UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
POSTGRADO EN MATEMÁTICA

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES
DEFINIDAS POSITIVAS
A VALORES OPERADORES EN UN MÓDULO DE HILBERT.

Autor: Lic. Kenyer Aguiar

Tutor: Dra. Marisela Domínguez.

Trabajo de Grado de Maestría presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela para optar al título de Magister Scientiarum, Mención Matemática.

Caracas, Venezuela

Julio de 2013

Resumen

El conocido teorema de Bochner para funciones definidas positivas da una representación integral de este tipo de funciones. Usando técnicas de módulos de Hilbert Kakihara da una extensión de este teorema para el caso de funciones a valores en un álgebra de Von Neumann.

En este trabajo se considera una función definida positiva a valores operadores en un módulo de Hilbert autodual, y se utilizan las técnicas de Kakihara y Falb para dar un a representación integral tipo Bochner para funciones definidas positivas continuas respecto a la topología gramiana.

Agradecimiento

Gracias al Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico de la Universidad Central de Venezuela por su colaboración en la edición de este trabajo.

Índice general

Introducción	1
Capítulo 1. Resultados de teoría espectral	3
1. Conceptos y resultados básicos.	3
2. Elementos positivos y orden en un álgebra C^*	10
3. Teorema de Stone.	11
Capítulo 2. Introducción a los módulos de Hilbert.	13
1. Desigualdad generalizada de Cauchy-Schwarz y consecuencias.	14
2. Módulos de Hilbert.	16
3. Submódulos y complemento ortogonal.	22
4. Operadores lineales entre módulos de Hilbert.	23
Capítulo 3. Funciones definidas positivas a valores en álgebras de Von Neumann	30
1. Núcleos definidos positivos.	30
2. Funciones definidas positivas en grupos abelianos localmente compactos	34
3. Algunos hechos sobre álgebras de Von Neumann.	37
4. Topología σ -débil en álgebra de Von Neumann y topología gramiana en $B(E)$.	38
5. Representación integral de funciones definidas positivas a valores en un álgebra de Von Neumann.	39
Capítulo 4. Funciones definidas positivas a valores operadores sobre un módulo de Hilbert autodual	50
1. Representación integral de funciones definidas positivas a valores operadores sobre un módulo de Hilbert autodual.	50
Bibliografía	58

Introducción

Sea G un grupo abeliano localmente compacto y $\phi : G \rightarrow \mathbb{C}$ una función, se dice que ϕ es *definida positiva* en G si para cualquier elección de $x_1, \dots, x_N$ en G y para cualquier selección $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{C}$ tenemos que

$$\sum_{n,m=1}^N \lambda_n \overline{\lambda_m} \phi(x_n - x_m) \geq 0.$$

Las funciones definidas positivas surgen naturalmente en la teoría de la transformada de Fourier, ya que, la transformada de Fourier de una medida positiva en un grupo tiene la propiedad de ser definida positiva. En 1938 Weil demostró el recíproco de este resultado, estableciendo que una función definida positiva es la transformada de Fourier de una medida positiva, c.f. [42]. Anteriormente Herglotz había probado el resultado para el caso $G = \mathbb{Z}$ y Bochner lo había probado para el caso $G = \mathbb{R}$. Estos resultados fueron extendidos a un grupo G abeliano localmente compacto, en lo que hoy ampliamente conocido como el teorema de Bochner c.f. [33].

Al reemplazar el conjunto de llegada $\mathbb{C}$ de la función ϕ por un conjunto de operadores lineales y acotados en un espacio de Hilbert y cambiando los escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{C}$ por vectores, se logran otro tipo de generalizaciones. Una de estas fue estudiada por P. Falb en su artículo [18], donde establece un teorema tipo Bochner para este tipo de funciones. Cuando además se reemplaza $\mathbb{C}$ por un álgebra C^* esto da origen a problemas interesantes. Los módulos de Hilbert se encuentran en esta línea de investigación y fueron introducidos por Kaplansky en [23] bajo el nombre de C^* -módulos o módulos C^* .

La noción de módulo de Hilbert es una generalización de los espacios de Hilbert. La definición es idéntica, se tiene una suma, un producto por escalares y un producto interno. La diferencia es que los escalares en vez de ser números complejos son elementos de un álgebra C^* . En una álgebra C^* , además de las operaciones usuales de un álgebra, se tiene

una norma que es compatible con la estructura del álgebra. Con el producto interno y la norma del álgebra se construye una norma para el módulo de Hilbert.

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* , para módulos a derecha sobre $\mathcal{A}$, o más brevemente $\mathcal{A}$ -módulo. Un $\mathcal{A}$ -módulo E se dice que es un $\mathcal{A}$ -módulo de Hilbert si tiene un producto interno a valores en $\mathcal{A}$, que es estable respecto de la acción del módulo y que es completo con respecto a la norma

$$\|a\|_E = \|\langle a, a \rangle\|_{\mathcal{A}}^{1/2}$$

para $a \in \mathcal{A}$.

En 1983, Kakihara [22] dió varios resultados de análisis armónico entre los cuales se encuentra el siguiente: Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Von Neuman, $\Upsilon : G \rightarrow \mathcal{A}$ es una función definida positiva, débilmente continua, entonces existe una medida μ en $\widehat{G}$ con valores en $\mathcal{A}$ tal que

$$\Upsilon(s) = \int_{\widehat{G}} \overline{(s, \gamma)} d\mu(\gamma)$$

para $\gamma \in G$, donde la integral se toma con respecto a la topología débil de $\mathcal{A}$.

En este trabajo nos interesa estudiar funciones definidas positivas a valores operadores sobre un módulo de Hilbert autodual, y usar las técnicas de Y. Kakihara y P. Falb, para obtener un reresentación integral tipo Bochner para este tipo de funciones.

Actualmente existen libros y artículos que contienen excelentes introducciones para estudiantes y matemáticos no especialistas en el tema a la teoría básica de módulos C^* [24, 27]. El material está presentado de una manera clara presentando las definiciones y conceptos básicos a la teoría elemental de módulos C^* de Hilbert.

Resultados de teoría espectral

En este capítulo se presentan algunas definiciones, teoremas y proposiciones relativas a la teoría de álgebras C^* que nos serán de utilidad para el desarrollo de los capítulos siguientes, especialmente el del Capítulo 2 sobre módulos de Hilbert.

1. Conceptos y resultados básicos.

DEFINICIÓN 1.1. Un álgebra $\mathcal{A}$ se dice de Banach, si sobre ella está definida una norma $\|\cdot\|$, que verifica la desigualdad

$$\|ab\|_{\mathcal{A}} \leq \|a\|_{\mathcal{A}}\|b\|_{\mathcal{A}}$$

para $a, b \in \mathcal{A}$, y $\mathcal{A}$ es un espacio completo con respecto a dicha norma.

DEFINICIÓN 1.2. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach, si además existe una función $*$: $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, que cumple para todo $a, b \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{C}$

- i. $(a^*)^* = a$,
- ii. $(a + \lambda b)^* = a^* + \bar{\lambda}b^*$,
- iii. $(ab)^* = b^*a^*$,
- iv. $\|a^*\|_{\mathcal{A}} = \|a\|_{\mathcal{A}}$

entonces diremos que $\mathcal{A}$ es un *álgebra C^** .

EJEMPLO 1.3. Sea $\mathcal{A} = l_{\infty}(\mathbb{C})$ con las operaciones usuales y la norma $\|\cdot\|_{\infty}$, la involución en este espacio viene dada como

$$(x_n)^* = (\overline{x_n}).$$

En lo que sigue $\mathcal{A}$ denotará un álgebra C^* conmutativa con unidad e .

DEFINICIÓN 1.4. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* . Si $a \in \mathcal{A}$ es tal que $a = a^*$ decimos que a es *autoadjunto*, diremos que a es *normal* si $aa^* = a^*a$, se dice que a es *unitario* si a es invertible y $a^{-1} = a^*$, y finalmente decimos que a es una *proyección* si a es autoadjunto y $a^2 = a$.

Dado $a \in \mathcal{A}$ el *espectro* de a se define como el conjunto

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda e \text{ no es invertible}\}.$$

Al complemento de este conjunto se le llama el *conjunto resolvente* de a y se denota por $\rho(a)$.

Denotemos por $G_{\mathcal{A}}$ el conjunto de los elementos invertibles de $\mathcal{A}$.

Tenemos el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 1.5. *Sea $a \in \mathcal{A}$, tal que $\|a\|_{\mathcal{A}} < 1$ entonces, $e - a \in G_{\mathcal{A}}$ y*

$$\|(e - a)^{-1}\|_{\mathcal{A}} \leq \frac{1}{1 - \|a\|_{\mathcal{A}}}.$$

DEMOSTRACIÓN.

Como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|a^n\|_{\mathcal{A}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|a\|_{\mathcal{A}}^n = (1 - \|a\|_{\mathcal{A}})^{-1},$$

tenemos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ converge en $\mathcal{A}$. Sea $b \in \mathcal{A}$ tal que $b = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$. Ya que

$$(e - a)(e + a + \cdots + a^n) = e - a^{n+1},$$

haciendo $n \rightarrow \infty$ en esta expresión resulta $(e - a)b = e$. De donde $b = (e - a)^{-1}$. $\square$

PROPOSICIÓN 1.6. *El conjunto $G_{\mathcal{A}}$ es un conjunto abierto en $\mathcal{A}$, y la función $b \rightarrow b^{-1}$, definida para $b \in G_{\mathcal{A}}$, es continua.*

DEMOSTRACIÓN.

