UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
POSTGRADO EN MATEMÁTICA

PASADO Y FUTURO PARA MEDIDAS A VALORES OPERADORES.

Autor: MSc. Javier Suárez.
Tutor: Dra. Marisela Domínguez.

Tesis Doctoral presentada ante la ilustre Universidad Central de Venezuela para optar al título de Doctor en Ciencias, Mención Matemática.

Caracas, Venezuela
Marzo - 2013

Dedicatoria

Este trabajo se lo dedico a mi esposa Ivama, y a mi hija Mariangel.
A la memoria de mi sobrino e hijo, Edison Paúl Salazar Suárez, que Dios le acobije y lo tenga a su lado...

Agradecimientos

A lo largo de mi formación profesional e integral, son muchas las personas y situaciones que me han dejado un aprendizaje. Es por ello que quiero expresar un profundo agradecimiento a todos, pero especialmente a:

Dios todo poderoso, por darme la salud y la bendición de poder concluir otra etapa en mi vida, al lado de las personas que quiero, mi familia y amigos.

Tambien quiero hacer un reconocimiento a mi tutora: Dra. Marísela Domínguez a quien le tengo un gran respeto y admiración, fue pilar fundamental en varias etapas durante mi formación, en especial en ésta. Graciás profesora Domínguez, por haber asumido la dirección de éste trabajo.

Al Dr. Ramón Bruzual que conjuntamente con mi tutora y los colegas del seminario de análisis, de la Escuela de Matemática, hicieron parte fundamental en el desarrollo de este trabajo, con sus observaciones, comentarios y sugerencias.

Al personal docente y administrativo de la Escuela de Matemática y del Postgrado en Matemáticas de la Facultad de Ciencias, de la Universidad Central de Venezuela.

A la Universidad Central de Venezuela (U.C.V) por acobijarne una vez más en su recinto y ser parte de ella.

Al personal docente, administrativo y autoridades de la Universidad Nacional Experimental Politécnica, Antonio José de Sucre (UNEXPO), por su apoyo a lo largo de quince años de labor inniterrumpida.

A la Dirección de Investgación y Post-Grado de la UNEXPO por el apoyo brindado en estos últimos cinco años, y permitir la culminación de este trabajo.

Al personal de la Biblioteca del Instituo Venezolano de Investigaciones Científicas (IVIC), por su profesionalismo y colaboración en todo momento.

A mis colegas, amigos y compañeros: Andres Pérez, José Salas, Elizabeth Gonzalez, Thais Arreaza, Jose G. Fajardo, Rafael Cadiz, quienes siempre me han apoyado.

Al Profesor Elkin Lubin Arias Londoño, del Departamento de Ciencias Básicas de la Universidad de Medellín, por su ayuda y colaboración con el LATEX.

Al Profesor José Alberto Rúa, Jefe del Departamento de Ciencias Básicas de la Universidad de Medellín, por su apoyo y comprensión para la culminación de este trabajo.

Y no por estar al final son menos importantes...

A mi esposa y compañera Ivama N. Murillo M. por su paciencia, apoyo y colaboración en estos quince años...

A mis padres, hermanos, sobrinos, y familia en general, gracias por estar allí y ser tan especiales...

A mis estudiantes a lo largo de todos estos años...

Índice general

Resumen

Para una medida finita de Borel a valores operadores en un intervalo finito se da una condición necesaria y suficiente para que el pasado y el futuro adelantado tiendan a ser ortogonales. Esto lleva a una versión a valores operadores del teorema de Helson y Sarason. Además se obtienen criterios espectrales para la velocidad con la que ocurre la mezcla fuerte en algunos procesos estacionarios a valores en un espacio de Hilbert.

Para una medida a valores operadores, en sentido débil, absolutamente continua se da una condición necesaria y suficiente para que tenga una densidad en sentido fuerte. Este resultado es una extensión a valores operadores del teorema de Radon-Nikodym y se usa para obtener una versión a valores operadores del teorema de F. y M. Riesz. También se dan contraejemplos relacionados.

Introducción

En matemáticas, la mezcla es un concepto abstracto procedente de la física al intentar describir el proceso termodinámico irreversible de la mezcla en el mundo cotidiano: la mezcla de pintura, al mezclar bebidas, etcétera.

Este concepto aparece en la teoría ergódica, el estudio de los procesos estocásticos y medidas de conservación. Existen varias definiciones diferentes para mezcla, la que se considera en este trabajo es conocida como mezcla fuerte (strong mixing).

Para procesos gaussianos, ortogonalidad está estrechamente relacionada con independencia. Esto permite expresar en ese caso los procesos estocásticos con mezcla fuerte como aquellos procesos para los cuales el ángulo entre el pasado y el futuro adelantado tienden a ser ortogonales. Es decir, el coseno del ángulo entre el pasado y el futuro adelantado tiende a cero.

En este trabajo se abordan aspectos de la teoría de predicción de procesos estocásticos, de teoría de la medida y de variable compleja desde la óptica de la teoría de operadores. Se toman como punto de partida los trabajos publicados por Kolmogorov(1957) y Szegö(1960), cuyos orígenes están asociados a las desigualdades con pesos potencias que aparecen en los trabajos de Hardy y Littlewood.

En el caso de medidas a valores escalares, son de particular importancia los aportes de Helson, Szegö y Sarason. Helson y Szegö [**30**] dieron una condición necesaria y suficiente para que el pasado y el futuro estén en ángulo estrictamente positivo. Posteriormente Helson y Sarason [**29**] dieron una condición necesaria y suficiente para que el pasado y el futuro adelantado tiendan a ser ortogonales. Algunos resultados acerca de la velocidad de convergencia del coseno del ángulo entre el pasado y el futuro adelantado fueron dados en [**3, 33, 34**].

Estos problemas de teoría de predicción están muy relacionados con el resultado de variable compleja conocido como el teorema de F. y M. Riesz y con el clásico resultado de teoría de la medida conocido como el teorema de Radon-Nikodym.

En este trabajo se consideran operadores en espacios de Hilbert. Se dan versiones a valores operadores del teorema de Helson y Sarason. Además, para el caso de medidas a valores operadores se estudia la velocidad de convergencia del coseno del ángulo entre el pasado y el futuro adelantado. También se dan versiones a valores operadores del teorema de F. y M. Riesz y del teorema de Radon-Nikodym.

El trabajo se ha estructurado en cinco capítulos y está organizado de la siguiente manera:

En el Capítulo 1, para el caso de funciones y medidas a valores escalares se hace una breve presentación de tres problemas clásicos de la teoría de predicción y su influencia en investigaciones posteriores. Estas investigaciones están asociadas a las desigualdades con pesos. Así mismo se estudian el llamado pasado y el futuro adelantado y el ángulo entre estos dos subespacios, tomando como eje central el trabajo publicado por Helson y Sarason [**29**]. Estos problemas se pueden plantear en el caso multivariado, en ese caso ya se han publicado algunos resultados (ver [**16, 6**]).

En el Capítulo 2, se introducen nociones preliminares, básicas para la comprensión de los capítulos posteriores relacionadas con funciones y medidas a valores operadores en un espacio de Hilbert.

Los resultados y aportes más relevantes en este trabajo están en los tres últimos capítulos.

En el Capítulo 3, apoyados en los artículos [**6**] y [**16**], se proporciona una extensión a valores operadores del teorema de Helson-Sarason (ver Teorema 3.16). Resultados parciales de este capítulo fueron obtenidos en [**51**].

En el Capítulo 4 se obtienen criterios espectrales para la velocidad con la que ocurre la mezcla fuerte (strong mixing) en algunos procesos estacionarios a valores en un espacio de Hilbert. Más precisamente, sea $\alpha_n(\mu)$ el ángulo entre el pasado y el futuro adelantado para el instante n, damos condiciones necesarias y suficientes para que $\cos \alpha_n(\mu)$ sea $O(r_n)$, donde

$r_n \to 0$ para $n \to \infty$, ver Teoremas 4.2 y 4.3. Estos resultados extienden para medidas a valores operadores los resultados obtenidos en [**15**] para el caso matricial.

En el Capítulo 5 se da una versión a valores operadores del teorema de Radon-Nikodym (ver Teorema 5.4), más precisamente para una medida a valores operadores, en sentido débil, absolutamente continua se da una condición necesaria y suficiente para que tenga una densidad en sentido fuerte. Con esto se obtiene una versión a valores operadores del teorema de F. y M. Riesz (ver Teorema 5.5). También se dan contraejemplos relacionados. Los resultados del Capítulo 5 aparecieron en la publicación [**7**].

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presentan algunos aspectos de los orígenes de la teoría de predicción y se hace referencia a algunos trabajos que han hecho contribuciones en esta rama de la matemática. Es bueno recordar que la teoría de predicción en términos sencillos se refiere a la teoría de aproximación a través de polinomios trigonométricos en la métrica del espacio considerado.

Consideremos $\mathbb{T} \approx [0, 2\pi)$ el círculo unitario (o toro unidimensional), $\mathcal{B}$ la σ-álgebra de Borel en $[0, 2\pi)$ y sea $\mathbf{m}$ la medida de Lebesgue normalizada sobre $[0, 2\pi)$. Por $d\mathbf{m}(x)$ denotamos el diferencial de la medida de Lebesgue normalizada, a veces se usará simplemente dx. Con L^p el espacio usual de Lebesgue y con H^p el espacio usual de Hardy, para $1 \leq p < \infty$.

Para $n \in \mathbb{Z}$, $e_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ es la función dada por

$$e_n(x) = e^{inx}.$$

La función con dominio $[0, 2\pi]$ y que es idénticamente igual a 1, la denotaremos por e_0.

Si μ es una medida finita no negativa definida sobre $\mathcal{B}$ y $1 < p < \infty$, con $\mathrm{L}^p(\mu)$ se denotará el clásico espacio de Banach que se obtiene a partir de las funciones a valores complejos medibles respecto de μ tales que la p-ésima potencia de su módulo es integrable respecto de μ. En este caso

$$\|f\|_\mu^p = \int |f|^p d\mu < \infty.$$

Es bien sabido que $\mathrm{L}^2(\mu)$ es un espacio de Hilbert y el producto interno de f y g en $\mathrm{L}^2(\mu)$ viene dado por

$$\langle f, g \rangle_\mu = \int f\overline{g}\, d\mu.$$

Si w es una función integrable no negativa sobre $[0, 2\pi]$ y $1 < p < \infty$, con $\mathrm{L}^p(w)$ se denotará el espacio $\mathrm{L}^p(\mu)$ para la medida μ cuyo peso es w. Cuando el peso w es de la forma $w(x) = |x|^\alpha$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$ el espacio correspondiente $\mathrm{L}^p(w)$ se denotará con $L^p(|x|^\alpha)$.

Además sabemos que los polinomios trigonométricos forman un subconjunto lineal denso de $\mathrm{L}^2(\mu)$.

1.1. Problemas de predicción clásicos

1.1.1. Desarrollo histórico de la teoría de predicción.

La solución de varios problemas de teoría de predicción tuvo su origen en la solución de problemas inicialmente introducidos para series de Fourier. El teorema de Helson-Szegö [**30**], que se origina en las desigualdades de Riesz para transformada de Hilbert, jugó un papel importante en el desarrollo de estos temas [**17**].

Las desigualdades con pesos potencias para algunos operadores clásicos aparecen en la literatura matemática desde hace muchos años. Ya en los años 20 y 30 del siglo pasado, hay trabajos de Hardy y Littlewood en los que demuestran la acotación en $L^p(|x|^\alpha)$ de los operadores que llevan su nombre y más tarde hicieron lo mismo con la función conjugada, la cual está estrechamente relacionada con la transformada de Hilbert.

En 1957, Stein y Weiss cf. [**19**], extendieron a dimensión finita resultados unidimensionales de Hardy para la integral fraccionaria y Stein también probó resultados de acotación para las integrales singulares. Para 1960 Helson y Szegö [**30**], obtienen el primer resultado de tipo general, el cual se enuncia a continuación.

TEOREMA 1.1. *La transformada de Hilbert H está acotada en $L^2(\mu)$ si y sólo si μ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, $d\mu = w(x)\,dx$, y la densidad w es de la forma $\log w = u + Hv$ con $u, v \in L^\infty$ y $\|v\|_\infty < \pi/2$.*

A inicios de los años 70, Muckenhoupt [**42**] logra caracterizar los pesos para la función máximal de Hardy-Littlewood en el siguiente resultado.

El *operador maximal de Hardy-Littlewood* está dado por

$$Mf(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f|$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ y $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, es decir, f es localmente integrable.

TEOREMA 1.2. *El operador maximal de Hardy-Littlewood está acotado en $L^p(\mu)$, $p > 1$, si y sólo si μ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue y existe $c > 0$ tal que para todo cubo Q de $\mathbb{R}^n$, la densidad w satisface*

$$\left(\frac{1}{Q}\int_Q w\right)\left(\frac{1}{Q}\int_Q w^{1-p'}\right)^{p-1} \leq c.$$

La última desigualdad es conocida como la *condición A_p*.

La siguiente definición está motivada por la propiedad de acotación de algunos operadores en $L^p(\mu)$.

DEFINICIÓN 1.3. Sean (X, M, μ), (Y, N, ν) dos espacios de medida. Sea T un operador que transforma funciones μ-medibles en funciones ν-medibles, sean $1 < p < \infty$ y $1 < q < \infty$.

(a) Se dice que T es *de tipo fuerte* (p, q) con constante $c \geq 0$ si

$$\left(\int_Y |Tf|^q d\nu\right)^{1/q} \leq c \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$$

para toda función medible f. Es decir, $T : L^p(\mu) \to L^q(\nu)$ es acotado y $\|T\| \leq c$.

(b) Se dice que T es *de tipo débil* (p, q) con constante $c \geq 0$ si

$$(\nu\{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\})^{1/q} \leq \frac{c}{\lambda} \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$$

para toda función medible f y para todo $\lambda > 0$.

En 1972, Muckenhoupt [**42**] demostró que la condición necesaria y suficiente para que el operador maximal de Hardy-Littlewood sea de tipo débil (p, p) en $L^p(\mu)$, es que μ satisfaga la misma condición A_p para $p > 1$. Y la condición necesaria y suficiente para que sea de tipo débil $(1, 1)$ en $L^1(\mu)$, es que μ satisfaga

$$Mw(x) \leq cw(x),$$

en casi todas partes. Esta desigualdad es la llamada condición A_1.

A diferencia del teorema de Helson-Szegö, los métodos eran puramente de variable real y adecuados para dar algunas extensiones (ver [**19**]). Poco tiempo después, en 1973, Hunt, Muckenhoupt y Wheeden [**32**] probaron una versión de este resultado para la transformada de Hilbert.

TEOREMA 1.4. *La transformada de Hilbert está acotada en $L^p(w)$ si y sólo si w satisface la condición A_p. Además, es de tipo $(1, 1)$ débil con respecto a w si y sólo si w satisface la condición A_1.*

En el caso $p = 2$, el resultado anterior, implica que la condición A_2 en una dimensión y la condición de Helson-Szegö son equivalentes [**19**].

1.1.2. La teoría de predicción y los procesos estocásticos.

DEFINICIÓN 1.5. Un *polinomio trigonométrico* a valores complejos es una función $\varphi : [0, 2\pi) \to \mathbb{C}$ tal que

$$\varphi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \xi_n \, e_n(x),$$

donde $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ tiene soporte finito. En este caso $\widehat{\varphi}(n) = \xi_n$.

Si $\widehat{\varphi}(n) = 0$ para todo $n < 0$, es decir si la suma anterior se puede tomar con $n \geq 0$, se dice que el polinomio trigonométrico es *analítico*.

Si $\widehat{\varphi}(n) = 0$ para todo $n \geq 0$, es decir si la suma anterior se puede tomar con $n < 0$, se dice que el polinomio trigonométrico es *anti-analítico*.

Sea $\mathcal{P}$ el espacio de todos los polinomios trigonométricos a valores complejos. Es conocido que $\mathcal{P}$ es una subálgebra del espacio de todas las funciones continuas de $[0, 2\pi)$ en $\mathbb{C}$.

Algunos problemas de predicción de procesos estocásticos estacionarios son equivalentes a hallar la distancia de la función constantemente 1 al subespacio.

Sea μ una medida finita no negativa en $[0, 2\pi)$ $(1 < p < \infty)$ y $\mathcal{S}$ un subconjunto de los enteros $\mathbb{Z}$. Consideremos $\mathcal{M}^p_\mu(\mathcal{S})$ la variedad lineal cerrada, obtenida al tomar la clausura en $\mathrm{L}^p(\mu)$ de los polinomios trigonométricos de la forma:

$$\varphi(x) = \sum_{k \in S} a_k e_k(x)$$

Sea w una función no negativa integrable en $[0, 2\pi)$ denotaremos por $\mathcal{M}^p_w(\mathcal{S})$ la variedad lineal cerrada $\mathcal{M}^p_\mu(\mathcal{S})$ donde μ es la medida cuyo peso es w.

Escribimos

$$\sigma_p(w, \mathcal{S}) = \inf_{f \in \mathcal{M}^p_w(\mathcal{S})} \|e_0 - f\|$$

para la distancia de e_0 a $\mathcal{M}^p_w(S)$.

Por ejemplo, $\mathcal{M}^p_w(\mathcal{S}_0)$ está conformado por polinomios trigonométricos

$$\varphi(x) = a_1 e^{ix} + a_2 e^{i2x} + a_3 e^{i3x} + ...a_n e^{inx}$$

y sus límites en $\mathrm{L}^p(w)$, cuando el conjunto de índices $\mathcal{S}_0$ es la mitad de la recta, esto es

$$\mathcal{S}_0 = \{..., -3, -2, -1\}.$$

En este caso, para $p > 1$, el bien conocido teorema de Szegö de 1918 (por ejemplo, ver [**21**, Sec. 3.8]) asegura que para cualquier función peso w no negativa integrable en $[0, 2\pi)$

$$\sigma_p(w, \mathcal{S}_0) = \exp\left\{\frac{1}{p}\int_0^{2\pi} \log w\, d\mathbf{m}\right\} \tag{1.1}$$

si $\log w \in L^1$, en otro caso $\sigma_p(w, \mathcal{S}_0) = 0$.

1.1.3. Breve reseña de algunos problemas en la teoría de predicción.

En el año de 1960 Helson y Szegö [**30**] establecieron un tipo de noción fuerte de independencia diferente de las dos consideradas previamente, una se debía a Kolmogorov, Szegö y Wiener y la otra está asociada a Kolmogorov. A continuación se presenta esta noción.

Sea μ una medida finita no negativa en $[0, 2\pi)$. Así μ tiene una descomposición en la forma $d\mu(x) = w(x)\, d\mathbf{m}(x) + d\mu_s(x)$, donde w es una función integrable no negativa sobre el intervalo $[0, 2\pi)$ y μ_s es la parte singular de la medida con respecto a la medida de Lebesgue.

Consideremos $\mathcal{F}^1$, $\mathcal{P}^{-1}$ y $\mathcal{P}^0$ las variedades lineales cerradas, obtenidas respectivamente al tomar la clausura en $\mathrm{L}^2(\mu)$ de los polinomios trigonométricos de la forma:

$$\varphi(x) = a_1 e^{ix} + a_2 e^{2ix} + a_3 e^{3ix} + ..., \tag{1.2}$$

$$\varphi(x) = b_1 e^{-ix} + b_2 e^{-2ix} + b_3 e^{-3ix} + ..., \tag{1.3}$$

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 e^{-ix} + c_2 e^{-2ix} + ... \tag{1.4}$$

Más precisamente,

$$\mathcal{F}^1 = \mathcal{M}^2_\mu(\{k \in \mathbb{Z} : k \geq 1\}),$$

$$\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{M}^2_\mu(\{k \in \mathbb{Z} : k \leq -1\}),$$

$$\mathcal{P}^0 = \mathcal{M}^2_\mu(\{k \in \mathbb{Z} : k \leq 0\}).$$

1.1.4. El primer problema de predicción.

Como se dijo anteriormente, el llamado primer problema de predicción, está asociado a Kolmogorov, Szegö y Wiener y consiste en hallar la distancia de e_0 a $\mathcal{F}^1$. La solución está dada por el teorema de Szegö (ver [**21**] o [**31**]), el cual establece que

$$\text{ínf} \int |e_0 + \varphi|^2 d\mu = \exp \int \log w\, d\mathbf{m}, \tag{1.5}$$

donde el ínfimo es tomado sobre todos los polinomios trigonométricos $\varphi \in \mathcal{F}^1$, es decir φ tiene la forma (1.2). Este teorema fue originalmente probado por Szegö para el caso $n = 0$ y para una medida μ absolutamente continua. Después fue extendido por Kolmogorov.

En otras palabras, la distancia de e_0 a $\mathcal{F}^1$ es, $\exp\left(\frac{1}{2}\int \log w \, d\mathbf{m}\right)$ cuyo cuadrado es la media geométrica de w. Si la expresión del lado derecho en la ecuación (1.5) es cero, esto es, $\int \log w \, d\mathbf{m} = -\infty$, entonces e_0 pertenece a $\mathcal{F}^1$ e indicaremos que $\mathcal{F}^1$ coincide con el espacio $\mathrm{L}^2(\mu)$. En este caso podemos notar que la distancia de e_0 a $\mathcal{F}^1$ no depende del todo de μ_s.

1.1.5. El segundo problema de predicción.

En el año de 1957 Kolmogorov, resolvió el problema de determinar la distancia de e_0 a la variedad más pequeña contenida en $\mathcal{F}^1$ y $\mathcal{P}^{-1}$, él mostró que

$$\inf \int |e_0 + \varphi + \psi|^2 d\mu = \left(\int w^{-1} d\mathbf{m}\right)^{-1}, \tag{1.6}$$

donde φ y ψ varían sobre los polinomios trigonométricos de la forma (1.2) y (1.3) respectivamente. Por lo tanto el cuadrado de la distancia es la media armónica de w, de nuevo es independiente de μ_s. Si el lado derecho de la ecuación (1.6) es cero, e_0 pertenece a la clausura de la variedad.

El primer y segundo problema plantean que si w no es muy pequeño, es decir, si el lado derecho tiende a ser positivo, las funciones exponenciales trigonométricas e_n poseen un cierto tipo de independencia en $\mathrm{L}^2(\mu)$.

1.1.6. El tercer problema de predicción.

Para cualquier par de variedades $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ en un espacio de Hilbert podemos definir el número

$$\rho(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \sup |\langle f, g \rangle|,$$

donde f y g varían sobre las bolas unitarias de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$, respectivamente.

Evidentemente $\rho(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \leq 1$.

Definición 1.6. Dos variedades $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ en un espacio de Hilbert, se dice que *están en ángulo positivo* si

$$\rho(\mathcal{M}, \mathcal{N}) < 1.$$

En el tercer problema de predicción, resuelto por Helson y Szegö [**30**], se evalúa $\rho(\mathcal{F}^1, \mathcal{P}^0)$ en el espacio de Hilbert $\mathrm{L}^2(\mu)$. En este caso

$$\rho(\mathcal{F}^1, \mathcal{P}^0) = \sup \left| \int \varphi \, \overline{\psi} \, d\mu \right|$$

donde $\varphi \in \mathcal{F}^1$ y $\psi \in \mathcal{P}^0$ están sujetos a la restricciones

$$\int |\varphi|^2 d\mu \leq 1, \int |\psi|^2 d\mu \leq 1.$$

Equivalentemente, ρ está dado por la expresión

$$2 - 2\rho(\mathcal{F}^1, \mathcal{P}^0) = \text{ínf} \int |\varphi + \psi|^2 d\mu,$$

donde ahora $\varphi \in \mathcal{F}^1$ y $\psi \in \mathcal{P}^0$ y tienen norma exactamente igual a 1.

