UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
POSTGRADO EN MATEMÁTICA

Extensión a valores operadores del teorema de Helson Sarason

Autor: Lic. Javier Suárez
Tutor: Dra. Marisela Domínguez.

Trabajo de Grado de Maestría presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela para optar al título de Magister Scientiarium, Mención Matemática.

Caracas, Venezuela
2 de Noviembre de 2006

Índice general

Resumen

Consideremos una medida finita de Borel μ en el círculo unitario $\mathbb{T} \approx [0, 2\pi]$.

El teorema de Helson y Sarason da una condición necesaria y suficiente para que el pasado y el futuro adelantado tiendan a ser ortogonales en $L^2(\mathbb{T}, \mu)$ (ver Teorema 5 de [**7**]).

En este trabajo se da una versión a valores operadores de este teorema, ver Teorema 3.4.

Introducción

Consideremos una medida finita de Borel μ en el círculo unitario $\mathbb{T} \approx [0, 2\pi]$. Comenzaremos presentando tres resultados clásicos en teoría de predicción:

(1) El teorema de Helson y Szegö [**8**] da una condición necesaria y suficiente para que la transformada de Hilbert sea acotada sobre $L^2(\mathbb{T}, \mu)$. La condición es que μ debe ser absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, $d\mu = w dx$, y la densidad w tiene la forma

$$w = \exp(u + \widetilde{v}),$$

con $u \in L^\infty(\mathbb{T})$ y $\|v\|_\infty < \frac{\pi}{2}$ donde $\widetilde{v}$ denota la conjugada armónica de v. Sean $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ las variedades lineales generadas por $\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}, k \geq 0\}$ y $\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}, k \leq -1\}$ respectivamente, la condición de Helson y Szegö también dan una condición necesaria y suficiente para que $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ tengan un ángulo, $\alpha_0(\mu)$, positivo en $L^2(\mathbb{T}, \mu)$.

(2) Este resultado se puede extender cambiando $\mathcal{P}_1$ por $e_n\mathcal{P}_1$ donde $e_n\mathcal{P}_1$ es la variedad lineal generada por $\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}, k \geq n\}$. Más precisamente Helson y Sarason extendieron el resultado anterior (ver Teorema 6 de [**7**]). Ellos probaron que en el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{T}, \mu)$ los subespacios $e_n\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ tienen un ángulo, $\alpha_n(\mu)$, positivo en $L^2(\mathbb{T}, \mu)$ si y sólo si μ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue y la densidad w tiene la forma:

$$w = |p_1|^2 \exp(u + \widetilde{v})$$

donde p_1 es un polinomio de grado menor o igual que n y $u \in L^\infty(\mathbb{T})$ y $\|v\|_\infty < \pi/2$.

(3) El teorema de Helson y Sarason que más nos interesa para este trabajo da una condición necesaria y suficiente para que $e_n\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ tiendan a ser ortogonales (ver Teorema 5 de [**7**] y Teorema 3 del Capítulo V de [**9**]). Si tomamos $\rho_n(\mu) = \cos \alpha_n(\mu)$, este teorema da una condición necesaria y suficiente para que

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n(\mu) = 0.$$

La condición es que: μ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue y para todo $\varepsilon > 0$ existen funciones reales y acotadas u_ε, v_ε y un polinomio p_ε de grado n tales que la densidad w tiene la forma:

$$w = |p_\varepsilon|^2 \exp(u_\varepsilon + \widetilde{v_\varepsilon})$$

y $\|u_\varepsilon\|_\infty + \|v_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon$.

Estos problemas se pueden plantear en el caso multivariado. Ya se han publicado algunos resultados:

(a) Domínguez dió versiones de estos tres teoremas para el caso de medidas a valores matriciales (ver [**5**]).

(b) Bruzual y Domínguez dieron una versión a valores operadores de los dos primeros teoremas (ver [**3**]).

El aporte más importante del presente trabajo es dar una versión a valores operadores del tercer teorema mencionado antes. El enunciado y la demostración están inspirados en la versión matricial dada en [**5**].

El trabajo se ha estructurado en tres capítulos. En el capítulo 1 se presentan los preliminares necesarios para poder desarrollar los temas que consideraremos. Se definen los polinomios trigonométricos a valores operadores, la transformada de Hilbert de estos polinomios, funciones a valores vectores en un espacio de Hilbert, funciones a valores operadores y medidas a valores operadores.

En el capítulo 2 presentamos la versión a valores operadores del teorema de Helson-Szegö y de uno de los teoremas de Helson-Sarason dadas en [**3**].

En el capítulo 3, siguiendo las ideas de [**5**], presentamos la versión a valores operadores del teorema de Helson-Sarason que da la condición necesaria y suficiente para que tiendan a ser ortogonales los espacios que generalizan a $e_n\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$.

CAPíTULO 1

Preliminares

En este Capítulo fijamos la notación y presentamos las proposiciones dadas por Bruzual y Domínguez en [**3**] que permiten presentar los resultados de este trabajo.

En este trabajo:

(a) $(\mathcal{G}, \langle , \rangle_{\mathcal{G}})$ es un espacio de Hilbert separable, con escalares complejos, $\|\cdot\|_{\mathcal{G}}$ es la norma asociada y $L(\mathcal{G})$ operadores lineales continuos en $\mathcal{G}$.
(b) $\mathbb{T} \approx [0, 2\pi)$ es el toro unidimensional y $\mathcal{B}(\mathbb{T})$ es la σ- álgebra de Borel de $\mathbb{T}$.
(c) dx denota la medida normalizada de Lebesgue sobre $\mathbb{T}$.
(d) Para $n \in \mathbb{Z}$, $e_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ es la función dada por $e_n(x) = e^{inx}$.
(e) $L^p(\mathbb{T})$ es el espacio usual de Lebesgue, para $1 \leq p \leq \infty$.
(f) $H^p(\mathbb{T})$ es el espacio usual de Hardy, para $1 \leq p \leq \infty$.

1. Polinomios trigonométricos a valores vectores en un espacio de Hilbert y transformada de Hilbert.

Definición 1.1. Un *polinomio trigonométrico* a valores en $\mathcal{G}$ es una función $\varphi : \mathbb{T} \to \mathcal{G}$ tal que

$$\varphi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \xi_n \, e_n(x),$$

donde $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathcal{G}$ tiene soporte finito. En este caso $\widehat{\varphi}(n)$ denota ξ_n.

Sea $\mathcal{P}(\mathcal{G})$ el espacio de todos los polinomios trigonométricos. Es conocido que $P(\mathcal{G})$ es una subálgebra del espacio de todas las funciones continuas $\mathcal{G}$ de $\mathbb{T}$ en $\mathcal{G}$.

La transformada de Hilbert H se puede definir usando los coeficientes de Fourier, para $\varphi \in \mathcal{P}(\mathcal{G})$ sea

$$(\mathsf{H}\varphi)\widehat{\ }(n) = -i \, \mathrm{sig}(n) \, \widehat{\varphi}(n)$$

donde

$$\mathrm{sig}(n) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad n \geq 0 \\ -1, & \text{si} \quad n < 0 \end{cases}$$

2. Funciones a valores vectores en un espacio de Hilbert.

Dados $f : \mathbb{T} \to \mathcal{G}$ y $\zeta \in \mathcal{G}$ denotaremos por f_ζ a la función a valores complejos $f_\zeta : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, dada por

$$f_\zeta(x) = \langle \zeta, f(x) \rangle_{\mathcal{G}}\,.$$

Definición 1.2. Sea $f : \mathbb{T} \to \mathcal{G}$ se dice que f es *débilmente medible* si para todo $\zeta \in \mathcal{G}$ la función f_ζ es medible.

Denotemos por $L^\infty_{\mathcal{G}}(\mathbb{T})$ el conjunto de todas las funciones $F : \mathbb{T} \to \mathcal{G}$ que son débilmente medibles y esencialmente acotadas.

Para $1 \leq p < \infty$ denotemos por $L^p_{\mathcal{G}}(\mathbb{T})$ el conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{T} \to \mathcal{G}$ que son débilmente medibles y tales que:

$$\int_0^{2\pi} \|f(x)\|^p_{\mathcal{G}}\, dx < \infty.$$

Se tiene que $L^2_{\mathcal{G}}(\mathbb{T})$ es un espacio de Hilbert bajo el producto interno:

$$\langle f, g \rangle_{L^2_{\mathcal{G}}(\mathbb{T})} = \int_0^{2\pi} \langle f(x), g(x) \rangle_{\mathcal{G}}\, dx.$$

También se tiene que $\mathcal{P}(\mathcal{G})$ es denso en $L^p_{\mathcal{G}}(\mathbb{T})$ para $1 \leq p < \infty$.

Proposición 1.3. *Si $f \in L^1_{\mathcal{G}}(\mathbb{T})$ y $\zeta \in \mathcal{G}$ entonces $f_\zeta \in L^1(\mathbb{T})$.*

Más detalles acerca de los espacios $L^p_{\mathcal{G}}(\mathbb{T})$ pueden ser vistos en [**11**].

Proposición 1.4. *Si $f \in L^1_{\mathcal{G}}(\mathbb{T})$ y $n \in \mathbb{Z}$ existe un vector $\xi_n \in \mathcal{G}$ tal que*

$$\widehat{f_\zeta}(n) = \langle \zeta, \xi_n \rangle_{\mathcal{G}}$$

donde $\widehat{f_\zeta}(n)$ denota el coeficiente usual de Fourier de f_ζ.

Demostración. Sean $f \in L^1_{\mathcal{G}}(\mathbb{T})$, $n \in \mathbb{Z}$ y $\zeta \in \mathcal{G}$, por la proposición anterior $f_\zeta \in L^1(\mathbb{T})$ y por lo tanto existe $\widehat{f_\zeta}(n)$.

Sea $l_n : \mathcal{G} \to \mathbb{C}$ dada por

$$l_n(\zeta) = \widehat{f_\zeta}(n).$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} l_n(\zeta) &= \int_0^{2\pi} e^{-inx} f_\zeta(x)dx \\ &= \int_0^{2\pi} e^{-inx} \langle \zeta, f(x) \rangle_{\mathcal{G}} \, dx \\ &= \int_0^{2\pi} \left\langle \zeta, e^{-inx} f(x) \right\rangle_{\mathcal{G}} dx. \end{aligned}$$

Por lo tanto l_n es un funcional lineal.

Por el teorema de representación de Riesz para funcionales lineales en espacios de Hilbert tenemos que existe un vector $\xi_n \in \mathcal{G}$ tal que

$$l_n(\zeta) = \langle \zeta, \xi_n \rangle_{\mathcal{G}} \, .$$

De donde

$$\widehat{f_\zeta}(n) = \langle \zeta, \xi_n \rangle_{\mathcal{G}}$$

□

Definición 1.5. El vector ξ_n dado por la proposición anterior se denota por $\widehat{f}(n)$ y es llamado el *coeficiente de Fourier* de f y la aplicación $n \longmapsto \widehat{f}(n)$ es llamada la *transformada de Fourier* de f.

3. Funciones a valores operadores

Dados $F : \mathbb{T} \to L(\mathcal{G})$ y $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$ denotaremos por $F_{\zeta\xi}$ a la función a valores complejos $F_{\zeta\xi} : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ dada por

$$F_{\zeta\xi}(x) = \langle F(x)\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{G}} \, .$$

Definición 1.6. Sea $F : \mathbb{T} \to L(\mathcal{G})$ se dice que F es *débilmente medible* si para todo $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$ la función $F_{\zeta\xi}$ es medible.

Sea $F : \mathbb{T} \to L(\mathcal{G})$ una función débilmente medible. Si $x \in \mathbb{T}$ entonces:

$$\|F(x)\|_{L(\mathcal{G})} = \sup_{\|\zeta\|_{\mathcal{G}} = \|\xi\|_{\mathcal{G}} = 1} | \langle F(x)\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{G}} |.$$

Dado que $\mathcal{G}$ se supone separable tenemos que la función $x \longmapsto \|F(x)\|_{L(\mathcal{G})}$ es medible.

Denotamos $L^\infty_{L(\mathcal{G})}(\mathbb{T})$ el conjunto de todas las funciones débilmente medibles y esencialmente acotadas $F : \mathbb{T} \to L(\mathcal{G})$.