Veamos que $G_{\mathcal{A}}$ es abierto. Sean $a \in G_{\mathcal{A}}$, tomemos $b \in \mathcal{A}$ tal que $\|a - b\|_{\mathcal{A}} < \|a\|_{\mathcal{A}}^{-1}$.

Como

$$a - b = a(e - a^{-1}b),$$

se tiene que

$$\|e - a^{-1}b\|_{\mathcal{A}} = \frac{\|a - b\|_{\mathcal{A}}}{\|a\|_{\mathcal{A}}} < 1.$$

Por la proposición anterior $e - (e - a^{-1}b) = a^{-1}b$ es invertible, de donde $b = a(a^{-1}b) \in G_{\mathcal{A}}$.

Hemos probado que $B(a, 1/\|a\|_{\mathcal{A}}^{-1}) \subset G_{\mathcal{A}}$. Esto demuestra que $G_{\mathcal{A}}$ es abierto.

Veamos que la inversión es continua. Fijemos $a \in G_{\mathcal{A}}$, para $\|h\|_{\mathcal{A}} < \frac{1}{\|a^{-1}\|_{\mathcal{A}}}$, tenemos que $\| -a^{-1}h \|_{\mathcal{A}} = \|a^{-1}h\|_{\mathcal{A}} < 1$, por la Proposición (1.5) tenemos que $e + a^{-1}h$ es invertible y

$$\|(e + a^{-1}h)^{-1}\|_{\mathcal{A}} < \frac{1}{1 - \|a^{-1}h\|_{\mathcal{A}}}.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} (a + h)^{-1} - a^{-1} &= (e + a^{-1}h)^{-1}a^{-1} - a^{-1} \\ &= [(e + a^{-1}h)^{-1} - e]a^{-1} \\ &= (e + a^{-1}h)^{-1}(e - (e + a^{-1}h))a^{-1} \\ &= -(e + a^{-1}h)^{-1}a^{-1}ha^{-1} \end{aligned}$$

Por lo tanto bajo la condición de que $\|h\|_{\mathcal{A}} < \frac{1}{\|a^{-1}\|_{\mathcal{A}}}$ tenemos

$$\begin{aligned} \|(a + h)^{-1} - a^{-1}\|_{\mathcal{A}} &= \|(e + a^{-1}h)^{-1}\|_{\mathcal{A}} \|h\|_{\mathcal{A}} \|a^{-1}\|_{\mathcal{A}}^2 \\ &< \frac{\|h\|_{\mathcal{A}} \|a^{-1}\|_{\mathcal{A}}^2}{1 - \|a^{-1}h\|_{\mathcal{A}}} \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

cuando $h \rightarrow 0$. □

PROPOSICIÓN 1.7. *El conjunto $\sigma(a)$ es un subconjunto compacto y no vacío de $\mathbb{C}$.*

DEMOSTRACIÓN.

Veamos que $\sigma(a)$ es compacto. Consideremos la función $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{A}$, dada por

$$\phi(\lambda) = a - \lambda e,$$

es claro que ϕ es una función continua.

Además

$$\phi^{-1}(G_{\mathcal{A}}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \phi(\lambda) \in G_{\mathcal{A}}\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda e \in G_{\mathcal{A}}\} = \mathbb{C} \setminus \sigma(a),$$

como $G_{\mathcal{A}}$ es abierto y ϕ es continua entonces $\phi^{-1}(G_{\mathcal{A}})$ es abierto. Así que $\sigma(a)$ es cerrado.

Veamos que $G_{\mathcal{A}}$ es acotado. Sea λ tal que $|\lambda| > \|a\|_{\mathcal{A}}$, entonces $\|a/\lambda\|_{\mathcal{A}} < 1$. Por la Proposición (1.5) $e - a/\lambda \in G_{\mathcal{A}}$, y esto implica que $a - \lambda e \in G_{\mathcal{A}}$, es decir, $\lambda \notin \sigma(a)$. Así que

$$\sigma(a) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|a\|_{\mathcal{A}}\}.$$

Veamos por último que $\sigma(a) \neq \emptyset$. Consideremos la función $R : \rho(a) \rightarrow \mathcal{A}$, definida por

$$R(\lambda) = (a - \lambda e)^{-1}.$$

Para $\alpha, \lambda \in \rho(a)$ no es difícil ver que

$$R^{-1}(\alpha)(R(\alpha) - R(\lambda))R^{-1}(\lambda) = (\alpha - \lambda)e.$$

De la identidad anterior y la continuidad de la inversión, resulta que R es una función analítica sobre $\rho(a)$, y para $\lambda \in \rho(a)$

$$R'(\lambda) = \lim_{\alpha \rightarrow \lambda} \frac{R(\lambda) - R(\alpha)}{\lambda - \alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow \lambda} R(\lambda)R(\alpha) = (R(\lambda))^2.$$

Fijemos $f \in \mathcal{A}^*$, donde $\mathcal{A}^*$ denota el dual topológico de $\mathcal{A}$. Definamos $F : \rho(a) \rightarrow \mathbb{C}$, por

$$F(\lambda) = f(R(\lambda)).$$

Entonces F es analítica en $\rho(a)$, ya que para $\lambda, \alpha \in \rho(a)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{F(\lambda) - F(\alpha)}{\lambda - \alpha} &= \frac{f(R(\lambda)) - f(R(\alpha))}{\lambda - \alpha} \\ &= f\left(\frac{R(\lambda) - R(\alpha)}{\lambda - \alpha}\right) \rightarrow f((R(\lambda))^2), \end{aligned}$$

cuando α tiende a λ .

Por otro lado para $|\lambda| > \|a\|_{\mathcal{A}}$, tenemos

$$R(\lambda) = (a - \lambda e)^{-1} = -\lambda^{-1}(e - \lambda^{-1}a)^{-1} = -\lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda}a\right)^n,$$

así

$$\|R(\lambda)\|_{\mathcal{A}} \leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\|a\|_{\mathcal{A}}}{|\lambda|}\right)^n = \frac{1}{|\lambda| - \|a\|_{\mathcal{A}}}.$$

Esto implica que

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|R(\lambda)\|_{\mathcal{A}} = 0$$

y por continuidad de f

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} F(\lambda) = 0.$$

Para $|\lambda| \geq 2\|a\|_{\mathcal{A}} > \|a\|_{\mathcal{A}}$ tenemos que

$$|F(\lambda)| \leq \|f\| \|R(\lambda)\|_{\mathcal{A}} \leq \frac{\|f\|}{|\lambda| - \|a\|_{\mathcal{A}}} \leq \|f\| \|a\|_{\mathcal{A}}^{-1}.$$

Si $\sigma(a) = \emptyset$, entonces F es una función analítica y acotada en todo $\mathbb{C}$. Por el teorema de Liouville $F = f(R) = 0$ por lo tanto $R(\lambda) = 0$, lo cual es una contradicción ya que, $R(\lambda) \in G_{\mathcal{A}}$ para cada λ . Esto implica $\sigma(a) \neq \emptyset$. $\square$

DEFINICIÓN 1.8. Para $a \in \mathcal{A}$ definimos el *radio espectral* de a como

$$r(a) = \max_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|$$

TEOREMA 1.9. Sea $a \in \mathcal{A}$, entonces se cumple la siguiente relación

$$r(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|_{\mathcal{A}}^{1/n} = \varliminf_{n \geq 1} \|a^n\|_{\mathcal{A}}^{1/n}. \quad (1.1)$$

TEOREMA 1.10 (Teorema espectral, forma elemental). Sea $a \in \mathcal{A}$

a. Si p es un polinomio, entonces

$$\sigma(p(a)) = p(\sigma(a)),$$

donde

$$p(\sigma(a)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

b. Si $0 \in \sigma(a)$ y $a \in G_{\mathcal{A}}$ entonces

$$\sigma(a^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda} : \lambda \in \sigma(a) \right\}.$$

DEMOSTRACIÓN.

a. Sea $\lambda \in \sigma(p(a))$, entonces $p(a) - \lambda e$ no es invertible. Sean $r_1, \dots, r_n$ las raíces del polinomio $p(z) - \lambda$, entonces

$$p(z) - \lambda = \lambda_0(z - r_1) \cdots (z - r_n),$$

De donde

$$p(a) - \lambda e = \lambda_0(a - r_1 e) \cdots (a - r_n e).$$

Por otra parte como $p(a) - \lambda e$ no es invertible, debe existir $k_o \in \{1, \dots, n\}$ tal que $a - r_{k_o} e$ no es invertible, es decir $r_{k_o} \in \sigma(a)$. Además r_{k_o} satisface que $p(r_{k_o}) - \lambda = 0$, entonces $\lambda = p(r_{k_o})$, y por lo tanto $\lambda \in p(\sigma(a))$.

Para ver la otra contención, tomemos $\lambda \in p(\sigma(a))$. Entonces existe $r \in \sigma(a)$ tal que $\lambda = p(r)$, notemos que $z = r$ es raíz del polinomio $p(z) - p(r)$. Sean $r_2, r_3, \dots, r_n$ las demás raíces, entonces podemos escribir

$$p(z) - p(r) = c_o(z - r)(z - r_2) \cdots (z - r_n),$$

así que

$$p(a) - p(r)e = c_o(a - re)(a - r_2e) \cdots (a - r_ne).$$

Como $r \in \sigma(a)$, entonces $a - re$ no es invertible, por lo que tampoco lo es $p(a) - p(r)$, por lo tanto $\lambda \in \sigma(p(a))$.

b. Esta parte es inmediata, usando la relación

$$a^{-1} - \frac{1}{\lambda}e = -\frac{1}{\lambda}a^{-1}(a - \lambda e).$$

□

Más generalmente tenemos el siguiente resultado

TEOREMA 1.11 (Aplicación espectral.). *Sea $a \in \mathcal{A}$, un elemento normal, $f \in \mathcal{C}(\sigma(a), \mathbb{C})$, entonces*

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)).$$

Para una demostración de este teorema (véase [29]).