Ya se indicó que $\rho(\mathcal{F}^1, \mathcal{P}^0) \leq 1$. Si para una medida μ tenemos $\rho(\mathcal{F}^1, \mathcal{P}^0) < 1$, entonces se puede ver que los valores dados por (1.5) y (1.6) son estrictamente positivos. Así que esta condición de independencia para las exponenciales en $\mathrm{L}^2(\mu)$ es más fuerte que las condiciones de independencia de los dos problemas precedentes de predicción.

1.2. Otros problemas de predicción

Posteriormente, han surgido publicaciones relacionadas con los tres problemas de predicción mencionados antes. En el año de 1984, Nakazi en [**43**], da una caracterización en términos de w, para las cantidades

$$\tau_n(w) = \text{ínf}_{\varphi} \int_0^{2\pi} |1 + \varphi(x)|^2 w \, d\mathbf{m}; \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

donde el rango de φ sobre los polinomios trigonométricos con frecuencias en el conjunto $\{-n, -n+1, -n+2, ..., -1, 1, 2, ...\}$. Esto viene a resolver el primer problema de predicción dado por Szegö para $n = 0$ y el segundo problema de predicción dado por Kolmogorov para $n = \infty$. En el caso $n = 1$ la expresión está dada por:

$$\tau_1(w) = \exp \int_0^{2\pi} \log w \, d\mathbf{m} \left(1 + \left| \int_0^{2\pi} e^{-ix} \log w \, d\mathbf{m} \right|^2 \right)^{-1}.$$

El resultado principal en este artículo es que establece una fórmula de la distancia $\tau_n(w)^{\frac{1}{2}}$ de 1 a S_n en $\mathrm{L}^2(w)$, es decir,

$$\tau_n(w) = \text{ínf} \left\{ \int |1 + \varphi|^2 w \, d\mathbf{m}, f \in S_n \right\},$$

donde S_n para $n = 0, 1, 2, ...$ es la variedad de los polinomios trigonométricos cuyas frecuencias tomadas en el conjunto $\{-n, -n+1, -n+2, ..., -1, 1, 2, ...\}$.

Como señalamos anteriormente Szegö demostró que

$$\tau_0(w) = \exp \int \log w \, d\mathbf{m},$$

y Kolmogorov demostró que

$$\tau_\infty(w) = \left(\int w^{-1} \, d\mathbf{m} \right)^{-1}.$$

Nakazi consideró la variedad $\mathcal{P}^{n+1}$ de los polinomios trigonométricos cuyas frecuencias están en el conjunto $\{n+1, n+2, n+3, ...\}$ y $n \geq 0$. En [**44**], Nakazi y Takahashi dieron una forma para la distancia $\rho_n(w,2)^{\frac{1}{2}}$ de e_0 a $\mathcal{P}^{n+1}$ en $\mathrm{L}^2(w)$, y en [**43**] Nakazi probó que

$$\tau_n(w) = \rho_n(w^{-1}, 2)^{-1}$$

en el caso que $w^{-1} \in \mathrm{L}^1$. Entonces la fórmula dada para $\tau_n(w)$ se obtiene de la expresión de $\rho_n(w,2)^{\frac{1}{2}}$.

Más aún, generaliza la expresión de $\rho_n(w,2)^{\frac{1}{2}}$ a $\rho_n(w,p)^{\frac{1}{p}}$ (para $1 \leq p < \infty$) la cual denota la distancia de e_0 a $\mathcal{P}^{n+1}$ en $\mathrm{L}^p(w)$, es decir,

$$\rho_n(w,p) = \inf \left\{ \int |e_0 + \varphi|^p w \, d\mathbf{m} \text{ tales que } \varphi \in \mathcal{P}^{n+1} \right\}.$$

Este resultado reduce el problema de predicción a un problema de extensión previamente estudiado por Rogosisnki y Shapiro (c.f [**20**], pp 139-142).

Posteriormente Miamee y Pourahmadi [**40**] logran reducir algunos problemas de predicción general, cuando este sea difícil de resolver, al problema de predicción "ordinario" el cual es más fácil de resolver. Ellos logran obtener un teorema general de predicción que se incluye dentro de los problema clásicos de predicción de Szegö (1918), Kolmogorov (1941) y Yaglom (1963) como una buena generalización de estos casos cuando $p \neq 2$.

Otra consecuencia importante de este resultado, es que se reduce el problema general de predicción en $L^p(w)$, relacionando a un subespacio M de $L^p(w)$ con las correspondientes funciones exponenciales trigonométricas con frecuencias en

$$\{-n, -n+1, -n+2, ..., -1, 1, 2, ...\}, \quad \text{para } n \geq 0$$

a un problema de predicción ordinario en $L^q(w^s)$, (donde $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $s=\frac{-1}{p-1}$) relacionando a un subespacio N de $L^q(w^s)$, con frecuencias en $\{k \in \mathbb{Z} : k \leq -n-1\}$.

En el caso $p = 2$ estos resultados reducidos por Nakazi, a criterio de los autores de [**40**], afirman que los métodos de Nakazi [**43**], son indirectos para obtener tales resultados pero los obtenido por ellos son más directos y sirven como una solución para optimizar los problemas de este tipo que estén relacionados.

1.3. Pasado y futuro en un proceso estocástico estacionario

En [**30**] se estudia el problema de predicción asociado con determinar cuándo el pasado y el futuro de un proceso están en ángulo positivo. Unos años mas tarde en 1963, Yaglom c.f. [**29**], da una caracterización del espectro de un proceso fuertemente mezclante. Es decir, partiendo de la función de covarianza, establecer cuándo los llamados pasado y el futuro distante del proceso tiendan a ser ortogonales. Esto sirvió como punto de partida para que en 1967, Helson y Sarason [**29**], desarrollaran técnicas que permiten extender los resultados de Helson y Szegö.

El propósito de esta sección es presentar un resumen de los resultados de Helson y Sarason siguiendo el mismo enfoque dado por ellos en [**29**].

Sea μ una medida positiva finita de Borel sobre el círculo unitario en el plano complejo. Para cada entero n consideramos los subespacios $\mathcal{F}^n$ generados por las funciones $e_n, e_{n+1}, e_{n+2}, \ldots$, y el subespacio $\mathcal{P}^n$ generado por las funciones $e_n, e_{n-1}, e_{n-2}, \ldots$. El subespacio $\mathcal{F}^1$ es llamado el *futuro* y el subespacio $\mathcal{P}^{-1}$ es llamado el *pasado* en $L^2(\mu)$.

En el contexto actual se define

$$\rho_n = \rho(\mathcal{P}^0, \mathcal{F}^n), \qquad n = 1, 2, ... \tag{1.7}$$

Si k y m son cualesquiera enteros positivos con suma igual a n se tiene también

$$\rho_n = \rho(\mathcal{P}^{-k}, \mathcal{F}^m),$$

porque la multiplicación por e_k es un operador unitario en $L^2(\mu)$ que lleva $\mathcal{P}^{-k}$ a $\mathcal{P}^0$ y lleva $\mathcal{F}^m$ a $\mathcal{F}^{k+m}$.

El problema considerado por Helson y Sarason es: ¿Cuáles medidas μ tienen la propiedad que ρ_n tiende a 0 cuando n tiende a infinito?

Algunas condiciones necesarias se siguen de resultados conocidos.

Si μ no es absolutamente continua, existen una funciones no nulas en la intersección de $\mathcal{F}^n$ con $\mathcal{P}^0$ (ver [**31, 29**]). Entonces $\rho_n = 1$ para todo n. Por lo tanto basta considerar únicamente medidas de la forma $d\mu = w\, d\mathbf{m}$ donde w es una función no negativa en L^1. Además, se puede asumir que $\log w$ es integrable, porque de otra manera por el teorema de Szegö todos los subespacios $\mathcal{F}^n$ y $\mathcal{P}^n$ coincide con $L^2(w)$ (ver [**31**]), y una vez más $\rho_n = 1$ para todo $n \geq 1$.

Sea $\mathcal{W}$ el conjunto de todas las funciones no negativas integrables w tales que ρ_n tiende a 0 en $L^2(w)$ (se excluye la función nula). Cada tal función w es igual a $|h|^2$ para una función exterior h en H^2. Esta h está unívocamente determinada si se requiere que $h(0)$ sea positivo. Sea $\theta(z)$ el argumento de $h(z)$, determinando así que $\theta(0) = 0$, con $\theta(e^{ix})$ definido en casi todas partes como el límite radial de $\theta(z)$. La función $\theta(e^{ix})$ es la función conjugada de $\frac{1}{2}\log w$. En esta sección, siempre que ellos sean mencionados, h y θ se relacionarán de esta forma con la función peso w.

En [**29**] siguiendo una idea de [**30**], y partiendo de $L^2(w)$ obtienen

$$\rho_n = \sup \left| \int \varphi\psi e_n w\, d\mathbf{m} \right|, \tag{1.8}$$

donde φ y ψ son polinomios trigonométricos analíticos sujetos a las condiciones

$$\int |\varphi|^2 w\, d\mathbf{m} \leq 1, \int |\psi|^2 w\, d\mathbf{m} \leq 1. \tag{1.9}$$

Ahora (1.8) puede escribirse como

$$\rho_n = \sup \left| \int (\varphi h)(\psi h) e_n e^{-2i\theta}\, d\mathbf{m} \right|. \tag{1.10}$$

Con φ y ψ polinomios trigonométricos analíticos sujetos a las condiciones (1.9), φh y ψh varían sobre un subconjunto denso de la bola unitaria de H^2, y su producto varía sobre un subconjunto denso de la bola unitaria de H^1. Por lo tanto (1.10), expresa a ρ_n como la norma de $e_n e^{-2i\theta}$ como un funcional lineal sobre H^1.

Por un corolario del teorema de Hahn-Banach referente a problemas extremales duales (ver [**24**, Cap. IV, Sec1])

$$\rho_n = \text{ínf}\, \|e_n e^{-2i\theta} - A\|_\infty = \text{ínf}\, \|e^{-2i\theta} - e_{-n}A\|_\infty, \tag{1.11}$$

donde A varía sobre todas las funciones de H^∞ con valor medio cero, es decir tales que $\widehat{A}(0) = 0$.

La función $e_{-n}A$ en la última expresión está dada por sumas arbitrarias $\varphi + A$, donde φ es cualquier polinomio trigonométrico con frecuencias por debajo de $-n$, y A está en H^∞. El límite de (1.11) cuando n tiende a infinito es

$$\text{ínf}\, \|e^{-2i\theta} - (\varphi + A)\|_\infty,$$

donde φ varía sobre todos los polinomios trigonométricos y A varía en H^∞. Por lo tanto tenemos así la caracterización de los elementos de W en el siguiente teorema.

Teorema 1.7. *Una función w está en W si y sólo si su logaritmo es integrable y $e^{-2i\theta}$ puede ser aproximado uniformemente por funciones $\varphi + A$, donde φ es un polinomio trigonométrico y A está en H^∞.*

Sea R la clausura uniforme del conjunto de funciones $\varphi + A$. Evidentemente R es un subespacio cerrado de L^∞, el cual esta contenido en el espacio de todas las funciones continuas como lo es H^∞. Pero el producto de dos funciones en $\varphi + A$ tiene la misma forma anterior, ya que R es un álgebra de Banach. Con esta observación y usando un resultado de Kolmogorov y Rozanov [**37**] se puede deducir que si w es continua y estrictamente positiva, entonces w está en W.

Para la prueba se considera

$$e^{-2i\theta} = e^{\log w - 2i\theta}.$$

El primer factor de la derecha es continuo. El segundo factor es h^{-2} y pertenece a H^∞. Dado que cada factor está en R, el producto lo está, así que w esta en W por el Teorema 1.7.

El álgebra R está presente así mismo en otras conecciones dadas en [**12**], y esto es útil para tener un criterio simple por el cual se identifiquen funciones en R. En esta dirección los autores Helson y Sarason únicamente dan el siguiente resultado. Sea C el espacio de funciones continuas a valores complejos sobre el círculo.

Teorema 1.8. *R es igual a $C + H^\infty$, el conjunto de todas las sumas $f + g$ donde f está en C y g está en H^∞.*

Por definición $C + H^\infty$ es uniformemente denso en R; el punto es que realmente este conjunto es cerrado. Denotemos por Z la intersección de C con H^∞. Por el teorema de F. y

M. Riesz, el dual de C/Z es H_0^1 (el subespacio de H^1 el cual consiste de las funciones con medida de valor cero). El espacio H_0^1 tiene a L^∞/H^∞ como su dual y por lo tanto este es el segundo dual de C/Z. La aplicación canónica de C/Z sobre L^∞/H^∞ extiende a $f+Z$ a $f+H^\infty$, y el rango de está aplicación es cerrada. Por lo tanto la imagen inversa de este rango en L^∞ bajo la proyección canónica de L^∞ sobre L^∞/H^∞, es cerrado, y su imagen inversa es exactamente $C+H^\infty$.

Al llegar a este punto, Helson y Sarason indican que aún no pueden desarrollar el criterio del Teorema 1.7, ya que no cuentan con información suficiente acerca de R. En su lugar regresan a la ecuación (1.11) y consideran el siguiente resultado.

TEOREMA 1.9. *Para que w pertenezca a W es condición necesaria y suficiente que para cada número positivo ε existe una función A en H^∞ y un entero positivo n tal que*

$$-\varepsilon < \arg(Ah^2e_{-n}) < \varepsilon \quad \text{mód } 2\pi, \qquad y \qquad -\varepsilon < \log|A| < \varepsilon \tag{1.12}$$

en casi todo punto sobre el círculo.

DEMOSTRACIÓN. Una pequeña modificación en la ecuación (1.11) da

$$\rho_n = \text{ínf}\, \|1 - Ae^{2i\theta}e_{-n}\|_\infty,$$

donde A varía sobre todas las funciones en H^∞ con medida de valor cero (una calificación que no es crucial). Para que la norma del lado derecho sea pequeña es necesario y suficiente que $|A|$ sea uniformemente próximo a e_0, y que Ah^2e_{-n} tenga un argumento próximo a 0. La afirmación del teorema sigue de lo anterior. $\square$

Consideremos W_0 el conjunto de las funciones pesos w con la siguiente propiedad: para todo número positivo ε podemos hallar funciones reales r, s, t tal que

$$\log w = r + \overline{s} + \overline{t} \tag{1.13}$$

con $\|r\|_\infty < \varepsilon$, $\overline{s}$ conjugada para s y $\|s\|_\infty < \varepsilon$, y t continua.

En realidad en la ecuación (1.13) t podría ser un polinomio trigonométrico; pero se puede aproximar una función continua por un polinomio trigonométrico y adicionalmente el resto de r si no es decreciente sería acotado por ε. Pero tomando conjugada de cada elemento de la ecuación 1.13 se ve que 2θ (y θ mismo) admite tal representación si $\log w$ lo admite, y recíprocamente. Se considera también que w^{-1} pertenece a W_0 con w y cualquier potencia de ellos es integrable, porque $\exp|\overline{s}/\varepsilon|$ es integrable así como es $\|s\|_\infty < \varepsilon\pi/2$.

Teorema 1.10. *W_0 está contenido en W.*

Este es parte del resultado principal de Helson y Sarason. Ellos indican que lo plantean independientemente por conveniencia. La prueba comienza partiendo del siguiente resultado.

Lema 1.11. *Toda función continua real sobre el círculo puede ser aproximada uniformemente por funciones $-\arg Be_{-n}$, donde B es un producto de Blaschke con exactamente n ceros y n es variable.*

Tomando el lema por sentando, se prueba que un elemento arbitrario w de W_0 pertenece a W. Como se mencionó anteriormente se pueden hallar representaciones

$$2\theta = \overline{r} + s + t \tag{1.14}$$

donde r, s son funciones reales acotadas con acotaciones menores que ε y t es un polinomio trigonométrico real. Si se considera

$$A = \exp(-r - i\overline{r}),$$

una función analítica que satisface la segunda condición dada en (1.12) entonces la medida de (1.14) es

$$\arg Ah^2 = s + t.$$

Luego se considera a Be_{-n} que son funciones dadas por el lema cuyos argumentos aproximan a $-t$:

$$\arg(ABh^2e_{-n}) = s + t + \arg Be_{-n}.$$

El lado derecho es acotado por ε si la aproximación es suficientemente buena, así que la desigualdad (1.12) se satisface con AB en lugar de A. Con esto se culmina la demostración del Teorema 1.10.

Las funciones $B^{-1}e_n$ cuyos argumentos son enredados, son explícitamente,

$$ke_n\prod_{j=1}^{n}\frac{1-\overline{\alpha}_je_1}{e_1-\alpha_j} = k\prod_{j=1}^{n}\frac{1-\overline{\alpha}_je_1}{1-\alpha_j\overline{e_1}}$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...\alpha_n$ son números complejos en el disco unitario abierto (no necesariamente distintos) y la constante k tiene módulo 1. Así que

$$-\arg Be_{-n} = \arg k + 2\arg\prod_{j=1}^{n}(1-\overline{\alpha}_j e_1). \tag{1.15}$$

En otras palabras, las funciones con las cuales hemos tratado de aproximar son precisamente todas de la forma $2\arg P(e^{ix})$, donde P es un polinomio que no tiene raíces en el disco unitario cerrado y tiene módulo 1 en el origen.

Consideremos Q cualquier polinomio cuya parte real se anula en el origen. Las sumas parciales P_n de la series de Taylor para $\exp Q$ son polinomios que tienen módulo 1 en el origen; ellos convergen uniformemente a $\exp Q$ sobre el disco unitario cerrado y por lo tanto no tienen ceros en el disco cerrado para n suficientemente grande. Por lo tanto para n suficientemente grande las funciones $2\arg P_n(e^{ix})$ son de la forma de la ecuación (1.15).

Todas estas funciones evidentemente convergen uniformemente sobre el círculo unitario para dos de las partes imaginarias de $Q(e^{ix})$, el cual es un polinomio trigonométrico real. Así toda función real continua en el círculo puede ser aproximada uniformemente por polinomios trigonométricos reales, así culmina la prueba del lema.

A continuación se mostrará otro de los resultados principales dados en [**29**].

Teorema 1.12. *W es exactamente la colección de todas las funciones $|P|^2 w_0$, donde P es un polinomio y w_0 pertenece a W_0.*

Si p es un polinomio entonces la función peso $|p|^2$ está en W, porque para esta función peso tenemos que $\rho_n = 0$ en cuanto n exceda el grado de p. Por tanto, si w está en W entonces $|p|^2 w$ es el producto de dos funciones en W, así que está en W. Esto prueba una parte del teorema.

Para probar la otra parte del teorema se necesita un lema simple acerca de continuación analítica (o extensión analítica).

Lema 1.13. *Sea S una función S analítica en el disco unitario excepto para un polo de orden n (quizás cero) en el origen. Supongamos que $z^n S$ está en el espacio $H^{\frac{1}{2}}$ del disco unitario, y que S es a valores reales y no negativa casi siempre sobre el círculo unitario. Entonces S puede ser extendido analíticamente a través del círculo.*

Deducimos a partir de este, otro principio de continuación, el cual es bien conocido y por lo tanto no se demuestra: Sí una función en el espacio H^1 de un anillo $0 < R < |z| < 1$ es a valor real casi siempre sobre el círculo, entonces este puede ser extendida analíticamente a través del círculo.

Consideremos S que satisface las hipótesis del lema. Entonces existe una factorización $S = S_1 S_2$, donde S_1 y $z^n S_2$ están en H^1 del disco unitario y $|S_1| = |S_2|$ casi siempre en el círculo unitario. Esto implica que $S_2 = \overline{S_1}$ sobre el círculo. Por lo tanto $S_1 + S_2$ y $i(S_1 - S_2)$ son a valores reales sobre el círculo, y de allí, por el principio de continuación de H^1 planteado anteriormente, ellos pueden ser extendidos analíticamente a través del círculo, y por consiguiente también vale para S.

Recordemos que las conclusiones del lema no se pueden extender si, en su lugar de asumir $z^n S$ esta en $H^{\frac{1}{2}}$, uno asume únicamente que este está en H^p para $0 < p < \frac{1}{2}$. La función $-(1+z)^2/(1-z)^2$ sirve como contraejemplo (con $n = 0$).

Para completar la prueba del Teorema 1.12, se considera una función w en W y ε un número positivo menor que $\frac{1}{2}\pi$. Por el Teorema 1.9, existe una función A en H^∞, un entero negativo n, y una función real s en L^∞ tal que en casi todas partes sobre el círculo unitario,

$$-\varepsilon < s < \varepsilon, -\varepsilon < \log |A| < \varepsilon,$$

$$s + \arg(Ah^2 e_{-n}) \equiv 0 \mod 2\pi.$$

La última condición implica que la función

$$S = Ah^2 e_{-n} e^{-\overline{s}+is} \tag{1.16}$$

es no negativa casi siempre sobre el círculo. La función $\exp(-\overline{s} + is)$ está en H^1, de hecho está en H^p para $p < \pi/2\varepsilon$). La función h^2 también está en H^1, y por lo tanto $z^n S$ está en $H^{\frac{1}{2}}$.

Aplicando el principio de continuación mencionado anteriormente, se puede concluir que S puede ser extendido analíticamente en el plano entero excepto para las polos 0 y ∞. Por consiguiente S es un polinomio en z y z^{-1}. Restringiéndose al círculo unitario, se tiene que S es un polinomio trigonométrico no negativo, así que existe una representación $S = |P_0|^2$ con P_0 un polinomio en z.

Considérese P_0 factorizado como el producto PQ, donde P es un polinomio con raíces únicamente sobre el círculo unitario y Q es un polinomio que no tiene raíces en el círculo unitario. Se define la función r y t sobre el círculo por

$$r = -\log|A| \qquad \text{y} \qquad t = 2\log|Q|.$$

Entonces tomando valor absoluto en la ecuación (1.16) se obtiene

$$w = |h|^2 = |P|^2 e^{r+\bar{s}+t}. \tag{1.17}$$

Con esto se ha demostrado que para todo ε entre 0 y $\frac{1}{2}\pi$ la función w tiene la representación (1.17), donde P es un polinomio con raíces solamente en el círculo unitario, y r, s, t son funciones reales con $\|r\|_\infty \leq \varepsilon$, $\|s\|_\infty \leq \varepsilon$, y t continua.