Para $1 \leq p < \infty$ sea $L^p_{L(\mathcal{G})}(\mathbb{T})$ el conjunto de todas las funciones $F : \mathbb{T} \to L(\mathcal{G})$ tales que:

$$\int_0^{2\pi} \|F(x)\|^p_{L(\mathcal{G})}\, dx < \infty.$$

Observemos que si $F \in L^1_{L(\mathcal{G})}(\mathbb{T})$ entonces $F_{\zeta\xi} \in L^1(\mathbb{T})$.

Para $F \in L^1_{\mathcal{G}}(\mathbb{T})$ y $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$ sea $\widehat{F}_{\zeta\xi}$ la transformada usual de Fourier de $F_{\zeta\xi}$. Usando el teorema de representación de Riesz para funcionales lineales en espacios de Hilbert se puede probar que para todo $n \in \mathbb{Z}$ existe $\widehat{F}(n) \in L(\mathcal{G})$ tal que:

$$\widehat{F_{\zeta\xi}}(n) = \langle \widehat{F}(n)\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{G}}.$$

4. Medidas a valores operadores

Definición 1.7. Una medida a valores en $L(\mathcal{G})$ es una función $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{T}) \to L(\mathcal{G})$ tal que para $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$ la función definida por:

$$\mu_{\zeta\xi}(\Delta) = \langle \mu(\Delta)\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{G}}$$

es una medida finita de Radon sobre $\mathbb{T}$ que toma valores escalares.

Si $\mu(\Delta)$ es un operador positivo para todo $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{T})$ decimos que la medida μ es positiva.

Consideremos

$$\mathfrak{M}(\mathcal{G}) = \left\{ \mu : \mu \text{ es una medida a valores en } L(\mathcal{G}) \text{ y } \sup_{\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{T})} \|\mu(\Delta)\|_{L(\mathcal{G})} < +\infty \right\}$$

Observemos que cada $W \in L^1_{L(\mathcal{G})}(\mathbb{T})$, da origen a una medida $\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{G})$ mediante

$$d\langle \mu(x)\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{G}} = \langle W(x)\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{G}}\, dx = W_{\zeta\xi}(x)\, dx.$$

Como es natural la medida μ asociada a $W \in L^1_{L(\mathcal{G})}(\mathbb{T})$ será denotada con $d\mu = W\, dx$. En este caso la medida μ es positiva si y sólo si el operador $W(x)$ es no negativo para casi todo x, es decir cuando $\langle W(x)\zeta, \zeta \rangle_{\mathcal{G}} \geq 0$ para casi todo x.

Denotemos por $\mathcal{P}$ el espacio vectorial de todos los polinomios trigonométricos a valores escalares.

Proposición 1.8. *Sea* $\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{G})$ *y sea* $c = \sup_{\Delta \in B(\mathbb{T})} \|\mu(\Delta)\|_{L(\mathcal{G})}$. *Existe un único operador lineal* $T_\mu : \mathcal{P} \to L(\mathcal{G})$ *tal que*

(a) *Para todo* $p \in \mathcal{P}$ *y* $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$ *tenemos que*

$$\langle T_\mu(p)\zeta, \xi\rangle_{\mathcal{G}} = \int_0^{2\pi} p(x)\, d\langle \mu(x)\zeta, \xi\rangle_{\mathcal{G}}.$$

(b) *Para todo* $p \in \mathcal{P}$ *tenemos que*

$$\|T_\mu(p)\|_{\mathcal{G}} \leq 4\, c\, \|p\|_\infty.$$

Demostración. : Para $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$ sea

$$B(\zeta, \xi) = \int_0^{2\pi} p(x) d \left\langle \mu(x)\zeta, \xi\right\rangle_{\mathcal{G}}.$$

Entonces B es sesquilineal sobre $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$. Usando el teorema de descomposición de Hahn de la parte real de μ y de la parte imaginaria de μ obtenemos que

$$\|B(\zeta, \xi)\| \leq 4c\|p\|_\infty \|\zeta\|_{\mathcal{G}} \|\xi\|_{\mathcal{G}}.$$

Para ζ fijo sea $f : \mathcal{G} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(\xi) = B(\zeta, \xi) = \int_0^{2\pi} p(x) d \left\langle \mu(x)\zeta, \xi\right\rangle_{\mathcal{G}}.$$

Dados $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{G}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$

$$f(\lambda\xi_1 + \xi_2) = \overline{\lambda} f(\xi_1) + f(\xi_2).$$

Es decir, f es antilineal. Por el teorema de representación de Riesz existe $\theta \in \mathcal{G}$ tal que

$$f(\xi) = \langle \theta, \xi\rangle_{\mathcal{G}}.$$

Como f depende de ζ, p y μ, se tiene que θ depende de ellos.

Sea $T_\mu(p) : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ dada por

$$T_\mu(p)\zeta = \theta.$$

Entonces

$$\langle T_\mu(p)\zeta, \xi\rangle_{\mathcal{G}} = \langle \theta, \xi\rangle_{\mathcal{G}} = f(\xi) = B(\zeta, \xi) = \int_0^{2\pi} p(x) d \left\langle \mu(x)\zeta, \xi\right\rangle_{\mathcal{G}}.$$

Como B es lineal en la primera variable se tiene que $T_\mu(p)$ es lineal. Además de

$$\|\langle T_\mu(p)\zeta, \xi\rangle_{\mathcal{G}}\| = \|B(\zeta, \xi)\| \leq 4c\|p\|_\infty \|\zeta\|_{\mathcal{G}} \|\xi\|_{\mathcal{G}}$$

se sigue que $T_\mu(p)$ es continuo y

$$\|T_\mu(p)\| \leq 4c\|p\|_\infty.$$

$\square$

Sea $\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{G})$ definimos $\widehat{\mu} : \mathbb{Z} \to L(\mathcal{G})$ por

$$\widehat{\mu}(n) = T_\mu(e_{-n}) \quad \text{si } n \in \mathbb{Z}.$$

PROPOSICIÓN 1.9. *Si $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$ y $n \in \mathbb{Z}$ entonces*

$$\langle \widehat{\mu}(n)\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{G}} = \int_0^{2\pi} e^{-inx}\, d\langle \mu(x)\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{G}} = \widehat{\mu_{\zeta\xi}}(n).$$

DEMOSTRACIÓN. Si $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$ y $n \in \mathbb{Z}$ tenemos que

$$\langle \widehat{\mu}(n)\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{G}} = \langle T_\mu(e_{-n})\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{G}} = \int_0^{2\pi} e_{-n}(x)\, \langle \mu(x)\zeta, \xi \rangle_{\mathcal{G}} = \int_0^{2\pi} e^{-inx}\, d\mu_{\zeta\xi}(x) = \widehat{\mu_{\zeta\xi}}(n).$$

□

Para $\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{G})$ y $\varphi, \psi \in \mathcal{P}(\mathcal{G})$ definimos

$$\langle \varphi, \psi \rangle_\mu = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \langle \widehat{\mu}(m-n)\, \widehat{\varphi}(n), \widehat{\psi}(m) \rangle_{\mathcal{G}}.$$

PROPOSICIÓN 1.10. *Si $\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{G})$ y $\varphi, \psi \in \mathcal{P}(\mathcal{G})$ entonces*

$$\langle \varphi, \psi \rangle_\mu = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} e^{-i(m-n)x}\, d\left\langle \mu(x)\widehat{\varphi}(n), \widehat{\psi}(m) \right\rangle_{\mathcal{G}}.$$

DEMOSTRACIÓN. Por la proposición anterior tenemos que

$$\begin{aligned}\langle \varphi, \psi \rangle_\mu &= \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \left\langle \widehat{\mu}(m-n)\widehat{\varphi}(n), \widehat{\psi}(m) \right\rangle_{\mathcal{G}} \\ &= \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} e^{-i(m-n)x}\, d\left\langle \mu(x)\widehat{\varphi}(n), \widehat{\psi}(m) \right\rangle_{\mathcal{G}}.\end{aligned}$$

□

OBSERVACIÓN 1.11. En el caso escalar $\mathcal{G} = \mathbb{C}$ se tiene que

$$\langle p, q \rangle_\mu = \int_0^{2\pi} p(x)\overline{q(x)}\, d\mu(x)$$

para $p, q \in \mathcal{P}$.

PROPOSICIÓN 1.12. *Supongamos $d\mu = W\, dx$ donde $W \in L^1_{L(\mathcal{G})}(\mathbb{T})$. Si $\varphi, \psi \in \mathcal{P}(\mathcal{G})$ entonces*

$$\langle \varphi, \psi \rangle_\mu = \int_0^{2\pi} \langle W(x)\varphi(x), \psi(x) \rangle_{\mathcal{G}}\, dx.$$

Demostración. Si $\varphi, \psi \in \mathcal{P}(\mathcal{G})$ están dadas por

$$\varphi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(n)e^{inx} \qquad\qquad \psi(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}(m)e^{imx}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, \psi \rangle_\mu &= \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} e^{-i(m-n)x} d\left\langle \mu(x)\widehat{\varphi}(n), \widehat{\psi}(m)\right\rangle_{\mathcal{G}} \\
&= \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} e^{-i(m-n)x} \left\langle W(x)\widehat{\varphi}(n), \widehat{\psi}(m)\right\rangle_{\mathcal{G}} dx \\
&= \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} e^{-imx}e^{inx} \left\langle W(x)\widehat{\varphi}(n), \widehat{\psi}(m)\right\rangle_{\mathcal{G}} dx \\
&= \int_0^{2\pi} \left\langle W(x)\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(n)e^{inx}, \sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}(m)e^{imx}\right\rangle_{\mathcal{G}} dx \\
&= \int_0^{2\pi} \langle W(x)\varphi(x), \psi(x)\rangle_{\mathcal{G}}\, dx
\end{aligned}$$

□

Proposición 1.13. *Sea $\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{G})$ entonces*

(a) $\langle\ ,\ \rangle_\mu$ *es sesquilineal sobre $\mathcal{P}(\mathcal{G})$.*

(b) $\langle\ ,\ \rangle_\mu$ *es no negativa si y sólo si μ es una medida positiva.*

Demostración. La parte (a) se sigue de la definición de $\langle\ ,\ \rangle_\mu$. En efecto, si φ, ψ y $\gamma \in \mathcal{P}(\mathcal{G})$ entonces

$$\begin{aligned}
\langle \varphi + \gamma, \psi \rangle_\mu &= \int_0^{2\pi} e^{-i(m-n)x} \langle W(x)\left(\varphi(x) + \gamma(x)\right), \psi(x)\rangle_{\mathcal{G}}\, dx \\
&= \int_0^{2\pi} e^{-i(m-n)x} \langle W(x)\varphi(x) + W(x)\gamma(x), \psi(x)\rangle_{\mathcal{G}}\, dx \\
&= \int_0^{2\pi} e^{-i(m-n)x} \left(\langle W(x)\varphi(x), \psi(x)\rangle_{\mathcal{G}} + \langle W(x)\gamma(x), \psi(x)\rangle_{\mathcal{G}}\right) dx \\
&= \int_0^{2\pi} e^{-i(m-n)x} \langle W(x)\varphi(x), \psi(x)\rangle_{\mathcal{G}}\, dx \\
&+ \int_0^{2\pi} e^{-i(m-n)x} \langle W(x)\gamma(x), \psi(x)\rangle_{\mathcal{G}}\, dx \\
&= \langle \varphi, \psi \rangle_\mu + \langle \gamma, \psi \rangle_\mu
\end{aligned}$$

La parte (b) es una aplicación directa del Lema 1 de [**1**].

□

Si $\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{G})$ y $\varphi, \psi \in \mathcal{P}(\mathcal{G})$ escribimos

$$\int_0^{2\pi} \langle d\mu(x)\, \varphi(x), \psi(x)\rangle_{\mathcal{G}} = \langle \varphi, \psi\rangle_\mu.$$

Si $\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{G})$ es una medida positiva usaremos $\| \ \|_\mu$ para denotar la norma (posiblemente degenerada) asociada con $\langle\ ,\ \rangle_\mu$.

