x con $x \in [0, 1]$ para cada uno de ellos y sea $a > 0$ arbitrario entonces*

$$P(|S_{n,x} - nx| > a) \leq 2 \exp \left(\frac{-2a^2}{n} \right)$$

La demostración de este lema puede leerse en [1, 5].

PROPOSICIÓN 3.3. *Si $\sup_{x \in [0,1]} f(x) = M < +\infty$ entonces para todo x tal que $f'(x)$ exista tenemos*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (B_n f)'(x) = f'(x)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $A(n, f)(x) = D(n, f)(x) - f'(x)$, entonces por la proposición anterior podemos escribir

$$(B_n f)'(x) = \mathbb{E} \left[\left(\frac{S_{n,x} - nx}{\sqrt{nx(1-x)}} \right)^2 D(n, f)(x) \right] = \mathbb{E} \left[\left(\frac{S_{n,x} - nx}{\sqrt{nx(1-x)}} \right)^2 (A(n, f)(x) + f'(x)) \right]$$

por propiedades de la esperanza tenemos que

$$(3.3) \quad (B_n f)'(x) = \mathbb{E} \left[\left(\frac{S_{n,x} - nx}{\sqrt{nx(1-x)}} \right)^2 A(n, f)(x) \right] + \mathbb{E} \left[\left(\frac{S_{n,x} - nx}{\sqrt{nx(1-x)}} \right)^2 f'(x) \right]$$

Además, puesto que

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\frac{S_{n,x} - nx}{\sqrt{nx(1-x)}} \right)^2 \right] &= \frac{\mathbb{E} [(S_{n,x} - nx)^2]}{nx(1-x)} \\ &= \frac{\mathbb{E} [(S_{n,x} - \mathbb{E}(S_{n,x}))^2]}{nx(1-x)} \\ &= \frac{\mathbb{V}(S_{n,x})}{nx(1-x)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

se sigue que el segundo sumando de (3.3) queda

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{S_{n,x} - nx}{\sqrt{nx(1-x)}} \right)^2 f'(x) \right] = f'(x) \mathbb{E} \left[\left(\frac{S_{n,x} - nx}{\sqrt{nx(1-x)}} \right)^2 \right] = f'(x)$$

y así (3.3) queda

$$(3.5) \quad (B_n f)'(x) = \mathbb{E} \left[\left(\frac{S_{n,x} - nx}{\sqrt{nx(1-x)}} \right)^2 A(n, f)(x) \right] + f'(x).$$

Luego, el primer sumando de (3.5) se puede escribir como

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\frac{S_{n,x} - nx}{\sqrt{nx(1-x)}} \right)^2 A(n, f)(x) \right] &= \mathbb{E} \left[\left(\frac{S_{n,x} - nx}{\sqrt{nx(1-x)}} \right)^2 |A(n, f)(x)| \mathbf{1}_{\left| \frac{S_{n,x}}{n} - x \right| < \delta} \right] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[\left(\frac{S_{n,x} - nx}{\sqrt{nx(1-x)}} \right)^2 |A(n, f)(x)| \mathbf{1}_{\left| \frac{S_{n,x}}{n} - x \right| \geq \delta} \right] \end{aligned}$$

donde $\mathbf{1}_B$ representa a la función indicatriz del conjunto B.

Por otro lado, como $f'(x)$ existe, entonces dado $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si

$$\left| \frac{S_{n,x}}{n} - x \right| < \delta,$$

entonces

$$|A(n, f)(x)| = |D(n, f)(x) - f'(x)| = \left| \frac{f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) - f(x)}{\frac{S_{n,x}}{n} - x} - f'(x) \right| < \epsilon.$$

Por esto último y por (3.4) el primer sumando de (3.6) viene acotado por

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{S_{n,x} - nx}{\sqrt{nx(1-x)}} \right)^2 |A(n, f)(x)| \mathbf{1}_{\left| \frac{S_{n,x}}{n} - x \right| < \delta} \right] = \epsilon \mathbb{E} \left[\left(\frac{S_{n,x} - nx}{\sqrt{nx(1-x)}} \right)^2 \mathbf{1}_{\left| \frac{S_{n,x}}{n} - x \right| < \delta} \right] \leq \epsilon.$$

Mientras que el segundo sumando de (3.6) queda como

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\left(\frac{S_{n,x} - nx}{\sqrt{nx(1-x)}} \right)^2 |A(n, f)(x)| \mathbf{1}_{\left| \frac{S_{n,x}}{n} - x \right| \geq \delta} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\frac{S_{n,x} - nx}{\sqrt{nx(1-x)}} \right)^2 \left| \frac{f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) - f(x)}{\frac{S_{n,x}}{n} - x} - f'(x) \right| \mathbf{1}_{\left| \frac{S_{n,x}}{n} - x \right| \geq \delta} \right]. \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad triangular repetidamente, obtenemos que