Para completar la prueba sólo resta mostrar que el polinomio P se obtiene de esta manera y es independiente de ε. Para esto, Helson y Sarason usan un argumento de Ibragimov. Note que las funciones $w/|P|^2$ y $|P|^2/w$ son ambas integrables. Por lo tanto, si p_1 y p_2 son los polinomios que resultan de dos diferentes escogencias de ε, entonces

$$\begin{aligned}\int |p_1/p_2|\, d\mathbf{m} &= \int (|p_1|/w^{\frac{1}{2}})(w^{\frac{1}{2}}/|p_2|)\, d\mathbf{m} \\ &\leq \left(\int |p_1|^2/w\, d\mathbf{m}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int w/|p_2|^2\, d\mathbf{m}\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

De donde

$$\int |p_1/p_2|\, d\mathbf{m} < \infty.$$

Y así p_2 divide a p_1. El mismo razonamiento muestra que p_1 divide a p_2, y por lo tanto p_1 y p_2 son idénticos excepto por una constante multiplicativa que no reviste mayor importancia. Esto completa la idea de la prueba del Teorema 1.12.

Capítulo 2

Funciones y medidas a valores operadores

En este Capítulo fijamos parte de la notación y presentamos las proposiciones dadas por Bruzual y Domínguez en [**6**] que permiten presentar los resultados de este trabajo.

En este trabajo $(\mathcal{G}, \langle , \rangle_{\mathcal{G}})$ es un espacio de Hilbert separable, con escalares complejos, $\|\cdot\|_{\mathcal{G}}$ es la norma asociada y $L(\mathcal{G})$ operadores lineales continuos en $\mathcal{G}$.

2.1. Polinomios trigonométricos a valores vectores en un espacio de Hilbert y transformada de Hilbert

Definición 2.1. Un *polinomio trigonométrico* a valores en $\mathcal{G}$ es una función $\varphi : [0, 2\pi) \to \mathcal{G}$ tal que

$$\varphi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \xi_n \, e_n(x),$$

donde $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{G}$ tiene soporte finito. En este caso $\widehat{\varphi}(n)$ denota ξ_n.

Sea $\mathcal{P}(\mathcal{G})$ el espacio de todos los polinomios trigonométricos. Es conocido que $\mathcal{P}(\mathcal{G})$ es una subálgebra del espacio de todas las funciones continuas de $[0, 2\pi)$ en $\mathcal{G}$.

La transformada de Hilbert H se puede definir usando los coeficientes de Fourier, para $\varphi \in \mathcal{P}(\mathcal{G})$ sea

$$(\mathsf{H}\varphi)\widehat{\ }(n) = -i \operatorname{sig}(n) \, \widehat{\varphi}(n)$$

donde

$$\operatorname{sig}(n) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad n \geq 0 \\ -1, & \text{si} \quad n < 0 \end{cases}$$

2.2. Funciones a valores vectores en un espacio de Hilbert

Dados $f : [0, 2\pi) \to \mathcal{G}$ y $\zeta \in \mathcal{G}$ denotaremos por f_ζ a la función a valores complejos $f_\zeta : [0, 2\pi) \to \mathbb{C}$, dada por

$$f_\zeta(x) = \langle \zeta, f(x) \rangle_{\mathcal{G}} \, .$$

Definición 2.2. Sea $f : [0, 2\pi) \to \mathcal{G}$ se dice que f es *débilmente medible* si para todo $\zeta \in \mathcal{G}$ la función f_ζ es medible.

Denotemos por $L^\infty_{\mathcal{G}}$ el conjunto de todas las funciones $F : [0, 2\pi) \to \mathcal{G}$ que son débilmente medibles y esencialmente acotadas.

Para $1 \leq p < \infty$ denotemos por $L^p_{\mathcal{G}}$ el conjunto de todas las funciones $f : [0, 2\pi) \to \mathcal{G}$ que son débilmente medibles y tales que:

$$\int_0^{2\pi} \|f(x)\|^p_{\mathcal{G}}\, dx < \infty.$$

Se tiene que $L^2_{\mathcal{G}}$ es un espacio de Hilbert bajo el producto interno:

$$\langle f, g \rangle_{L^2_{\mathcal{G}}} = \int_0^{2\pi} \langle f(x), g(x) \rangle_{\mathcal{G}}\, dx.$$

También se tiene que $\mathcal{P}(\mathcal{G})$ es denso en $L^p_{\mathcal{G}}$ para $1 \leq p < \infty$.

Proposición 2.3. *Si $f \in L^1_{\mathcal{G}}$ y $\zeta \in \mathcal{G}$ entonces $f_\zeta \in L^1$.*

Más detalles acerca de los espacios $L^p_{\mathcal{G}}$ pueden ser vistos en [**52**].

Proposición 2.4. *Si $f \in L^1_{\mathcal{G}}$ y $n \in \mathbb{Z}$ existe un vector $\xi_n \in \mathcal{G}$ tal que*

$$\widehat{f_\zeta}(n) = \langle \zeta, \xi_n \rangle_{\mathcal{G}}$$

donde $\widehat{f_\zeta}(n)$ denota el coeficiente usual de Fourier de f_ζ.

Demostración. Sean $f \in L^1_{\mathcal{G}}$, $n \in \mathbb{Z}$ y $\zeta \in \mathcal{G}$, por la proposición anterior $f_\zeta \in L^1$ y por lo tanto existe $\widehat{f_\zeta}(n)$.

Sea $l_n : \mathcal{G} \to \mathbb{C}$ dada por

$$l_n(\zeta) = \widehat{f_\zeta}(n).$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} l_n(\zeta) &= \int_0^{2\pi} e^{-inx} f_\zeta(x) dx \\ &= \int_0^{2\pi} e^{-inx} \langle \zeta, f(x) \rangle_{\mathcal{G}}\, dx \\ &= \int_0^{2\pi} \left\langle \zeta, e^{-inx} f(x) \right\rangle_{\mathcal{G}}\, dx. \end{aligned}$$

Por lo tanto l_n es un funcional lineal.

Por el teorema de representación de Riesz para funcionales lineales en espacios de Hilbert tenemos que existe un vector $\xi_n \in \mathcal{G}$ tal que

$$l_n(\zeta) = \langle \zeta, \xi_n \rangle_{\mathcal{G}}\,.$$

De donde

$$\widehat{f_\zeta}(n) = \langle \zeta, \xi_n \rangle_{\mathcal{G}}\,.$$

□

Definición 2.5. El vector ξ_n dado por la proposición anterior se denota por $\widehat{f}(n)$ y es llamado el *coeficiente de Fourier* de f y la aplicación $n \longmapsto \widehat{f}(n)$ es llamada la *transformada de Fourier* de f.

2.3. Funciones a valores operadores

Dados $F : [0, 2\pi) \to L(\mathcal{G})$ y $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$ denotaremos por $F_{\zeta\xi}$ a la función a valores complejos $F_{\zeta\xi} : [0, 2\pi) \to \mathbb{C}$ dada por

$$F_{\zeta\xi}(x) = \langle F(x)\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{G}}\,.$$

Definición 2.6. Sea $F : [0, 2\pi) \to L(\mathcal{G})$ se dice que F es *débilmente medible* si para todo $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$ la función $F_{\zeta\xi}$ es medible.

Sea $F : [0, 2\pi) \to L(\mathcal{G})$ se tiene que

$$\|F(x)\|_{L(\mathcal{G})} = \sup_{\|\zeta\|_{\mathcal{G}} = \|\xi\|_{\mathcal{G}} = 1} | \langle F(x)\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{G}} |,$$

para $x \in [0, 2\pi)$.

Como estamos considerando un espacio de Hilbert separable $\mathcal{G}$, si F es débilmente medible se tiene que la función

$$x \mapsto \|F(x)\|_{L(\mathcal{G})}$$

es medible en el sentido usual.

Con $L^\infty_{L(\mathcal{G})}$ denotamos el conjunto de todas las funciones débilmente medibles y esencialmente acotadas $F : [0, 2\pi) \to L(\mathcal{G})$.

Para $1 \le p < \infty$, con $L^p_{L(\mathcal{G})}$ denotamos el conjunto de todas las funciones débilmente medibles $F : [0, 2\pi) \to L(\mathcal{G})$ tales que:

$$\int_0^{2\pi} \|F(x)\|^p_{L(\mathcal{G})}\, dx < \infty.$$

Note que para $F \in L^1_{L(\mathcal{G})}$, el funcional sesquilineal $B_F : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathbb{C}$ definido por

$$B_F(\zeta, \xi) = \int_0^{2\pi} \langle F(x)\zeta, \xi\rangle_{\mathcal{G}}\, dx$$

es acotado. Por lo tanto, del teorema de representación de Riesz, se sigue que existe un único operador lineal acotado $I_F : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ tal que

$$\langle I_F\zeta, \xi\rangle_{\mathcal{G}} = \int_0^{2\pi} \langle F(x)\zeta, \xi\rangle_{\mathcal{G}}\, dx,$$

para todo $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$. Decimos que I_F es la *integral débil de* F.

Observación 2.7. Note que si $\mathcal{G}$ es de dimensión infinita, entonces $L(\mathcal{G})$ es no separable, así que esta integral no necesariamente es la integral de Bochner.

Consideremos $F \in L^1_{L(\mathcal{G})}$ y $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$ entonces tenemos que $F_{\zeta\xi} \in L^1$. Sea $\widehat{F_{\zeta\xi}}$ la transformada usual de Fourier de $F_{\zeta\xi}$. Sea $n \in \mathbb{Z}$ fijo, usando el teorema de representación de Riesz para funcionales lineales en espacios de Hilbert se puede probar que existe $\widehat{F}(n) \in L(\mathcal{G})$ tal que

$$\widehat{F_{\zeta\xi}}(n) = \langle \widehat{F}(n)\zeta, \xi\rangle_{\mathcal{G}}.$$

2.4. Medidas a valores operadores

Definición 2.8. Consideremos $\mu : \mathcal{B} \to L(\mathcal{G})$ una función.

Decimos que μ es una *medida en sentido débil*, o simplemente una *medida*, a valores en $L(\mathcal{G})$ sobre $[0, 2\pi)$, si para cada $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$ la función $\mu_{\zeta\xi} : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ dada por

$$\mu_{\zeta\xi}(\Delta) = \langle \mu(\Delta)\zeta, \xi\rangle_{\mathcal{G}}$$

es una medida escalar finita de Radon sobre $[0, 2\pi)$.

Si μ es una medida a valores en $L(\mathcal{G})$ sobre $[0, 2\pi)$, se dice que μ es *acotada* si

$$\sup_{\Delta \in \mathcal{B}} \|\mu(\Delta)\|_{L(\mathcal{G})} < +\infty.$$

Con $\mathfrak{M}(L(\mathcal{G}))$ se denotará el conjunto de las medidas acotadas a valores en $L(\mathcal{G})$ definidas en los borelianos de $[0, 2\pi)$.

Si $\mu(\Delta)$ es un operador positivo para todo $\Delta \in \mathcal{B}$ decimos que la medida μ es positiva.

Observemos que cada $W \in L^1_{L(\mathcal{G})}$, da origen a una medida $\mu \in \mathfrak{M}(L(\mathcal{G}))$ mediante

$$d\langle \mu(x)\zeta, \xi\rangle_{\mathcal{G}} = \langle W(x)\zeta, \xi\rangle_{\mathcal{G}}\, dx = W_{\zeta\xi}(x)\, dx.$$

Como es natural la medida μ asociada a $W \in L^1_{L(\mathcal{G})}$ será denotada con $d\mu = W\,dx$. En este caso la medida μ es positiva si y sólo si el operador $W(x)$ es no negativo para casi todo x, es decir cuando $\langle W(x)\zeta, \zeta\rangle_{\mathcal{G}} \geq 0$ para casi todo x.

2.4.1. Transformada de Fourier de medidas a valores operadores.

Es posible considerar la transformada de Fourier de medidas a valores operadores, como se sigue en la siguiente construcción.

PROPOSICIÓN 2.9. *Sea $\mu \in \mathfrak{M}(L(\mathcal{G}))$ y sea $c = \sup\limits_{\Delta \in B} \|\mu(\Delta)\|_{L(\mathcal{G})}$. Existe un único operador lineal $T_\mu : \mathcal{P} \to L(\mathcal{G})$ tal que*

(a) *Para todo $\varphi \in \mathcal{P}$ y $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$ tenemos que*

$$\langle T_\mu(\varphi)\zeta, \xi\rangle_{\mathcal{G}} = \int_0^{2\pi} \varphi(x)\, d\langle \mu(x)\zeta, \xi\rangle_{\mathcal{G}}.$$

(b) *Para todo $\varphi \in \mathcal{P}$ tenemos que*

$$\|T_\mu(\varphi)\|_{\mathcal{G}} \leq 4\,c\,\|\varphi\|_\infty.$$

DEMOSTRACIÓN. Para $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$ sea

$$B(\zeta, \xi) = \int_0^{2\pi} \varphi(x) d\left\langle \mu(x)\zeta, \xi\right\rangle_{\mathcal{G}}.$$

Entonces B es sesquilineal sobre $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$. Usando el teorema de descomposición de Hahn de la parte real de μ y de la parte imaginaria de μ obtenemos que

$$\|B(\zeta, \xi)\| \leq 4c\|\varphi\|_\infty \|\zeta\|_{\mathcal{G}} \|\xi\|_{\mathcal{G}}.$$

Para ζ fijo sea $f : \mathcal{G} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(\xi) = B(\zeta, \xi) = \int_0^{2\pi} \varphi(x) d\left\langle \mu(x)\zeta, \xi\right\rangle_{\mathcal{G}}.$$

Dados $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{G}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$

$$f(\lambda\xi_1 + \xi_2) = \overline{\lambda} f(\xi_1) + f(\xi_2).$$

Es decir, f es antilineal. Por el teorema de representación de Riesz existe $\eta \in \mathcal{G}$ tal que

$$f(\xi) = \langle \eta, \xi\rangle_{\mathcal{G}}.$$

Como f depende de ζ, φ y μ, se tiene que η depende de ellos.

Sea $T_\mu(\varphi) : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ dada por

$$T_\mu(\varphi)\zeta = \eta.$$

Entonces

$$\langle T_\mu(\varphi)\zeta, \xi\rangle_{\mathcal{G}} = \langle \eta, \xi\rangle_{\mathcal{G}} = f(\xi) = B(\zeta, \xi) = \int_0^{2\pi} \varphi(x) d\, \langle \mu(x)\zeta, \xi\rangle_{\mathcal{G}}\,.$$

Como B es lineal en la primera variable se tiene que $T_\mu(\varphi)$ es lineal. Además de

$$\|\langle T_\mu(\varphi)\zeta, \xi\rangle_{\mathcal{G}}\| = \|B(\zeta, \xi)\| \leq 4c\|p\|_\infty \|\zeta\|_{\mathcal{G}} \|\xi\|_{\mathcal{G}}$$

se sigue que $T_\mu(\varphi)$ es continuo y

$$\|T_\mu(\varphi)\| \leq 4c\|\varphi\|_\infty.$$

□

Dada una medida $\mu \in \mathfrak{M}(L(\mathcal{G}))$, la *transformada de Fourier* de μ es la función $\widehat{\mu} : \mathbb{Z} \to L(\mathcal{G})$ definida por

$$\widehat{\mu}(n) = T_\mu(e_{-n}) \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

Observación 2.10. Notemos que si $d\mu(x) = F(x)dx$, donde $F \in L^1_{L(\mathcal{G})}$, entonces

$$\widehat{\mu}(n) = \widehat{F}(n).$$

Más detalles acerca de la definición de $\widehat{\mu}(n)$ pueden verse en [**6**].

Supongamos $d\mu(x) = W(x)\, dx$ donde $W \in L^1_{L(\mathcal{G})}$.

Proposición 2.11. *Si $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$ y $n \in \mathbb{Z}$ entonces*

$$\langle \widehat{\mu}(n)\zeta, \xi\rangle_{\mathcal{G}} = \int_0^{2\pi} e^{-inx}\, d\langle \mu(x)\zeta, \xi\rangle_{\mathcal{G}} = \widehat{\mu_{\zeta\xi}}(n).$$

Demostración. Si $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$ y $n \in \mathbb{Z}$ tenemos que

$$\langle \widehat{\mu}(n)\zeta, \xi\rangle_{\mathcal{G}} = \langle T_\mu(e_{-n})\zeta, \xi\rangle_{\mathcal{G}} = \int_0^{2\pi} e_{-n}(x)\, \langle \mu(x)\zeta, \xi\rangle_{\mathcal{G}} = \int_0^{2\pi} e^{-inx}\, d\mu_{\zeta\xi}(x) = \widehat{\mu_{\zeta\xi}}(n).$$

□

2.4.2. Forma sesquilineal asociada a una medida a valores operadores.

Para $\mu \in \mathfrak{M}(L(\mathcal{G}))$ y $\varphi, \psi \in \mathcal{P}(\mathcal{G})$ definimos

$$\langle \varphi, \psi \rangle_\mu = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \langle \widehat{\mu}(m-n)\, \widehat{\varphi}(n), \widehat{\psi}(m) \rangle_{\mathcal{G}}.$$

PROPOSICIÓN 2.12. *Si $\mu \in \mathfrak{M}(L(\mathcal{G}))$ y $\varphi, \psi \in \mathcal{P}(\mathcal{G})$ entonces*

$$\langle \varphi, \psi \rangle_\mu = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} e^{-i(m-n)x}\, d\left\langle \mu(x) \widehat{\varphi}(n), \widehat{\psi}(m) \right\rangle_{\mathcal{G}}.$$

DEMOSTRACIÓN. Por la proposición anterior tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \psi \rangle_\mu &= \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \left\langle \widehat{\mu}(m-n) \widehat{\varphi}(n), \widehat{\psi}(m) \right\rangle_{\mathcal{G}} \\ &= \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} e^{-i(m-n)x}\, d\left\langle \mu(x) \widehat{\varphi}(n), \widehat{\psi}(m) \right\rangle_{\mathcal{G}}. \end{aligned}$$

□

OBSERVACIÓN 2.13. En el caso escalar $\mathcal{G} = \mathbb{C}$ se tiene que

$$\langle \varphi, \psi \rangle_\mu = \int_0^{2\pi} \varphi(x) \overline{\psi(x)}\, d\mu(x)$$

para $\varphi, \psi \in \mathcal{P}$.

PROPOSICIÓN 2.14. *Supongamos $d\mu(x) = W(x)\, dx$ donde $W \in L^1_{L(\mathcal{G})}$. Si $\varphi, \psi \in \mathcal{P}(\mathcal{G})$ entonces*

$$\langle \varphi, \psi \rangle_\mu = \int_0^{2\pi} \langle W(x) \varphi(x), \psi(x) \rangle_{\mathcal{G}}\, dx.$$

DEMOSTRACIÓN. Si $\varphi, \psi \in \mathcal{P}(\mathcal{G})$ están dadas por

$$\varphi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(n) e^{inx} \qquad\qquad \psi(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{\psi}(m) e^{imx}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, \psi \rangle_\mu &= \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} e^{-i(m-n)x} d\left\langle \mu(x)\widehat{\varphi}(n), \widehat{\psi}(m) \right\rangle_{\mathcal{G}} \\
&= \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} e^{-i(m-n)x} \left\langle W(x)\widehat{\varphi}(n), \widehat{\psi}(m) \right\rangle_{\mathcal{G}} dx \\
&= \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} e^{-imx} e^{inx} \left\langle W(x)\widehat{\varphi}(n), \widehat{\psi}(m) \right\rangle_{\mathcal{G}} dx \\
&= \int_0^{2\pi} \left\langle W(x) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(n) e^{inx}, \sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}(m) e^{imx} \right\rangle_{\mathcal{G}} dx \\
&= \int_0^{2\pi} \langle W(x)\varphi(x), \psi(x) \rangle_{\mathcal{G}} \, dx
\end{aligned}$$

□

Proposición 2.15. *Sea $\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{G})$ entonces*

(a) $\langle\ ,\ \rangle_\mu$ *es sesquilineal sobre $\mathcal{P}(\mathcal{G})$.*

(b) $\langle\ ,\ \rangle_\mu$ *es no negativa si y sólo si μ es una medida positiva.*

Demostración. La parte (a) se sigue de la definición de $\langle\ ,\ \rangle_\mu$. En efecto, si φ, ψ y $\gamma \in \mathcal{P}(\mathcal{G})$ entonces

$$\begin{aligned}
\langle \varphi + \gamma, \psi \rangle_\mu &= \int_0^{2\pi} e^{-i(m-n)x} \langle W(x) \left(\varphi(x) + \gamma(x) \right), \psi(x) \rangle_{\mathcal{G}} \, dx \\
&= \int_0^{2\pi} e^{-i(m-n)x} \langle W(x)\varphi(x) + W(x)\gamma(x), \psi(x) \rangle_{\mathcal{G}} \, dx \\
&= \int_0^{2\pi} e^{-i(m-n)x} \left(\langle W(x)\varphi(x), \psi(x) \rangle_{\mathcal{G}} + \langle W(x)\gamma(x), \psi(x) \rangle_{\mathcal{G}} \right) dx \\
&= \int_0^{2\pi} e^{-i(m-n)x} \langle W(x)\varphi(x), \psi(x) \rangle_{\mathcal{G}} \, dx \\
&+ \int_0^{2\pi} e^{-i(m-n)x} \langle W(x)\gamma(x), \psi(x) \rangle_{\mathcal{G}} \, dx \\
&= \langle \varphi, \psi \rangle_\mu + \langle \gamma, \psi \rangle_\mu
\end{aligned}$$

La parte (b) es una aplicación directa del Lema 1 de [**2**]. □

Si $\mu \in \mathfrak{M}(L(\mathcal{G}))$ y $\varphi, \psi \in \mathcal{P}(\mathcal{G})$ escribimos

$$\int_0^{2\pi} \langle d\mu(x)\, \varphi(x), \psi(x) \rangle_{\mathcal{G}} = \langle \varphi, \psi \rangle_\mu .$$

Si $\mu \in \mathfrak{M}(L(\mathcal{G}))$ es una medida positiva usaremos $\|\ \|_\mu$ para denotar la norma (posiblemente degenerada) asociada con $\langle\ ,\ \rangle_\mu$.

PROPOSICIÓN 2.16. *Si $\mu \in \mathfrak{M}(L(\mathcal{G}))$, $\varphi, \psi \in \mathcal{P}(\mathcal{G})$ y $n \in \mathbb{Z}$ entonces:*

$$\langle e_n\varphi, e_n\psi\rangle_\mu = \langle \varphi, \psi\rangle_\mu$$

$$\|e_n\varphi\|_\mu = \|\varphi\|_\mu .$$

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición (2.14) tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle e_n\varphi, e_n\psi\rangle_\mu &= \int_0^{2\pi} \langle W(x)e_n(x)\varphi(x), e_n(x)\psi(x))\rangle_{\mathcal{G}}\, dx \\
&= \int_0^{2\pi} e^{-inx}e^{inx} \langle W(x)\varphi(x), \psi(x)\rangle_{\mathcal{G}}\, dx \\
&= \int_0^{2\pi} e^{-i(m-n)x} \langle W(x)\varphi(x), \psi(x)\rangle_{\mathcal{G}}\, dx \\
&= \langle \varphi, \psi\rangle_\mu .
\end{aligned}$$

En particular

$$\|e_n\varphi\|_\mu^2 = \langle e_n\varphi, e_n\varphi\rangle_\mu = \langle \varphi, \varphi\rangle_\mu = \|\varphi\|_\mu^2 .$$

De donde

$$\|e_n\varphi\|_\mu = \|\varphi\|_\mu .$$

□

Capítulo 3

Versión a valores operadores del teorema de Helson y Sarason

En la Sección 3.1 de este capítulo presentamos los resultados de teoría de predicción y de desigualdades con pesos dados en [**6**] y en la Sección 3.2 de este capítulo presentamos los resultados de teoría de predicción obtenidos en [**51**].