Proposición 1.14. *Si $\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{G})$, $\varphi, \psi \in \mathcal{P}(\mathcal{G})$ y $n \in \mathbb{Z}$ entonces:*

$$\langle e_n\varphi, e_n\psi\rangle_\mu = \langle \varphi, \psi\rangle_\mu$$

$$\|e_n\varphi\|_\mu = \|\varphi\|_\mu .$$

Demostración. Por la Proposición (1.12) tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle e_n\varphi, e_n\psi\rangle_\mu &= \int_0^{2\pi} \langle W(x)e_n(x)\varphi(x), e_n(x)\psi(x))\rangle_{\mathcal{G}}\, dx \\
&= \int_0^{2\pi} e^{-inx}e^{inx} \langle W(x)\varphi(x), \psi(x)\rangle_{\mathcal{G}}\, dx \\
&= \int_0^{2\pi} e^{-i(m-n)x} \langle W(x)\varphi(x), \psi(x)\rangle_{\mathcal{G}}\, dx \\
&= \langle \varphi, \psi\rangle_\mu .
\end{aligned}$$

En particular

$$\|e_n\varphi\|_\mu^2 = \langle e_n\varphi, e_n\varphi\rangle_\mu = \langle \varphi, \varphi\rangle_\mu = \|\varphi\|_\mu^2 .$$

De donde

$$\|e_n\varphi\|_\mu = \|\varphi\|_\mu .$$

□

Sea

$$\mathfrak{M}(\mathcal{G})_+ = \{\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{G}) : \widehat{\mu}(n) = 0 \text{ si } n < 0\}.$$

Observación 1.15. Sea $\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{G})_+$ y $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$, entonces para la medida escalar $\mu_{\zeta\xi}$ tenemos que

$$\widehat{\mu_{\zeta\xi}}(n) = 0 \quad \text{para } n < 0.$$

Por lo tanto por el teorema de F. y M. Riesz, existe $h_{\zeta\xi} \in H^1(\mathbb{T})$ tal que

$$d\mu_{\zeta\xi}(x) = h_{\zeta\xi}(x)\, dx.$$

En $[1, \text{pág } 4]$ vemos que no es posible probar que existe una función H a valores en $L(\mathcal{G})$ tal que para casi todo x

$$h_{\zeta\xi}(x) = \langle H(x)\zeta, \xi\rangle_{\mathcal{G}}.$$

Sin embargo la familia $\{h_{\zeta\xi}\}_{\zeta,\xi\in\mathcal{G}}$ satisface:

$$h_{\lambda\zeta_1+\zeta_2,\xi} = \lambda h_{\zeta_1\xi} + h_{\zeta_2\xi}$$
$$h_{\zeta\xi} = \overline{h_{\xi\zeta}}$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, $\zeta_1, \zeta_2, \zeta, \xi \in \mathcal{G}$.

CAPíTULO 2

Extensión a valores operadores del teorema de Helson y Szegö.

En este capítulo presentamos los resultados de la teoría de predicción y desigualdades con pesos dados por Bruzual y Domínguez en [**3**]. Más precisamente se da una caracterización de los $\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{G})$ positivos, tal que $d\mu = W\,dx$ donde $W \in L^1_{L(\mathcal{G})}(\mathbb{T})$ y

$$\| \mathsf{H}\varphi\|_\mu \leq M \, \|\varphi\|_\mu$$

para todo $\varphi \in \mathcal{P}\left(\mathcal{G}\right)$. Es decir,

$$\int_0^{2\pi} \langle W(x)\mathsf{H}\varphi(x), \mathsf{H}\varphi(x)\rangle_{\mathcal{G}}\, dx \leq M^2 \int_0^{2\pi} \langle W(x)\varphi(x), \varphi(x)\rangle_{\mathcal{G}}\, dx$$

para todo $\varphi \in \mathcal{P}\left(\mathcal{G}\right)$.

El grupo dual de $\mathbb{T}$ es el grupo de los enteros $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$. Consideremos los conjuntos $\mathbb{Z}_1 = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\}$ y $\mathbb{Z}_2 = \{n \in \mathbb{Z} : n < 0\}$.

Sean

$$\mathcal{P}_1(\mathcal{G}) = \{\varphi \in \mathcal{P}(\mathcal{G}) : \widehat{\varphi}(n) = 0 \text{ si } n < 0\},$$

y

$$\mathcal{P}_2(\mathcal{G}) = \{\varphi \in \mathcal{P}(\mathcal{G}) : \widehat{\varphi}(n) = 0 \text{ si } n \geq 0\}.$$

Para $\mu \in \mathfrak{M}\left(\mathcal{G}\right)$ positivo y n un entero no negativo, sea

$$\rho_n(\mu) = \sup \{ \, |\langle e_n\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu| \ : \varphi_1 \in \mathcal{P}_1(\mathcal{G}), \varphi_2 \in \mathcal{P}_2(\mathcal{G}), \|\varphi_1\|_\mu = \|\varphi_2\|_\mu = 1\}.$$

Sea $\rho_n\left(W\right) = \rho_n\left(\mu\right)$ cuando $d\mu = W(x)dx$, para $W \in L^1_{L(\mathcal{G})}\left(\mathbb{T}\right)$.

Es claro que $0 \leq \rho_n\left(\mu\right) \leq 1$.

Consideremos ahora la clausura de $\overline{e_n\mathcal{P}_1(\mathcal{G})}$ y $\overline{\mathcal{P}_2(\mathcal{G})}$ con respecto a $\| \ \|_\mu$. Usualmente $\overline{\mathcal{P}_2(\mathcal{G})}$ es llamado el pasado, $\overline{\mathcal{P}_1(\mathcal{G})}$ es llamado el futuro y $\overline{e_n\mathcal{P}_1(\mathcal{G})}$ es llamado el futuro después del instante n, todos con respecto $\| \ \|_\mu$.

Observemos que:

(a) Los Espacios $\mathcal{P}_1(\mathcal{G})$ y $\mathcal{P}_2(\mathcal{G})$ son ortogonales con respecto a $\langle , \rangle_\mu$ si y sólo si $\rho_0(\mu) = 0$.

(b) Si existe un vector no nulo en $\overline{\mathcal{P}_1(\mathcal{G})}$ y $\overline{\mathcal{P}_2(\mathcal{G})}$ entonces $\rho_0(\mu) = 1$.

Recordemos: se dice que los subespacios cerrados $\overline{e_n\mathcal{P}_1(\mathcal{G})}$ y $\overline{\mathcal{P}_2(\mathcal{G})}$ tienen un ángulo positivo si $\rho_0(\mu) < 1$. El ángulo entre estos subespacios es $\alpha_n(\mu) = \arccos(\rho_n(\mu))$.

Proposición 2.1. *Sean $M \geq 1$, $\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{G})$ positivo, tal que $d\mu = W\,dx$ para alguna $W \in L^1_{L(\mathcal{G})}(\mathbb{T})$. Sea $\varphi = e_n\,\varphi_1 + \varphi_2$ donde $\varphi_1 \in \mathcal{P}_1(\mathcal{G})$ y $\varphi_2 \in \mathcal{P}_2(\mathcal{G})$, entonces*

$$\frac{1}{M^2+1}\ (M^2\ \|\varphi\|^2_\mu - \|\,\mathsf{H}\varphi\|^2_\mu) = (\langle e_n\,\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu + \langle\,\varphi_2, e_n\varphi_1\rangle_\mu) + \frac{M^2-1}{M^2+1}\left(\|\varphi_1\|^2_\mu + \|\varphi_2\|^2_\mu\right).$$

Demostración.

Sea $\varphi = e_n\,\varphi_1 + \varphi_2$ donde $\varphi_1 \in \mathcal{P}_1(\mathcal{G})$ y $\varphi_2 \in \mathcal{P}_2(\mathcal{G})$, entonces

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|^2_\mu &= \langle e_n\varphi_1 + \varphi_2, e_n\varphi_1 + \varphi_2\rangle_\mu \\
&= \langle e_n\varphi_1, e_n\varphi_1 + \varphi_2\rangle_\mu + \langle \varphi_2, e_n\varphi_1 + \varphi_2\rangle_\mu \\
&= \langle e_n\varphi_1, e_n\varphi_1\rangle_\mu + \langle e_n\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu + \langle \varphi_2, e_n\varphi_1\rangle_\mu + \langle \varphi_2, \varphi_2\rangle_\mu \\
&= |e_n|\,\langle \varphi_1, \varphi_1\rangle_\mu + \langle e_n\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu + \langle \varphi_2, e_n\varphi_1\rangle_\mu + \langle \varphi_2, \varphi_2\rangle_\mu \\
&= \|\varphi_1\|^2_\mu + \langle e_n\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu + \langle \varphi_2, e_n\varphi_1\rangle_\mu + \|\varphi_2\|^2_\mu
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Por otro lado si $\varphi_1 \in \mathcal{P}_1$ entonces

$$\varphi_1 = \sum_{k=0}^{N} \xi_k e_k,$$

donde

$$\widehat{\varphi_1}(k) = \begin{cases} \xi_k & \text{si } 0 \leq k \leq N \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

luego

$$(\mathsf{H}\varphi_1)\widehat{\ }(k) = \begin{cases} -i\widehat{\varphi_1}(k) = -i\xi_k & \text{si } 0 \leq k \leq N \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

en consecuencia

$$\mathsf{H}\varphi_1 = -i\sum_{k=0}^{N}\xi_k e_k = -i\varphi_1$$

de allí que

$$\mathsf{H}\varphi_1 = -i\varphi_1.$$

En forma similar si $\varphi_2 \in \mathcal{P}_2$ entonces

$$\varphi_2 = \sum_{k=-N}^{-1}\xi_k e_k,$$

luego

$$\widehat{\varphi_2}(k) = \begin{cases} \xi_k & \text{si } -N \leq k \leq -1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y

$$(\mathsf{H}\varphi_2)\widehat{\ }(k) = \begin{cases} \widehat{\varphi_2}(k) = i\xi_k & \text{si } -N \leq k \leq -1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es decir,

$$\mathsf{H}\varphi_2 = i\sum_{k=-N}^{-1}\xi_k e_k = i\varphi_2$$

De donde

$$\mathsf{H}\varphi_2 = i\varphi_2.$$

A partir de lo obtenido para $\mathsf{H}\varphi_1$ y $\mathsf{H}\varphi_2$ se sigue que

$$\mathsf{H}\varphi = \mathsf{H}\left(e_n\varphi_1 + \varphi_2\right) = -ie_n\varphi_1 + i\varphi_2.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\|\mathsf{H}\varphi\|_\mu^2 &= \langle -ie_n\varphi_1 + i\varphi_2, -ie_n\varphi_1 + i\varphi_2\rangle_\mu \\
&= \langle -ie_n\varphi_1, -ie_n\varphi_1 + i\varphi_2\rangle_\mu + \langle i\varphi_2, -ie_n\varphi_1 + i\varphi_2\rangle_\mu \\
&= \langle -ie_n\varphi_1, -ie_n\varphi_1\rangle_\mu + \langle -ie_n\varphi_1, i\varphi_2\rangle_\mu + \langle i\varphi_2, -ie_n\varphi_1\rangle_\mu + \langle i\varphi_2, i\varphi_2\rangle_\mu \\
&= \langle \varphi_1, \varphi_1\rangle_\mu - \langle e_n\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu - \langle \varphi_2, e_n\varphi_1\rangle_\mu + \langle \varphi_2, \varphi_2\rangle_\mu \\
&= \|\varphi_1\|_\mu^2 - \langle e_n\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu - \langle \varphi_2, e_n\varphi_1\rangle_\mu + \|\varphi_2\|_\mu^2 .
\end{aligned}$$

Luego

$$-\|\mathsf{H}\varphi\|_\mu^2 = -\|\varphi_1\|_\mu^2 + \langle e_n\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu + \langle \varphi_2, e_n\varphi_1\rangle_\mu - \|\varphi_2\|_\mu^2 . \tag{2.2}$$