PROPOSICIÓN 1.12. *Sean a un elemento de A entonces*

- $\sigma(a) = \overline{\sigma(a^*)}$.
- Si a es unitario entonces $\sigma(a) \subset \mathbb{T}$.
- Si a es autoadjunto entonces $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$.

DEMOSTRACIÓN.

- Como $e^* = e$, $xy = e$ si y solamente si $x^*y^* = e$, es decir, un elemento $x \in \mathcal{A}$ es invertible si y solo si lo es x^* . De manera que $(a - \lambda e)$ es invertible, si y solo si, $(a - \lambda e)^* = a^* - \bar{\lambda}e$ es invertible.
- Si a es unitario, entonces

$$\|a\|_{\mathcal{A}}^2 = \|aa^*\|_{\mathcal{A}} = \|e\|_{\mathcal{A}}^2 = 1.$$

Por lo tanto, si $\lambda \in \sigma(a)$ entonces $|\lambda| \leq 1$, como a^* también es unitario, y $\lambda \in \sigma(a)$ entonces $1/\lambda \in \sigma(a^*) = \sigma(a^{-1})$, así que

$$1/|\lambda| \leq \|a^*\|_{\mathcal{A}} = \|a\|_{\mathcal{A}} = 1,$$

es decir, $|\lambda| \geq 1$, por lo tanto $|\lambda| = 1$.

c. Sea $a \in \mathcal{A}$ un elemento auto adjunto. Tomemos

$$u = e^{ia} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ia)^n}{n!}.$$

Entonces por ser a autoadjunto y por continuidad de la involución tenemos que

$$u^* = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ia)^n}{n!} \right)^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ia)^n}{n!} = e^{-ia}.$$

Además

$$uu^* = e = u^*u.$$

De donde u es unitario. Usando el item previo tenemos que

$$\sigma(u) \subseteq \mathbb{T}.$$

Por otra parte, por el teorema Espectral

$$\sigma(u) = \sigma(e^{ia}) = \exp(i\sigma(a)).$$

De manera que si $\lambda \in \sigma(a)$ entonces $e^{i\lambda} \in \sigma(u)$, y como $\sigma(u) \subseteq \mathbb{T}$ se tiene que $|e^{i\lambda}| = 1$, de donde

$$\operatorname{Re}(i\lambda) = 0.$$

Lo cual ocurre si, y solo si, λ es un número real.

□

COROLARIO 1.13. *Si $a \in \mathcal{A}$ y a es normal entonces $\|a\|_{\mathcal{A}} = r(a)$.*

DEMOSTRACIÓN.

Si b es autoadjunto, entonces de la igualdad $\|b^2\|_{\mathcal{A}} = \|b\|_{\mathcal{A}}^2$, al iterar el argumento obtenemos que $\|b^{2n}\|_{\mathcal{A}} = \|b\|_{\mathcal{A}}^{2n}$. Por la fórmula del radio espectral tenemos

$$\|b\|_{\mathcal{A}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|b^{2n}\|_{\mathcal{A}}^{1/2n} = r(b).$$

Ahora para a normal tenemos,

$$\begin{aligned} \|a\|_{\mathcal{A}}^2 &= \|aa^*\|_{\mathcal{A}} = r(aa^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(aa^*)^n\|_{\mathcal{A}}^{1/n} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|_{\mathcal{A}}^{1/n} \|(a^*)^n\|_{\mathcal{A}}^{1/n} = r^2(a) \leq \|a\|_{\mathcal{A}}^2. \end{aligned}$$

□

2. Elementos positivos y orden en un álgebra C^*

DEFINICIÓN 1.14. Dado un elemento $a \in \mathcal{A}$, diremos que a es *positivo* si, a es autoadjunto y $\sigma(a) \subset [0, +\infty)$. Si a es positivo escribiremos $a \geq 0$. De igual forma escribiremos $a \geq b$ para indicar que $a - b \geq 0$.

Se puede probar que un elemento a es positivo en $\mathcal{A}$ si y solo si existe un $b \in \mathcal{A}$, tal que $a = bb^*$. Es decir si denotamos por $\mathcal{A}^+$ el conjunto de todos los elementos positivos de $\mathcal{A}$, entonces

$$\mathcal{A}^+ = \{bb^* : b \in \mathcal{A}\}.$$

PROPOSICIÓN 1.15. Si a es un elemento autoadjunto de $\mathcal{A}$, entonces

- (a) $-||a||e \leq a \leq ||a||e$.
- (b) Existen b, c elementos positivos de $\mathcal{A}$ tales que $bc = cb = 0$, y $a = b - c$.

DEMOSTRACIÓN.

- (a) Debemos probar que $a + ||a||_{\mathcal{A}}e \geq 0$ y $||a||_{\mathcal{A}}e - a \geq 0$. Para la primera desigualdad definamos $g : \sigma(a) \rightarrow \mathbb{R}$ por $g(\lambda) = ||a||_{\mathcal{A}} + \lambda$. Entonces g es una función continua, por lo tanto

$$\sigma(||a||_{\mathcal{A}}e + a) = \sigma(g(a)) = g(\sigma(a)) \subset [0, 2||a||_{\mathcal{A}}],$$

ya que $\sigma(a) \subset \{\lambda \in \mathbb{R} : |\lambda| \leq ||a||_{\mathcal{A}}\} = [-||a||_{\mathcal{A}}, ||a||_{\mathcal{A}}]$, de donde $||a||_{\mathcal{A}}e + a \geq 0$.

La otra desigualdad se prueba de manera análoga, al considerar $g(\lambda) = ||a||_{\mathcal{A}} - \lambda$.

- (b) Sean $f, g : \sigma(a) \rightarrow \mathbb{R}$, definidas como

$$f(\lambda) = \frac{\lambda + |\lambda|}{2} = \max\{\lambda, 0\}, \quad g(\lambda) = f(-\lambda) = \max\{-\lambda, 0\}.$$

Entonces f y g son continuas. Pongamos $b = f(a)$ y $c = b - a$, como $fg = gf = 0$, entonces

$$cb = bc = f(a)g(a) = (fg)(a) = 0.$$

Además, como f, g son positivas por el teorema de la aplicación espectral también lo son b, c .

□

Se usará la notación $a^{1/2}$ para indicar al elemento $b \in \mathcal{A}$ tal que $b^2 = a$.

PROPOSICIÓN 1.16. Sean a, b elementos de $\mathcal{A}$, con $a \geq 0$.

(a) Si $a \leq b$, entonces

$$\|a\|_{\mathcal{A}} \leq \|b\|_{\mathcal{A}},$$

y

$$a^{1/2} \leq b^{1/2}.$$

(b) Para cualquier $b \in \mathcal{A}$

$$b^*ba \leq \|a\|_{\mathcal{A}}b^*b.$$

Si $a \in \mathcal{A}$ y $a \geq 0$ se usará $|a|$ para denotar al elemento de $\mathcal{A}$ dado por $(aa^*)^{1/2}$. Es decir,

$$|a| = (aa^*)^{1/2}.$$

3. Teorema de Stone.

DEFINICIÓN 1.17. Sean G un grupo abeliano localmente compacto, $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Una función $U : G \rightarrow B(\mathcal{H})$

(a) Se dice que es una *representación unitaria* de G en $\mathcal{H}$ si

(i) $U(s)$ es un operador unitario para todo $s \in G$.

(ii) $U(st) = U(s)U(t)$ para todos $s, t \in G$.

(iii) $U(e) = I$, el operador identidad. Es usual escribir U_s , en lugar de $U(s)$, y referirse a $(U_s)_{s \in G}$ como la representación unitaria.

(b) La representación es *continua* si para cada $x \in \mathcal{H}$, la función $s \rightarrow U_s x$ es continua, es decir, si $s_n \rightarrow s$ en G implica $\|U_{s_n} x - U_s x\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0$.

(c) La representación es *débilmente continua* si para cada $x \in \mathcal{H}$, la función $s \rightarrow \langle U_s x, x \rangle$ es continua, es decir, si $s_n \rightarrow s$ en G implica $|\langle U_{s_n} x, x \rangle_{\mathcal{H}} - \langle U_s x, x \rangle_{\mathcal{H}}| \rightarrow 0$.

Finalizamos este capítulo haciendo referencia al siguiente resultado, cuya demostración en detalle puede ser consultada en [35].

TEOREMA 1.18 (Versión espectral del teorema de Stone). *Sea $(U_s)_{s \in G}$ una representación unitaria continua de un grupo abeliano localmente compacto G sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, entonces existe una medida espectral P sobre $\mathbb{B}(\widehat{G})$ tal que*

$$U_s = \int_{\widehat{G}} \overline{(s, \alpha)} dP(\alpha), \quad s \in G. \quad (1.2)$$

Es decir,

$$\langle U_s x, y \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\widehat{G}} \overline{(s, \alpha)} d\langle P(\alpha)x, y \rangle_{\mathcal{H}}, \quad x, y \in \mathcal{H}, s \in G,$$

donde por $\mathbb{B}(\widehat{G})$ hemos denotado el conjunto de los borelianos del grupo dual de G .