Más precisamente se da una caracterización de los $\mu \in \mathfrak{M}(L(\mathcal{G}))$ positivos, tal que $d\mu = W\,dx$ donde $W \in L^1_{L(\mathcal{G})}$ y

$$\|\,\mathsf{H}\varphi\|_\mu \leq M\,\|\varphi\|_\mu$$

para todo $\varphi \in \mathcal{P}\left(\mathcal{G}\right)$. Es decir,

$$\int_0^{2\pi} \langle W(x)\mathsf{H}\varphi(x), \mathsf{H}\varphi(x)\rangle_{\mathcal{G}}\,dx \leq M^2 \int_0^{2\pi} \langle W(x)\varphi(x), \varphi(x)\rangle_{\mathcal{G}}\,dx$$

para todo $\varphi \in \mathcal{P}\left(\mathcal{G}\right)$.

El grupo dual de $\mathbb{T}$ es el grupo de los enteros $\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \cdots\}$. Consideremos los conjuntos $\mathbb{Z}_1 = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\}$ y $\mathbb{Z}_2 = \{n \in \mathbb{Z} : n < 0\}$.

Sean

$$\mathcal{P}_1(\mathcal{G}) = \{\varphi \in \mathcal{P}(\mathcal{G}) : \widehat{\varphi}(n) = 0 \text{ si } n < 0\},$$

y

$$\mathcal{P}_2(\mathcal{G}) = \{\varphi \in \mathcal{P}(\mathcal{G}) : \widehat{\varphi}(n) = 0 \text{ si } n \geq 0\}.$$

Estos son los conjuntos de los polinomios trigonométricos analíticos y antianalíticos, respectivamente, a valores en $\mathcal{G}$.

Para $\mu \in \mathfrak{M}\left(\mathcal{G}\right)$ positivo y n un entero no negativo, sea

$$\rho_n(\mu) = \sup\left\{\,|\langle e_n\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu|\ : \varphi_1 \in \mathcal{P}_1(\mathcal{G}), \varphi_2 \in \mathcal{P}_2(\mathcal{G}), \|\varphi_1\|_\mu\ = \|\varphi_2\|_\mu\ = 1\right\}.$$

Sea $\rho_n\left(W\right) = \rho_n\left(\mu\right)$ cuando $d\mu = W(x)dx$, para $W \in L^1_{L(\mathcal{G})}$.

Es claro que $0 \leq \rho_n\left(\mu\right) \leq 1$.

Consideremos ahora la clausura de $\overline{e_n\mathcal{P}_1(\mathcal{G})}$ y $\overline{\mathcal{P}_2(\mathcal{G})}$ con respecto a $\|\ \|_\mu$. Usualmente $\overline{\mathcal{P}_2(\mathcal{G})}$ es llamado el pasado, $\overline{\mathcal{P}_1(\mathcal{G})}$ es llamado el futuro y $\overline{e_n\mathcal{P}_1(\mathcal{G})}$ es llamado el futuro después del instante n, todos con respecto $\|\ \|_\mu$.

En particular, con la notación del Capítulo 1, para el caso escalar se tiene que $\overline{\mathcal{P}_1(\mathbb{C})} = \mathcal{F}^0$ y $\overline{\mathcal{P}_2(\mathbb{C})} = \mathcal{P}^{-1}$.

Observemos que:

(a) Los Espacios $\mathcal{P}_1(\mathcal{G})$ y $\mathcal{P}_2(\mathcal{G})$ son ortogonales con respecto a $\langle , \rangle_\mu$ si y sólo si $\rho_0(\mu) = 0$.

(b) Si existe un vector no nulo en $\overline{\mathcal{P}_1(\mathcal{G})}$ y $\overline{\mathcal{P}_2(\mathcal{G})}$ entonces $\rho_0(\mu) = 1$.

Recordemos: se dice que los subespacios cerrados $\overline{e_n\mathcal{P}_1(\mathcal{G})}$ y $\overline{\mathcal{P}_2(\mathcal{G})}$ tienen un ángulo positivo si $\rho_0(\mu) < 1$. El ángulo entre estos subespacios es $\alpha_n(\mu) = \arccos(\rho_n(\mu))$.

PROPOSICIÓN 3.1. *Sean $M \geq 1$, $\mu \in \mathfrak{M}(L(\mathcal{G}))$ positivo, tal que $d\mu = W\,dx$ para alguna $W \in L^1_{L(\mathcal{G})}$. Sea $\varphi = e_n\,\varphi_1 + \varphi_2$ donde $\varphi_1 \in \mathcal{P}_1(\mathcal{G})$ y $\varphi_2 \in \mathcal{P}_2(\mathcal{G})$, entonces*

$$\frac{1}{M^2+1}\ (M^2\ \|\varphi\|^2_\mu - \|\,\mathsf{H}\varphi\|^2_\mu) = (\langle e_n\,\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu + \langle\,\varphi_2, e_n\varphi_1\rangle_\mu) + \frac{M^2-1}{M^2+1}\left(\|\varphi_1\|^2_\mu + \|\varphi_2\|^2_\mu\right).$$

DEMOSTRACIÓN.

Sea $\varphi = e_n\,\varphi_1 + \varphi_2$ donde $\varphi_1 \in \mathcal{P}_1(\mathcal{G})$ y $\varphi_2 \in \mathcal{P}_2(\mathcal{G})$, entonces

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|^2_\mu &= \langle e_n\varphi_1 + \varphi_2, e_n\varphi_1 + \varphi_2\rangle_\mu \\
&= \langle e_n\varphi_1, e_n\varphi_1 + \varphi_2\rangle_\mu + \langle \varphi_2, e_n\varphi_1 + \varphi_2\rangle_\mu \\
&= \langle e_n\varphi_1, e_n\varphi_1\rangle_\mu + \langle e_n\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu + \langle \varphi_2, e_n\varphi_1\rangle_\mu + \langle \varphi_2, \varphi_2\rangle_\mu \\
&= |e_n|\,\langle \varphi_1, \varphi_1\rangle_\mu + \langle e_n\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu + \langle \varphi_2, e_n\varphi_1\rangle_\mu + \langle \varphi_2, \varphi_2\rangle_\mu \\
&= \|\varphi_1\|^2_\mu + \langle e_n\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu + \langle \varphi_2, e_n\varphi_1\rangle_\mu + \|\varphi_2\|^2_\mu \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

Por otro lado si $\varphi_1 \in \mathcal{P}_1$ entonces

$$\varphi_1 = \sum_{k=0}^{N} \xi_k e_k,$$

donde

$$\widehat{\varphi_1}(k) = \begin{cases} \xi_k & \text{si } 0 \leq k \leq N \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

luego

$$(\mathsf{H}\varphi_1)\widehat{\ }(k) = \begin{cases} -i\widehat{\varphi_1}(k) = -i\xi_k & \text{si } 0 \leq k \leq N \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

en consecuencia

$$\mathsf{H}\varphi_1 = -i\sum_{k=0}^{N}\xi_k e_k = -i\varphi_1$$

de allí que

$$\mathsf{H}\varphi_1 = -i\varphi_1.$$

En forma similar si $\varphi_2 \in \mathcal{P}_2$ entonces

$$\varphi_2 = \sum_{k=-N}^{-1}\xi_k e_k,$$

luego

$$\widehat{\varphi_2}(k) = \begin{cases} \xi_k & \text{si } -N \leq k \leq -1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y

$$(\mathsf{H}\varphi_2)\widehat{\ }(k) = \begin{cases} \widehat{\varphi_2}(k) = i\xi_k & \text{si } -N \leq k \leq -1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es decir,

$$\mathsf{H}\varphi_2 = i\sum_{k=-N}^{-1}\xi_k e_k = i\varphi_2$$

De donde

$$\mathsf{H}\varphi_2 = i\varphi_2.$$

A partir de lo obtenido para $\mathsf{H}\varphi_1$ y $\mathsf{H}\varphi_2$ se sigue que

$$\mathsf{H}\varphi = \mathsf{H}\left(e_n\varphi_1 + \varphi_2\right) = -ie_n\varphi_1 + i\varphi_2.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\|\mathsf{H}\varphi\|_\mu^2 &= \langle -ie_n\varphi_1 + i\varphi_2, -ie_n\varphi_1 + i\varphi_2\rangle_\mu \\
&= \langle -ie_n\varphi_1, -ie_n\varphi_1 + i\varphi_2\rangle_\mu + \langle i\varphi_2, -ie_n\varphi_1 + i\varphi_2\rangle_\mu \\
&= \langle -ie_n\varphi_1, -ie_n\varphi_1\rangle_\mu + \langle -ie_n\varphi_1, i\varphi_2\rangle_\mu + \langle i\varphi_2, -ie_n\varphi_1\rangle_\mu + \langle i\varphi_2, i\varphi_2\rangle_\mu \\
&= \langle \varphi_1, \varphi_1\rangle_\mu - \langle e_n\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu - \langle \varphi_2, e_n\varphi_1\rangle_\mu + \langle \varphi_2, \varphi_2\rangle_\mu \\
&= \|\varphi_1\|_\mu^2 - \langle e_n\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu - \langle \varphi_2, e_n\varphi_1\rangle_\mu + \|\varphi_2\|_\mu^2 .
\end{aligned}$$

Luego

$$-\|\mathsf{H}\varphi\|_\mu^2 = -\|\varphi_1\|_\mu^2 + \langle e_n\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu + \langle \varphi_2, e_n\varphi_1\rangle_\mu - \|\varphi_2\|_\mu^2 . \tag{3.2}$$

Si multiplicamos (3.1) por M^2 y usamos la ecuación (3.2) se sigue que:

$$\begin{aligned} M^2 \|\varphi\|_\mu^2 - \|\mathsf{H}\varphi\|_\mu^2 &= \left(M^2-1\right)\|\varphi_1\|_\mu^2 + \left(M^2+1\right)\langle\varphi_2, e_n\varphi_1\rangle_\mu \\ &\quad + \left(M^2+1\right)\langle e_n\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu + \left(M^2-1\right)\|\varphi_2\|_\mu^2 \\ &= \left(M^2+1\right)\left[\langle\varphi_2, e_n\varphi_1\rangle_\mu + \langle e_n\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu\right] \\ &\quad + \left(M^2-1\right)\left(\|\varphi_1\|_\mu^2 + \|\varphi_2\|_\mu^2\right). \end{aligned} \tag{3.3}$$

De donde

$$\frac{1}{M^2+1}\ (M^2\ \ \|\varphi\|_\mu^2 - \|\,\mathsf{H}\varphi\|_\mu^2) = (\langle e_n\,\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu + \langle\,\varphi_2, e_n\varphi_1\rangle_\mu) + \frac{M^2-1}{M^2+1}\left(\|\varphi_1\|_\mu^2 + \|\varphi_2\|_\mu^2\right).$$

□

Sea $\mu_{\alpha\beta} \in \mathfrak{M}(L(\mathcal{G}))$ para $\alpha, \beta = 1, 2$. Usaremos la notación $\{\mu_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta=1,2}$ para referirnos a

$$\begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{bmatrix}.$$

Consideraremos matrices tales que $\mu_{12} = \mu_{21}^*$ donde μ_{21}^* esta definida por

$$\langle\mu_{21}^*(\Delta)\zeta, \xi\rangle_{\mathcal{G}} = \langle\zeta, \mu_{21}(\Delta)\xi\rangle_{\mathcal{G}}.$$

Definición 3.2. Sea $\mu_{\alpha\beta} \in \mathfrak{M}(L(\mathcal{G}))$ para $\alpha, \beta = 1, 2$. Se dice que la matriz $\{\mu_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta=1,2}$ es positiva cuando

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \langle\varphi_\alpha, \varphi_\beta\rangle_{\mu_{\alpha\beta}} \geq 0$$

para todo $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{P}(\mathcal{G}) \times \mathcal{P}(\mathcal{G})$.

Lema 3.3 (ver [**2**]). *Sea $\mu_{\alpha\beta} \in \mathfrak{M}(L(\mathcal{G}))$ para $\alpha, \beta = 1, 2$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *La matriz $\{\mu_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta=1,2}$ es positiva.*

(b) *para todo Δ en $\mathcal{B}$, para todo $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathcal{G}$*

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \langle\mu_{\alpha,\beta}(\Delta)\zeta_\alpha\zeta_\beta\rangle \geq 0.$$

(c) *Para todo Δ en $\mathcal{B}$, para todo $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$: $\langle\mu_{11}(\Delta)\zeta, \zeta\rangle \geq 0$, $\langle\mu_{22}(\Delta)\xi, \xi\rangle \geq 0$ y*

$$|\langle\mu_{12}(\Delta)\zeta, \xi\rangle|^2 \leq \langle\mu_{11}(\Delta)\zeta, \zeta\rangle\ \langle\mu_{22}(\Delta)\xi, \xi\rangle.$$

(d) *Para todo* Δ *en* $\mathcal{B}$, *para todo* $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$: $\langle \mu_{11}(\Delta)\zeta, \zeta\rangle \geq 0$, $\langle \mu_{22}(\Delta)\xi, \xi\rangle \geq 0$ *y*

$$2|\langle \mu_{12}(\Delta)\zeta, \xi\rangle| \leq \langle \mu_{11}(\Delta)\zeta, \zeta\rangle \ + \ \langle \mu_{22}(\Delta)\xi, \xi\rangle.$$

La siguiente definición fue introducida en [**2**] (sección II).

Definición 3.4. Sea $\mu_{\alpha\beta} \in \mathfrak{M}(L(\mathcal{G}))$ para $\alpha, \beta = 1, 2$. Se dice que la matriz $\{\mu_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta=1,2}$ es débilmente positiva cuando

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \langle \varphi_\alpha, \varphi_\beta\rangle_{\mu_{\alpha\beta}} \geq 0$$

para todo $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{P}_1(\mathcal{G}) \times \mathcal{P}_2(\mathcal{G})$.

Cuando se trata de medidas absolutamente continuas con respecto de la medida de Lebesgue, estas condiciones se pueden expresar en términos de las densidades. Para $\mu_{\alpha\beta} = z_{\alpha\beta}(x)dx$ la expresión "$\{z_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta=1,2}$ es una matriz positiva" quiere decir $\{\mu_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta=1,2}$ es una matriz positiva. Análogamente para matrices débilmente positivas.

Lema 3.5. *Sea* $\mu_{\alpha\beta} \in \mathfrak{M}(L(\mathcal{G}))$ *para* $\alpha, \beta = 1, 2$. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *Las medidas* μ_{11} *y* μ_{22} *son positivas y*

$$|\langle \varphi_2, \varphi_2\rangle_{\mu_{12}}|^2 \leq \langle \varphi_1, \varphi_1\rangle_{\mu_{11}} \ \langle \varphi_2, \varphi_2\rangle_{\mu_{22}}$$

para todo $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{P}_1(\mathcal{G}) \times \mathcal{P}_2(\mathcal{G})$.

(b) *La matriz* $\{\mu_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta=1,2}$ *es débilmente positiva.*

Demostración. Cambiando φ_1 por $\lambda_1\varphi_1$ y φ_2 por $\lambda_2\varphi_2$ la desigualdad de la definición de débilmente positiva se transforma en

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \lambda_\alpha \overline{\lambda_\beta} \langle \varphi_\alpha, \varphi_\beta\rangle_{\mu_{\alpha\beta}} \geq 0$$

para todo $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{P}_1(\mathcal{G}) \times \mathcal{P}_2(\mathcal{G})$, es decir la forma cuadrática en λ_1 y λ_2, dada por la expresión anterior, es definida positiva. Esto es equivalente a la condición (a). $\square$

3.1. Extensión a valores operadores del teorema de Helson y Szegö

TEOREMA 3.6 (ver [**6**]). *Sea* $\mu \in \mathfrak{M}(L(\mathcal{G}))$ *positivo, supongamos que* $d\mu = W\,dx$ *donde* $W \in L^1_{L(\mathcal{G})}$ *y sea* $M \geq 1$. *Las siguientes condiciones son equivalentes*

(a) $0 < \rho_n(W) \leq \dfrac{M^2-1}{M^2+1}$.

(b) *Para todo* $\varphi \in e_n\mathcal{P}_1(\mathcal{G}) + \mathcal{P}_2(\mathcal{G})$

$$\|\mathsf{H}\varphi\|_\mu \leq M\,\|\varphi\|_\mu.$$

(c) *Existe* $\nu \in \mathfrak{M}(L(\mathcal{G}))_+$ *tal que, para cada* $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$

$$d\nu_{\zeta\xi}(x) = h_{\zeta\xi}(x)\,dx,$$

donde $h_{\zeta\xi} \in H^1$ *y*

$$(M^2+1)^2\,|\,e_n(x)W_{\zeta\xi}(x) - h_{\zeta\xi}(x)\,|^2 \ \leq (M^2-1)^2\,W_{\zeta\zeta}(x)\,W_{\xi\xi}(x) \quad c.s.$$

DEMOSTRACIÓN.

(b) $\Rightarrow$ (a) Supongamos que

$$\|\mathsf{H}\varphi\|_\mu \leq M\,\|\varphi\|_\mu.$$

para todo $\varphi \in e_n\mathcal{P}_1(\mathcal{G}) + \mathcal{P}_2(\mathcal{G})$. Usando la proposición 3.1 se obtiene que

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{1}{M^2+1}(M^2\|\varphi\|_\mu^2 - \|H\varphi\|_\mu^2) &= (\langle e_n\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu + \langle \varphi_2, e_n\varphi_1\rangle_\mu) + \left(\frac{M^2-1}{M^2+1}\right)\left(\|\varphi_1\|_\mu^2 + \|\varphi_2\|_\mu^2\right) \\ &= 2Re\langle e_n\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu + \left(\frac{M^2-1}{M^2+1}\right)\left(\|\varphi_1\|_\mu^2 + \|\varphi_2\|_\mu^2\right). \end{aligned}$$

Si consideramos $\lambda \in \mathbb{C}$ y $S \in \mathbb{R}$, con $|\lambda| = 1$, se cumple que $\lambda S\varphi_1 \in P_1(\mathcal{G})$ y además

$$\left(\frac{M^2-1}{M^2+1}\right)\|\varphi_1\|_\mu^2 S^2 + (2Re(\lambda\langle e_n\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu))S + \left(\frac{M^2-1}{M^2+1}\right)\|\varphi_2\|_\mu^2 =$$

$$2Re(\lambda\langle e_nS\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu) + \left(\frac{M^2-1}{M^2+1}\right)(\|S\varphi_1\|_\mu^2 + \|\varphi_2\|_\mu^2) \geq 0.$$

Esta es una inecuación de segundo grado en la variable S, cuyo discriminante D es

$$D = 4[\lambda\langle e_n\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu + \overline{\lambda}\langle \varphi_2, e_n\varphi_1\rangle_\mu]^2 - 4\left(\frac{M^2-1}{M^2+1}\right)^2\|\varphi_1\|_\mu^2\|\varphi_2\|_\mu^2 \leq 0.$$

y esto es equivalente a decir

$$[\lambda\langle e_n\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu + \overline{\lambda}\langle \varphi_2, e_n\varphi_1\rangle_\mu]^2 \leq \left(\frac{M^2-1}{M^2+1}\right)^2\|\varphi_1\|_\mu^2\|\varphi_2\|_\mu^2$$

Si $\|\varphi_1\|_\mu = \|\varphi_2\|_\mu = 1$ entonces

$$\lambda\langle e_n\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu + \overline{\lambda}\langle \varphi_2, e_n\varphi_1\rangle_\mu \leq \left(\frac{M^2-1}{M^2+1}\right).$$

En particular para $\lambda = e^{-i\arg(\langle e_n\varphi_1,\varphi_2\rangle_\mu)}$, se tiene que

$$\lambda\langle e_n\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu = |\langle e_n\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu| = \overline{\lambda}\langle \varphi_2, e_n\varphi_1\rangle_\mu.$$

Por lo tanto

$$|\langle e_n\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu| \leq \frac{M^2-1}{M^2+1},$$

ahora si tomamos el supremo a ambos lados de está última expresión y considerando que $\left(\frac{M^2-1}{M^2+1}\right)$ es constante, se tiene el resultado deseado

$$\rho_n(\mu) \leq \frac{M^2-1}{M^2+1}$$

(a) $\Rightarrow$ (b) Esta implicación también se obtiene usando el discriminante de una ecuación de segundo grado.

(b) $\Rightarrow$ (c) Consideremos las cuatro medidas absolutamente continuas con respecto a μ dadas por:

$$\begin{aligned}
\mu_{11}(\Delta) = \mu_{22}(\Delta) &= \frac{M^2-1}{M^2+1}\int_\Delta d\mu(x)\\
\mu_{12}(\Delta) &= \int_\Delta e_n(x)\, d\mu(x)\\
\mu_{21}(\Delta) &= \int_\Delta e_{-n}(x)\, d\mu(x)
\end{aligned}$$

para Δ en $\mathcal{B}$.

Se puede probar que $d\mu_{12} = d\mu_{21}^*$ donde μ_{21}^* esta definida por

$$\langle \mu_{21}^*(\Delta)\zeta, \xi\rangle_{\mathcal{G}} = \langle \zeta, \mu_{21}(\Delta)\xi\rangle_{\mathcal{G}}.$$

Como

$$\frac{d\mu_{12}}{d\mu} = e_n \qquad\qquad \frac{d\mu}{dx} = W$$

tenemos que

$$\frac{d\mu_{12}}{dx} = e_n\, W$$

(esto se obtiene del Ejercicio 33.c del Capítulo 11 de [**49**]).