Si multiplicamos (2.1) por M^2 y usamos la ecuación (2.2) se sigue que:

$$\begin{aligned} M^2\left\|\varphi\right\|_\mu^2 - \left\|\mathsf{H}\varphi\right\|_\mu^2 &= \left(M^2-1\right)\left\|\varphi_1\right\|_\mu^2 + \left(M^2+1\right)\left\langle\varphi_2, e_n\varphi_1\right\rangle_\mu \\ &\quad + \left(M^2+1\right)\left\langle e_n\varphi_1, \varphi_2\right\rangle_\mu + \left(M^2-1\right)\left\|\varphi_2\right\|_\mu^2 \\ &= \left(M^2+1\right)\Big[\left\langle\varphi_2, e_n\varphi_1\right\rangle_\mu + \left\langle e_n\varphi_1, \varphi_2\right\rangle_\mu\Big] + \left(M^2-1\right)\Big(\left\|\varphi_1\right\|_\mu^2 + \left\|\varphi_2\right\|_\mu^2\Big). \end{aligned} \tag{2.3}$$

De donde

$$\frac{1}{M^2+1}\ (M^2\ \ \|\varphi\|_\mu^2 - \|\,\mathsf{H}\varphi\|_\mu^2) = (\langle e_n\,\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu + \langle\,\varphi_2, e_n\varphi_1\rangle_\mu) + \frac{M^2-1}{M^2+1}\left(\|\varphi_1\|_\mu^2 + \|\varphi_2\|_\mu^2\right).$$

□

Sea $\mu_{\alpha\beta} \in \mathfrak{M}(\mathcal{G})$ para $\alpha, \beta = 1, 2$. Usaremos la notación $\{\mu_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta=1,2}$ para referirnos a

$$\begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{bmatrix}.$$

Consideraremos matrices tales que $\mu_{12} = \mu_{21}^*$ donde μ_{21}^* esta definida por

$$\langle\mu_{21}^*(\Delta)\zeta, \xi\rangle_{\mathcal{G}} = \langle\zeta, \mu_{21}(\Delta)\xi\rangle_{\mathcal{G}}.$$

Definición 2.2. Sea $\mu_{\alpha\beta} \in \mathfrak{M}(\mathcal{G})$ para $\alpha, \beta = 1, 2$. Se dice que la matriz $\{\mu_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta=1,2}$ es positiva cuando

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \langle\varphi_\alpha, \varphi_\beta\rangle_{\mu_{\alpha\beta}} \geq 0$$

para todo $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{P}(\mathcal{G}) \times \mathcal{P}(\mathcal{G})$.

Lema 2.3 (ver [**1**]). *Sea $\mu_{\alpha\beta} \in \mathfrak{M}(\mathcal{G})$ para $\alpha, \beta = 1, 2$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *La matriz $\{\mu_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta=1,2}$ es positiva.*

(b) *para todo Δ en $\mathcal{B}(\mathbb{T})$, para todo $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathcal{G}$*

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \langle\mu_{\alpha,\beta}(\Delta)\zeta_\alpha\zeta_\beta\rangle \geq 0.$$

(c) *Para todo Δ en $\mathcal{B}(\mathbb{T})$, para todo $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$: $\langle\mu_{11}(\Delta)\zeta, \zeta\rangle \geq 0$, $\langle\mu_{22}(\Delta)\xi, \xi\rangle \geq 0$ y*

$$|\langle\mu_{12}(\Delta)\zeta, \xi\rangle|^2 \leq \langle\mu_{11}(\Delta)\zeta, \zeta\rangle\ \langle\mu_{22}(\Delta)\xi, \xi\rangle.$$

(d) *Para todo Δ en $\mathcal{B}(\mathbb{T})$, para todo $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$: $\langle\mu_{11}(\Delta)\zeta, \zeta\rangle \geq 0$, $\langle\mu_{22}(\Delta)\xi, \xi\rangle \geq 0$ y*

$$2|\langle\mu_{12}(\Delta)\zeta, \xi\rangle| \leq \langle\mu_{11}(\Delta)\zeta, \zeta\rangle\ +\ \langle\mu_{22}(\Delta)\xi, \xi\rangle.$$

La siguiente definición fue introducida en [**1**] (sección II).

DEFINICIÓN 2.4. Sea $\mu_{\alpha\beta} \in \mathfrak{M}(\mathcal{G})$ para $\alpha, \beta = 1, 2$. Se dice que la matriz $\{\mu_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta=1,2}$ es débilmente positiva cuando

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \langle \varphi_\alpha, \varphi_\beta \rangle_{\mu_{\alpha\beta}} \geq 0$$

para todo $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{P}_1(\mathcal{G}) \times \mathcal{P}_2(\mathcal{G})$.

Cuando se trata de medidas absolutamente continuas con respecto de la medida de Lebesgue, estas condiciones se pueden expresar en términos de las densidades. Para $\mu_{\alpha\beta} = z_{\alpha\beta}(x)dx$ la expresión "$\{z_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta=1,2}$ es una matriz positiva" quiere decir $\{\mu_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta=1,2}$ es una matriz positiva. Análogamente para matrices débilmente positivas.

LEMA 2.5. *Sea $\mu_{\alpha\beta} \in \mathfrak{M}(\mathcal{G})$ para $\alpha, \beta = 1, 2$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *Las medidas μ_{11} y μ_{22} son positivas y*

$$|\langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle_{\mu_{12}}|^2 \leq \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle_{\mu_{11}} \ \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle_{\mu_{22}}$$

para todo $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{P}_1(\mathcal{G}) \times \mathcal{P}_2(\mathcal{G})$

(b) *La matriz $\{\mu_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta=1,2}$ es débilmente positiva.*

DEMOSTRACIÓN. Cambiando φ_1 por $\lambda_1\varphi_1$ y φ_2 por $\lambda_2\varphi_2$ la desigualdad de la definición de débilmente positiva se transforma en

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \lambda_\alpha \overline{\lambda_\beta} \langle \varphi_\alpha, \varphi_\beta \rangle_{\mu_{\alpha\beta}} \geq 0$$

para todo $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{P}_1(\mathcal{G}) \times \mathcal{P}_2(\mathcal{G})$, es decir la forma cuadrática en λ_1 y λ_2, dada por la expresión anterior, es definida positiva. Esto es equivalente a la condición (a).

□

TEOREMA 2.6 (ver [**3**]). *Sea $\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{G})$ positivo, supongamos que $d\mu = W\,dx$ donde $W \in L^1_{L(\mathcal{G})}(\mathbb{T})$ y sea $M \geq 1$. Las siguientes condiciones son equivalentes*

(a) $0 < \rho_n(W) \leq \dfrac{M^2 - 1}{M^2 + 1}$.

(b) *Para todo* $\varphi \in e_n\mathcal{P}_1(\mathcal{G}) + \mathcal{P}_2(\mathcal{G})$

$$\| \mathsf{H}\varphi \|_\mu \leq M \, \|\varphi\|_\mu.$$

(c) *Existe $\nu \in \mathfrak{M}(\mathcal{G})_+$ tal que, para cada $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$*

$$d\nu_{\zeta\xi}(x) = h_{\zeta\xi}(x)\, dx,$$

donde $h_{\zeta\xi} \in H^1(\mathbb{T})$ *y*

$$(M^2+1)^2 \,|\, e_n(x)W_{\zeta\xi}(x) - h_{\zeta\xi}(x)\,|^2 \;\leq (M^2-1)^2\, W_{\zeta\zeta}(x)\, W_{\xi\xi}(x) \quad c.s.$$

Demostración.

(b) $\Rightarrow$ (a) Supongamos que

$$\|\,\mathsf{H}\varphi\|_\mu \leq M\,\|\varphi\|_\mu.$$

para todo $\varphi \in e_n\mathcal{P}_1(\mathcal{G}) + \mathcal{P}_2(\mathcal{G})$. Usando la proposición 2.1 se obtiene que

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{1}{M^2+1}(M^2\|\varphi\|_\mu^2 - \|H\varphi\|_\mu^2) &= (\langle e_n\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu + \langle \varphi_2, e_n\varphi_1\rangle_\mu) + \left(\frac{M^2-1}{M^2+1}\right)\left(\|\varphi_1\|_\mu^2 + \|\varphi_2\|_\mu^2\right) \\ &= 2Re\langle e_n\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu + \left(\frac{M^2-1}{M^2+1}\right)\left(\|\varphi_1\|_\mu^2 + \|\varphi_2\|_\mu^2\right). \end{aligned}$$

Si consideramos $\lambda \in \mathbb{C}$ y $S \in \mathbb{R}$, con $|\lambda| = 1$, se cumple que $\lambda S\varphi_1 \in P_1(\mathcal{G})$ y además

$$\left(\frac{M^2-1}{M^2+1}\right)\|\varphi_1\|_\mu^2 S^2 + (2Re(\lambda\langle e_n\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu))S + \left(\frac{M^2-1}{M^2+1}\right)\|\varphi_2\|_\mu^2 =$$

$$2Re(\lambda\langle e_n S\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu) + \left(\frac{M^2-1}{M^2+1}\right)(\|S\varphi_1\|_\mu^2 + \|\varphi_2\|_\mu^2) \geq 0.$$

Esta es una inecuación de segundo grado en la variable S, cuyo discriminante D es

$$D = 4[\lambda\langle e_n\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu + \overline{\lambda}\langle \varphi_2, e_n\varphi_1\rangle_\mu]^2 - 4\left(\frac{M^2-1}{M^2+1}\right)^2\|\varphi_1\|_\mu^2\|\varphi_2\|_\mu^2 \leq 0.$$

y esto es equivalente a decir

$$[\lambda\langle e_n\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu + \overline{\lambda}\langle \varphi_2, e_n\varphi_1\rangle_\mu]^2 \leq \left(\frac{M^2-1}{M^2+1}\right)^2\|\varphi_1\|_\mu^2\|\varphi_2\|_\mu^2$$

Si $\|\varphi_1\|_\mu = \|\varphi_2\|_\mu = 1$ entonces

$$\lambda\langle e_n\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu + \overline{\lambda}\langle \varphi_2, e_n\varphi_1\rangle_\mu \leq \left(\frac{M^2-1}{M^2+1}\right).$$

En particular para $\lambda = e^{-i\arg(\langle e_n\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu)}$, se tiene que

$$\lambda\langle e_n\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu = |\langle e_n\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu| = \overline{\lambda}\langle \varphi_2, e_n\varphi_1\rangle_\mu.$$

Por lo tanto

$$|\langle e_n\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu| \leq \frac{M^2-1}{M^2+1},$$

ahora si tomamos el supremo a ambos lados de está última expresión y considerando que $\left(\frac{M^2-1}{M^2+1}\right)$ es constante, se tiene el resultado deseado

$$\rho_n(\mu) \leq \frac{M^2-1}{M^2+1}$$

(a) $\Rightarrow$ (b) Esta implicación también se obtiene usando el discriminante de una ecuación de segundo grado.

(b) $\Rightarrow$ (c) Consideremos las cuatro medidas absolutamente continuas con respecto a μ dadas por:

$$\begin{aligned}\mu_{11}(\Delta) = \mu_{22}(\Delta) &= \frac{M^2-1}{M^2+1}\int_\Delta d\mu(x)\\ \mu_{12}(\Delta) &= \int_\Delta e_n(x)\,d\mu(x)\\ \mu_{21}(\Delta) &= \int_\Delta e_{-n}(x)\,d\mu(x)\end{aligned}$$

para Δ en $\mathcal{B}(\mathbb{T})$.

Se puede probar que $d\mu_{12} = d\mu_{21}^*$ donde μ_{21}^* esta definida por

$$\langle \mu_{21}^*(\Delta)\zeta, \xi\rangle_{\mathcal{G}} = \langle \zeta, \mu_{21}(\Delta)\xi\rangle_{\mathcal{G}}.$$

Como

$$\frac{d\mu_{12}}{d\mu} = e_n \qquad\qquad \frac{d\mu}{dx} = W$$

tenemos que

$$\frac{d\mu_{12}}{dx} = e_n\,W$$

(esto se obtiene del Ejercicio 33.c del Capítulo 11 de [**10**]).