OBSERVACIÓN 1.19. Si la representación (U_s) es débilmente continua, la identidad

$$\|U_s x - U_{\lambda} x\|^2 = 2\|x\|^2 - \langle U_{s^{-1}\lambda} x, x \rangle - \langle U_{s\lambda^{-1}} x, x \rangle,$$

implica que (U_s) es continua, por lo tanto el teorema sigue siendo válido en este caso.

CAPÍTULO 2

Introducción a los módulos de Hilbert.

En este capítulo se expone a manera introductoria los aspectos básicos de la teoría de los módulos de Hilbert definido sobre un álgebra C^* conmutativa, la teoría general puede ser consultada en [24], [28].

Sean E un espacio vectorial y $\mathcal{A}$ un álgebra C^* conmutativa y con unidad e .

DEFINICIÓN 2.1. Decimos que E tiene estructura de *módulo a izquierda* sobre $\mathcal{A}$, o más brevemente $\mathcal{A}$ -*módulo*, si existe una función $\phi : \mathcal{A} \times E \rightarrow E$, tal que para todo $x \in E$, $a \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{C}$

- (i) $\lambda(a \cdot x) = a \cdot (\lambda x)$,
- (ii) $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$, $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$,
- (iii) Si $\mathcal{A}$ es unital entonces $e \cdot x = x$.

Donde hemos denotado

$$\phi(a, x) = a \cdot x.$$

DEFINICIÓN 2.2. Sea E un $\mathcal{A}$ -módulo, diremos que E es un *módulo pre-Hilbert*, si existe una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle_E : E \times E \rightarrow \mathcal{A}$, tal que

- i. $\langle x, x \rangle_E \geq 0$, $x \in E$,
- ii. $\langle x, x \rangle_E = 0$, si y sólo si, $x = 0$,
- iii. $\langle x, y \rangle_E = \langle y, x \rangle_E^*$, $(x, y \in E)$,
- iv. $\langle a \cdot x, y \rangle_E = a \cdot \langle x, y \rangle_E$ $(x, y \in E, a \in \mathcal{A})$.

A esta aplicación la llamaremos *producto interno a valores en el álgebra $\mathcal{A}$* .

Algunos ejemplos son los siguientes:

- (1) Sea $I \subseteq \mathcal{A}$ un ideal a izquierda de $\mathcal{A}$. Podemos dotar a I de una estructura de módulo pre-Hilbert, definiendo

$$\langle x, y \rangle_I = xy^*$$

para $x, y \in I$.

- (2) Todo espacio pre-Hilbert H en el sentido usual, tiene estructura de $\mathcal{A}$ -módulo pre-Hilbert tomando $\mathcal{A} = \mathbb{K}$, donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ según sea H un espacio vectorial real o complejo.

Para finalizar esta sección enunciamos un resultado clásico y muy útil.

PROPOSICIÓN 2.3 (Identidad de polarización). *Sea E un $\mathcal{A}$ -módulo pre-Hilbert con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$, entonces para todo x, y se satisface la siguiente identidad de polarización*

$$\langle x, y \rangle_E = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \langle x + i^k y, x + i^k y \rangle_E. \quad (2.1)$$

1. Desigualdad generalizada de Cauchy-Schwarz y consecuencias.

PROPOSICIÓN 2.4 (Desigualdad Cauchy-Schwarz generalizada). *Sea E un $\mathcal{A}$ -módulo pre-Hilbert, entonces*

$$\langle y, x \rangle_E \langle x, y \rangle_E \leq \| \langle x, x \rangle_E \|_{\mathcal{A}} \langle y, y \rangle_E. \quad (2.2)$$

DEMOSTRACIÓN. Prueba tomada de [24].

Sean $x, y \in E$ y $a \in \mathcal{A}$, sin pérdida de generalidad supongamos $x \neq 0$, entonces

$$0 \leq \langle y - xa, y - xa \rangle_E = \langle y, y \rangle_E - a^* \langle x, y \rangle_E - a \langle y, x \rangle_E + a^* a \langle x, x \rangle_E.$$

Como $\langle x, x \rangle_E$ es un elemento positivo de $\mathcal{A}$, tenemos

$$a^* a \langle x, x \rangle_E \leq \| \langle x, x \rangle_E \|_{\mathcal{A}} a^* a,$$

usando esto resulta

$$\langle y, y \rangle_E - a^* \langle x, y \rangle_E - a \langle y, x \rangle_E + \| \langle x, x \rangle_E \|_{\mathcal{A}} a^* a \geq 0.$$

Haciendo

$$a = \frac{1}{\| \langle x, x \rangle_E \|_{\mathcal{A}}} \langle x, y \rangle_E,$$

se obtiene

$$\langle y, y \rangle_E - a^* \langle x, y \rangle_E - a \langle y, x \rangle_E + \| \langle x, x \rangle_E \|_{\mathcal{A}} a^* a = \langle y, y \rangle_E - \frac{1}{\| \langle x, x \rangle_E \|_{\mathcal{A}}} \langle y, x \rangle_E \langle x, y \rangle_E.$$

Y por lo tanto

$$\langle y, x \rangle_E \langle x, y \rangle_E \leq \| \langle x, x \rangle_E \|_{\mathcal{A}} \langle y, y \rangle_E.$$

□

PROPOSICIÓN 2.5. Sea E un módulo C^* pre-Hilbert sobre $\mathcal{A}$, para $x \in E$ pongamos $\|x\|_E \in \mathbb{R}$ y $|x| \in \mathcal{A}$ dados por

$$\|x\|_E = \|\langle x, x \rangle_E\|_{\mathcal{A}}^{1/2} \quad y \quad |x| = \langle x, x \rangle_E^{1/2}$$

entonces

- i. $\|\langle x, y \rangle_E\|_{\mathcal{A}} \leq \|x\|_E \|y\|_E \quad (x, y \in E)$,
- ii. $\|\cdot\|_E$ es una norma sobre E ,
- iii. $\|ax\|_E \leq \|a\|_{\mathcal{A}} \|x\|_E \quad (x \in E, a \in \mathcal{A})$,
- iv. $|\langle x, y \rangle_E| \leq \|x\|_E \|y\|_E$, $|\langle x, y \rangle_E| \leq \|y\|_E |x| \quad (x, y \in E)$,
- v. $|ax| \leq \|x\|_E |a|$ para $x \in E$, $a \in \mathcal{A}$.

Tal como se indicó antes, para $a \in \mathcal{A}$ estamos considerando $|a| = (a^*a)^{1/2}$.

DEMOSTRACIÓN. La siguiente demostración fue tomada de [24].

i. Como

$$\langle y, x \rangle_E \langle x, y \rangle_E = \langle x, y \rangle_E^* \langle x, y \rangle_E,$$

tenemos que

$$\langle y, x \rangle_E \langle x, y \rangle_E \geq 0$$

en $\mathcal{A}$, de manera que al tomar norma a ambos lados de (2.2) la desigualdad se mantiene, es decir,

$$\|\langle y, x \rangle_E \langle x, y \rangle_E\|_{\mathcal{A}} \leq \|\langle x, x \rangle_E\|_{\mathcal{A}} \|\langle y, y \rangle_E\|_{\mathcal{A}},$$

además,

$$\|\langle y, x \rangle_E \langle x, y \rangle_E\|_{\mathcal{A}} = \|\langle x, y \rangle_E^* \langle x, y \rangle_E\|_{\mathcal{A}} = \|\langle x, y \rangle_E\|_{\mathcal{A}}^2,$$

sustituyendo en la desigualdad anterior se obtiene

$$\|\langle x, y \rangle_E\|_{\mathcal{A}} \leq \|x\|_E \|y\|_E. \quad (2.3)$$

ii. No es difícil ver que

- (a) si $\|x\|_E = 0$ implica $x = 0$, y
- (b) $\|\lambda x\|_E = |\lambda| \|x\|_E$ para $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in E$.

Veamos la desigualdad triangular. Usando la parte *i.*, tenemos

$$\begin{aligned}
\|x + y\|_E^2 &= \|\langle x + y, x + y \rangle_E\|_{\mathcal{A}} \\
&= \|\langle x, x \rangle_E + \langle x, y \rangle_E + \langle y, x \rangle_E + \langle y, y \rangle_E\|_{\mathcal{A}} \\
&\leq \|\langle x, x \rangle_E\|_{\mathcal{A}} + \|\langle x, y \rangle_E\|_{\mathcal{A}} + \|\langle x, y \rangle_E^*\|_{\mathcal{A}} + \|\langle y, y \rangle_E\|_{\mathcal{A}} \\
&\leq \|\langle x, x \rangle_E\|_{\mathcal{A}} + 2\|x\|_E\|y\|_E + \|\langle y, y \rangle_E\|_{\mathcal{A}} = (\|x\|_E + \|y\|_E)^2.
\end{aligned}$$

iii. Para $a \in \mathcal{A}$, $x \in E$,

$$0 \leq \langle ax, ax \rangle_E = a^*a\langle x, x \rangle_E \leq \|\langle x, x \rangle_E\|_{\mathcal{A}}a^*a,$$

esto implica que

$$\|\langle ax, ax \rangle_E\|_{\mathcal{A}} \leq \|\langle x, x \rangle_E\|_{\mathcal{A}}\|a^*a\|_{\mathcal{A}} = \|\langle x, x \rangle_E\|_{\mathcal{A}}\|a\|_{\mathcal{A}}^2.$$

Tomando raíz cuadrada a ambos lados se obtiene lo requerido.

iv. Como $\langle y, x \rangle_E \langle x, y \rangle_E$ es positivo en $\mathcal{A}$, tomando raíz cuadrada en (2.2) queda

$$(\langle y, x \rangle_E \langle x, y \rangle_E)^{1/2} \leq \|\langle x, x \rangle_E\|_{\mathcal{A}}^{1/2} \langle y, y \rangle_E^{1/2}.$$

Como

$$(\langle y, x \rangle_E \langle x, y \rangle_E)^{1/2} = (\langle x, y \rangle_E^* \langle x, y \rangle_E)^{1/2} = |\langle x, y \rangle_E|,$$

el resultado se sigue.

v. Se tiene que

$$\langle ax, ax \rangle_E = a^*a\langle x, x \rangle_E \leq \|\langle x, x \rangle_E\|_{\mathcal{A}}a^*a.$$

De donde

$$|ax| = \langle ax, ax \rangle_E^{1/2} \leq \|\langle x, x \rangle_E\|_{\mathcal{A}}^{1/2} (a^*a)^{1/2} = \|x\|_E |a|.$$

□

2. Módulos de Hilbert.

DEFINICIÓN 2.6. Sea E un módulo C^* pre-Hilbert, diremos que E es un *módulo C^* de Hilbert* si es completo con respecto a la norma $\|\cdot\|_E$.