Sea $\varphi = e_n\,\varphi_1 + \varphi_2$ donde $\varphi_1 \in \mathcal{P}_1(\mathcal{G})$ y $\varphi_2 \in \mathcal{P}_2(\mathcal{G})$ tal que

$$\|\,\mathsf{H}\varphi\|_\mu \leq M\,\|\varphi\|_\mu.$$

De la Proposición 3.1 se sigue que

$$(\langle e_n\,\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu + \langle\,\varphi_2, e_n\varphi_1\rangle_\mu) + \frac{M^2-1}{M^2+1}\left(\|\varphi_1\|_\mu^2 + \|\varphi_2\|_\mu^2\right) \geq 0. \tag{3.4}$$

Por la Proposición 2.14 tenemos que

$$\begin{aligned} \langle e_n\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu &= \int_0^{2\pi} \langle W(x)e_n(x)\varphi_1(x), \varphi_2(x)\rangle_{\mathcal{G}}\,dx \\ &= \int_0^{2\pi} \langle e_n(x)W(x)\varphi_1(x), \varphi_2(x)\rangle_{\mathcal{G}}\,dx \\ &= \langle\varphi_1, \varphi_2\rangle_{\mu_{12}}\,. \end{aligned}$$

Análogamente

$$\langle\,\varphi_2, e_n\varphi_1\rangle_\mu = \langle\varphi_2, \varphi_1\rangle_{\mu_{21}}\,.$$

De la ecuación (3.4) tenemos que

$$\langle\varphi_1, \varphi_2\rangle_{\mu_{12}} + \langle\varphi_2, \varphi_1\rangle_{\mu_{21}} + \frac{M^2-1}{M^2+1}\left(\|\varphi_1\|_\mu^2 + \|\varphi_2\|_\mu^2\right) \geq 0$$

Para $\alpha = 1, 2$ también se puede probar que

$$\frac{M^2-1}{M^2+1}\,\|\varphi_\alpha\|_\mu^2 = \langle\varphi_\alpha, \varphi_\alpha\rangle_{\mu_{\alpha\alpha}}\,.$$

De donde

$$\langle\varphi_1, \varphi_2\rangle_{\mu_{12}} + \langle\varphi_2, \varphi_1\rangle_{\mu_{21}} + \langle\varphi_1, \varphi_1\rangle_{\mu_{11}} + \langle\varphi_2, \varphi_2\rangle_{\mu_{22}} \geq 0.$$

Es decir

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \langle\varphi_\alpha, \varphi_\beta\rangle_{\mu_{\alpha\beta}} \geq 0$$

para todo $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{P}_1(\mathcal{G}) \times \mathcal{P}_2(\mathcal{G})$. Por lo tanto la matriz $\{\mu_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta=1,2}$ es débilmente positiva.

Una aplicación directa del teorema II de [**2**] proporciona de una medida $\nu \in \mathfrak{M}(L(\mathcal{G}))_+$ tal que:

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \langle\varphi_\alpha, \varphi_\beta\rangle_{\mu_{\alpha\beta}} + \langle\varphi_1, \varphi_2\rangle_\nu + \langle\varphi_2, \varphi_1\rangle_{\nu*} \geq 0$$

para $\varphi_1,\, \varphi_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{G})$.

Tomando $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$ y sea $\Delta \subset [0, 2\pi)$ un conjunto de Borel. Por Lema 3 de [**2**]

$$|\langle \mu_{12}(\Delta)\,\zeta, \xi\rangle_{\mathcal{G}} - \langle \nu(\Delta)\,\zeta, \xi\rangle_{\mathcal{G}}|^2 \leq \langle \mu_{11}(\Delta)\,\zeta, \zeta\rangle_{\mathcal{G}}\,\langle \mu_{22}(\Delta)\,\xi, \xi\rangle_{\mathcal{G}}. \tag{3.5}$$

Entonces

$$\left|\frac{\langle \mu_{12}(\Delta)\,\zeta, \xi\rangle_{\mathcal{G}} - \langle \nu(\Delta)\,\zeta, \xi\rangle_{\mathcal{G}}}{\mathbf{m}(\Delta)}\right|^2 \leq \frac{\langle \mu_{11}(\Delta)\,\zeta, \zeta\rangle_{\mathcal{G}}}{\mathbf{m}(\Delta)}\;\frac{\langle \mu_{22}(\Delta)\,\xi, \xi\rangle_{\mathcal{G}}}{\mathbf{m}(\Delta)}. \tag{3.6}$$

Por otro lado, puesto que $\nu \in \mathfrak{M}(L(\mathcal{G}))_+$ para cada $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$ existe $h_{\zeta\xi} \in H^1$ tal que:

$$d\nu_{\zeta\xi}(x) = h_{\zeta\xi}(x)dx.$$

De donde

$$\begin{aligned}
\left|\langle \mu_{12}(\Delta)\zeta, \xi\rangle_{\mathcal{G}} - \langle \nu(\Delta)\zeta, \xi\rangle_{\mathcal{G}}\right|^2 &= \left|\int_\Delta \langle d\mu_{12}(x)\zeta, \xi\rangle_{\mathcal{G}} - \int_\Delta \langle d\nu(x)\zeta, \xi\rangle_{\mathcal{G}}\right|^2 \\
&= \left|\int_\Delta \langle e_n d\mu\zeta, \xi\rangle_{\mathcal{G}} - \int_\Delta \langle h_{\zeta\xi}(x)\zeta, \xi\rangle_{\mathcal{G}}\, dx\right|^2 \\
&= \left|\int_\Delta \left(\langle e_n W(x)\zeta, \xi\rangle_{\mathcal{G}} - \langle h_{\zeta\xi}(x)\zeta, \xi\rangle_{\mathcal{G}}\right) dx\right|^2 \\
&= \left|\int_\Delta \langle e_n W(x)\zeta - h_{\zeta\xi}(x), \xi\rangle_{\mathcal{G}}\right|^2 \\
&= \left|\int_\Delta \left(e_n W_{\zeta\xi} - h_{\zeta\xi}\right)(x)dx\right|^2
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
&\langle \mu_{11}(\Delta)\zeta, \zeta\rangle_{\mathcal{G}}\,\langle \mu_{22}(\Delta)\xi, \xi\rangle_{\mathcal{G}} = \\
&\qquad = \int_\Delta \langle d\mu_{11}(x)\zeta, \zeta\rangle_{\mathcal{G}} \int_\Delta \langle d\mu_{22}(x)\xi, \xi\rangle_{\mathcal{G}} \\
&\qquad = \int_\Delta \left\langle \left(\frac{M^2-1}{M^2+1}\right) W(x)\zeta, \zeta \right\rangle_{\mathcal{G}} dx \int_\Delta \left\langle \left(\frac{M^2-1}{M^2+1}\right) W(x)\xi, \xi \right\rangle_{\mathcal{G}} dx \\
&\qquad = \left(\int_\Delta \left(\frac{M^2-1}{M^2+1}\right) W_{\zeta\zeta}(x)dx\right)\left(\int_\Delta \left(\frac{M^2-1}{M^2+1}\right) W_{\xi\xi}(x)dx\right) \\
&\qquad = \left(\frac{M^2-1}{M^2+1}\right)^2 \left(\int_\Delta W_{\zeta\zeta}(x)dx\right)\left(\int_\Delta W_{\xi\xi}(x)dx\right)
\end{aligned}$$

Usando estas igualdades y la desigualdad (3.6), obtenemos

$$\left|\frac{1}{m(\Delta)}\int_{\Delta}\left(W_{\zeta\xi}-h_{\zeta\xi}\right)(x)dx\right|^2 \leq \left(\frac{M^2-1}{M^2+1}\right)^2\left(\frac{1}{\mathbf{m}(\Delta)}\int_{\Delta}W_{\zeta\zeta}(x)dx\right)\left(\frac{1}{\mathbf{m}(\Delta)}\int_{\Delta}W_{\xi\xi}(x)dx\right).$$

Tomando límite cuando $\mathbf{m}(\Delta)\to 0$ y usando el teorema fundamental del cálculo para la integral de Lebesgue (ver Teorema 9 del Capítulo 11 de [**49**]), obtenemos

$$(M^2+1)^2\,|\,e_n(x)W_{\zeta\xi}(x)-h_{\zeta\xi}(x)\,|^2\ \leq (M^2-1)^2\,W_{\zeta\zeta}(x)\,W_{\xi\xi}(x)$$

para casi todo $x\in[0,2\pi)$.

(c) $\Rightarrow$ (b) Por hipótesis tenemos que

$$(M^2+1)\,|\,e_n(x)W_{\zeta\xi}(x)-h_{\zeta\xi}(x)\,|\ \leq (M^2-1)\ \left(W_{\zeta\zeta}(x)\right)^{1/2}\ \left(W_{\xi\xi}(x)\right)^{1/2}$$

para casi todo $x\in[0,2\pi)$.

Sea $\Delta\subset[0,2\pi)$ un conjunto de Borel, usando la desigualdad anterior y la desigualdad de Cauchy-Schwartz obtenemos

$$\begin{aligned}(M^2+1)\int_{\Delta}|\,e_n(x)W_{\zeta\xi}(x)-h_{\zeta\xi}(x)\,|\,dx &\leq (M^2-1)\ \int_{\Delta}\left(W_{\zeta\zeta}(x)\right)^{1/2}\ \left(W_{\xi\xi}(x)\right)^{1/2}\,dx\\ &\leq (M^2-1)\left(\int_{\Delta}W_{\zeta\zeta}(x)dx\right)^{1/2}\left(\int_{\Delta}W_{\xi\xi}(x)dx\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Para completar la demostración, notemos que en el resto de los pasos de la prueba de (b) $\Rightarrow$ (c) tenemos condiciones equivalentes. □

Proposición 3.7. *Sea $\mu\in\mathfrak{M}(L(\mathcal{G}))$ positivo, supongamos que $d\mu = Wdx$ donde $W\in L^1_{L(\mathcal{G})}$ y sea $M\geq 1$. Supongamos que*

$$\|\,\mathsf{H}\varphi\|_{\mu}\leq M\ \|\varphi\|_{\mu}$$

para todo $\varphi\in e_n\mathcal{P}_1(\mathcal{G})+\mathcal{P}_2(\mathcal{G})$.

Sea $\mathrm{H}_1:\mathcal{P}\to\mathcal{P}$ *la transformada del espacio de Hilbert y sea* $\zeta\in\mathcal{G}$. *Entonces*

$$\|\,\mathrm{H}_1 p\|_{L^2(W_{\zeta\zeta})}\leq M\ \|p\|_{L^2(W_{\zeta\zeta})}$$

para todo polinomio trigonométrico a valores escalares $p\in e_n\mathcal{P}_1+\mathcal{P}_2$.

Demostración. Sea $p \in e_n\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$, si tomamos $\varphi(x) = p(x)\zeta$, entonces $\varphi \in e_n\mathcal{P}_1(\mathcal{G}) + \mathcal{P}_2(\mathcal{G})$ y

$$\mathsf{H}\varphi(x) = \mathrm{H}_1 p(x)\zeta.$$

De donde

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |\mathrm{H}_1 p(x)|^2 \, W_{\zeta\zeta}(x)\, dx &= \int_0^{2\pi} |\mathrm{H}_1 p(x)|^2 \, \langle W(x)\zeta, \zeta\rangle_{\mathcal{G}}\, dx \\
&= \int_0^{2\pi} \langle W(x)\mathrm{H}_1 p(x)\zeta, \mathrm{H}_1 p(x)\zeta\rangle_{\mathcal{G}}\, dx \\
&= \int_0^{2\pi} \langle W(x)\mathsf{H}\varphi(x), \mathsf{H}\varphi(x)\rangle_{\mathcal{G}}\, dx \\
&\leq M^2 \int_0^{2\pi} \langle W(x)\varphi(x), \varphi(x)\rangle_{\mathcal{G}}\, dx \\
&= M^2 \int_0^{2\pi} |p(x)|^2 \, \langle W(x)\zeta, \zeta\rangle_{\mathcal{G}}\, dx \\
&= M^2 \int_0^{2\pi} |p(x)|^2 \, W_{\zeta\zeta}(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Luego

$$\|\mathrm{H}_1 p\,\|^2_{L^2(W_{\zeta\zeta})} \leq M^2 \|p\,\|^2_{L^2(W_{\zeta\zeta})}$$

es decir

$$\|H_1 p\,\|_{L^2(W_{\zeta\zeta})} \leq M \|p\,\|_{L^2(W_{\zeta\zeta})}.$$

□

Observación 3.8. De la Proposición 3.7 se sigue que si $W \in L^1_{L(\mathcal{G})}$ es no negativa y la transformada de Hilbert es continua con respecto a $d\mu = W dx$ entonces, para cada $\zeta \in \mathcal{G}$ tenemos que $W_{\zeta\zeta}(x) = 0$ ó $W_{\zeta\zeta}(x) > 0$ en casi todas partes. En los siguientes resultados supondremos que $W_{\zeta\zeta}(x) > 0$, en casi todas partes.

Tal como se dijo antes, $\widetilde{v}$ indicará la conjugada armónica de una función v.

Lema 3.9. *Sea $\mu \in \mathfrak{M}(L(\mathcal{G}))$ positiva, supongamos que $d\mu = W dx$ donde $W \in L^1_{L(\mathcal{G})}$ y sea $M > 1$. Si*

$$\|\,\mathsf{H}\varphi\|_\mu \leq M\, \|\varphi\|_\mu$$

para toda $\varphi \in e_n\mathcal{P}_1(\mathcal{G}) + \mathcal{P}_2(\mathcal{G})$.

Entonces para $\zeta \in \mathcal{G}$ existe $h_1 \in H^1$ tal que

$$W_{\zeta\zeta} = |h_1| \exp(u) = |p_1|^2 \exp(u + \widetilde{v}) \quad c.s.$$

donde $v = -arg\,(e_{-n}\, h_1)$, $u \in L^\infty$, p_1 es un polinomio de grado menor que n y

$$|u| \;\leq \operatorname{arcosh}\left(\frac{M^2+1}{2M}\;\cos v\right) \quad c.s. \tag{3.7}$$

y

$$\|v\|_\infty \;\leq \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{M^2-1}{M^2+1}\right) < \frac{\pi}{2} \quad c.s. \tag{3.8}$$

Demostración. Observemos que usando la Proposición 3.7 la prueba de este lema puede ser reducida al caso unidimensional ($\mathcal{G} = \mathbb{C}$). Por lo tanto los resultados se siguen del teorema B de [**11**] y del teorema unidimensional de Helson y Sarason (ver Teorema 6 de [**29**]) en la forma dada por Arocena, Cotlar y Sadosky (ver Teorema 3A de [**3**]).

Como

$$\|\,\mathsf{H}\varphi\|_\mu \leq M\;\|\varphi\|_\mu$$

para toda $\varphi \in e_n\mathcal{P}_1(\mathcal{G}) + \mathcal{P}_2(\mathcal{G})$, por el Teorema 3.6 tenemos que existe $h \in H^1$ tal que:

$$(M^2+1)^2\,|\,W_{\zeta\zeta}(x) - e_{-n}(x)\,h(x)\,|^2 \;\leq (M^2-1)^2\,W_{\zeta\zeta}(x)\;W_{\zeta\zeta}(x) \quad \text{c.s.}$$

Tomemos $w = W_{\zeta\zeta}$. Observemos que $w \in L^1$ y además

$$(M^2+1)^2\,|e_{-n}\,h - w|^2 \;\leq (M^2-1)^2\,w^2 \quad \text{c.s.} \tag{3.9}$$

Sean

$$\phi = \frac{M^2+1}{2M}\;e_{-n}\,h,$$
$$u = \log\left(w/|\phi|\right).$$

Entonces

$$w = \;|\phi|\;\exp(u) \quad \text{c.s.}$$

Sea

$$r = \frac{M^2-1}{M^2+1}.$$

De (3.9) se sigue que

$$\begin{aligned}
\left(M^2+1\right)|e_{-n}h-w| &\leq \left(M^2-1\right)^2 w\\
|e_{-n}h-w| &\leq \frac{M^2-1}{M^2+1}w\\
|(-1)\,(w-e_{-n}h)| &\leq \frac{M^2-1}{M^2+1}w\\
\left|1-\frac{e_{-n}h}{w}\right| &\leq \frac{M^2-1}{M^2+1}\\
\left|1-\frac{e_{-n}h}{w}\right| &\leq r<1
\end{aligned}$$

Sea

$$v=-\arg(e_{-n}\,h/(r\;w)),$$

entonces

$$|v|=|-\arg\left(e_{-n}h/\left(rw\right)\right)|<\frac{\pi}{2}$$

y sen $|v|\leq r$ c.s. Entonces

$$\|v\|_\infty\leq\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc}\cos r<\frac{\pi}{2}$$

casi siempre, y la desigualdad (3.8) queda demostrada.

Nuevamente usando (3.9) obtenemos

$$\begin{aligned}
0 &\geq \left(M^2+1\right)^2|e_{-n}h-w|^2-\left(M^2-1\right)^2w^2,\\
0 &\geq \left(M^4+2M^2+1\right)|e_{-n}h-w|^2-\left(M^4-2M^2+1\right)w^2,\\
0 &\geq \left(M^4+2M^2+1\right)\left(|e_{-n}|^2\,|h|^2+w^2-2\text{ Re }\left(e_{-n}h\right)w\right)-M^4w^2+2M^2w^2-w^2.
\end{aligned}$$

Simplificando esta última expresión, se tiene

$$4M^2\;w^2-2(M^2+1)^2\mathrm{Re}\,(e_{-n}\,h)\;w+(M^2+1)^2|h|^2\leq 0\quad\text{c.s.}$$

Usaremos que $v=-\arg\ (e_{-n}\,h)$ para resolver esta inecuación de segundo grado. Las raíces de la ecuación de segundo grado asociada son:

$$w_k=\frac{M^2+1}{2M}\,|h|\left(\frac{M^2+1}{2M}\;\cos v+(-1)^k\sqrt{\left(\frac{M^2+1}{2M}\right)^2\cos^2 v-1}\right)$$

para $k=1,2$.

Por otro lado usando la definición de arco coseno hiperbólico se pueden probar las dos igualdades siguientes

$$\text{arcosh}x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}),$$
$$-\text{arcosh}x = \log(x - \sqrt{x^2 - 1}).$$

De aquí se deduce que

$$w_k \quad = \quad |\phi| \, \exp\left((-1)^k \text{arcosh}\left(\frac{M^2+1}{2M} \, \cos v\right)\right).$$

Volviendo a la inecuación de segundo grado obtenemos

$$w_1 \leq w \leq w_2 \quad \text{c.s.}$$

De esto se obtiene fácilmente la desigualdad (3.7).

Si consideramos

$$h_1 = \frac{M^2+1}{2M} \, h$$

claramente notamos que $h_1 \in H^1$,

$$v = -\arg\,(e_{-n}\, h_1)$$

y

$$W_{\zeta\zeta} = |\phi| \, \exp(u) = \frac{M^2+1}{2M} \, |h| \exp(u) = |h_1| \exp(u) \quad \text{c.s.}$$

Como $v = -arg\;(\phi)$ tenemos

$$w = \phi \, \exp(u + iv) \quad \text{c.s.}$$

Luego

$$0 < w \, \exp(-u - \widetilde{v}) = \phi \, \exp(-\widetilde{v} + iv) \quad \text{c.s.}$$

Sea

$$S = \phi \, \exp(-\widetilde{v} + iv).$$

Por el principio de continuidad analítica de Helson y Sarason (ver [**29**]) tenemos que

$$S = |p_1|^2$$

para un polinomio p_1 de grado menor que n. Luego

$$w \, \exp(-u - \widetilde{v}) = |p_1|^2 \quad \text{c.s.}$$

es decir,

$$W_{\zeta\zeta} = |p_1|^2 \exp(u + \widetilde{v}) \quad \text{c.s.}$$

□

TEOREMA 3.10. *Sea $\mu \in \mathfrak{M}(L(\mathcal{G}))$ positivo, supongamos que $d\mu = W dx$ donde $W \in L^1_{L(\mathcal{G})}$ y sea $M > 1$. Si*

$$\| \mathsf{H}\varphi\|_\mu \leq M \, \|\varphi\|_\mu$$

para toda $\varphi \in e_n\mathcal{P}_1(\mathcal{G}) + \mathcal{P}_2(\mathcal{G})$ y si dados $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$ se tiene que

$$0 < (M^2 - 1) \sqrt{W_{\zeta\zeta}(x) W_{\xi\xi}(x)} < (M^2 + 1) \, |W_{\zeta\xi}(x)| \quad \textit{para casi todo } x \in [0, 2\pi)$$

entonces:

(a) *Existe $u \in L^\infty$ y $h \in H^1$ tal que*

$$|W_{\zeta\xi}| = \frac{|q|}{\sqrt{|q|^2 - 1}} \, |h| \exp(u) \quad \textit{c.s.}$$

donde

$$q(x) = \frac{M^2 + 1}{M^2 - 1} \, \frac{e_n(x) W_{\zeta\xi}(x)}{\sqrt{W_{\zeta\zeta}(x) \, W_{\xi\xi}(x)}}$$

y

$$|u| \leq \operatorname{arcosh} \left(\frac{|q|}{\sqrt{|q|^2 - 1}} \cos v \right) \quad \textit{c.s.} \tag{3.10}$$

También

$$v(x) = -\arg\left(e_{-n}(x) \, h(x) \, \exp(-ix \, \arg W_{\zeta\xi}(x))\right)$$

satisface

$$\|v\|_\infty \leq \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{1}{|q(x)|} \right) < \frac{\pi}{2}. \tag{3.11}$$

(b) *Si existe un entero no negativo N tal que*

$$W_{\zeta\xi}(x) = |W_{\zeta\xi}(x)| \, e_N(x) \quad \textit{c.s.}$$

entonces existe un polinomio p de grado menor que $n + N$ tal que

$$|h| = |p|^2 \exp(\widetilde{v})$$

y

$$|W_{\zeta\xi}| = \frac{|q|}{\sqrt{|q|^2 - 1}} \, |p|^2 \exp(u + \widetilde{v}) \quad \textit{c.s.}$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$.

(a) Del Teorema 3.6, se sigue que existe $h \in H^1$ tal que

$$(M^2+1)^2 \,|\, e_n(x) W_{\zeta\xi}(x) - h(x) \,|^2 \, \leq (M^2-1)^2 \, W_{\zeta\zeta}(x) \, W_{\xi\xi}(x) \quad \text{c.s.}$$

Sea

$$\begin{aligned} z_{11}(x) &= (M^2-1)\, W_{\zeta\zeta}(x), \\ z_{22}(x) &= (M^2-1)\, W_{\xi\xi}(x), \\ z_{12}(x) &= \overline{z_{21}(x))} = (M^2+1)\, e_n(x)\, W_{\zeta\xi}(x). \end{aligned}$$

Entonces

$$|\, z_{12}(x) - (M^2+1) h(x) \,|^2 \, \leq z_{11}(x) \; z_{22}(x) \quad \text{c.s.}$$

De donde la matriz

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} + (M^2+1)h \\ z_{21} + (M^2+1)\overline{h} & z_{22} \end{bmatrix}$$

es positiva.

Como $(M^2+1)h \in H^1$ se sigue que la matriz

$$\{z_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta=1,2} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}$$

es débilmente positiva (ver [**2**] y [**16**, pag. 291]).