Sea $\varphi = e_n\,\varphi_1 + \varphi_2$ donde $\varphi_1 \in \mathcal{P}_1(\mathcal{G})$ y $\varphi_2 \in \mathcal{P}_2(\mathcal{G})$ tal que

$$\|\,\mathsf{H}\varphi\|_\mu \leq M\,\|\varphi\|_\mu.$$

De la Proposición 2.1 se sigue que

$$(\langle e_n\,\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu + \langle\, \varphi_2, e_n\varphi_1\rangle_\mu) + \frac{M^2-1}{M^2+1}\left(\|\varphi_1\|_\mu^2 + \|\varphi_2\|_\mu^2\right) \geq 0. \tag{2.4}$$

Por la Proposición 1.12 tenemos que

$$\begin{aligned}\langle e_n\varphi_1, \varphi_2\rangle_\mu &= \int_0^{2\pi} \langle W(x)e_n(x)\varphi_1(x), \varphi_2(x)\rangle_{\mathcal{G}}\,dx\\ &= \int_0^{2\pi} \langle e_n(x)W(x)\varphi_1(x), \varphi_2(x)\rangle_{\mathcal{G}}\,dx\\ &= \langle \varphi_1, \varphi_2\rangle_{\mu_{12}}\,.\end{aligned}$$

Análogamente

$$\langle\, \varphi_2, e_n\varphi_1\rangle_\mu = \langle \varphi_2, \varphi_1\rangle_{\mu_{21}}\,.$$

De la ecuación (2.4) tenemos que

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_{\mu_{12}} + \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle_{\mu_{21}} + \frac{M^2-1}{M^2+1}\left(\|\varphi_1\|_\mu^2 + \|\varphi_2\|_\mu^2 \right) \geq 0$$

Para $\alpha = 1, 2$ también se puede probar que

$$\frac{M^2-1}{M^2+1} \|\varphi_\alpha\|_\mu^2 = \langle \varphi_\alpha, \varphi_\alpha \rangle_{\mu_{\alpha\alpha}}.$$

De donde

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_{\mu_{12}} + \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle_{\mu_{21}} + \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle_{\mu_{11}} + \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle_{\mu_{22}} \geq 0.$$

Es decir

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \langle \varphi_\alpha, \varphi_\beta \rangle_{\mu_{\alpha\beta}} \geq 0$$

para todo $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{P}_1(\mathcal{G}) \times \mathcal{P}_2(\mathcal{G})$. Por lo tanto la matriz $\{\mu_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta=1,2}$ es débilmente positiva.

Una aplicación directa del teorema II de [**1**] proporciona de una medida $\nu \in \mathfrak{M}(\mathcal{G})_+$ tal que:

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \langle \varphi_\alpha, \varphi_\beta \rangle_{\mu_{\alpha\beta}} + \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_\nu + \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle_{\nu*} \geq 0$$

para $\varphi_1,\ \varphi_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{G})$.

Tomando $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$ y sea $\Delta \subset \mathbb{T}$ un conjunto de Borel. Por Lema 3 de [**1**]

$$|\langle \mu_{12}(\Delta)\, \zeta, \xi \rangle_{\mathcal{G}} - \langle \nu(\Delta)\, \zeta, \xi \rangle_{\mathcal{G}}|^2 \leq \langle \mu_{11}(\Delta)\, \zeta, \zeta \rangle_{\mathcal{G}} \ \langle \mu_{22}(\Delta)\, \xi, \xi \rangle_{\mathcal{G}}. \tag{2.5}$$

Sea $m(\Delta)$ la medida de Lebesgue de Δ, entonces

$$\left| \frac{\langle \mu_{12}(\Delta)\, \zeta, \xi \rangle_{\mathcal{G}} - \langle \nu(\Delta)\, \zeta, \xi \rangle_{\mathcal{G}}}{m(\Delta)} \right|^2 \leq \frac{\langle \mu_{11}(\Delta)\, \zeta, \zeta \rangle_{\mathcal{G}}}{m(\Delta)} \ \frac{\langle \mu_{22}(\Delta)\, \xi, \xi \rangle_{\mathcal{G}}}{m(\Delta)}. \tag{2.6}$$

Por otro lado, puesto que $\nu \in \mathfrak{M}(\mathcal{G})_+$ para cada $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$ existe $h_{\zeta\xi} \in H^1(\mathbb{T})$ tal que:

$$d\nu_{\zeta\xi}(x) = h_{\zeta\xi}(x)dx.$$

De donde

$$
\begin{aligned}
\left|\langle\mu_{12}(\Delta)\zeta,\xi\rangle_{\mathcal{G}}-\langle\nu(\Delta)\zeta,\xi\rangle_{\mathcal{G}}\right|^2 &= \left|\int_\Delta \langle d\mu_{12}(x)\zeta,\xi\rangle_{\mathcal{G}}-\int_\Delta \langle d\nu(x)\zeta,\xi\rangle_{\mathcal{G}}\right|^2\\
&= \left|\int_\Delta \langle e_n d\mu\zeta,\xi\rangle_{\mathcal{G}}-\int_\Delta \langle h_{\zeta\xi}(x)\zeta,\xi\rangle_{\mathcal{G}}\,dx\right|^2\\
&= \left|\int_\Delta \left(\langle e_n W(x)\zeta,\xi\rangle_{\mathcal{G}}-\langle h_{\zeta\xi}(x)\zeta,\xi\rangle_{\mathcal{G}}\right)dx\right|^2\\
&= \left|\int_\Delta \langle e_n W(x)\zeta-h_{\zeta\xi}(x),\xi\rangle_{\mathcal{G}}\right|^2\\
&= \left|\int_\Delta \left(e_n W_{\zeta\xi}-h_{\zeta\xi}\right)(x)dx\right|^2
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
&\langle\mu_{11}(\Delta)\zeta,\zeta\rangle_{\mathcal{G}}\,\langle\mu_{22}(\Delta)\xi,\xi\rangle_{\mathcal{G}} =\\
&\qquad= \int_\Delta \langle d\mu_{11}(x)\zeta,\zeta\rangle_{\mathcal{G}}\int_\Delta \langle d\mu_{22}(x)\xi,\xi\rangle_{\mathcal{G}}\\
&\qquad= \int_\Delta \left\langle\left(\frac{M^2-1}{M^2+1}\right)W(x)\zeta,\zeta\right\rangle_{\mathcal{G}} dx\int_\Delta \left\langle\left(\frac{M^2-1}{M^2+1}\right)W(x)\xi,\xi\right\rangle_{\mathcal{G}} dx\\
&\qquad= \left(\int_\Delta \left(\frac{M^2-1}{M^2+1}\right)W_{\zeta\zeta}(x)dx\right)\left(\int_\Delta \left(\frac{M^2-1}{M^2+1}\right)W_{\xi\xi}(x)dx\right)\\
&\qquad= \left(\frac{M^2-1}{M^2+1}\right)^2\left(\int_\Delta W_{\zeta\zeta}(x)dx\right)\left(\int_\Delta W_{\xi\xi}(x)dx\right)
\end{aligned}
$$

Usando estas igualdades y la desigualdad (2.6), obtenemos

$$
\left|\frac{1}{m(\Delta)}\int_\Delta \left(W_{\zeta\xi}-h_{\zeta\xi}\right)(x)dx\right|^2 \le \left(\frac{M^2-1}{M^2+1}\right)^2\left(\frac{1}{m(\Delta)}\int_\Delta W_{\zeta\zeta}(x)dx\right)\left(\frac{1}{m(\Delta)}\int_\Delta W_{\xi\xi}(x)dx\right).
$$

Tomando límite cuando $m(\Delta)\to 0$ y usando el teorema fundamental del cálculo para la integral de Lebesgue (ver Teorema 9 del Capítulo 11 de [**10**]), obtenemos

$$
(M^2+1)^2\,|\,e_n(x)W_{\zeta\xi}(x)-h_{\zeta\xi}(x)\,|^2 \;\le (M^2-1)^2\,W_{\zeta\zeta}(x)\,W_{\xi\xi}(x)
$$

para casi todo $x\in\mathbb{T}$.

(c) $\Rightarrow$ (b) Por hipótesis tenemos que

$$
(M^2+1)\,|\,e_n(x)W_{\zeta\xi}(x)-h_{\zeta\xi}(x)\,| \;\le (M^2-1)\;(W_{\zeta\zeta}(x))^{1/2}\;(W_{\xi\xi}(x))^{1/2}
$$

para casi todo $x\in\mathbb{T}$.

Sea $\Delta \subset \mathbb{T}$ un conjunto de Borel, usando la desigualdad anterior y la desigualdad de Cauchy-Schwartz obtenemos

$$\begin{aligned}(M^2+1)\int_{\Delta} |\, e_n(x)W_{\zeta\xi}(x) - h_{\zeta\xi}(x)\,|\, dx &\leq (M^2-1)\int_{\Delta} (W_{\zeta\zeta}(x))^{1/2}\ (W_{\xi\xi}(x))^{1/2}\ dx \\ &\leq (M^2-1)\left(\int_{\Delta} W_{\zeta\zeta}(x)dx\right)^{1/2}\left(\int_{\Delta} W_{\xi\xi}(x)dx\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Para completar la demostación, notemos que en el resto de los pasos de la prueba de (b) $\Rightarrow$ (c) tenemos condiciones equivalentes. $\square$

Proposición 2.7. *Sea $\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{G})$ positivo, supongamos que $d\mu = W dx$ donde $W \in L^1_{L(\mathcal{G})}(\mathbb{T})$ y sea $M \geq 1$. Supongamos que*

$$\|\,\mathsf{H}\varphi\|_{\mu} \leq M\ \|\varphi\|_{\mu}$$

para todo $\varphi \in e_n\mathcal{P}_1(\mathcal{G}) + \mathcal{P}_2(\mathcal{G})$.

Sea $\mathrm{H}_1 : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ *la transformada del espacio de Hilbert y sea* $\zeta \in \mathcal{G}$. *Entonces*

$$\|\,\mathrm{H}_1 p\|_{L^2(W_{\zeta\zeta})} \leq M\ \|p\|_{L^2(W_{\zeta\zeta})}$$

para todo polinomio trigonométrico a valores escalares $p \in e_n\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$.

Demostración. Sea $p \in e_n\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$, si tomamos $\varphi(x) = p(x)\zeta$, entonces $\varphi \in e_n\mathcal{P}_1(\mathcal{G}) + \mathcal{P}_2(\mathcal{G})$ y

$$\mathsf{H}\varphi(x) = \mathrm{H}_1 p(x)\zeta.$$

De donde

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |\mathrm{H}_1 p(x)|^2\, W_{\zeta\zeta}(x)\, dx &= \int_0^{2\pi} |\mathrm{H}_1 p(x)|^2\, \langle W(x)\zeta, \zeta\rangle_{\mathcal{G}}\, dx \\ &= \int_0^{2\pi} \langle W(x)\mathrm{H}_1 p(x)\zeta, \mathrm{H}_1 p(x)\zeta\rangle_{\mathcal{G}}\, dx \\ &= \int_0^{2\pi} \langle W(x)\mathsf{H}\varphi(x), \mathsf{H}\varphi(x)\rangle_{\mathcal{G}}\, dx \\ &\leq M^2 \int_0^{2\pi} \langle W(x)\varphi(x), \varphi(x)\rangle_{\mathcal{G}}\, dx \\ &= M^2 \int_0^{2\pi} |p(x)|^2\, \langle W(x)\zeta, \zeta\rangle_{\mathcal{G}}\, dx \\ &= M^2 \int_0^{2\pi} |p(x)|^2\, W_{\zeta\zeta}(x)\, dx.\end{aligned}$$

Luego

$$\|\mathrm{H}_1 p\,\|^2_{L^2(W_{\zeta\zeta})} \leq M^2 \|p\,\|^2_{L^2(W_{\zeta\zeta})}$$

es decir

$$\|H_1 p\,\|_{L^2(W_{\zeta\zeta})} \leq M \|p\,\|_{L^2(W_{\zeta\zeta})}.$$

$\square$

Observación 2.8. De la Proposición 2.7 se sigue que si $W \in L^1_{L(\mathcal{G})}(\mathbb{T})$ es no negativa y la transformada de Hilbert es continua con respecto a $d\mu = W dx$ entonces, para cada $\zeta \in \mathcal{G}$ tenemos que $W_{\zeta\zeta}(x) = 0$ ó $W_{\zeta\zeta}(x) > 0$ en casi todas partes. En los siguientes resultados supondremos que $W_{\zeta\zeta}(x) > 0$, en casi todas partes.

Como se dijo en la introducción, $\widetilde{v}$ indicará la conjugada armónica de una función v.