2.1. Ejemplos de módulos de Hilbert.

EJEMPLO 2.7. Sea I un ideal a derecha de $\mathcal{A}$ y cerrado, entonces I es un módulo de Hilbert bajo el producto

$$\langle x, y \rangle_I = xy^*.$$

Note que si tomamos $I = \mathcal{A}$, entonces $\mathcal{A}$ es ella misma un $\mathcal{A}$ -módulo de Hilbert, y las normas como módulo de Hilbert y como álgebra de Banach coinciden.

EJEMPLO 2.8. Consideremos un conjunto finito $E_1, E_2, \dots, E_n$ de módulos de Hilbert todos sobre la misma álgebra $\mathcal{A}$, al tomar

$$E = \{(x_i) : x_i \in E_i, i = 1, 2, \dots, n\},$$

para $x, y \in E$, definimos

$$\langle x, y \rangle_E = \sum_{i=1}^n \langle x_i, y_i \rangle_{E_i}$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E_i}$ es el producto interno en E_i .

Esta fórmula define un producto interno en E a valores en $\mathcal{A}$ y E es un módulo de Hilbert.

EJEMPLO 2.9. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* y sean $\{E_i, i \in \mathbb{N}\}$ una familia de módulos C^* de Hilbert sobre $\mathcal{A}$. Tomemos E como el conjunto de las sucesiones (x_i) con $x_i \in E_i$, tales que la suma $\sum_{i \in \mathbb{N}} \langle x_i, x_i \rangle_{E_i}$ converge con respecto a la norma de $\mathcal{A}$, definamos

$$\langle x, y \rangle_E = \sum_{i \in \mathbb{N}} \langle x_i, y_i \rangle_{E_i},$$

esto define un producto interno sobre E a valores en $\mathcal{A}$.

Veamos que este producto interno está bien definido. Se debe probar que la serie de la derecha converge en $\mathcal{A}$. Tomemos $x, y \in E$, y sea $\varepsilon > 0$, por el criterio de Cauchy existen N_1, N_2 , tales que

$$\left\| \sum_{i=m}^n \langle x_i, x_i \rangle_{E_i} \right\|_{\mathcal{A}} < \varepsilon \text{ para } n > m \geq N_1,$$

$$\left\| \sum_{i=m}^n \langle y_i, y_i \rangle_{E_i} \right\|_{\mathcal{A}} < \varepsilon \text{ para } n > m \geq N_2.$$

Fijemos $N = \max\{N_1, N_2\}$, si consideramos $E' = \{(x_k) : k = m, m+1, \dots, n\}$, el ejemplo anterior nos dice que

$$\langle (x_k)_{k=m}^n, (y_k)_{k=m}^n \rangle_E = \sum_{k=m}^n \langle x_k, y_k \rangle_{E_k},$$

es un producto interno, así por la desigualdad de Cauchy-Schwarz generalizada para $n > m \geq N$, tenemos

$$\left\| \sum_{i=m}^n \langle x_i, y_i \rangle_{E_i} \right\|_{\mathcal{A}} \leq \left\| \sum_{i=m}^n \langle x_i, y_i \rangle_{E_i} \right\|_{\mathcal{A}}^{1/2} \left\| \sum_{i=m}^n \langle y_i, y_i \rangle_{E_i} \right\|_{\mathcal{A}}^{1/2} < \varepsilon.$$

De donde la serie

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \langle x_i, y_i \rangle_{E_i},$$

converge en $\mathcal{A}$. Esto demuestra que el producto está bien definido.

Veamos que E es completo. Sea $\{x^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en E . Dado $\varepsilon > 0$ existe N_o tal que, si $n, m > N_o$

$$\|x^{(n)} - x^{(m)}\|_E = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \langle x_i^{(n)} - x_i^{(m)}, x_i^{(n)} - x_i^{(m)} \rangle_{E_i} \right\|_{\mathcal{A}}^{1/2} < \varepsilon^{1/2}, \quad (2.4)$$

como

$$\|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}\|_{E_i} \leq \|x^{(n)} - x^{(m)}\|_E$$

para cada i , tenemos que $\{x_i^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en E_i . Sean, x_i en E tal que $x_i^{(n)} \rightarrow y_i$ cuando $n \rightarrow \infty$, y $y = \{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Veamos que $y \in E$ y $x^{(n)} \rightarrow y$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Por (2.4), para todo $N \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\left\| \sum_{i=1}^N \langle x_i^{(n)} - x_i^{(m)}, x_i^{(n)} - x_i^{(m)} \rangle_{E_i} \right\|_{\mathcal{A}} \leq \|x^{(n)} - x^{(m)}\|_E^2 < \varepsilon,$$

para $n, m \geq N_o$. Haciendo tender m al infinito obtenemos

$$\left\| \sum_{i=1}^N \langle x_i^{(n)} - y_i, x_i^{(n)} - y_i \rangle_{E_i} \right\|_{\mathcal{A}} < \varepsilon,$$

siempre que $n \geq N_o$. De donde haciendo $N \rightarrow \infty$

$$\|x^{(n)} - y\|_E < \varepsilon, \quad n \geq N_o.$$

Esto demuestra que $x^{(N_o)} - y$ pertenece a E , y por lo tanto $y \in E$, así mismo establece que $\{x^{(n)}\}$ converge a y en E .

OBSERVACIÓN 2.10. Si cada $E_i = \mathcal{A}$, en la construcción anterior obtenemos un módulo de Hilbert sobre $\mathcal{A}$, el cual consiste de todas las sucesiones (x_i) con $x_i \in \mathcal{A}$ tal que la serie

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i x_i^*,$$

es convergente en $\mathcal{A}$. Este espacio se denota frecuentemente por $l^2(\mathcal{A})$ ó $H(\mathcal{A})$. Si además se toma $A = \mathbb{C}$, entonces $l^2(\mathcal{A})$ es el espacio de Hilbert usual l^2 .

2.2. Completación de un Módulo pre-Hilbert.

Una de las principales ventajas de los espacios pre-Hilbert es es que admiten una completación, de manera que, es muy natural preguntarse si este fenómeno también ocurre en relación a los $\mathcal{A}$ -módulos pre-Hilbert. La respuesta a esta pregunta es afirmativa y esta sección está dedicada a dar de forma detallada la completación de estos espacios, cabe destacar que dicha propiedad está estrechamente relacionada con el hecho que $\mathcal{A}$ es un espacio de Banach.

LEMA 2.11. *Si E es un módulo pre-Hilbert entonces*

(a) *Para todo $x, x', y, y' \in E$*

$$\|\langle x, y \rangle_E - \langle x', y' \rangle_E\|_{\mathcal{A}} \leq \|x - x'\|_E \|y\|_E + \|x\|_E \|y - y'\|_E.$$

(b) *Si $(x_n), (y_n)$ son sucesiones de Cauchy en E , entonces $\{\langle x_n, y_n \rangle\}$ converge en $\mathcal{A}$.*

DEMOSTRACIÓN.

(a) Estas parte resulta de la desigualdad (2.3) y de la identidad

$$\langle x, y \rangle_E - \langle x', y' \rangle_E = \langle x - x', y \rangle_E + \langle x', y - y' \rangle_E.$$

(b) Si $(x_n), (y_n)$ son sucesiones de Cauchy en E , entonces las sucesiones numéricas $\{\|x_n\|_E\}, \{\|y_n\|_E\}$ convergen y son acotadas. Así por (a), se obtiene

$$\|\langle x_n, y_n \rangle_E - \langle x_m, y_m \rangle_E\|_{\mathcal{A}} \leq \|x_n - x_m\|_E \|y_n\|_E + \|x_m\|_E \|y_n - y_m\|_E \rightarrow 0,$$

cuando n, m tienden a infinito, es decir, $\{\langle x_n, y_n \rangle\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{A}$.

Como $\mathcal{A}$ es una álgebra de Banach, se tiene que $\{\langle x_n, y_n \rangle\}$ converge en $\mathcal{A}$.

□

A continuación demostraremos un resultado de espacios métricos que permitirá demostrar la completación de un módulo pre-Hilbert.