Usando la hipótesis tenemos que

$$0 \;\; < \;\; \left(M^2-1\right) \sqrt{W_{\zeta\zeta} W_{\xi\xi}} < \left(M^2+1\right) |W_{\zeta\xi}(x)| \quad \text{c.s.}$$

$$0 \;\; < \;\; \left(M^2-1\right) \sqrt{\frac{z_{11}}{(M^2-1)} \cdot \frac{z_{22}}{(M^2-1)}} < \left(M^2+1\right) \frac{|z_{12}(x)|}{(M^2+1)} \quad \text{c.s.}$$

$$0 \;\; < \;\; \sqrt{z_{11}(x) z_{22}(x)} < |z_{12}(x)| \quad \text{c.s.}$$

Como $z_{\alpha,\beta} \in L^1$ para $\alpha, \beta = 1, 2$, $z_{11}(x) > 0$ c.s. y $z_{22}(x) > 0$ c.s. podemos usar un resultado de Domínguez (Proposición 2.2 de [**16**]) y obtenemos que

$$\frac{|z_{12}(x)|}{|q(x)|} = \sqrt{z_{11}(x) z_{22}(x)} = \frac{1}{\sqrt{|q(x)|^2 - 1}} \, |h(x)| \exp(u(x)) \quad \text{c.s.}$$

donde

$$q(x) = \frac{z_{12}(x)}{\sqrt{z_{11}(x)z_{22}(x)}} = \frac{M^2+1}{M^2-1}\,\frac{e_n(x)W_{\zeta\xi}(x)}{\sqrt{W_{\zeta\zeta}(x)\;W_{\xi\xi}(x)}},$$

$u \in L^\infty$ satisface

$$|u(x)| \leq \operatorname{arccosh}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{|q(x)|}\right)^2}}\cos v(x)\right) \quad \text{c.s.}$$

y

$$v(x) = -\arg\left(e_{-n}(x)\,h(x)\,\exp(-ix\,\arg W_{\zeta\xi}(x))\right)$$

satisface

$$|v(x)|\;\leq \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{|q(x)|}\right) < \frac{\pi}{2} \quad \text{c.s..}$$

Obviamente

$$|W_{\zeta\xi}| = \frac{|q|}{\sqrt{|q|^2-1}}\,|h|\exp(u) \quad \text{c.s.}$$

y

$$q(x) = \left(\frac{M^2+1}{M^2-1}\right)\frac{e_n(x)W_{\zeta\xi}(x)}{\sqrt{W_{\zeta\zeta}(x)\;W_{\xi\xi}(x)}}.$$

Además u satisface la ecuación (3.10) y v satisface la ecuación (3.11).

(b) Supongamos que existe N tal que

$$W_{\zeta\xi}(x) = |W_{\zeta\xi}(x)|\,e_N(x),$$

usando el Lema 5 de [**3**] tenemos que

$$|h| = |p|^2\exp(\widetilde{v})$$

donde p es un polinomio de grado menor que $n+N$. □

Observación 3.11. El Lema 3.9 puede obtenerse del Teorema 3.10.

En [**16**], Domínguez dió la versión finito - dimensional del siguiente teorema.

TEOREMA 3.12. *Sea $\mu \in \mathfrak{M}(L(\mathcal{G}))$ positivo, supongamos que $d\mu = W dx$ donde $W \in L^1_{L(\mathcal{G})}$ y sea $M > 1$. Supongamos que para todo $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$*

$$0 < (M^2 - 1) \sqrt{W_{\zeta\zeta} W_{\xi\xi}} < (M^2 + 1) \, |W_{\zeta\xi}| \quad c.s.$$

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\| \mathsf{H}\varphi\|_\mu \leq M \, \|\varphi\|_\mu$ *para toda* $\varphi \in e_n \mathcal{P}_1(\mathcal{G}) + \mathcal{P}_2(\mathcal{G})$.

(b) *si existe $\nu \in \mathfrak{M}(L(\mathcal{G}))_+$ tal que, $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$*

$$d\nu_{\zeta\xi}(x) = h_{\zeta\xi}(x) \, dx,$$

donde $h_{\zeta\xi} \in H^1$ y para

$$q_{\zeta\xi}(x) = \left(\frac{M^2 + 1}{M^2 - 1} \right) \cdot \frac{e_n(x) W_{\zeta\xi}(x)}{\sqrt{W_{\zeta\zeta}(x) \, W_{\xi\xi}(x)}}$$

las siguientes condiciones se cumplen:

(i) *Para todo $\zeta \in \mathcal{G}$*

$$W_{\zeta\zeta} = \frac{M^2 + 1}{2M} \, |h_{\zeta\zeta}| \exp(u_{\zeta\zeta}) = \frac{M^2 + 1}{2M} |p_{\zeta\zeta}|^2 \, \exp(u_{\zeta\zeta} + \widetilde{v_{\zeta\zeta}}) \quad c.s.,$$

donde $p_{\zeta\zeta}$ es un polinomio de grado menor que n, $u_{\zeta\zeta} \in L^\infty$ satisface la ecuación (3.7) *y*

$$v_{\zeta\xi} = -\arg\left(e_{-n} \, h_{\zeta\xi}\right)$$

satisface la ecuación (3.8).

(ii) *Para todo $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$*

$$|W_{\zeta\xi}| = \frac{|q_{\zeta\xi}|}{\sqrt{|q_{\zeta\xi}|^2 - 1}} \, |h_{\zeta\xi}| \exp(u_{\zeta\xi}) \quad c.s.,$$

donde $u_{\zeta\xi} \in L^\infty$ satisface la ecuación (3.10) *y*

$$v_{\zeta\xi}(x) = -\arg\left(h_{\zeta\xi}(x) \ \exp(-ix(n + \arg W_{\zeta\xi}(x)) \,) \, \right)$$

satisface la ecuación (3.11).

Más aún, si existe N tal que:

$$W_{\zeta\xi}(x) = |W_{\zeta\xi}(x)| \, e_N(x)$$

entonces

$$|W_{\zeta\xi}| = \frac{|q_{\zeta\xi}|}{\sqrt{|q_{\zeta\xi}|^2 - 1}} \, |p_{\zeta\xi}|^2 \exp(u_{\zeta\xi} + \widetilde{v_{\zeta\xi}}) \quad c.s.,$$

donde $p_{\zeta\xi}$ es un polinomio de grado menor que $n+N$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$ del Teorema 3.6 se sigue que existe $\nu \in \mathfrak{M}(L(\mathcal{G}))_+$ y $h_{\zeta\xi} \in H^1$ tales que

$$d\nu_{\zeta\xi}(x) = h_{\zeta\xi}(x)\, dx$$

y

$$(M^2+1)^2 \,|\, e_n(x) W_{\zeta\xi}(x) - h_{\zeta\xi}(x) \,|^2 \;\leq (M^2-1)^2\, W_{\zeta\zeta}(x)\, W_{\xi\xi}(x) \quad \text{c.s.}$$

Las partes (i) y (ii) se siguen del Lema 3.9 y el Teorema 3.10 parte (a).

La última parte se sigue del Teorema 3.10 parte (b). □

3.2. Extensión a valores operadores del teorema de Helson y Sarason

En esta sección se darán algunas definiciones importantes y se dan algunos resultados previos, que nos permiten dar una generalización del teorema de Helson - Sarason a valores operadores.

Siguiendo la terminología de [**16**] se considerarán las funciones de Helson - Sarason de tipo n, las cuales aparecieron por primera vez en [**29**].

DEFINICIÓN 3.13. Una función g, es de Helson - Sarason de tipo n, si existen dos funciones reales y acotadas u y v con $\|v\|_\infty < \frac{\pi}{2}$ y un polinomio analítico p de grado menor o igual que n tales que

$$g(x) = |p(x)|^2\, e^{u(x)+\widetilde{v(x)}}.$$

DEFINICIÓN 3.14. Sea $\mu \in \mathfrak{M}(L(\mathcal{G}))$, $\mu \geq 0$ y supongamos que $d\mu = W dx$ donde $W \in L^1_{L(\mathcal{G})}$. Definimos

$$M_\mu = \sup_{\zeta,\xi,x} \left\{ \frac{\sqrt{W_{\zeta\zeta}(x)\, W_{\xi\xi}(x)}}{|W_{\zeta\xi}(x)|} \right\}$$

y

$$m_\mu = \inf_{\zeta,\xi,x} \left\{ \frac{\sqrt{W_{\zeta\zeta}(x)\, W_{\xi\xi}(x)}}{|W_{\zeta\xi}(x)|} \right\}$$

Estos valores generalizan los que fueron dados en [**16**], para extender el teorema de Helson- Sarason en el caso matricial.

TEOREMA 3.15. *Sea* $\mu \in \mathfrak{M}(L(\mathcal{G}))$, $\mu \geq 0$ *tal que* $d\mu = W dx$ *para alguna* $W \in L^1_{L(\mathcal{G})}$. *Sean* $n \in \mathbb{N}$ *y* $0 < r < 1$. *Para* $x \in [0, 2\pi)$ *consideremos*

$$r_{\zeta\xi}(x) = \frac{r\sqrt{W_{\zeta\zeta}(x)\, W_{\xi\xi}(x)}}{|W_{\zeta\xi}(x)|}.$$

Sean $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$, *si*

$$r_{\zeta\xi}(x) < 1 \quad \textit{para casi todo } x \in [0, 2\pi)$$

entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\rho_n(\mu) \leq r$.

(b) *Para todo* $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$ *existen funciones*

$$g_{\zeta\xi} = |h_{\zeta\xi}(x)| e^{u_{\zeta\xi}},$$

donde $h_{\zeta\xi} \in H^1_{L(\mathcal{G})}$ *tales que:*

(i) $W_{\zeta\zeta}(x) = g_{\zeta\zeta}(x)$ *y ésta es una función Helson - Sarason de tipo* n.

(ii) $|W_{\zeta\xi}(x)| = \sqrt{(1 - r^2)(g_{\zeta\xi}(x))^2 + r^2 g_{\zeta\zeta}(x) g_{\xi\xi}(x)}$,

(iii) *Sea* $v_{\zeta\xi}(x) = -\arg\,(h_{\zeta\xi}(x)\ \exp(-ix(n + \arg W_{\zeta\xi}(x))\ )\ )$ *entonces* $u_{\zeta\zeta}$ *y* $v_{\zeta\zeta}$ *satisfacen la ecuaciones*

$$|u_{\zeta\xi}(x)| \leq \operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - (r_{\zeta\xi}(x))^2}}\ \cos v_{\zeta\xi}(x)\right) \quad \textit{c.s.} \tag{3.12}$$

y

$$|v_{\zeta\xi}(x)| \leq \frac{\pi}{2} - \arccos\,(r_{\zeta\xi}(x)) < \frac{\pi}{2} \quad \textit{c.s.} \tag{3.13}$$

Si $W_{\zeta\xi}(x) = |w_{\zeta\xi}(x)|\, e^{ixN_{\zeta\xi}}$ *para un entero positivo* $N_{\zeta\xi}$ *entonces* $g_{\zeta\xi}$ *es una función Helson- Sarason de tipo* $n + N_{\zeta\xi}$.

DEMOSTRACIÓN. Seguiremos un razonamiento análogo del Teorema 2.4 de [**16**].

Sea $x \in [0, 2\pi)$. Notemos que

$$\sqrt{1 - (r_{\zeta\xi}(x))^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{r^2 W_{\zeta\zeta}(x)\, W_{\xi\xi}(x)}{|W_{\zeta\xi}(x)|^2}\right)} = \frac{\sqrt{|W_{\zeta\xi}(x)|^2 - r^2 W_{\zeta\zeta}(x) W_{\xi\xi}(x)}}{|W_{\zeta\xi}(x)|}$$

Luego

$$|W_{\zeta\xi}(x)| = \frac{\sqrt{|W_{\zeta\xi}(x)|^2 - r^2 W_{\zeta\zeta}(x) W_{\xi\xi}(x)}}{\sqrt{1-(r_{\zeta\xi}(x))^2}} \tag{3.14}$$

Sea

$$q_{\zeta\xi}(x) = \frac{1}{r} \cdot \frac{e_n(x)\, W_{\zeta\xi}(x)}{\sqrt{W_{\zeta\zeta}(x) W_{\xi\xi}(x)}}$$

entonces

$$|q_{\zeta\xi}(x)| = \frac{1}{r_{\zeta\xi}(x)} = \left(\frac{M^2+1}{M^2-1}\right) \cdot \frac{|W_{\zeta\xi}(x)|}{\sqrt{W_{\zeta\zeta}(x) W_{\xi\xi}(x)}}.$$

Además se puede probar que

$$\frac{|q_{\zeta\xi}(x)|}{\sqrt{|q_{\zeta\xi}(x)|^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{1-(r_{\zeta\xi}(x))^2}}.$$

De la ecuación (3.14) obtenemos

$$|W_{\zeta\xi}(x)| = \frac{|q_{\zeta\xi}(x)|}{\sqrt{|q_{\zeta\xi}(x)|^2 - 1}} \sqrt{|W_{\zeta\xi}(x)|^2 - r^2 W_{\zeta\zeta}(x) W_{\xi\xi}(x)}. \tag{3.15}$$

Sea

$$r = \frac{M^2-1}{M^2+1}.$$

Entonces

$$\frac{M^2+1}{2M} = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}.$$

Como $r_{\zeta\xi}(x) < 1$ para casi todo $x \in [0, 2\pi)$ se tiene que

$$0 < (M^2-1)\sqrt{W_{\zeta\zeta}(x) W_{\xi\xi}(x)} < (M^2+1)\,|W_{\zeta\xi}(x)| \quad \text{para casi todo } x \in [0, 2\pi). \tag{3.16}$$

Usando el Teorema 3.6 tenemos que:

$\rho_n(\mu) = \rho_n(W) \le r$ si y sólo si $\|\mathsf{H}\varphi\|_\mu \le M\, \|\varphi\|_\mu$ para todo $\varphi \in e_n \mathcal{P}_1(\mathcal{G}) + \mathcal{P}_2(\mathcal{G})$.

Y como se cumple (3.16), tenemos que estas condiciones son equivalentes a la condición (b) del Teorema 3.12.

Sean

$$h_{\zeta\xi} = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\, h^o_{\zeta\xi}$$

y $g_{\zeta\xi}(x) = |h_{\zeta\xi}(x)| \exp(u_{\zeta\xi}(x))$ entonces

$$W_{\zeta\zeta} = g_{\zeta\zeta}$$

y

$$|W_{\zeta\xi}| = \frac{|q_{\zeta\xi}|}{\sqrt{|q_{\zeta\xi}|^2 - 1}} \sqrt{1-r^2}\, g_{\zeta\xi}. \tag{3.17}$$

De (3.15) y (3.17) obtenemos

$$\sqrt{1-r^2}\, g_{\zeta\xi} = \sqrt{|W_{\zeta\xi}|^2 - r^2 W_{\zeta\zeta} W_{\xi\xi}}.$$

Por lo tanto

$$|W_{\zeta\xi}| = \sqrt{(1-r^2)(g_{\zeta\xi})^2 + r^2 g_{\zeta\zeta} g_{\xi\xi}}.$$

Más aún, si existe N tal que $W_{\zeta\xi}(x) = |W_{\zeta\xi}(x)|\, e_N(x)$ entonces

$$|W_{\zeta\xi}| = \frac{|q_{\zeta\xi}|}{\sqrt{|q_{\zeta\xi}|^2 - 1}} |p_{\zeta\xi}|^2 \exp(u_{\zeta\xi} + \widetilde{v_{\zeta\xi}}) \quad \text{a.e.}$$

donde $p_{\zeta\xi}$ es un polinomio de grado menor o igual que $n+N$.

$\square$

TEOREMA 3.16. *Sea $\mu \in \mathfrak{M}(L(\mathcal{G}))$, $\mu \geq 0$ tal que $d\mu = W dx$ para una función $W \in L^1_{L(\mathcal{G})}$. Si $0 < m_\mu \leq M_\mu < \infty$ entonces las siguientes condiciones son equivalentes*

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n(\mu) = 0$

(b) *Para cada $\varepsilon > 0$, existe $n > 0$ y $r_\varepsilon < \frac{1}{M_\mu}$ tal que para todo $r < r_\varepsilon$ y para $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$ existen funciones de Helson - Sarason, $g_{\varepsilon\zeta\xi}$, de tipo n tales que*

(i) $g_{\varepsilon\zeta\xi} = |h_{\varepsilon\zeta\xi}| e^{u_{\varepsilon\zeta\xi}}$ *donde $h_{\varepsilon\zeta\xi} \in H^1$ y $u_{\varepsilon\zeta\xi}$ es una función real acotada*

(ii) $W_{\zeta\zeta}(x) = g_{\varepsilon\zeta\xi}(x) \dfrac{1}{\sqrt{1-r^2}}$

(iii) $|W_{\zeta\xi}(x)| = \sqrt{(1-r^2)\, g_{\varepsilon\zeta\xi}(x)^2 + r^2\, g_{\varepsilon\zeta\zeta}(x) g_{\varepsilon\xi\xi}(x)}$

(iv) *Si $v_{\varepsilon\zeta\xi}(x) = -\arg(e_{-n}(x) h_{\varepsilon\zeta\xi}(x) \exp(ix \arg W_{\zeta\xi}(x)))$ entonces*

$$\|u_{\varepsilon\zeta\xi}\|_\infty + \|v_{\varepsilon\zeta\xi}\|_\infty < \varepsilon.$$

En este caso también tenemos que:

$$W_{\zeta\xi}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} g_{\varepsilon\zeta\xi}(x).$$

Si $W_{\zeta\xi}(x) = |W_{\zeta\xi}(x)| e^{ixN_{\zeta\xi}}$ para un entero positivo $N_{\zeta\xi}$ entonces $W_{\zeta\xi}$ es una función de Helson - Sarason de tipo $n + N_{\zeta\xi}$.

Demostración. Seguiremos un razonamiento análogo del Teorema 2.5 de [**16**].

$(a) \Rightarrow (b)$ Usaremos

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0} \operatorname{arc\,sen} x = 0.$$

Usando el primer límite se sigue que dado $\varepsilon > 0$, existe $r_\varepsilon \in (0,1)$ tal que para todo $r < r_\varepsilon$ se va a tener lo siguiente:

$$\lim_{r\to 0} \operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{\sqrt{1-r^2M_\mu^2}}\right) = 0,$$

por lo tanto, existe $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ tal que:

$$|r| < \delta_1 \quad \text{implica que} \quad \operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{\sqrt{1-r^2M_\mu^2}}\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Usando el segundo límite se sigue que

$$\lim_{r\to 0} \operatorname{arc\,sen}(rM_\mu) = 0$$

por lo tanto existe $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ tal que:

$$|r| < \delta_2 \;\; \text{implica} \quad |\operatorname{arc\,sen}(rM_\mu)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea

$$r_\varepsilon = \min\left\{\delta_1, \delta_2, \frac{1}{M_\mu}, 1\right\}.$$

Así, $r_\varepsilon \in (0,1)$. Tomemos r tal que $0 < r < r_\varepsilon$. Entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{\sqrt{1-r^2M_\mu^2}}\right) &< \frac{\varepsilon}{2} \\ \operatorname{arc\,sen}(rM_\mu) &< \frac{\varepsilon}{2} \\ r &< 1/M_\mu. \end{aligned}$$

Sea

$$r_{\zeta\xi}(x) = \frac{r\sqrt{W_{\zeta\zeta}(x)W_{\xi\xi}(x)}}{|W_{\zeta\xi}(x)|}$$

entonces

$$r_{\zeta\xi}(x) < rM_\mu < 1.$$

De $\lim_{n\to\infty} \rho_n(\mu) = 0$ se deduce que existe n tal que $\rho_n(\mu) \le r$.

Por el Teorema 3.15 tenemos que para todo $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$, $W_{\zeta\xi}$ tiene la representación dada por (i), (ii) y (iii), además

$$|u_{\varepsilon\zeta\xi}(x)| \leq \operatorname{arcosh}\left(\frac{\cos v_{\varepsilon\zeta\xi}(x)}{\sqrt{1 - r^2_{\zeta\xi}(x)}}\right)$$

y

$$|v_{\varepsilon\zeta\xi}(x)| \leq \operatorname{arc\,sen} r_{\zeta\xi}(x) < \frac{\pi}{2}.$$

Entonces

$$|u_{\varepsilon\zeta\xi}(x)| \leq \operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - r^2 M_\mu^2}}\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

y

$$|v_{\varepsilon\zeta\xi}(x)| \leq \operatorname{arc\,sen}(r M_\mu) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por consiguiente

$$\|u_{\varepsilon\zeta\xi}\|_\infty + \|v_{\varepsilon\zeta\xi}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$(b) \Rightarrow (a)$ Dado $r > 0$, sea

$$r_{\zeta\xi}(x) = \frac{r\sqrt{W_{\zeta\zeta}(x) W_{\xi\xi}(x)}}{|W_{\zeta\xi}(x)|}$$

entonces

$$r m_\mu < r_{\zeta\xi}(x) < r M_\mu.$$

Como $1 - r^2 M_\mu^2 < 1$ tenemos que

$$1 < \frac{1}{\sqrt{1 - r^2 M_\mu^2}}\,.$$

Sea

$$L = \operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - r^2 m_\mu^2}}\right)$$

entonces

$$L > \operatorname{arcosh}(1) = 0.$$

Tomando en cuenta que

$$L = \lim_{x \to 0} \operatorname{arcosh}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{1 - r^2 m_\mu^2}}\right)$$

y que $\frac{L}{2} > 0$, obtenemos la existencia de $\delta > 0$, tal que $|x| \leq \delta$ implica que

$$\frac{L}{2} = L - \frac{L}{2} < \operatorname{arcosh}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{1 - r^2 m_\mu^2}}\right) < L + \frac{L}{2}.$$

Por lo tanto si $|x| \leq \delta$ se tiene

$$\operatorname{arcosh}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{1 - r^2 m_\mu^2}}\right) > \frac{L}{2} > 0.$$

Sea $\varepsilon = \text{mín}\{\delta, \frac{L}{2}\}$ entonces

$$\varepsilon < \frac{L}{2} < \operatorname{arcosh}\left(\frac{\cos \varepsilon}{\sqrt{1 - r^2 m_\mu^2}}\right)$$

y

$$\varepsilon < \operatorname{arc\,sen}(r m_\mu),$$

(porque cuando definimos el arco coseno hiperbólico tomamos $\cos \varepsilon > \sqrt{1 - r^2 m_\mu^2}$).

Por hipótesis existe $n > 0$ y $r_\varepsilon < \frac{1}{M_\mu}$, tal que para todo $r < r_\varepsilon$ y $\zeta, \xi \in \mathcal{G}, W_{\zeta\xi}$ tiene la representación dada por (i), (ii) y (iii), además

$$\|u_{\varepsilon\zeta\xi}\|_\infty + \|v_{\varepsilon\zeta\xi}\|_\infty < \varepsilon.$$

Por lo tanto

$$\|v_{\varepsilon\zeta\xi}\|_\infty < \varepsilon < \operatorname{arc\,sen}(r m_\mu) < \operatorname{arc\,sen} r_{\zeta\xi}(x)$$

y

$$|u_{\varepsilon\zeta\xi}| < \varepsilon < \operatorname{arcosh}\left(\frac{\cos \varepsilon}{\sqrt{1 - r^2 m_\mu^2}}\right) < \operatorname{arcosh}\left(\frac{\cos v_{\varepsilon\zeta\xi}}{\sqrt{1 - (r_{\zeta\xi}(x))^2}}\right).$$

Por el Teorema 3.15, tenemos que

$$\rho_n(\mu) \leq r.$$

El resultado buscado se obtiene ya que $\{\rho_n(\mu)\}_{n\geq 0}$ es una sucesión decreciente. □

Capítulo 4

Velocidad de convergencia del coseno del ángulo entre el pasado y el futuro adelantado

Para medidas a valores escalares, algunos resultados acerca de la velocidad de convergencia del coseno del ángulo entre el pasado y el futuro adelantado fueron dados en [**3, 33, 34**]. El caso matricial fue considerado en [**16**].

Siguiendo [**16**] estudiaremos la velocidad de convergencia de $\rho_n(\mu)$ para medidas a valores operadores y daremos la versión correspondiente para el caso de cualquier espacio de Hilbert separable.