Lema 2.9. *Sea $\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{G})$ positiva, supongamos que $d\mu = W dx$ donde $W \in L^1_{L(\mathcal{G})}(\mathbb{T})$ y sea $M > 1$. Si*

$$\|\,\mathsf{H}\varphi\|_\mu \leq M\,\|\varphi\|_\mu$$

para toda $\varphi \in e_n \mathcal{P}_1(\mathcal{G}) + \mathcal{P}_2(\mathcal{G})$.

Entonces para $\zeta \in \mathcal{G}$ existe $h_1 \in H^1(\mathbb{T})$ tal que

$$W_{\zeta\zeta} = |h_1| \exp(u) = |p_1|^2 \exp(u + \widetilde{v}) \quad c.s.$$

donde $v = -arg\,(e_{-n}\,h_1)$, $u \in L^\infty(\mathbb{T})$, p_1 es un polinomio de grado menor que n y

$$|u| \;\leq \operatorname{arcosh}\left(\frac{M^2+1}{2M}\;\cos v\right) \quad c.s. \tag{2.7}$$

y

$$\|v\|_\infty \;\leq \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{M^2-1}{M^2+1}\right) < \frac{\pi}{2} \quad c.s. \tag{2.8}$$

Demostración. Observemos que usando la Proposición 2.7 la prueba de este lema puede ser reducida al caso unidimensional ($\mathcal{G} = \mathbb{C}$). Por lo tanto los resultados se siguen del teorema B de [**4**] y del teorema unidimensional de Helson y Sarason (ver Teorema 6 de [**7**]) en la forma dada por Arocena, Cotlar y Sadosky (ver Teorema 3A de [**2**]).

Como

$$\|\,\mathsf{H}\varphi\|_\mu \leq M\,\|\varphi\|_\mu$$

para toda $\varphi \in e_n \mathcal{P}_1(\mathcal{G}) + \mathcal{P}_2(\mathcal{G})$, por el Teorema 2.6 tenemos que existe $h \in H^1(\mathbb{T})$ tal que:

$$(M^2+1)^2\,|\,W_{\zeta\zeta}(x) - e_{-n}(x)\,h(x)\,|^2 \;\leq (M^2-1)^2\,W_{\zeta\zeta}(x)\;W_{\zeta\zeta}(x) \quad \text{c.s.}$$

Tomemos $w = W_{\zeta\zeta}$. Observemos que $w \in L^1(\mathbb{T})$ y además

$$(M^2+1)^2\,|e_{-n}\,h - w|^2 \le (M^2-1)^2\,w^2 \quad \text{c.s.} \tag{2.9}$$

Sean

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{M^2+1}{2M}\; e_{-n}\,h, \\ u &= \log\left(w/|\phi|\right). \end{aligned}$$

Entonces

$$w = \; |\phi| \,\exp(u) \quad \text{c.s.}$$

Sea

$$r = \frac{M^2-1}{M^2+1}.$$

De (2.9) se sigue que

$$\begin{aligned} \left(M^2+1\right)|e_{-n}h - w| &\le \left(M^2-1\right)^2 w \\ |e_{-n}h - w| &\le \frac{M^2-1}{M^2+1} w \\ |(-1)\,(w - e_{-n}h)| &\le \frac{M^2-1}{M^2+1} w \\ \left|1 - \frac{e_{-n}h}{w}\right| &\le \frac{M^2-1}{M^2+1} \\ \left|1 - \frac{e_{-n}h}{w}\right| &\le r < 1 \end{aligned}$$

Sea

$$v = -\arg(e_{-n}\,h/(r\;w)),$$

entonces

$$|v| = |-\arg\left(e_{-n}h/\left(rw\right)\right)| < \frac{\pi}{2}$$

y sen $|v| \le r$ c.s. Entonces

$$\|v\|_\infty \le \frac{\pi}{2} - \arccos r < \frac{\pi}{2}$$

casi siempre, y la desigualdad (2.8) queda demostrada.

Nuevamente usando (2.9) obtenemos

$$
\begin{aligned}
0 &\geq \left(M^2+1\right)^2 |e_{-n}h - w|^2 - \left(M^2-1\right)^2 w^2, \\
0 &\geq \left(M^4+2M^2+1\right) |e_{-n}h - w|^2 - \left(M^4-2M^2+1\right) w^2, \\
0 &\geq \left(M^4+2M^2+1\right) \left(|e_{-n}|^2 |h|^2 + w^2 - 2 \text{ Re } (e_{-n}h)\, w\right) - M^4w^2 + 2M^2w^2 - w^2.
\end{aligned}
$$

Simplificando esta última expresión, se tiene

$$4M^2\, w^2 - 2(M^2+1)^2 \text{Re}\,(e_{-n}\,h)\; w + (M^2+1)^2|h|^2 \leq 0 \quad \text{c.s.}$$

Usaremos que $v = -\arg\ (e_{-n}\,h)$ para resolver esta inecuación de segundo grado. Las raíces de la ecuación de segundo grado asociada son:

$$w_k \;=\; \frac{M^2+1}{2M}\,|h| \left(\frac{M^2+1}{2M}\ \cos v + (-1)^k \sqrt{\left(\frac{M^2+1}{2M}\right)^2 \cos^2 v - 1}\ \right)$$

para $k = 1, 2$.

Por otro lado usando la definición de arco coseno hiperbólico se pueden probar las dos igualdades siguientes:

$$
\begin{aligned}
\text{arcosh}x &= \log(x + \sqrt{x^2-1}) \\
-\text{arcosh}x &= \log(x - \sqrt{x^2-1})
\end{aligned}
$$

De aquí se deduce que

$$w_k \;=\; |\phi|\ \exp\left((-1)^k \text{arcosh}\ \left(\frac{M^2+1}{2M}\ \cos v\right)\right).$$

Volviendo a la inecuación de segundo grado obtenemos

$$w_1 \leq w \leq w_2 \quad \text{c.s.}$$

De esto se obtiene fácilmente la desigualdad (2.7).

Si consideramos

$$h_1 = \frac{M^2+1}{2M}\ h$$

claramente notamos que $h_1 \in H^1(\mathbb{T})$,

$$v = -arg\,(e_{-n}\,h_1)$$

y

$$W_{\zeta\zeta} = |\phi|\ \exp(u) = \frac{M^2+1}{2M}\ |h|\exp(u) = |h_1|\exp(u) \quad \text{c.s.}$$

Como $v = -arg\,(\phi)$ tenemos

$$w = \phi\ \exp(u + iv) \quad \text{c.s.}$$

Luego

$$0 < w\ \exp(-u - \widetilde{v}) = \phi\ \exp(-\widetilde{v} + iv) \quad \text{c.s.}$$

Sea

$$S = \phi\ \exp(-\widetilde{v} + iv).$$

Por el principio de continuidad analítica de Helson y Sarason (ver [**7**]) tenemos que

$$S = |p_1|^2$$

para un polinomio p_1 de grado menor que n. Luego

$$w\ \exp(-u - \widetilde{v}) = |p_1|^2 \quad \text{c.s.}$$

es decir,

$$W_{\zeta\zeta} = |p_1|^2 \exp(u + \widetilde{v}) \quad \text{c.s.}$$

□

Teorema 2.10. *Sea $\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{G})$ positivo, supongamos que $d\mu = W dx$ donde $W \in L^1_{L(\mathcal{G})}(\mathbb{T})$ y sea $M > 1$. Si*

$$\|\,\mathsf{H}\varphi\|_\mu \leq M\ \|\varphi\|_\mu$$

para toda $\varphi \in e_n\mathcal{P}_1(\mathcal{G}) + \mathcal{P}_2(\mathcal{G})$ y si dados $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$ se tiene que

$$0 < (M^2 - 1)\sqrt{W_{\zeta\zeta}(x)W_{\xi\xi}(x)} < (M^2 + 1)\,|W_{\zeta\xi}(x)| \quad \textit{para casi todo } x \in [0, 2\pi)$$

entonces:

(a) *Existe $u \in L^\infty(\mathbb{T})$ y $h \in H^1(\mathbb{T})$ tal que*

$$|W_{\zeta\xi}| = \frac{|q|}{\sqrt{|q|^2 - 1}}\,|h| \exp(u) \quad \textit{c.s.}$$

donde

$$q(x) = \frac{M^2 + 1}{M^2 - 1}\,\frac{e_n(x)W_{\zeta\xi}(x)}{\sqrt{W_{\zeta\zeta}(x)\ W_{\xi\xi}(x)}}$$

y

(2.10) $$|u|\ \leq \operatorname{arcosh}\left(\frac{|q|}{\sqrt{|q|^2 - 1}}\ \cos v\right) \quad \textit{c.s.}$$

También

$$v(x) = -\arg\left(e_{-n}(x)\,h(x)\ \exp(-ix\ \arg W_{\zeta\xi}(x))\right)$$

satisface

$$\|v\|_\infty \leq \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{1}{|q(x)|}\right) < \frac{\pi}{2}. \tag{2.11}$$

(b) *Si existe un entero no negativo N tal que*

$$W_{\zeta\xi}(x) = |W_{\zeta\xi}(x)|\, e_N(x) \quad c.s.$$

entonces existe un polinomio p de grado menor que $n+N$ tal que

$$|h| = |p|^2 \exp(\widetilde{v})$$

y

$$|W_{\zeta\xi}| = \frac{|q|}{\sqrt{|q|^2-1}}\, |p|^2 \exp(u+\widetilde{v}) \quad c.s.$$

Demostración. Sean $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$.
(a) Del Teorema 2.6, se sigue que existe $h \in H^1(\mathbb{T})$ tal que

$$(M^2+1)^2\, |\, e_n(x) W_{\zeta\xi}(x) - h(x)\,|^2 \ \leq (M^2-1)^2\, W_{\zeta\zeta}(x)\; W_{\xi\xi}(x) \quad \text{c.s.}$$

Sea

$$\begin{aligned} z_{11}(x) &= (M^2-1)\, W_{\zeta\zeta}(x),\\ z_{22}(x) &= (M^2-1)\, W_{\xi\xi}(x),\\ z_{12}(x) &= \overline{z_{21}(x))} = (M^2+1)\, e_n(x)\, W_{\zeta\xi}(x). \end{aligned}$$

Entonces

$$|\, z_{12}(x) - (M^2+1)h(x)\,|^2 \ \leq z_{11}(x)\; z_{22}(x) \quad \text{c.s.}$$

De donde la matriz

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} + (M^2+1)h \\ z_{21} + (M^2+1)\overline{h} & z_{22} \end{bmatrix}$$

es positiva.

Como $(M^2+1)h \in H^1(\mathbb{T})$ se sigue que la matriz

$$\{z_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta=1,2} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}$$

es débilmente positiva (ver [**1**] y [**5**, pag. 291]).

Usando la hipótesis tenemos que

$$0 \;<\; \left(M^2-1\right)\sqrt{W_{\zeta\zeta}W_{\xi\xi}} < \left(M^2+1\right)|W_{\zeta\xi}(x)| \quad \text{c.s.}$$

$$0 \;<\; \left(M^2-1\right)\sqrt{\frac{z_{11}}{(M^2-1)}\cdot\frac{z_{22}}{(M^2-1)}} < \left(M^2+1\right)\frac{|z_{12}(x)|}{(M^2+1)} \quad \text{c.s.}$$

$$0 \;<\; \sqrt{z_{11}(x)z_{22}(x)} < |z_{12}(x)| \quad \text{c.s.}$$

Como $z_{\alpha,\beta}\in L^1(\mathbb{T})$ para $\alpha,\beta=1,2$, $z_{11}(x)>0$ c.s. y $z_{22}(x)>0$ c.s. podemos usar un resultado de Domínguez (Proposición 2.2 de [**5**]) y obtenemos que

$$\frac{|z_{12}(x)|}{|q(x)|} = \sqrt{z_{11}(x)z_{22}(x)} = \frac{1}{\sqrt{|q(x)|^2-1}}\,|h(x)|\exp(u(x)) \quad \text{c.s.}$$

donde

$$q(x) = \frac{z_{12}(x)}{\sqrt{z_{11}(x)z_{22}(x)}} = \frac{M^2+1}{M^2-1}\,\frac{e_n(x)W_{\zeta\xi}(x)}{\sqrt{W_{\zeta\zeta}(x)\,W_{\xi\xi}(x)}},$$

$u\in L^\infty(\mathbb{T})$ satisface

$$|u(x)| \le \operatorname{arccosh}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{|q(x)|}\right)^2}}\cos v(x)\right) \quad \text{c.s.}$$

y

$$v(x) = -\arg\left(e_{-n}(x)\,h(x)\,\exp(-ix\,\arg W_{\zeta\xi}(x))\right)$$

satisface

$$|v(x)| \;\le \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{|q(x)|}\right) < \frac{\pi}{2} \quad \text{c.s..}$$

Obviamente

$$|W_{\zeta\xi}| = \frac{|q|}{\sqrt{|q|^2-1}}\,|h|\exp(u) \quad \text{c.s.}$$

y

$$q(x) = \left(\frac{M^2+1}{M^2-1}\right)\frac{e_n(x)W_{\zeta\xi}(x)}{\sqrt{W_{\zeta\zeta}(x)\,W_{\xi\xi}(x)}}.$$

Además u satisface la ecuación (2.10) y v satisface la ecuación (2.11).