LEMA 2.12. *Si S es un subconjunto denso de un espacio métrico (X, d) tal que toda sucesión de Cauchy en S converge a un punto de X , entonces X es completo.*

DEMOSTRACIÓN.

Sea (x_n) sucesión de Cauchy en X , y sea $\varepsilon > 0$, como S es denso en X para cada n existe $s_n \in S$ tal que

$$d(x_n, s_n) < \frac{\varepsilon}{n},$$

de donde

$$d(s_n, s_m) \leq d(s_n, x_n) + d(s_m, x_m) + d(x_m, x_n) \rightarrow 0,$$

cuando n y m tienden a infinito. Luego (s_n) es una sucesión de Cauchy en S . Por hipótesis existe $s \in X$ tal que $s_n \rightarrow s$. Además

$$d(x_n, s) \leq d(x_n, s_n) + d(s_n, s) \rightarrow 0,$$

cuando n tiende al infinito, es decir, $x_n \rightarrow s$. Se ha probado que X es completo. $\square$

Al igual que ocurre para los espacios pre-Hilbert usuales todo módulo pre-Hilbert admite una completación, más precisamente tenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 2.13 (Completación de un módulo pre-Hilbert). *Todo módulo pre-Hilbert $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ admite una completación.*

DEMOSTRACIÓN.

El esquema de la demostración es el siguiente.

- (a) Sea $\mathcal{C}[E]$ el conjunto formado por las sucesiones de Cauchy de E , sobre este conjunto definimos la siguiente relación de equivalencia

$$(x_n) \sim (y_n) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\|_E = 0.$$

- (b) Definamos $\tilde{E}$ como el conjunto de las clases de equivalencias obtenidos de la relación $\sim$, es decir,

$$\tilde{E} = \{[(x_n)] : (x_n) \text{ es de Cauchy en } E\}.$$

Entonces $\tilde{E}$ es un $\mathcal{A}$ -módulo con las siguientes operaciones

$$[(x_n)] + [(y_n)] = [(x_n + y_n)],$$

$$\lambda[(x_n)] = [(\lambda x_n)], \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

$$a \cdot [(x_n)] = [(a \cdot x_n)], \quad a \in \mathcal{A}.$$

Se puede probar que estas operaciones están bien definidas, ya que no dependen de los representantes de las clases.

(c) Para $x \in E$ denotemos por $x^\infty = [(x, x, x, \dots)]$, y sea

$$W = \{x^\infty : x \in E\}.$$

Definamos $\phi : E \rightarrow W$, por

$$\phi(x) = x^\infty.$$

Entonces, ϕ satisface

$$\phi(\lambda x + y) = \lambda\phi(x) + \phi(y), \quad (x, y \in E, \lambda \in \mathbb{C}),$$

$$\phi(ax) = a\phi(x), \quad (a \in \mathcal{A}).$$

(d) Para $\tilde{x} = [(x_n)], \tilde{y} = [(y_n)] \in \tilde{E}$, sea

$$\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle_{\tilde{E}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y_n \rangle_E.$$

Por el Lema (2.11), el límite de la derecha siempre existe y no depende de los representantes de las clases. Por otro lado si $\langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle_{\tilde{E}} = 0$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_E = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\langle x_n, x_n \rangle_E\|_{\mathcal{A}}^{1/2} = 0.$$

Luego $(x_n) \sim (0)$. De donde $[(x_n)] = [(0)]$, esto es $\tilde{x} = 0$, por lo tanto $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{E}}$ define un producto interno en $\tilde{E}$.

Además si denotamos por $\|\cdot\|_{\tilde{E}}$ la norma generada por éste, entonces

$$\|\tilde{x}\|_{\tilde{E}} = \|\langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle_{\tilde{E}}\|_{\mathcal{A}}^{1/2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\langle x_n, x_n \rangle_E\|_{\mathcal{A}}^{1/2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_E. \quad (2.5)$$

Con esta norma, para todo $x \in E$ se tiene que

$$\|\phi(x)\|_{\tilde{E}} = \|x^\infty\|_{\tilde{E}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x\|_E = \|x\|_E.$$

Es decir ϕ es isometría.

(e) Afirmamos que $(\tilde{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{E}})$ es módulo de Hilbert. Por Lema (2.12) es suficiente probar que W es denso y que toda sucesión de Cauchy en W converge en $\tilde{E}$.

Si $\tilde{x} = [(x_n)] \in \tilde{E}$, entonces para todo m

$$\|\tilde{x} - x_m^\infty\|_{\tilde{E}} = \|[(x_n - x_m)_n]\|_{\tilde{E}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\|_E,$$

así

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\tilde{x} - x_m^\infty\|_{\tilde{E}} = \lim_{n, m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\|_E = 0,$$

es decir, $x_m^\infty \rightarrow \tilde{x}$, de donde W es denso en $\tilde{E}$.

Tomemos ahora una sucesión de Cauchy en (x_n^∞) en W . Como ϕ es isometría

$$\|x_n - x_m\|_E = \|\phi(x_n - x_m)\|_{\tilde{E}} = \|x_n^\infty - x_m^\infty\|_{\tilde{E}} \rightarrow 0,$$

cuando n y m tienden a infinito. Luego (x_n) es una sucesión de Cauchy en E .

Tomemos $\tilde{x} = [(x_n)]$ entonces $\tilde{x} \in \tilde{E}$ y

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\tilde{x} - x_m^\infty\|_{\tilde{E}} = \lim_{n, m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\|_E = 0,$$

de manera que (x_n^∞) converge a $\tilde{x}$.

□

3. Submódulos y complemento ortogonal.

DEFINICIÓN 2.14. Sea S un subconjunto no vacío de E , decimos que S es un *submódulo* de E , si S es subespacio vectorial de E y $as \in S$ para todo $a \in \mathcal{A}$. Si además S es cerrado respecto a la norma $\|\cdot\|_E$ decimos que S es un *submódulo cerrado* de E .

EJEMPLO 2.15 (Complemento Ortogonal). Sea S un submódulo cerrado de un $\mathcal{A}$ -módulo E , definimos el *complemento ortogonal* $S^\perp$ por

$$S^\perp = \{x \in E : \langle x, y \rangle_E = 0, \text{ para todo } y \in S\}.$$

Se tiene que $S^\perp$ es un submódulo cerrado de E .

Una de las grandes diferencias entre los módulos y los espacios de Hilbert es que la igualdad $E = S^\perp \oplus S$ no se cumple en general, como muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.16. Sea $\mathcal{A} = C([a, b])$ el álgebra C^* de las funciones a valores complejos continuas en $[a, b]$ y el producto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \overline{f}g$$

para $f, g \in C([a, b])$.

Tomemos $E = \mathcal{A}$, y

$$S = \{f \in E : f(a) = f(b) = 0\}.$$

Entonces $S^\perp = \{0\}$. En efecto, sea $f \in S$ tal que $f(x) \neq 0$ si $x \in (a, b)$. Si $g \in S^\perp$ entonces

$$\langle f, g \rangle = \overline{f}g \equiv 0$$

Luego

$$\overline{f}(x)g(x) = 0, \forall x \in [a, b].$$

La igualdad anterior implica

$$g(x) = 0, \text{ para todo } x \in (a, b).$$

Por continuidad de g , se obtiene

$$g(a) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x + a) = 0,$$

análogamente $g(b) = 0$, así que $S^\perp = \{0\}$, y por lo tanto

$$S \oplus S^\perp = S \neq E.$$

4. Operadores lineales entre módulos de Hilbert.

DEFINICIÓN 2.17. Sean $(E_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$, $(E_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ dos $\mathcal{A}$ -módulos de Hilbert sobre el mismo cuerpo de escalares, tenemos las siguientes definiciones

- (a) Sea $T : E_1 \rightarrow E_2$, decimos que T es un *operador $\mathcal{A}$ -lineal* si
 - (i) $T(ax) = aTx$, para todo $a \in \mathcal{A}$ y $x \in E_1$.
 - (ii) $T(\lambda x + y) = \lambda Tx + Ty$, para todo $x, y \in E_1$ y todo escalar λ .
- (b) Sea $T : E_1 \rightarrow E_2$ un operador lineal. Decimos que T es un *operador acotado* cuando existe $M > 0$, tal que

$$\|Tx\|_2 \leq M\|x\|_1.$$

DEFINICIÓN 2.18. Sea

$$B_{\mathcal{A}}(E_1, E_2) = \{T : E_1 \rightarrow E_2, \text{ tales que } T \text{ es operador lineal y acotado}\}.$$

Tenemos que $B_{\mathcal{A}}(E_1, E_2)$ es un espacio vectorial con las operaciones usuales

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1x + T_2x,$$

$$T(\lambda x) = (\lambda T)x.$$

Adicionalmente $B_{\mathcal{A}}(E_1, E_2)$ es un $\mathcal{A}$ -módulo con la operación

$$(aT)(x) = aTx, \text{ para todo } a \in \mathcal{A}.$$

La norma en este espacio viene dada de la siguiente manera

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_1=1} \|Tx\|_2.$$

Al ser E_2 espacio de Banach, tenemos que $B_{\mathcal{A}}(E_1, E_2)$ es un álgebra de Banach.