En esta sección para $\{r_n\}_{n\geq 0} \subset (0,1)$ y $x \in [0, 2\pi)$, consideraremos

$$R_{n\zeta\xi}(x) = r_n\, \sigma_{\zeta\xi}(x).$$

Entonces

$$r_n m_\mu < R_{n\zeta\xi}(x) < r_n M_\mu \quad \text{c.s.}$$

Teorema 4.1. *Consideremos* $\{r_n\}_{n\geq 0} \subset (0,1)$ *con* $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$. *Sea* $\mu \in \mathfrak{M}(L(\mathcal{G}))$, $\mu \geq 0$ *tal que* $d\mu = W dx$ *para una función* $W \in L^1_{L(\mathcal{G})}$. *Si* $0 < m_\mu \leq M_\mu < \infty$ *entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\rho_n(\mu) = 0(r_n)$, $n \to \infty$.

(b) *Existe* s *y* $n_o \geq 0$ *tal que para todo* $n \geq n_o$, *para* $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$ *existen funciones* $g_{n\zeta\xi} = |h_{n\zeta\xi}| e^{u_{n\zeta\xi}}$ *donde* $h_{n\zeta\xi} \in H^1$ *tal que:*

  (i) $W_{\zeta\zeta}(x) = g_{n\zeta\zeta}(x)$ *y estos es una función de Helson - Sarason de tipo* n.

  (ii) $|W_{\zeta\xi}(x)| = \sqrt{(1-(sr_n)^2(g_{n\zeta\xi}(x))^2 + (sr_n)^2 g_{n\zeta\zeta}(x) g_{n\xi\xi}(x)}$.

  (iii) $\|v_{n\zeta\xi}\|_\infty = O(r_n)$, $n \to \infty$.

  (iv) $\dfrac{\cosh |u_{n\zeta\xi}|}{\cos v_{n\zeta\xi}} - 1 = O(r_n^2)$, $n \to \infty$.

  donde $v_{n\zeta\xi}(x) = -\arg(e_{-n}(x) h_{n\zeta\xi}(x) \exp(-ix \arg W_{\zeta\xi}(x)))$.

En este caso tambien tenemos

$$W_{\zeta\xi}(x) = \lim_{n\to\infty} g_{n\zeta\xi}(x).$$

Si $W_{\zeta\xi}(x) = |W_{\zeta\xi}(x)|e^{ixN_{\zeta\xi}}$ *para un entero positivo* $N_{\zeta\xi}$ *entonces* $g_{\zeta\xi}$ *es una función de Helson - Sarason de tipo* $n + N_{\zeta\xi}$.

DEMOSTRACIÓN.

$(a) \Rightarrow (b)$ Primero observemos que existe $c, \delta > 0$ tal que si $0 < x < \delta$, entonces $\arcsin x < cx$. Y si $0 < x^2 < 1/2$ entonces $1/\sqrt{1-x^2} \leq 1 + x^2$.

Existe s y n_1 tal que si $n \geq n_1$, entonces $\rho_n(\mu) \leq sr_n < 1/M_\mu$, por tanto $sR_{n\zeta\xi}(x) < 1$.

Usando el Teorema 3.15 se sigue que para todo $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$ $W_{\zeta\xi}$ tiene la representación requerida, y

$$|u_{n\zeta\xi}(x)| \leq \operatorname{arcosh}\left(\frac{\cos v_{n\zeta\xi}(x)}{\sqrt{1-(sR_{n\zeta\xi}(x))^2}}\right) \leq \operatorname{arccosh}\left(\frac{\cos v_{n\zeta\xi}(x)}{\sqrt{1-s^2r_n^2M_\mu^2}}\right),$$

$$|v_{n\zeta\xi}(x)| \leq \arcsin sR_{n\zeta\xi}(x) \leq \arcsin(sr_nM_\mu) < \frac{\pi}{2}.$$

Pero existe n_2 tal que si $n \geq n_2$ $sr_nM_\mu < \delta$ y $sr_nM_\mu < 1/\sqrt{2}$.

Consideremos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ entonces para cada $n \geq n_0$

$$\frac{\cosh|u_{n\zeta\xi}|}{\cos v_{n\zeta\xi}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-s^2r_n^2M_\mu^2}} \leq 1 + s^2r_n^2M_\mu^2,$$

$$|v_{n\zeta\xi}(x)| \leq csr_nM_\mu.$$

$(b) \Rightarrow (a)$ Para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $1 + x^2 \leq 1/\sqrt{1-2x^2}$. Y existe $\lambda > 0$, $\delta \in (0,1)$ tal que si $0 < x < \delta$, entonces $\lambda x < \arcsin x$.

Existe c, s y n_0 tal que si $n \geq n_0$, para todo $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$, $W_{\zeta\xi}$ tiene la representación expresada en terminos s,

$$||v_{n\zeta\xi}||_\infty \leq cr_n, \qquad \frac{\cosh|u_{n\zeta\xi}|}{\cos v_{n\zeta\xi}} - 1 \leq c^2r_n^2$$

Como $cr_n \to 0$, podemos tomar c tal que $cM_\mu/m_\mu\lambda < 1$ y $\sqrt{2}cM_\mu/m_\mu < 1$.

Existe n_1 tal que $cr_n/\lambda < \delta$ si $n \geq n_1$.

Consideremos $N = \text{máx}\{n_0, n_1\}$ entonces para todo $n \geq N$

$$|v_{n\zeta\xi}(x)| \leq cr_n \leq \arcsin((c/\lambda)r_n) \leq \arcsin((c/m_\mu\lambda)R_{n\zeta\xi}(x)),$$

$$\cosh|u_{n\zeta\xi}(x)| \leq (1+c^2r_n^2)\cos v_{n\zeta\xi}(x) \leq \frac{\cos v_{n\zeta\xi}(x)}{\sqrt{1-2c^2(R_{n\zeta\xi}(x)/m_\mu)^2}}.$$

Sea $d = \text{máx}\{c/m_\mu\lambda, \sqrt{2}c/m_\mu\}$ entonces $dR_{n\zeta\xi}(x) < 1$. Asi que

$$|v_{n\zeta\xi}(x)| \leq \arcsin dR_{n\zeta\xi}(x),$$

$$|u_{n\zeta\xi}(x)| \leq \operatorname{arcosh}\left(\frac{\cos v_{n\zeta\xi}(x)}{\sqrt{1-d^2(R_{n\zeta\xi}(x))^2}}\right).$$

Por el Teorema 3.15, para cada $n \geq n_0$, $\rho_n(\mu) \leq dr_n$. □

El último resultado da condiciones necesarias y suficientes para la velocidad de convergencia de $\rho_n(\mu)$. El próximo da una condición necesaria y otra suficiente mas simple que la dada en el Teorema 4.1.

TEOREMA 4.2. *Sea $\{r_n\}_{n\geq 0} \subset (0,1)$ con $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$. Considremos $\mu \in \mathfrak{M}(L(\mathcal{G}))$, $\mu \geq 0$ tal que $d\mu = Wdx$ para una función $W \in L^1_{L(\mathcal{G})}$ y tal que $0 < m_\mu \leq M_\mu < \infty$. Si existe $n_0 \geq 0$ tal que para todo $n \geq n_0$ para todo $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$ existen funciones $g_{n\zeta\xi} = |h_{n\zeta\xi}|\exp(u_{n\zeta\xi})$, donde $h_{n\zeta\xi} \in H^1$ tal que:*

(i) *$W_{n\zeta\zeta}(x) = g_{n\zeta\zeta}(x)$ y estos es una función de Helson - Sarason de tipo n.*
(ii) *$|W_{n\zeta\xi}(x)| = \sqrt{(1-(k\,r_n)^2)(g_{n\zeta\xi}(x))^2 + (k\,r_n)^2 g_{n\zeta\zeta}(x)g_{n\xi\xi}(x)}$,*
(iii) *Si $v_{n\zeta\xi}(x) = -\arg\left(h_{n\zeta\xi}(x)\ \exp(-ix(n+\arg W_{n\zeta\xi}(x))\ )\ \right)$ entonce $u_{n\zeta\xi}$ y $v_{n\zeta\xi}$ satisface $\|u_{n\zeta\xi}\|_\infty = O(r_n)$ cuando $n\to\infty$ y $\|v_{n\zeta\xi}\|_\infty = O(r_n^2)$ cuando $n \to \infty$.*

Entonces

$$\rho_n(\mu) = O(r_n), \qquad \textit{cuando } n \to \infty.$$

DEMOSTRACIÓN. Primero observemos que existe $c > 0, d > 0$ y $\delta \in (0,1)$ tal que si $0 < x < \delta$,

$$cx < \pi/2 - \arccos x < dx \tag{4.1}$$

$$cx < \arccos\sqrt{1+x^2} < dx. \tag{4.2}$$

Por hipotesis existe n_0 y k (podemos tomar $k > c$) tal que, para todo $n \geq n_0$,

$$\|u_{n\zeta\xi}\|_\infty \leq k\,r_n\,m_\mu, \qquad \|v_{n\zeta\xi}\|_\infty \leq k\,r_n^2\,m_\mu^2 \qquad \text{y} \qquad k\,r_n/c < \delta.$$

Por lo tanto, para todo $n \geq n_0$,

$$|u_{n\zeta\xi}(x)| \leq k\, r_n\, m_\mu \leq k\, R_{n\zeta\xi}(x) \qquad \text{y} \qquad |v_{n\zeta\xi}(x)| \leq k\, r_n^2\, m_\mu^2 \leq k\,(R_{n\zeta\xi}(x))^2 \qquad \text{c.s.}$$

Asi que por (4.1 la desigualdad siguiente se mantiene casi siempre

$$|v_{n\zeta\xi}| \leq c\left(k\,\frac{R_{n\zeta\xi}}{c}\right)^2 < \pi/2 - \arccos\left(\left(\frac{k\,R_{n\zeta\xi}}{c}\right)^2\right) < \pi/2 - \arccos\left(\frac{k\,R_{n\zeta\xi}}{c}\right).$$

Esto tambien implica que

$$\cos(v_{n\zeta\xi}) \geq \cos\left(\pi/2 - \arccos\left(\frac{kR_{n\zeta\xi}}{c}\right)^2\right) = \sin\arccos\left(\frac{kR_{n\zeta\xi}}{c}\right)^2 = \sqrt{1-\left(\frac{kR_{n\zeta\xi}}{c}\right)^4}.$$

Usando (4.2) obtenemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{arccosh}\left(\frac{\cos v_{n\zeta\xi}}{\sqrt{1-(kR_{n\zeta\xi}/c)^2}}\right) &\geq \operatorname{arccosh}\left(\frac{\sqrt{1-(kR_{n\zeta\xi}/c)^4}}{\sqrt{1-(kR_{n\zeta\xi}/c)^2}}\right) \\
&= \operatorname{arccosh}\sqrt{1+(kR_{n\zeta\xi}/c)^2} \\
&\geq c(kR_{n\zeta\xi}/c) = kR_{n\zeta\xi} \\
&\geq |u_{n\zeta\xi}|.
\end{aligned}$$

Dado que

$$kR_{n\zeta\xi}/c = (k\,r_n/c)\,\sigma_{\zeta\xi},$$

tenemos

$$|v_{n\zeta\xi}| < \pi/2 - \arccos\left((k\,r_n/c)\,\sigma_{\zeta\xi}\right)$$

y

$$|u_{n\zeta\xi}| \leq \operatorname{arccosh}\left(\frac{\cos v_{n\zeta\xi}}{\sqrt{1-((k\,r_n/c)\,\sigma_{\zeta\xi})^2}}\right).$$

Por el teorema 3.15 del capítulo anterior,

$$\rho_n(\mu) \leq kr_n/c \qquad \text{si } n \geq n_0.$$

□

TEOREMA 4.3. *Consideremos* $\{r_n\}_{n\geq 0} \subset (0,1)$ *con* $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$. *Sea* $\mu \in \mathfrak{M}(L(\mathcal{G}))$, $\mu \geq 0$ *tal que* $d\mu = W dx$ *para una función* $W \in L^1_{L(\mathcal{G})}$ *y tal que* $0 < m_\mu \leq M_\mu < \infty$. *Si*

$$\rho_n(\mu) = O(r_n), \qquad \textit{cuando } n \to \infty$$

entonces existe $n_0 \geq 0$ *tal que para todo* $n \geq n_0$ *y para todo* $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$ *existen funciones* $g_{n\zeta\xi} = |h_{n\zeta\xi}| \exp(u_{n\zeta\xi})$, *donde* $h_{n\zeta\xi} \in H^1$ *tal que:*

(i) $W_{n\zeta\zeta}(x) = g_{n\zeta\zeta}(x)$ *y esta es una función de Helson - Sarason de tipo* n.

(ii) $|W_{n\zeta\xi}(x)| = \sqrt{(1-(k\,r_n)^2)(g_{n\zeta\xi}(x))^2 + (k\,r_n)^2 g_{n\zeta\zeta}(x) g_{n\xi\xi}(x)}$,

(iii) *Let* $v_{n\zeta\xi}(x) = -\arg\left(h_{n\zeta\xi}(x)\ \exp(-ix(n + \arg W_{n\zeta\xi}(x))\ )\ \right)$ *entonces* $u_{n\zeta\xi}$ *y* $v_{n\zeta\xi}$ *satisface* $\|u_{n\zeta\xi}\|_\infty = O(r_n)$ *cuando* $n \to \infty$ *y* $\|v_{n\zeta\xi}\|_\infty = O(r_n)$ *cuando* $n \to \infty$.

Demostración. Usaremos a continuación los siguientes hechos

$$\sqrt{1 + \left(y/\sqrt{1-y^2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \qquad (y \neq 0). \tag{4.3}$$

Y existe $\gamma \in (0,1)$, $b > 0$, $c > 0$ y $\delta \in (0, \gamma)$ tal que si $0 < x < \gamma$, entonces

(i) $bx < \pi/2 - \arccos x < cx$,

(ii) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} < \gamma$, si $0 < x < \delta$,

(iii) $bx < \operatorname{arccosh} \sqrt{1+x^2} < cx$,

(iv) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} < c$.

Si $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ and $\rho_n(\mu) = O(r_n)$, cuando $n \to \infty$ entonces existe n_0 y k tal que

$$\rho_n(\mu) \leq k\,r_n < \delta/M_\mu < \gamma/M_\mu \qquad \text{si } n \geq n_0.$$

Dado que $\rho_n(\mu) \leq k\,r_n$, aplicando el Teorema 3.15 tenemos que para todo $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$ existen funciones $g_{n\zeta\xi} = |h_{n\zeta\xi}| \exp(u_{n\zeta\xi})$, donde $h_{n\zeta\xi} \in H^1$ tal que:

(i) $W_{n\zeta\zeta}(x) = g_{n\zeta\zeta}(x)$ y esta es una función de Helson - Sarason de tipo n.

(ii) $|W_{n\zeta\xi}(x)| = \sqrt{(1-(k\,r_n)^2)(g_{n\zeta\xi}(x))^2 + (k\,r_n)^2 g_{n\zeta\zeta}(x) g_{n\xi\xi}(x)}$,

(iii) Sea $v_{n\zeta\xi}(x) = -\arg\left(h_{n\zeta\xi}(x)\ \exp(-ix(n + \arg W_{n\zeta\xi}(x))\ )\ \right)$ entonces $u_{n\zeta\xi}$ y $v_{n\zeta\xi}$ satisface

$$|u_{n\zeta\xi}(x)| \leq \operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{\sqrt{1-(k\,R_{n\zeta\xi}(x))^2}}\ \cos v_{n\zeta\xi}(x)\right) \quad \text{c.s.}, \tag{4.4}$$

$$|v_{n\zeta\xi}(x)| \leq \frac{\pi}{2} - \arccos\ (k\,R_{n\zeta\xi}(x)) < \frac{\pi}{2} \quad \text{c.s.} \tag{4.5}$$

Por tanto

$$|u_{n\zeta\xi}(x)| \leq \operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{\sqrt{1-(k\,r_n M_\mu)^2}}\ \cos v_{n\zeta\xi}(x)\right) \quad \text{c.s.},$$

$$|v_{n\zeta\xi}(x)| \leq \frac{\pi}{2} - \arccos\ (k\,r_n M_\mu) < \frac{\pi}{2} \quad \text{c.s.}$$

De $k\,r_n M_\mu < \gamma$, usando (i) se sigue que

$$\|v_{n\zeta\xi}\|_\infty \leq \pi/2 - \operatorname{arc}\cos(k\,r_n M_\mu) \leq c\,k\,r_n M_\mu.$$

En otras palabras, dado que $k\,r_n M_\mu < \delta$, usando (ii) tenemos que

$$\frac{k\,r_n M_\mu}{\sqrt{1-(k\,r_n M_\mu)^2}} < \gamma.$$

Como $k\,r_n M_\mu < \gamma$, de (4.3), (iii) y (iv) se sigue que

$$\begin{aligned}
\|u_{n\zeta\xi}\|_\infty &\leq \operatorname{arccosh}\left(\frac{\cos v_{n\zeta\xi}}{\sqrt{1-(k\,r_n M_\mu)^2}}\right) \leq \operatorname{arccosh}\left(\frac{1}{\sqrt{1-(k\,r_n M_\mu)^2}}\right)\\
&= \operatorname{arccosh}\sqrt{1+\left(\frac{k\,r_n M_\mu}{\sqrt{1-(k\,r_n M_\mu)^2}}\right)^2} \leq c\left(\frac{k\,r_n M_\mu}{\sqrt{1-(k\,r_n M_\mu)^2}}\right)\\
&\leq c^2 k\,r_n M_\mu.
\end{aligned}$$

□

Capítulo 5

Versiones a valores operadores del teorema de Radon-Nikodym y del teorema de F. y M. Riesz

Un resultado básico del análisis armónico es el teorema de F. y M. Riesz, el cual plantea que si los coeficientes de Fourier-Stieltjes de una medida de Borel μ en $[0, 2\pi)$ satisfacen

$$\widehat{\mu}(n) = 0 \qquad \text{para todo } n < 0,$$

entonces μ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue.

El teorema de Radon-Nikodym es un resultado fundamental en teoría de la medida. Este establece que, dado un espacio medible (Ω, Σ), si una medida σ-finita ν sobre (Ω, Σ) es absolutamente continua con respecto a la medida σ-finita μ sobre (Ω, Σ), entonce existe una función medible f sobre Ω que toma valores en $[0, \infty)$, tal que

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu$$

para cualquier conjunto $A \in \Sigma$.

Varias extensiones de estos dos resultados han sido dadas, ver por ejemplo [**28, 39, 56, 50, 48**] para extensiones del teorema de F. y M. Riesz y [**1, 13, 14**] para extensiones del teorema de Radon-Nikodym.

En [**2**] Arocena y Cotlar consideraron algunos momentos vectoriales y problemas con pesos relacionados con dilatación de núcleos de Toeplitz generalizados y comentaron acerca de la posibilidad de extender el teorema de F. y M. Riesz para medidas a valores operadores. Este capítulo fue motivado por este comentario, para mas detalles ver la Sección 5.2.

En la Sección 5.1 de este capítulo daremos una extensión a valores operadores del teorema de Radon-Nikodym y en la Sección 5.2 usaremos este resultado para establecer una versión a valores operadores de los teorema de F. y M. Riesz.

Los resultados de este capítulo aparecieron en la publicación [**7**].

5.1. Medidas a valores operadores en un espacio de Hilbert y una versión del teorema de Radon-Nikodym

A lo largo de este capítulo $(\mathcal{G}, \langle\ ,\ \rangle_{\mathcal{G}})$ es un espacio de Hilbert separable, $\|.\|_{\mathcal{G}}$ es la norma asociada y $L(\mathcal{G})$ denota el espacio de los operadores lineales continuos sobre $\mathcal{G}$.

Definición 5.1. Consideremos $\mu : \mathcal{B} \to L(\mathcal{G})$ una función.

Decimos que μ es una *medida en sentido fuerte* a valores en $L(\mathcal{G})$ sobre $[0, 2\pi)$, si

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \Delta_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(\Delta_n),$$

converge en norma, para cualquier sucesión disjunta $\{\Delta_n\} \subset \mathcal{B}$. Esta propiedad es también conocida como *aditividad fuerte*.

El conjunto de las medidas en sentido fuerte acotadas, a valores en $L(\mathcal{G})$ sobre $[0, 2\pi)$, se denotará por $\mathfrak{M}_{\mathrm{s}}(L(\mathcal{G}))$.

Es claro que $\mathfrak{M}_{\mathrm{s}}(L(\mathcal{G})) \subset \mathfrak{M}(L(\mathcal{G}))$, también se va a tener que $\mathfrak{M}_{\mathrm{s}}(L(\mathcal{G})) \neq \mathfrak{M}(L(\mathcal{G}))$ como lo muestra el siguiente ejemplo.

Consideremos $\mathcal{G} = L^2$ y sea $\mu : \mathcal{B} \to L(\mathcal{G})$ definido por $\mu(\Delta)\xi = \xi\, 1_{\Delta}$, donde 1_{Δ} es la función característica del conjunto Δ.

Para $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$ y $\Delta \in \mathcal{B}$ tenemos

$$\mu_{\zeta\xi}(\Delta) = \int_{\Delta} \zeta(x)\, \overline{\xi(x)}\, dx.$$

Así que μ es una medida a valores en $L(\mathcal{G})$ sobre $[0, 2\pi)$, medible en el sentido débil.

Por otro lado, si $\Delta, \Delta' \in \mathcal{B}$ son tales que $\Delta' \subset \Delta$ y $\mathbf{m}(\Delta \setminus \Delta') > 0$ entonces

$$\|\mu(\Delta) - \mu(\Delta')\|^2_{L(\mathcal{G})} = \sup_{\|\xi\|_{\mathcal{G}}=1} \|\mu(\Delta)\xi - \mu(\Delta')\xi\|^2_{\mathcal{G}} = \sup_{\|\xi\|_{\mathcal{G}}=1} \int_{\Delta\setminus\Delta'} |\xi(x)|^2\, dx = 1.$$

Así que μ no es fuertemente aditiva.

Definición 5.2. Sea μ una medida en sentido débil a valores en $L(\mathcal{G})$ sobre $[0, 2\pi)$, se dice que μ tiene *variación finita* si

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|\mu(\Delta_n)\|_{L(\mathcal{G})} < +\infty,$$

para cualquier sucesión disjunta $\{\Delta_n\} \subset \mathcal{B}$.

Observación 5.3. Para $\mu \in \mathfrak{M}_{\mathrm{s}}(L(\mathcal{G}))$ se tiene que μ es de variación finita si y sólo si

$$\sup \sum_{n=1}^{+\infty} \|\mu(\Delta_n)\|_{L(\mathcal{G})} < +\infty,$$

donde el supremo es tomado sobre todas las particiones $\{\Delta_n\}$ de $[0, 2\pi)$ tales que $\{\Delta_n\} \subset \mathcal{B}$.