(b) Supongamos que existe N tal que

$$W_{\zeta\xi}(x) = |W_{\zeta\xi}(x)|\,e_N(x),$$

usando el Lema 5 de [**2**] tenemos que

$$|h| = |p|^2 \exp(\widetilde{v})$$

donde p es un polinomio de grado menor que $n + N$. $\square$

Observación 2.11. El Lema 2.9 puede obtenerse del Teorema 2.10.

En [**5**], Domínguez dió la versión finito - dimensional del siguiente teorema.

Teorema 2.12. *Sea $\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{G})$ positivo, supongamos que $d\mu = W dx$ donde $W \in L^1_{L(\mathcal{G})}(\mathbb{T})$ y sea $M > 1$. Supongamos que para todo $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$*

$$0 < (M^2 - 1)\sqrt{W_{\zeta\zeta} W_{\xi\xi}} < (M^2 + 1)\,|W_{\zeta\xi}| \quad c.s.$$

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\|\,\mathsf{H}\varphi\|_\mu \leq M\,\|\varphi\|_\mu$ *para toda* $\varphi \in e_n\mathcal{P}_1(\mathcal{G}) + \mathcal{P}_2(\mathcal{G})$.

(b) *si existe $\nu \in \mathfrak{M}(\mathcal{G})_+$ tal que, $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$*

$$d\nu_{\zeta\xi}(x) = h_{\zeta\xi}(x)\,dx,$$

donde $h_{\zeta\xi} \in H^1(\mathbb{T})$ y para

$$q_{\zeta\xi}(x) = \left(\frac{M^2+1}{M^2-1}\right) \cdot \frac{e_n(x) W_{\zeta\xi}(x)}{\sqrt{W_{\zeta\zeta}(x)\, W_{\xi\xi}(x)}}$$

las siguientes condiciones se cumplen:

(i) *Para todo $\zeta \in \mathcal{G}$*

$$W_{\zeta\zeta} = \frac{M^2+1}{2M}\,|h_{\zeta\zeta}| \exp(u_{\zeta\zeta}) = \frac{M^2+1}{2M}|p_{\zeta\zeta}|^2 \exp(u_{\zeta\zeta} + \widetilde{v_{\zeta\zeta}}) \quad c.s.,$$

donde $p_{\zeta\zeta}$ es un polinomio de grado menor que n, $u_{\zeta\zeta} \in L^\infty(\mathbb{T})$ satisface la ecuación (2.7) *y*

$$v_{\zeta\xi} = -\arg\left(e_{-n}\, h_{\zeta\xi}\right)$$

satisface la ecuación (2.8).

(ii) *Para todo $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$*

$$|W_{\zeta\xi}| = \frac{|q_{\zeta\xi}|}{\sqrt{|q_{\zeta\xi}|^2 - 1}}\,|h_{\zeta\xi}| \exp(u_{\zeta\xi}) \quad c.s.,$$

donde $u_{\zeta\xi} \in L^\infty(\mathbb{T})$ satisface la ecuación (2.10) *y*

$$v_{\zeta\xi}(x) = -\arg\left(h_{\zeta\xi}(x)\ \exp(-ix(n + \arg W_{\zeta\xi}(x))\,)\,\right)$$

satisface la ecuación (2.11).

Más aún, si existe N tal que:

$$W_{\zeta\xi}(x) = |W_{\zeta\xi}(x)|\, e_N(x)$$

entonces

$$|W_{\zeta\xi}| = \frac{|q_{\zeta\xi}|}{\sqrt{|q_{\zeta\xi}|^2 - 1}}\, |p_{\zeta\xi}|^2 \exp(u_{\zeta\xi} + \widetilde{v_{\zeta\xi}}) \quad c.s.,$$

donde $p_{\zeta\xi}$ es un polinomio de grado menor que $n + N$.

Demostración. Sea $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$ del Teorema 2.6 se sigue que existe $\nu \in \mathfrak{M}(\mathcal{G})_+$ y $h_{\zeta\xi} \in H^1(\mathbb{T})$ tales que

$$d\nu_{\zeta\xi}(x) = h_{\zeta\xi}(x)\, dx$$

y

$$(M^2+1)^2\, |\, e_n(x) W_{\zeta\xi}(x) - h_{\zeta\xi}(x)\, |^2 \ \leq (M^2-1)^2\, W_{\zeta\zeta}(x)\, W_{\xi\xi}(x) \quad \text{a.e.}$$

Las partes (i) y (ii) se siguen del Lema 2.9 y el Teorema 2.10 parte (a).

La última parte se sigue del Teorema 2.10 parte (b). □

CAPíTULO 3

Extensión a valores operadores del teorema de Teorema de Helson y Sarason.

En este capítulo se darán algunas definiciones importantes y se dan algunos resultados previos, que nos permiten dar una generalización del teorema de Helson - Sarason a valores operadores.

Siguiendo la terminología de [**5**] se considerarán las funciones de Helson - Sarason de tipo n, las cuales aparecieron por primera vez en [**7**].

Definición 3.1. Una función g, es de Helson - Sarason de tipo n, si existen dos funciones reales y acotadas u y v con $\|v\|_\infty < \frac{\pi}{2}$ y un polinomio analítico p de grado menor o igual que n tales que

$$g(x) = |p(x)|^2 \, e^{u(x)+\widetilde{v(x)}}.$$

Definición 3.2. Sea $\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{G})$, $\mu \geq 0$ y supongamos que $d\mu = W dx$ donde $W \in L^1_{L(\mathcal{G})}(\mathbb{T})$. Definimos

$$M_\mu = \sup_{\zeta,\xi,x} \left\{ \frac{\sqrt{W_{\zeta\zeta}(x)\, W_{\xi\xi}(x)}}{|W_{\zeta\xi}(x)|} \right\}$$

y

$$m_\mu = \inf_{\zeta,\xi,x} \left\{ \frac{\sqrt{W_{\zeta\zeta}(x)\, W_{\xi\xi}(x)}}{|W_{\zeta\xi}(x)|} \right\}$$

Estos valores generalizan los que fueron dados en [**5**], para extender el teorema de Helson-Sarason en el caso matricial.

Teorema 3.3. *Sea $\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{G})$, $\mu \geq 0$ tal que $d\mu = W dx$ para alguna $W \in L^1_{L(\mathcal{G})}(\mathbb{T})$. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $0 < r < 1$. Para $x \in [0, 2\pi)$ consideremos*

$$r_{\zeta\xi}(x) = \frac{r\sqrt{W_{\zeta\zeta}(x)\, W_{\xi\xi}(x)}}{|W_{\zeta\xi}(x)|}.$$

Sean $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$, si

$$r_{\zeta\xi}(x) < 1 \quad \textit{para casi todo } x \in [0, 2\pi)$$

entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\rho_n(\mu) \leq r$.

(b) *Para todo* $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$ *existen funciones*

$$g_{\zeta\xi} = |h_{\zeta\xi}(x)| e^{u_{\zeta\xi}},$$

donde $h_{\zeta\xi} \in H^1_{L(\mathcal{G})}(\mathbb{T})$ *tales que:*

(i) $W_{\zeta\zeta}(x) = g_{\zeta\zeta}(x)$ *y ésta es una función Helson - Sarason de tipo* n.

(ii) $|W_{\zeta\xi}(x)| = \sqrt{(1-r^2)(g_{\zeta\xi}(x))^2 + r^2 g_{\zeta\zeta}(x) g_{\xi\xi}(x)}$,

(iii) *Sea* $v_{\zeta\xi}(x) = -\arg\left(h_{\zeta\xi}(x)\ \exp(-ix(n + \arg W_{\zeta\xi}(x))\ )\ \right)$ *entonces* $u_{\zeta\zeta}$ *y* $v_{\zeta\zeta}$ *satisfacen la ecuaciones*

$$|u_{\zeta\xi}(x)| \leq \operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{\sqrt{1-(r_{\zeta\xi}(x))^2}}\ \cos v_{\zeta\xi}(x)\right) \quad c.s. \tag{3.1}$$

y

$$|v_{\zeta\xi}(x)| \leq \frac{\pi}{2} - \arccos\ (r_{\zeta\xi}(x)) < \frac{\pi}{2} \quad c.s. \tag{3.2}$$

Si $W_{\zeta\xi}(x) = |w_{\zeta\xi}(x)|\, e^{ixN_{\zeta\xi}}$ *para un entero positivo* $N_{\zeta\xi}$ *entonces* $g_{\zeta\xi}$ *es una función Helson- Sarason de tipo* $n + N_{\zeta\xi}$.

Demostración. Seguiremos un razonamiento análogo del Teorema 2.4 de [**5**].

Sea $x \in [0, 2\pi)$. Notemos que

$$\sqrt{1-(r_{\zeta\xi}(x))^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{r^2 W_{\zeta\zeta}(x)\ W_{\xi\xi}(x)}{|W_{\zeta\xi}(x)|^2}\right)} = \frac{\sqrt{|W_{\zeta\xi}(x)|^2 - r^2 W_{\zeta\zeta}(x) W_{\xi\xi}(x)}}{|W_{\zeta\xi}(x)|}$$

Luego

$$|W_{\zeta\xi}(x)| = \frac{\sqrt{|W_{\zeta\xi}(x)|^2 - r^2 W_{\zeta\zeta}(x) W_{\xi\xi}(x)}}{\sqrt{1-(r_{\zeta\xi}(x))^2}} \tag{3.3}$$

Sea

$$q_{\zeta\xi}(x) = \frac{1}{r} \cdot \frac{e_n(x)\, W_{\zeta\xi}(x)}{\sqrt{W_{\zeta\zeta}(x) W_{\xi\xi}(x)}}$$

entonces

$$|q_{\zeta\xi}(x)| = \frac{1}{r_{\zeta\xi}(x)} = \left(\frac{M^2+1}{M^2-1}\right) \cdot \frac{|W_{\zeta\xi}(x)|}{\sqrt{W_{\zeta\zeta}(x) W_{\xi\xi}(x)}}.$$

Además se puede probar que

$$\frac{|q_{\zeta\xi}(x)|}{\sqrt{|q_{\zeta\xi}(x)|^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{1-(r_{\zeta\xi}(x))^2}}.$$

De la ecuación (3.3) obtenemos

$$|W_{\zeta\xi}(x)| = \frac{|q_{\zeta\xi}(x)|}{\sqrt{|q_{\zeta\xi}(x)|^2-1}} \sqrt{|W_{\zeta\xi}(x)|^2 - r^2 W_{\zeta\zeta}(x)W_{\xi\xi}(x)}. \tag{3.4}$$

Sea

$$r = \frac{M^2-1}{M^2+1}.$$

Entonces

$$\frac{M^2+1}{2M} = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}.$$

Como $r_{\zeta\xi}(x) < 1$ para casi todo $x \in [0, 2\pi)$ se tiene que

$$0 < (M^2-1)\sqrt{W_{\zeta\zeta}(x)W_{\xi\xi}(x)} < (M^2+1)\,|W_{\zeta\xi}(x)| \quad \text{para casi todo } x \in [0, 2\pi). \tag{3.5}$$

Usando el Teorema 2.6 tenemos que:
$\rho_n(\mu) = \rho_n(W) \leq r$ si y sólo si $\| \mathsf{H}\varphi\|_\mu \leq M \,\|\varphi\|_\mu$ para todo $\varphi \in e_n\mathcal{P}_1(\mathcal{G}) + \mathcal{P}_2(\mathcal{G})$.