Denotaremos por $B_{\mathcal{A}}(E)$ al conjunto al conjunto $B_{\mathcal{A}}(E, E)$, es decir,

$$B_{\mathcal{A}}(E) = B_{\mathcal{A}}(E, E).$$

EJEMPLO 2.19. Sean $\mathcal{A} = l^\infty(\mathbb{C})$, $a_n = (0, 0, \dots, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$ con 1 en la posición n , entonces $a_n \in \mathcal{A}$, la serie $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ no converge, ya que no converge absolutamente, además está acotada por 1 pues

$$\left\| \sum_{n=1}^N a_n \right\|_{\mathcal{A}} \leq 1, \text{ para todo } N.$$

Sean $E = l^2(\mathcal{A})$ (ver Observación 2.10), e el elemento unidad de $\mathcal{A}$ y $e_n \in E$ la sucesión dada por

$$e_n = (0, 0, \dots, 0, 0, e, 0, 0, \dots),$$

donde e ocupa la posición n . El conjunto $\{e_n\}$ es un conjunto ortonormal, es decir,

$$\langle e_n, e_k \rangle_E = \delta_{n,k}e.$$

Definamos $T : E \rightarrow E$, como

$$Tx = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n a_n \cdot e_1$$

donde $x = (x_n) \in E$.

Veamos que T está bien definido.

Como $\{e_n\}$ es un conjunto ortonormal se tiene que cada $x = (x_n) \in E$ admite la representación

$$x = (x_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \cdot e_n.$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en E , tenemos

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=N}^{\infty} x_n a_n \right\|_{\mathcal{A}} &\leq \left\| \sum_{n=N}^{\infty} x_n x_n^* \right\|_{\mathcal{A}}^{1/2} \left\| \sum_{n=N}^{\infty} a_n a_n^* \right\|_{\mathcal{A}}^{1/2} \\ &= \left\| \sum_{n=N}^{\infty} x_n x_n^* \right\|_{\mathcal{A}}^{1/2} \left\| \sum_{n=N}^{\infty} a_n \right\|_{\mathcal{A}}^{1/2} \\ &\leq \left\| \sum_{n=N}^{\infty} x_n x_n^* \right\|_{\mathcal{A}}^{1/2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

de manera que la serie $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x_n$ converge en $\mathcal{A}$. De hecho T es acotado, ya que, para todo $x = (x_n) \in E$

$$\|T(x)\|_E = \|\langle T(x), T(x) \rangle_E\|_{\mathcal{A}}^{1/2} = \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x_n \right\|_{\mathcal{A}} \leq \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n x_n^* \right\|_{\mathcal{A}}^{1/2} = \|x\|_E.$$

DEFINICIÓN 2.20. Al conjunto $B_{\mathcal{A}}(E, \mathcal{A})$ se le llama conjunto de *funcionales lineales* de E en $\mathcal{A}$, y se le denota por $E^{*\mathcal{A}}$. Esto es

$$E^{*\mathcal{A}} = B_{\mathcal{A}}(E, \mathcal{A}).$$

EJEMPLO 2.21. A cada $x \in E$ le podemos asociar el funcional $\hat{x} \in E^{*\mathcal{A}}$ definido por

$$\hat{x}(y) = \langle y, x \rangle_E$$

para todo $y \in E$.

Usaremos la siguiente notación

$$\hat{E} = \{\hat{x} : x \in E\}.$$

DEFINICIÓN 2.22. Un módulo de Hilbert E se llama *autodual* si

$$E^{*\mathcal{A}} = \hat{E}.$$

Es decir si a todo funcional lineal $f : E \rightarrow \mathcal{A}$ le corresponde único $y \in E$ tal que

$$f(x) = \langle x, y \rangle_E,$$

para todo $x \in E$.

DEFINICIÓN 2.23. Sea $T \in B_{\mathcal{A}}(E_1, E_2)$. Decimos que T es *adjuntable* si existe un operador $T^* \in B_{\mathcal{A}}(E_2, E_1)$, tal que para todo $x \in E_1, y \in E_2$

$$\langle Tx, y \rangle_2 = \langle x, T^*y \rangle_1.$$

Se puede probar que, si tal operador T^* existe es único, a este operador se le llama *adjunto* del operador T .

Otra de las diferencias más marcadas entre los espacios de Hilbert y los módulos de Hilbert es que no todo operador lineal y acotado es adjuntable, tal y como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.24. Sea T como en el Ejemplo (2.19), supongamos que T es adjuntable, y escribamos $T^*(e_1)$ como

$$T^*(e_1) = \sum_{n \in \mathbb{N}} y_n \cdot e_n,$$

entonces por linealidad

$$y_n = \langle T^*(e_1), e_n \rangle = \langle e_1, T(e_n) \rangle = a_n^* = a_n,$$

luego

$$T^*(e_1) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cdot e_n = (a_n),$$

sin embargo

$$\|T^*(e_1)\|_E = \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n a_n^* \right\|^{1/2} = \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \right\|^{1/2},$$

esto implica que $T^*(e_1) \notin E$, ya que $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ no converge en $\mathcal{A}$, por lo tanto T^* no puede existir.

PROPOSICIÓN 2.25. Sea

$$B_{\mathcal{A}}^*(E) = \{T \in B_{\mathcal{A}}(E), \text{ tales que } T^* \text{ existe}\}.$$

Entonces $B_{\mathcal{A}}^*(E)$ es un álgebra C^* con involución $T \rightarrow T^*$.

DEMOSTRACIÓN.

Sean (T_n) una sucesión en $B_{\mathcal{A}}^*(E)$ y $T = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n$, entonces

$$\langle Tx, y \rangle_E = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n x, y \rangle_E = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x, T_n^* y \rangle_E = \langle x, \lim_{n \rightarrow \infty} T_n^* y \rangle_E,$$

luego

$$T^* = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n^*.$$

Esto implica que $B_{\mathcal{A}}^*(E)$ es una subálgebra cerrada de $B_{\mathcal{A}}(E)$, y por lo tanto es un álgebra de Banach.

Veamos que la función $T \rightarrow T^*$ es una involución. Sean $T_1, T_2 \in B_{\mathcal{A}}^*(E)$ y λ un escalar, para todo $x, y \in E$

$$\langle x, (T_1^*)^* y \rangle_E = \langle T_1^* x, y \rangle_E = \langle T_1 y, x \rangle_E^* = \langle x, T_1 y \rangle_E,$$

así que $(T_1^*)^* = T_1$.

Análogamente se prueba que

$$(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^*$$

y

$$(\lambda T_1 + T_2)^* = \bar{\lambda} T_1^* + T_2^*.$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \|\langle Tx, Tx \rangle_E\|_{\mathcal{A}} &= \|\langle T^* T x, x \rangle_E\|_{\mathcal{A}} \\ &\leq \|T^* T x\|_E \|x\|_E \\ &\leq \|T^* T\| \|x\|_E^2 \leq \|T^*\| \|T\| \|x\|_E^2. \end{aligned}$$

De donde

$$\|T\|^2 = \sup_{\|x\|_E=1} \|\langle Tx, Tx \rangle_E\|_{\mathcal{A}} \leq \|T^*\| \|T\|.$$

Esta última desigualdad implica que

$$\|T\| \leq \|T^*\|.$$

Ademas, cambiando T por T^* y usando que $(T^*)^* = T$ se obtiene que $\|T^*\| \leq \|T\|$. Por lo tanto

$$\|T\| = \|T^*\|.$$

□

La siguiente proposición caracteriza los elementos positivos de $B_{\mathcal{A}}^*(E)$.

PROPOSICIÓN 2.26. *Para un operador $T \in B(E)$, las siguientes condiciones son equivalentes*

- (a) T es un elemento positivo de $B_{\mathcal{A}}^*(E)$.
- (b) $\langle Tx, x \rangle_E \geq 0$, para todo $x \in E$.

DEMOSTRACIÓN.

(a $\rightarrow$ b)

Como T es un elemento positivo de $B_{\mathcal{A}}^*(E)$, entonces existe $S \in B_{\mathcal{A}}^*(E)$ tal que $T = SS^*$, por lo tanto, para todo $x \in E$

$$\langle Tx, x \rangle_E = \langle Sx, Sx \rangle_E \geq 0.$$

(b $\rightarrow$ a)

Supongamos ahora que $\langle Tx, x \rangle_E \geq 0$ para todo $x \in E$, entonces

$$\langle Tx, x \rangle_E = \langle Tx, x \rangle_E^* = \langle x, Tx \rangle_E.$$

Como la aplicación $(x, y) \rightarrow \langle Tx, y \rangle_E$, define un producto interno en E , por la identidad de polarización (2.1) se tiene que

$$\langle Tx, y \rangle_E = \langle x, Ty \rangle_E,$$

para todo $x, y \in E$, de donde T es autoadjunto. Luego $T \in B_{\mathcal{A}}^*(E)$.

Por la Proposición 1.15 existen operadores positivos $T_+, T_- \in B_{\mathcal{A}}^*(E)$ tales que

$$T_+T_- = T_-T_+ = 0 \quad \text{y} \quad T = T_+ - T_-.$$

Por lo tanto,

$$\langle (T_+ - T_-)x, x \rangle_E \geq 0$$

para todo $x \in E$. De donde

$$\langle T_-x, x \rangle_E \leq \langle T_+x, x \rangle_E$$

para todo $x \in E$. Lo cual a su vez implica

$$\langle T_-^3 x, x \rangle_E = \langle T_-^2 x, T_- x \rangle_E \leq \langle T_+ T_- x, T_- x \rangle_E = 0.$$

Por otro lado, como T_-^3 es positivo por el mismo argumento de la implicación anterior

$$\langle T_-^3 x, x \rangle_E \geq 0,$$

de donde

$$\langle T_-^3 x, x \rangle_E = 0,$$

para todo $x \in E$. El mismo argumento de la identidad de polarización nos dice

$$\langle T_-^3 x, y \rangle_E = 0,$$

para todo $x, y \in E$, por lo tanto

$$T_-^3 = 0.$$

De donde $T_- = 0$ y $T = T_+ \geq 0$. □

DEFINICIÓN 2.27. Un operador $U \in B^*(E)$ es unitario si y sólo si es sobreyectivo y

$$\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle,$$

para todo $x, y \in E$.