Esta propiedad se expresa usualmente diciendo que μ es de *variación acotada.*

Consideremos $\mu \in \mathfrak{M}(L(\mathcal{G}))$ absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, es decir si $\mathbf{m}(A) = 0$, entonces $\mu(A) = 0$ para $A \in \mathcal{B}$. En este caso para cada $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$ existe una, única c.s., función integrable Lebesgue $h^{\zeta\xi} : [0, 2\pi) \to \mathbb{C}$ tal que

$$d\mu_{\zeta\xi}(x) = h^{\zeta\xi}(x)\, dx.$$

Una pregunta natural es determinar bajo qué condiciones existe una función débilmente medible $F : [0, 2\pi) \to L(\mathcal{G})$ tal que para todo $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$

$$h^{\zeta\xi}(x) = F_{\zeta\xi}(x).$$

El Teorema 5.4, que sigue a continuación, da condiciones necesarias y suficientes para una respuesta afirmativa.

Teorema 5.4. *Consideremos $\mu \in \mathfrak{M}(L(\mathcal{G}))$ absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue. Para $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$, sea $h^{\zeta\xi}$ la función integrable tal que $d\mu_{\zeta\xi}(x) = h^{\zeta\xi}(x)\, dx$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes*

(a) $\mu \in \mathfrak{M}_{\mathrm{s}}(L(\mathcal{G}))$ *y μ tiene variación finita.*

(b) *Existe una función $F \in L^1_{L(\mathcal{G})}$, única c.s., tal que*

$$h^{\zeta\xi}(x) = F_{\zeta\xi}(x) \qquad c.s.(x)$$

(c) *Existe una función integrable $y : [0, 2\pi) \to [0, +\infty)$ tal que para cada $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$*

$$|h^{\zeta\xi}(x)| \leq y(x)\, \|\zeta\|_{\mathcal{G}}\, \|\xi\|_{\mathcal{G}} \qquad c.s.(x).$$

Demostración.

(a) $\Rightarrow$ (b) Esta parte se sigue de un resultado de Alvarez de Araya (Teorema 2.4 de [**1**]), ver también el libro de Diestel y Uhl [**14**].

(b) $\Rightarrow$ (c) Si $h^{\zeta\xi}(x) = F_{\zeta\xi}(x)$ donde $F \in L^1_{L(\mathcal{G})}$, entonces

$$|h^{\zeta\xi}(x)| = |\langle F(x)\zeta, \xi\rangle_{\mathcal{G}}| \leq \|F(x)\|_{L(\mathcal{G})}\, \|\zeta\|_{\mathcal{G}}\, \|\xi\|_{\mathcal{G}},$$

así que es suficiente tomar $y(x) = \|F(x)\|_{L(\mathcal{G})}$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Tenemos que mostrar que μ es σ-aditiva en el sentido fuerte y que μ es de variación finita.

Sean $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$ tales que $\|\zeta\|_{\mathcal{G}} = \|\xi\|_{\mathcal{G}} = 1$, entonces para cualquier $\Delta \in \mathcal{B}$ tenemos

$$|\langle \mu(\Delta)\zeta, \xi\rangle| = \left| \int_{\Delta} h^{\zeta\xi}(x)\, dx \right| \leq \int_{\Delta} y(x)\, dx.$$

Por lo tanto

$$\|\mu(\Delta)\|_{L(\mathcal{G})} = \sup_{\|\zeta_{\text{-}}\mathcal{G}| = \|\xi\|_{\mathcal{G}} = 1} |\langle \mu(\Delta)\zeta, \xi\rangle| \leq \int_{\Delta} y(x)\, dx.$$

Sea $\{A_n\} \subset \mathcal{B}$ una sucesión disjunta, consideremos $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ y para $N \in \mathbb{N}$, sea $B_N = \bigcup_{n=1}^{N} A_n$. Tenemos que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|\mu(A_n)\|_{L(\mathcal{G})} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{A_n} y(x)\, dx = \int_{A} y(x)\, dx < +\infty.$$

También tenemos

$$|\langle (\mu(A) - \mu(B_N))\zeta, \xi\rangle| = \left| \int_{A \setminus B_N} h^{\zeta\xi}(x)\, dx \right| \leq \int_{A \setminus B_N} y(x)\, dx.$$

Por lo tanto

$$\|\mu(A) - \mu(B_N)\|_{L(\mathcal{G})} = \|\mu(A \setminus B_N)\|_{L(\mathcal{G})} \leq \int_{A \setminus B_N} y(x)\, dx.$$

Dado que y es integrable $\int_{A \setminus B_N} y(x)\, dx \to 0$ cuando $N \to \infty$, sigue que $\mu \in \mathfrak{M}_{\mathrm{s}}(L(\mathcal{G}))$.

□

5.1.1. Un ejemplo de una medida $\mu \in \mathfrak{M}(L(\mathcal{G}))$ para la cual no existe $F \in L^1_{L(\mathcal{G})}$ tal que $h^{\zeta\xi}(x) = F_{\zeta\xi}(x)$ c.s.(x).

Consideremos una función $\phi : [0, 2\pi) \to \mathbb{C}$ tal que

(a) $\phi \in L^1$.

(b) ϕ es continua en $(0, 2\pi)$.

(c) ϕ no es acotada.

Sea $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset (0, 2\pi)$ un conjunto denso y sea $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ una base ortonormal de $\mathcal{G}$.

Consideremos $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$ dados por $\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tau_k$, $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \tau_k$. Para un conjunto de Borel $\Delta \subset [0, 2\pi)$, consideremos $\Omega_\Delta : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\Omega_\Delta(\zeta, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{b_k} \int_{\Delta} \phi(x - x_k)\, dx.$$

Tenemos que Ω_Δ es una forma sesquilineal. También

$$\begin{aligned}
|\Omega_\Delta(\zeta,\xi)| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k\overline{b_k}|\,\|\phi\|_1 \\
&\leq \|\phi\|_1 \left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|^2\right)^{1/2} \\
&= \|\phi\|_1\,\|\zeta\|_{\mathcal{G}}\,\|\xi\|_{\mathcal{G}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto existe una función $\mu : \mathcal{B} \to L(\mathcal{G})$ tal que

$$\Omega_\Delta(\zeta,\xi) = \langle \mu(\Delta)\zeta, \xi\rangle_{\mathcal{G}}.$$

De la última desigualdad, claramente

$$\|\mu(\Delta)\|_{L(\mathcal{G})} \leq \|\phi\|_1.$$

Ahora consideremos una sucesión de conjuntos de Borel disjuntos $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \subset [0, 2\pi)$ y sea

$$\Delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n.$$

Con el objeto de probar que μ es una medida a valores en $L(\mathcal{G})$ en el sentido débil necesitamos considerar series iteradas. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle \mu(\Delta)\zeta,\xi\rangle_{\mathcal{G}} &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k\overline{b_k} \int_\Delta \phi(x-x_k)\,dx \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} a_k\overline{b_k} \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Delta_n} \phi(x-x_k)\,dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_k\overline{b_k} \int_{\Delta_n} \phi(x-x_k)\,dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \langle \mu(\Delta_n)\zeta,\xi\rangle_{\mathcal{G}},
\end{aligned}$$

porque

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left|a_k\overline{b_k}\int_{\Delta_n}\phi(x-x_k)\,dx\right| &\leq \sum_{k=1}^{\infty}|a_k\overline{b_k}|\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Delta_n}|\phi(x-x_k)|\,dx\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}|a_k\overline{b_k}|\int_{\Delta}|\phi(x-x_k)|\,dx\\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty}|a_k\overline{b_k}|\,\|\phi\|_1\\ &\leq \|\phi\|_1\,\|\zeta\|_{\mathcal{G}}\,\|\xi\|_{\mathcal{G}}.\end{aligned}$$

Así que $\mu \in \mathfrak{M}(L(\mathcal{G}))$.

De la definición de μ se sigue que

$$\mu_{\zeta\xi}(\Delta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\overline{b_k}\int_{\Delta}\phi(x-x_k)\,dx$$

y

$$|\mu_{\zeta\xi}(\Delta)| \leq c\,\|\zeta\|_{\mathcal{G}}\,\|\xi\|_{\mathcal{G}}.$$

Por tanto

$$d\mu_{\zeta\xi}(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\overline{b_k}\,\phi(x-x_k)\right)\,dx,$$

así que la función $h^{\zeta\xi}$ correspondiente para esta medida está dada por

$$h^{\zeta\xi}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\overline{b_k}\,\phi(x-x_k).$$

Notemos que

$$h^{\tau_k\tau_k}(x) = \phi(x-x_k) \quad \text{c.s.}(x) \quad k = 1, 2, \ldots$$

Ahora mostraremos que no existe $F \in L^1_{L(\mathcal{G})}$ tal que $h^{\zeta\xi}(x) = F_{\zeta\xi}(x)\,\text{c.s.}(x)$.

Supongamos que existe una función débilmente medible $F : [0, 2\pi) \to L(\mathcal{G})$ tal que para cada $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$

$$h^{\zeta\xi}(x) = F_{\zeta\xi}(x) \qquad \text{c.s.}(x).$$

Entonces tendríamos que

$$|h^{\zeta\xi}(x)| = |\langle F(x)\zeta, \xi\rangle_{\mathcal{G}}| \leq \|F(x)\|_{L(\mathcal{G})}\|\zeta\|_{\mathcal{G}}\,\|\xi\|_{\mathcal{G}} \qquad \text{c.s.}(x).$$

En particular,

$$|\phi(x - x_k)| = |h^{\tau_k \tau_k}(x)| \leq \|F(x)\|_{L(\mathcal{G})} \quad \text{c.s.}(x) \quad k = 1, 2, \dots$$

Esto no es posible porque $\|F(\cdot)\|_{L(\mathcal{G})}$ debe ser finito c.s., además ϕ es continua excepto en 0, ϕ es acotada y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un conjunto denso en $(0, 2\pi)$.

5.2. Una versión a valores operadores del teorema de F. y M. Riesz

La motivación para este capítulo es el siguiente comentario, que apareció en un artículo de Arocena y Cotlar [**2**]: si $\mu \in \mathfrak{M}(L(\mathcal{G}))$, $\widehat{\mu}(n) = 0$ para $n < 0$ y $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$ entonces para la medida escalar $\mu_{\zeta\xi}$ tenemos que $\widehat{\mu_{\zeta\xi}}(n) = 0$ para $n < 0$, de allí que exista $h^{\zeta\xi} \in H^1$ tal $d\mu_{\zeta\xi}(x) = h^{\zeta\xi}(x)\, dx$. Pero aunque

$$|\mu_{\zeta\xi}(\Delta)| \leq c\, \|\zeta\|_{\mathcal{G}}\, \|\xi\|_{\mathcal{G}}$$

no podemos decir que existe un operador $F(x) \in L(\mathcal{G})$ tal que

$$\langle F(x)\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{G}} = h^{\zeta\xi}(x) \qquad \text{c.s.}(x).$$

Sin embargo la familia $\{h_{\zeta\xi}\}_{\zeta,\xi \in \mathcal{G}}$ satisface:

$$h_{\lambda\zeta_1 + \zeta_2, \xi} = \lambda h_{\zeta_1\xi} + h_{\zeta_2\xi}$$
$$h_{\zeta\xi} = \overline{h_{\xi\zeta}}$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, $\zeta_1, \zeta_2, \zeta, \xi \in \mathcal{G}$.

Como es natural, definiremos

$$H^1_{L(\mathcal{G})} = \{F \in L^1_{L(\mathcal{G})} :\ \widehat{F}(n) = 0 \text{ si } n < 0\}.$$

TEOREMA 5.5. *Sea $\mu \in \mathfrak{M}_{\mathrm{s}}(L(\mathcal{G}))$ una medida que tiene variación finita tal que $\widehat{\mu}(n) = 0$ si $n < 0$. Entonces existe $F \in H^1_{L(\mathcal{G})}$ tal que*

$$d\mu(x) = F(x)\, dx.$$

DEMOSTRACIÓN.

Se sigue que, para cada $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$, $\widehat{\mu_{\zeta\xi}}(n) = 0$ para todo $n < 0$. Así que del teorema de F. y M. Riesz se tiene que cada medida $\mu_{\zeta\xi}$ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue.

Por lo tanto μ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue. Del Teorema 5.4 se tiene que existe una función $F \in L^1_{L(\mathcal{G})}$, única c.s., tal que

$$h^{\zeta\xi}(x) = F_{\zeta\xi}(x) \qquad \text{c.s.}(x).$$

Finalmente es claro que $F \in H^1_{L(\mathcal{G})}$. □

Observación 5.6. La hipótesis en el último teorema no puede ser omitida, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Para el ejemplo dado en la Subsección 5.1.1 consideremos el caso particular en que la función ϕ es la siguiente función

$$\phi(x) = \frac{1}{1 - e^{ix}} \left(\frac{1}{e^{ix}} \log \frac{1}{1 - e^{ix}} \right)^{-2},$$

para $x \neq 0$ y $x \neq 2\pi$.

Tenemos que $\phi \in H^1$, ver [**20**, pag. 13, ejer. 3].

Con la misma notación de la Subsección 5.1.1 tenemos que

$$h^{\zeta\xi}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{b_k}\, \phi(x - x_k).$$

Dado que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| a_k \overline{b_k}\, \phi(\cdot - x_k) \right\|_1 \leq \|\phi\|_1 \, \|\zeta\|_{\mathcal{G}} \, \|\xi\|_{\mathcal{G}},$$

tenemos que $h^{\zeta\xi} \in H^1$ para cada $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$.

De allí que la medida a valores operadores correspondiente μ, pertenece a $\mathfrak{M}(L(\mathcal{G}))$ y $\widehat{\mu}(n) = 0$ si $n < 0$. Pero, como se probó en la subsección 5.1.1, no existe $F \in L^1_{L(\mathcal{G})}$ tal que $h^{\zeta\xi}(x) = F_{\zeta\xi}(x)$ c.s.(x).

Bibliografía

[1] J. Alvarez de Araya. A Radon-Nikodym theorem for vector and operator valued measures. *Pacific Journal of Mathematics*, 29, N. 1 (1969), 1-10.

[2] R. Arocena, M. Cotlar. *Dilation of generalized Toeplitz kernels and some vectorial moment and weighted problems*. Lecture Notes in Math. Springer 908 (1982), 169 - 188.

[3] R. Arocena, M. Cotlar, C. Sadosky. *Weighted inequalities in L^2 and lifting properties*. Adv. Math. Suppl. Stud. 7A (1981) 95-128.

[4] D. Arov, H. Dym. *Matricial Nehari problems, J-inner matrix functions and the Muckenhoupt condition.* J. Funct. Anal. 181, No.2 (2001), 227-299.

[5] R. Bruzual, M. Domínguez. Dilatación, Extensión y Representación de Formas Definidas Positivas. Publicaciones del Postgrado en Matemática de la Facultad de Ciencias de la UCV, 30 Aniversario (2006).

[6] R. Bruzual, M. Domínguez. *Operator-valued extension of the theorem of Helson and Szegö*. Operator Theory: Advances and Applications, 149 (2004), 139-152.

[7] R. Bruzual, M. Domínguez, J. Suárez. *Operator valued versions of the Radom-Nikodym theorem and of the F. and. M Riesz theorem*. Extracta-Mathematicae. Aceptado en diciembre de 2012.

[8] R. Cheng. *Analytic range functions of several variables*. Can. J. Math. 47, No.3 (1995), 462-473.

[9] M. Cotlar. *Núcleos Invariantes y Teoremas de Dilatación, Parametrización y Predicción.* Asociación Matemática Venezolana, Boletín, Vol. I, N°1 (1994).

[10] M. Cotlar, R. Bruzual, P. Alegría, M. Domínguez, J. Giménez, S. Marcantognini. Extensión y Representación de Formas Invariantes en la Teoría de Interpolación, Predicción y Dilatación. Tercera Escuela Venezolana de Matemáticas (1990).

[11] M. Cotlar, C. Sadosky. *On the Helson-Szegö theorem and a related class of modified Toeplitz kernels*. Proc. Symp. Pure Math. AMS., 35-I, (1979) 383-407.

[12] A. Devinatz. *An extension of a limit theorem of G. Szegö*, J. Math. Anal. Appl. 14 (1966), 499-510.

[13] J. Diestel. Geometry of Banach spaces - Selected topics. Lecture Notes in Mathemathics 485. Springer Verlag (1975).

[14] J. Diestel, J. Uhl. Vector measures. Mathematical Surveys 15. American Mathematical Society. (1977).

[15] M. Domínguez. *Rate of convergence of the maximal correlation coefficient in the continuous case*. Rev. Brasileira de Probabilidade e Estatistica, Vol. 3, N. 2 (1989), 111 - 124.

[16] M. Domínguez. *A matricial extension of the Helson-Sarason theorem and a characterization of some multivariate linearly completely regular processes.* Journal of Multivariate Analysis, 31-2 (1989), 289-310.

[17] M. Domínguez. *Teoría de predicción y desigualdades ponderadas.* Tesis (Doctorado en Matemática), Universidad Central de Venezuela (1990).

[18] M. Domínguez. *Mixing coefficient, generalized maximal correlation coefficients, and weakly positive measures.* J. Multivariate Anal. 43, No.1 (1992), 110-124.

[19] J. Duoandikoetxea. *Desigualdades con peso en análisis armónico.* Séptima Escuela Venezolana de Matemáticas. Publicaciones de la Asociación Matemática Venezolana-IVIC Universidad de Los Andes, Mérida. Venezuela (1994)

[20] P. L. Duren. Theory of H^p spaces. New York and London: Academic Press XII (1970).

[21] H. Dym, H. P. McKean. *Fourier Series and Integrals.* Academic Press (1972).

[22] H. Dym, H. P. McKean. *Gaussian processes, function theory, and the inverse spectral problem.* Probability and Mathematical Statistics. Vol. 31. New York San Francisco - London: Academic Press, a subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers. XI (1976).

[23] B. Fritzsche, B. Kirstein. *A stochastic characterization of Arov-completable matrix-valued Schur functions.* Math. Nachr. 169 (1994), 135-148.

[24] J. Garnett. *Bounded analytic functions.* Academic Press, 1981.

[25] J. García-Cuerva. *Teoría de pesos y funciones de oscilación media acotada.* Pub. Mat. UAB, Vol. 26, N° 1 Mar (1982).

[26] J. García-Cuerva. *José Luis Rubio de Francia (1949-1988).* Collect Math. 38, No.1 (1987), 3-15.

[27] E. Hayashi. *The spectral density of a strongly mixing stationary gaussian process; Pacific Journal of Mathematics.* Vol. 96, N.2 (1981), 343 - 359.

[28] H. Helson, D. Lowdenslager. Prediction theory and Fourier series in several variables. *Acta Math.* 99 (1958), 165-202.

[29] H. Helson, D. Sarason. *Past and future.* Math. Scand. 21 (1967), 5 - 16.

[30] H. Helson, G. Szegö. *A problem in prediction theory.* Ann. Math. Pura Appl. 51 (1960), 107-138.

[31] K. Hoffman. Banach Spaces of Analytic Functions, Englewood Cliffs, N.J. (1962).

[32] R. Hunt, B. Muckenhoupt, R. Wheeden. *Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform.* Trans. Am. Math. Soc. 176 (1973), 227-251.

[33] I.A. Ibragimov. *On a strong mixing condition for stationary Gaussian processes.* (English. Russian original) Sov. Math., Dokl. 6, (1965), 356-359; translation from Dokl. Akad. Nauk SSSR 161, (1965), 33-36.

[34] I.A. Ibragimov. *On the spectrum of stationary Gaussian sequences satisfying the strong mixing condition.* I: Necesary conditions. (English. Russian original) Theor. Probab. Appl. 10, (1965), 85-106; translation from Teor. Veroyant. Primen. 10 (1965), 95-116.

[35] I. A. Ibragimov. *Conditions for the complete regularity of continuous time stationary processes.* Sem. Math. V. A. Steklov Math. Inst. Leningrad, 12 (1971), 29 - 49.

[36] I. A. Ibragimov, Yu. Rozanov. *Gaussian random procesess.* Applications of Mathematics, Vol. 9, Springer-Verlag, New York (1978).

[37] A.N. Kolmogorov, Yu. A. Rozanov. *On a strong mixing condition for a stationary random Gaussian process,* Teor. Varotyatnost.i Primenen. 5 (1980), 222-227.

[38] M. Louzon, S. Treil. *Scalar and vector Muckenhoupt weights.* Indiana Univ. Math. J. 56, No. 4 (2007), 1989-2015.

[39] T. Lukashenko. On functions of generalized bounded variation and functions absolutely continuous in a generalized sense. *Sov. Math., Dokl.* 25 (1982), 379-382.

[40] A. G. Miamee, M. Pourahmadi. *Best approximations in $L^p(d\mu)$ and prediciton problems of szegö, Kolmogorov, Yaglom, and Nakazi. J. London. Math. Soc.*(2) 38 (1988), 133-145.

[41] M. P. Moklyachuk. *Stochastic autoregressive sequences and minimax interpolation.* (English. Ukrainian original) Theory Probab. Math. Stat. 48 (1994), 95-103; translation from Teor. Jmovirn. Mat. Stat. 48, (1993) 135-146.

[42] B. Muckenhoupt. *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function.* Trans. Am. Math. Soc. 165, (1972) 207-226.

[43] T. Nakazi. Two problems in prediction theory. Studia Mathematica T. LXXVIII, 1984.

[44] T. Nakazi, K. Takahashi. Prediction n units of time ahead. *Proc. Amer. Math. Soc.* 80 (1980), 658-659.

[45] M. Pourahmadi. *The Helson-Sarason-Szegö theorem and the Abel summability of the series for the predictor.* Proc. Am. Math. Soc. 91 (1984), 306-308.

[46] M. Pourahmadi. *Foundations of time series analysis and prediction theory.* Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. Applied Probability and Statistics. Chichester: Wiley. xviii, 414 (2001), 66-95.

[47] M. Pourahmadi, A. Inoue, Y. Kasahara. *A prediction problem in $L^2(w)$.* Proc. Am. Math. Soc. 135, No. 4 (2007), 1233-1239.

[48] M. Roginskaya, M. Wojciechowski. Singularity of vector valued measures in terms of Fourier transform. *J. Fourier Anal. Appl.* 12, No. 2 (2006), 213-223.

[49] H. L. Royden. *Real Analysis*, Collier Macmillan International Editions (1968).

[50] S. Somasundaram. A generalization of F. and M. Riesz theorem. *Acta Cienc. Indica, Math.* 21, No.1 (1995), 67-72.

[51] J. Suárez. *Extensión a valores operadores del teorema de Helson-Sarason*. Trabajo de Grado (Maestría en Matemática). Universidad Central de Venezuela (2007).

[52] B. Sz.-Nagy, C. Foias. *Harmonic analysis of operators on Hilbert space*, North Holland Publishing Co. (1970).

[53] S. Treil, A. Volberg. *Wavelets and the angle between past and future.* J. Funct. Anal. 143, No.2 (1997), 269-308.

[54] N. Wiener, P. Masani. *The prediction theory of multivariate stochastic processes. I.* The regularity condition. Acta Math. 98 (1957), 111-150.

[55] N. Wiener, P. Masani. *The prediction theory of multivariate stochastic processes. II.* The linear predictor. Acta Math. 99 (1958), 93-137.

[56] L. Znamenskaya. Generalized theorems of F. and M. Riesz and the existence of a multidimensional formula of Carleman. *Sib. Mat. Zh.* 29, No.4, 170 (1988), 75-79.