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\left(\frac{S_{n,x} - nx}{\sqrt{nx(1-x)}} \right)^2 |A(n, f)(x)| \mathbf{1}_{\left| \frac{S_{n,x}}{n} - x \right| \geq \delta} \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\left(\frac{S_{n,x} - nx}{\sqrt{nx(1-x)}} \right)^2 \left(\left| \frac{f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) - f(x)}{\frac{S_{n,x}}{n} - x} \right| + |f'(x)| \right) \mathbf{1}_{\left| \frac{S_{n,x}}{n} - x \right| \geq \delta} \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\left(\frac{S_{n,x} - nx}{\sqrt{nx(1-x)}} \right)^2 \left(\frac{\left| f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) - f(x) \right|}{\left| \frac{S_{n,x}}{n} - x \right|} + |f'(x)| \right) \mathbf{1}_{\left| \frac{S_{n,x}}{n} - x \right| \geq \delta} \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\left(\frac{S_{n,x} - nx}{\sqrt{nx(1-x)}} \right)^2 \left(\frac{\left| f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) \right| + |f(x)|}{\left| \frac{S_{n,x}}{n} - x \right|} + |f'(x)| \right) \mathbf{1}_{\left| \frac{S_{n,x}}{n} - x \right| \geq \delta} \right]. \end{aligned}$$

Pero como $|f(x)| < M$ con $x \in [0, 1]$ y $\left| \frac{S_{n,x}}{n} - x \right| \geq \delta$, resulta que

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\left(\frac{S_{n,x} - nx}{\sqrt{nx(1-x)}} \right)^2 |A(n, f)(x)| \mathbf{1}_{\frac{S_{n,x}}{n} - x \geq \delta} \right] \\ & \leq \left(\frac{2M}{\delta} + |f'(x)| \right) \mathbb{E} \left[\left(\frac{S_{n,x} - nx}{\sqrt{nx(1-x)}} \right)^2 \mathbf{1}_{\frac{S_{n,x}}{n} - x \geq \delta} \right] \\ & \leq \left(\frac{2M}{\delta} + |f'(x)| \right) \frac{1}{nx(1-x)} \mathbb{E} \left[(S_{n,x} - nx)^2 \mathbf{1}_{\frac{S_{n,x}}{n} - x \geq \delta} \right]. \end{aligned}$$

Como $x \in [0, 1]$ tenemos que

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\left(\frac{S_{n,x} - nx}{\sqrt{nx(1-x)}} \right)^2 |A(n, f)(x)| \mathbf{1}_{\frac{S_{n,x}}{n} - x \geq \delta} \right] \\ & \leq \left(\frac{2M}{\delta} + |f'(x)| \right) \frac{n}{x(1-x)} \mathbb{E} \left[\left(\frac{S_{n,x}}{n} - x \right)^2 \mathbf{1}_{\frac{S_{n,x}}{n} - x \geq \delta} \right] \\ & \leq \left(\frac{2M}{\delta} + |f'(x)| \right) \frac{n}{4} \mathbb{E} \left[\left(\frac{S_{n,x}}{n} - x \right)^2 \mathbf{1}_{\frac{S_{n,x}}{n} - x \geq \delta} \right]. \end{aligned}$$

Usando que el cuadrado de la distancia entre $\frac{S_{n,x}}{n}$ y x es menor que 1, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\frac{S_{n,x} - nx}{\sqrt{nx(1-x)}} \right)^2 |A(n, f)(x)| \mathbf{1}_{\frac{S_{n,x}}{n} - x \geq \delta} \right] & \leq \left(\frac{2M}{\delta} + |f'(x)| \right) \frac{n}{4} \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\frac{S_{n,x}}{n} - x \geq \delta} \right] \\ & \leq \left(\frac{2M}{\delta} + |f'(x)| \right) \frac{n}{4} \mathbb{P} \left[\left| \frac{S_{n,x}}{n} - x \right| \geq \delta \right]. \end{aligned}$$

Utilizando el Lema (3.2) se sigue que

$$(3.7) \mathbb{E} \left[\left(\frac{S_{n,x} - nx}{\sqrt{nx(1-x)}} \right)^2 |A(n, f)(x)| \mathbf{1}_{\frac{S_{n,x}}{n} - x \geq \delta} \right] \leq \left(\frac{2M}{\delta} + |f'(x)| \right) \frac{n}{2} \exp(-2n\delta^2)$$

haciendo tender n a infinito, obtenemos que (3.7) tiende a cero.

Finalmente obtenemos el resultado. □

Bibliografía

- [1] ALON, N., SPENCER, J. Y ERDOS, P. *The probabilistic method*. Wiley-Interscience Series (1992). 24
- [2] BACHMAN, G. Y NARICI, L. *Functional analysis*. Academic Press.
- [3] BRUZUAL R. Y DOMÍNGUEZ M. *Series de Fourier*. IV TForma, Universidad de Oriente, Julio 2003.
- [4] FELLER, W., “*Introducción a la teoría de Probabilidad y sus Aplicaciones*”. Editorial Limusa . Vol 1. 12
- [5] GZYL, H. Y PALACIOS, J.L. “The Weierstrass approximation theorem and large deviations” . American Mathematical Monthly, 104 (1997) 24
- [6] GZYL, H. Y PALACIOS, J.L. “On the approximation properties of Bernstein polynomials via probabilistic tools”. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol X, N° 1 (2003) 1
- [7] HALMOS, P. *Teoría intuitiva de los conjuntos*. CECSA, 1971.
- [8] KOLMOGOROV, A. Y FOMIN, S. *Elementos de la teoría de funciones y de análisis funcional*. MIR, 1975.
- [9] MEYER, P. “*Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas*”. Bogotá; Fondo Educativo Interamericano. 1973.
- [10] OLIVARES M. “Curso de Probabilidades” . Caracas. Edic. de la Escuela de Matemática U.C.V. Octubre 2002.
- [11] ROYDEN, H. L. *Real analysis*. Collier Macmillan, 1968.
- [12] RUDIN, W. *Real and complex analysis*. Mc Graw-Hill, 1966.