Y como se cumple (3.5), tenemos que estas condiciones son equivalentes a la condición (b) del Teorema 2.12.

Sean

$$h_{\zeta\xi} = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\, h^o_{\zeta\xi}$$

y $g_{\zeta\xi}(x) = |h_{\zeta\xi}(x)| \exp(u_{\zeta\xi}(x))$ entonces

$$W_{\zeta\zeta} = g_{\zeta\zeta}$$

y

$$|W_{\zeta\xi}| = \frac{|q_{\zeta\xi}|}{\sqrt{|q_{\zeta\xi}|^2-1}} \sqrt{1-r^2}\; g_{\zeta\xi}. \tag{3.6}$$

De (3.4) y (3.6) obtenemos

$$\sqrt{1-r^2}\; g_{\zeta\xi} = \sqrt{|W_{\zeta\xi}|^2 - r^2 W_{\zeta\zeta}W_{\xi\xi}}.$$

Por lo tanto

$$|W_{\zeta\xi}| = \sqrt{(1-r^2)(g_{\zeta\xi})^2 + r^2 g_{\zeta\zeta} g_{\xi\xi}}.$$

Más aún, si existe N tal que $W_{\zeta\xi}(x) = |W_{\zeta\xi}(x)|\, e_N(x)$ entonces

$$|W_{\zeta\xi}| = \frac{|q_{\zeta\xi}|}{\sqrt{|q_{\zeta\xi}|^2 - 1}}\, |p_{\zeta\xi}|^2 \exp(u_{\zeta\xi} + \widetilde{v_{\zeta\xi}}) \quad \text{a.e.}$$

donde $p_{\zeta\xi}$ es un polinomio de grado menor o igual que $n + N$.

$\square$

TEOREMA 3.4. *Sea $\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{G})$, $\mu \geq 0$ tal que $d\mu = W dx$ para una función $W \in L^1_{L(\mathcal{G})}(\mathbb{T})$. Si $0 < m_\mu \leq M_\mu < \infty$ entonces las siguientes condiciones son equivalentes*

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n(\mu) = 0$

(b) *Para cada $\varepsilon > 0$, existe $n > 0$ y $r_\varepsilon < \frac{1}{M_\mu}$ tal que para todo $r < r_\varepsilon$ y para $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$ existen funciones de Helson - Sarason, $g_{\varepsilon\zeta\xi}$, de tipo n tales que*

  (i) $g_{\varepsilon\zeta\xi} = |h_{\varepsilon\zeta\xi}| e^{u_{\varepsilon\zeta\xi}}$ *donde $h_{\varepsilon\zeta\xi} \in H^1(\mathbb{T})$ y $u_{\varepsilon\zeta\xi}$ es una función real acotada*

  (ii) $W_{\zeta\zeta}(x) = g_{\varepsilon\zeta\xi}(x) \dfrac{1}{\sqrt{1-r^2}}$

  (iii) $|W_{\zeta\xi}(x)| = \sqrt{(1-r^2)\, g_{\varepsilon\zeta\xi}(x)^2 + r^2\, g_{\varepsilon\zeta\zeta}(x) g_{\varepsilon\xi\xi}(x)}$

  (iv) *Si $v_{\varepsilon\zeta\xi}(x) = -\arg(e_{-n}(x) h_{\varepsilon\zeta\xi}(x) \exp(ix \arg W_{\zeta\xi}(x)))$ entonces*

$$\|u_{\varepsilon\zeta\xi}\|_\infty + \|v_{\varepsilon\zeta\xi}\|_\infty < \varepsilon.$$

En este caso también tenemos que:

$$W_{\zeta\xi}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} g_{\varepsilon\zeta\xi}(x).$$

Si $W_{\zeta\xi}(x) = |W_{\zeta\xi}(x)| e^{ixN_{\zeta\xi}}$ para un entero positivo $N_{\zeta\xi}$ entonces $W_{\zeta\xi}$ es una función de Helson - Sarason de tipo $n + N_{\zeta\xi}$.

DEMOSTRACIÓN. Seguiremos un razonamiento análogo del Teorema 2.5 de [**5**].

$(a) \Rightarrow (b)$ Usaremos

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 0 \quad \text{ y } \quad \lim_{x\to 0} \operatorname{arc\,sen} x = 0.$$

Usando el primer límite se sigue que dado $\varepsilon > 0$, existe $r_\varepsilon \in (0,1)$ tal que para todo $r < r_\varepsilon$ se va a tener lo siguiente:

$$\lim_{r\to 0} \operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{\sqrt{1-r^2 M_\mu^2}}\right) = 0,$$

por lo tanto, existe $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ tal que:

$$|r| < \delta_1 \quad \text{implica que} \quad \operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - r^2 M_\mu^2}}\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Usando el segundo límite se sigue que

$$\lim_{r\to 0} \operatorname{arc\,sen}(rM_\mu) = 0$$

por lo tanto existe $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ tal que:

$$|r| < \delta_2 \text{ implica } \quad |\operatorname{arc\,sen}(rM_\mu)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea

$$r_\varepsilon = \text{mín}\left\{\delta_1, \delta_2, \frac{1}{M_\mu}, 1\right\}.$$

Así, $r_\varepsilon \in (0,1)$. Tomemos r tal que $0 < r < r_\varepsilon$. Entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - r^2 M_\mu^2}}\right) &< \frac{\varepsilon}{2} \\ \operatorname{arc\,sen}(rM_\mu) &< \frac{\varepsilon}{2} \\ r &< 1/M_\mu. \end{aligned}$$

Sea

$$r_{\zeta\xi}(x) = \frac{r\sqrt{W_{\zeta\zeta}(x)W_{\xi\xi}(x)}}{|W_{\zeta\xi}(x)|}$$

entonces

$$r_{\zeta\xi}(x) < rM_\mu < 1.$$

De $\lim_{n\to\infty} \rho_n(\mu) = 0$ se deduce que existe n tal que $\rho_n(\mu) \le r$.

Por el Teorema 3.3 tenemos que para todo $\zeta, \xi \in \mathcal{G}$, $W_{\zeta\xi}$ tiene la representación dada por (i), (ii) y (iii), además

$$|u_{\varepsilon\zeta\xi}(x)| \le \operatorname{arcosh}\left(\frac{\cos v_{\varepsilon\zeta\xi}(x)}{\sqrt{1 - r_{\zeta\xi}^2(x)}}\right)$$

y

$$|v_{\varepsilon\zeta\xi}(x)| \le \operatorname{arc\,sen} r_{\zeta\xi}(x) < \frac{\pi}{2}.$$

Entonces

$$|u_{\varepsilon\zeta\xi}(x)| \le \operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - r^2 M_\mu^2}}\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

y

$$|v_{\varepsilon\zeta\xi}(x)| \leq \operatorname{arc\,sen}(rM_\mu) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por consiguiente

$$\|u_{\varepsilon\zeta\xi}\|_\infty + \|v_{\varepsilon\zeta\xi}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$(b) \Rightarrow (a)$ Dado $r > 0$, sea

$$r_{\zeta\xi}(x) = \frac{r\sqrt{W_{\zeta\zeta}(x)W_{\xi\xi}(x)}}{|W_{\zeta\xi}(x)|}$$

entonces

$$rm_\mu < r_{\zeta\xi}(x) < rM_\mu.$$

Como $1 - r^2M_\mu^2 < 1$ tenemos que

$$1 < \frac{1}{\sqrt{1 - r^2M_\mu^2}}\,.$$

Sea

$$L = \operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - r^2m_\mu^2}}\right)$$

entonces

$$L > \operatorname{arcosh}(1) = 0.$$

Tomando en cuenta que

$$L = \lim_{x\to 0} \operatorname{arcosh}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{1 - r^2m_\mu^2}}\right)$$

y que $\frac{L}{2} > 0$, obtenemos la existencia de $\delta > 0$, tal que $|x| \leq \delta$ implica que

$$\frac{L}{2} = L - \frac{L}{2} < \operatorname{arcosh}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{1 - r^2m_\mu^2}}\right) < L + \frac{L}{2}.$$

Por lo tanto si $|x| \leq \delta$ se tiene

$$\operatorname{arcosh}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{1 - r^2m_\mu^2}}\right) > \frac{L}{2} > 0.$$

Sea $\varepsilon = \min\{\delta, \frac{L}{2}\}$ entonces

$$\varepsilon < \frac{L}{2} < \operatorname{arcosh}\left(\frac{\cos\varepsilon}{\sqrt{1 - r^2m_\mu^2}}\right)$$

y

$$\varepsilon < \operatorname{arc\,sen}(rm_\mu),$$

(porque cuando definimos el arco coseno hiperbólico tomamos $\cos\varepsilon > \sqrt{1 - r^2m_\mu^2}$).

Por hipótesis existe $n > 0$ y $r_\varepsilon < \frac{1}{M_\mu}$, tal que para todo $r < r_\varepsilon$ y $\zeta, \xi \in \mathcal{G}, W_{\zeta\xi}$ tiene la representación dada por (i), (ii) y (iii), además

$$\|u_{\varepsilon\zeta\xi}\|_\infty + \|v_{\varepsilon\zeta\xi}\|_\infty < \varepsilon.$$

Por lo tanto

$$\|v_{\varepsilon\zeta\xi}\|_\infty < \varepsilon < \operatorname{arc\,sen}(rm_\mu) < \operatorname{arc\,sen} r_{\zeta\xi}(x)$$

y

$$|u_{\varepsilon\zeta\xi}| < \varepsilon < \operatorname{arcosh}\left(\frac{\cos\varepsilon}{\sqrt{1 - r^2 m_\mu^2}}\right) < \operatorname{arcosh}\left(\frac{\cos v_{\varepsilon\zeta\xi}}{\sqrt{1 - (r_{\zeta\xi}(x))^2}}\right).$$

Por el Teorema 3.3, tenemos que

$$\rho_n(\mu) \leq r.$$

El resultado buscado se obtiene ya que $\{\rho_n(\mu)\}_{n\geq 0}$ es una sucesión decreciente. $\square$

Bibliografía

[1] R. Arocena, M. Cotlar. *Dilation of generalized Toeplitz kernels and some vectorial moment and weighted problems*. Lecture Notes in Math. Springer **908**, (1982), 169 - 188. 10, 16, 20, 27

[2] R. Arocena, M. Cotlar, C. Sadosky. *Weighted inequalities in L^2 and lifting properties*. Adv. Math. Suppl. Stud. **7A**, (1981), 95-128. 23, 29

[3] R. Bruzual, M. Domínguez. *Operator-valued extension of the theorem of Helson and Szegö*. Operator Theory: Advances and Applications, **149**, (2004), 139-152. 3, 4, 13, 17

[4] M. Cotlar, C. Sadosky. *On the Helson-Szegö theorem and a related class of modified Toeplitz kernels*. Proc. Symp. Pure Math. AMS., **35-I**, (1979), pp. 383–407. 23

[5] M. Domínguez. *A matricial extension of the Helson-Sarason theorem and a characterization of some multivariate linearly completely regular processes*. Journal of Multivariate Analysis, **31-2**, (1989), 289-310. 3, 27, 28, 29, 31, 32, 34

[6] H. Dym, H.P. McKean. *Fourier Series and Integrals*. Academic Press, 1972.

[7] H. Helson, D. Sarason. *Past and future*. Math. Scand. **21**, (1967), 5 - 16. 1, 2, 23, 26, 31

[8] H. Helson, G. Szegö. *A problem in prediction theory*. Ann. Math. Pura Appl. **51**, (1960), 107–138. 2

[9] I. A. Ibragimov, Yu. Rozanov. *Gaussian random procesess*. Applications of Mathematics, Vol. 9, Springer-Verlag, New York, 1978. 2

[10] H.L. Royden. *Real Analysis*, Collier Macmillan International Editions, 1968. 19, 21

[11] B. Sz.-Nagy, C. Foias. *Harmonic analysis of operators on Hilbert space*, North Holland Publishing Co., 1970. 5