Finalizamos el capítulo presentando un el siguiente resultado debido a W.L Paschke, cuya demostración puede verse en [32].

TEOREMA 2.28. *Sea E un $\mathcal{A}$ -módulo de Hilbert. Entonces E^* es un $\mathcal{A}$ -módulo de Hilbert autodual que contiene a E como submódulo (identificando E con $\widehat{E}$). Además, cada operador en $B_{\mathcal{A}}(E)$ puede ser extendido de manera única a un operador en $B_{\mathcal{A}}^*(E)$.*

*** ¿En qué se basa la demostración? Sería bueno hacer referencia al resultado principal que se use en la prueba.

Funciones definidas positivas a valores en álgebras de Von Neumann

En este capítulo se estudian algunos aspectos generales de la teoría de funciones definidas positivas a valores en un álgebra de Von Neumann, así como las técnicas usadas por Kakihara [22] para obtener la representación integral de esta clase de funciones.

1. Núcleos definidos positivos.

DEFINICIÓN 3.1. Sea Ω un conjunto no vacío, una función $\Gamma : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathcal{A}$ se llama $\mathcal{A}$ -núcleo definido positivo o más brevemente núcleo definido positivo si

$$\sum_{i,j} a_i a_j^* \Gamma(w_i, w_j) \geq 0. \quad (3.1)$$

para todo número natural n , $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathcal{A}$, $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \in \Omega$.

1.1. Módulo de Hilbert asociado a un núcleo definido positivo.

Sea Γ un núcleo definido positivo entonces le podemos asociar un módulo de Hilbert de la siguiente manera. Tomemos

$$\mathcal{F}(\Omega, \mathcal{A}) = \{f : \Omega \rightarrow \mathcal{A}, \text{ con soporte finito}\},$$

este conjunto es un $\mathcal{A}$ -módulo con la acción $\phi : \mathcal{A} \times \mathcal{F}(\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{F}(\Omega, \mathcal{A})$ dada por

$$\phi(a, f) = af,$$

donde $a(f)(w) = (af)(w)$ para todo $w \in \Omega$.

Definamos el producto

$$\langle f, g \rangle_{\Gamma} = \sum_{w, w'} \Gamma(w, w') f(w) g(w')^*.$$

Se tiene que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}$ cumple todas las propiedades de producto interno, salvo quizás la condición $\langle f, f \rangle_{\Gamma} = 0$ implica $f = 0$. Así la aplicación $\|f\|_{\Gamma} = \langle f, f \rangle_{\Gamma}$, es una seminorma.

Tomando

$$N_\Gamma = \{f \in \mathcal{F}(\Omega, \mathcal{A}) : \langle f, f \rangle_\Gamma = 0\},$$

la desigualdad Cauchy-Schwarz generalizada (2.4), implica que N_Γ es un submódulo de $\mathcal{F}(\Omega, \mathcal{A})$, por lo tanto podemos formar de manera usual el cociente

$$\mathcal{F}(\Omega, \mathcal{A})/N_\Gamma = \{f + N_\Gamma : f \in \mathcal{F}(\Omega, \mathcal{A})\}.$$

A este espacio se le puede dotar de estructura de módulo pre-Hilbert con las operaciones

$$a(f + N_\Gamma) = af + N_\Gamma,$$

$$\langle f + N_\Gamma, g + N_\Gamma \rangle = \langle f, g \rangle_\Gamma.$$

Por lo tanto su completación es un $\mathcal{A}$ -módulo de Hilbert.

1.2. Núcleos reproductivos en módulos de Hilbert.

DEFINICIÓN 3.2. Sean $\Gamma : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathcal{A}$ un núcleo definido positivo, E un $\mathcal{A}$ -módulo de Hilbert cuyos elementos son funciones definidas en Ω a valores en $\mathcal{A}$. Diremos que E es *módulo de Hilbert con núcleo reproductivo* Γ , si se satisfacen las siguientes propiedades

- (i) Para cada $w \in \Omega$, $\Gamma(w, \cdot) \in E$.
- (ii) Para cada $w \in \Omega$ y $x \in E$, $x(w) = \langle x, \Gamma(w, \cdot) \rangle$.

El núcleo Γ es llamado núcleo reproductivo de E .

LEMA 3.3. Sea X módulo de Hilbert con núcleo reproductivo $\Gamma : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathcal{A}$, entonces para $w, w' \in \Omega$ se tiene

- (a) $\Gamma(w, w) \geq 0$.
- (b) $\Gamma(w, w') = \Gamma(w', w)^*$.
- (c) $\|\Gamma(w, w')\|_{\mathcal{A}} \leq \|\Gamma(w, w)\|_{\mathcal{A}}^{1/2} \|\Gamma(w', w')\|_{\mathcal{A}}^{1/2}$.

DEMOSTRACIÓN.

(a), (b) se siguen de la definición. (c) Por la desigualdad Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \|\Gamma(w, w')\|_{\mathcal{A}} &= \|\langle \Gamma(w, \cdot), \Gamma(w', \cdot) \rangle\|_{\mathcal{A}} \\ &\leq \|\langle \Gamma(w, \cdot), \Gamma(w, \cdot) \rangle\|_{\mathcal{A}}^{1/2} \|\langle \Gamma(w', \cdot), \Gamma(w', \cdot) \rangle\|_{\mathcal{A}}^{1/2} \\ &= \|\Gamma(w, w)\|_{\mathcal{A}}^{1/2} \|\Gamma(w', w')\|_{\mathcal{A}}^{1/2}. \end{aligned}$$

□

PROPOSICIÓN 3.4. *Para cada núcleo definido positivo $\Gamma : \Omega \rightarrow \mathcal{A}$ existe un único (salvo isomorfismos) $\mathcal{A}$ -módulo de Hilbert E_Γ que admite a Γ como núcleo reproductivo.*

DEMOSTRACIÓN.

Sea E_o el conjunto de las funciones $f : \Omega \rightarrow \mathcal{A}$ de la forma

$$f(\cdot) = \sum_{i=1}^n a_i \Gamma(w_i, \cdot),$$

donde $a_i \in \mathcal{A}, w_i \in \Omega$.

E_o tiene estructura de $\mathcal{A}$ -módulo con el producto $(af)(w) = af(w)$, para

$$f(\cdot) = \sum_{i=1}^n a_i \Gamma(w_i, \cdot), \quad g(\cdot) = \sum_{j=1}^m b_j \Gamma(w'_j, \cdot)$$

definimos

$$\langle f, g \rangle_o = \sum_{i,j} a_i b_j^* \Gamma(w_i, w'_j). \quad (3.2)$$

Para probar que esto es un producto interno basta verificar que $\langle f, f \rangle_o = 0$ implica $f = 0$.

Antes de chequear esta propiedad, nótese que $\Gamma(w, \cdot) \in E_o$ para cualquier $w \in \Omega$, y además

$$\langle f, \Gamma(w, \cdot) \rangle_o = \sum_{i=1}^n a_i \Gamma(w_i, w) = f(w),$$

de manera que si $\langle f, f \rangle_o = 0$, entonces para $w \in \Omega$

$$\|f(w)\|_{\mathcal{A}} = \|\langle f, \Gamma(w, \cdot) \rangle_o\|_{\mathcal{A}} \leq \|\langle f, f \rangle_o\|_{\mathcal{A}}^{1/2} \|\Gamma(w, w)\|_{\mathcal{A}}^{1/2} = 0. \quad (3.3)$$

Por lo tanto E_o es un $\mathcal{A}$ -módulo pre-Hilbert. Denotemos por $\|\cdot\|_o$ la norma asociada a este espacio.

Sean $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en E_o y $w \in \Omega$, entonces

$$\|f_n(w) - f_m(w)\|_{\mathcal{A}} = \|\langle f_n - f_m, \Gamma(w, \cdot) \rangle_o\|_{\mathcal{A}} \leq \|f_n - f_m\|_o \|\Gamma(w, w)\|_o,$$

así $\{f_n(w)\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{A}$, por lo tanto existe $a_w \in \mathcal{A}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(w) = a_w.$$

Denotamos por $\mathcal{C}[E_o]$ la colección de sucesiones de Cauchy en E_o , lo anterior nos permite definir una función φ tal que a cada $\{f_n\} \in \mathcal{C}[X_o]$ le asigna la función

$$\varphi(f_n)(\cdot) : \Omega \rightarrow \mathcal{A},$$

$$\varphi(f_n)(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega), \text{ para todo } \omega \in \Omega.$$

Sea $X_\Gamma = \varphi(\mathcal{C}[E_o])$, sobre éste conjunto podemos definir el producto interno como

$$\langle \varphi(f_n), \varphi(g_n) \rangle_\Gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, g_n \rangle_o,$$

La norma $\|\cdot\|_\Gamma$ para este espacio viene dada como sigue

$$\|\varphi(f_n)\|_\Gamma = \|\langle \varphi(f_n), \varphi(f_n) \rangle_\Gamma\|_{\mathcal{A}}^{1/2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\langle f_n, f_n \rangle_o\|_{\mathcal{A}}^{1/2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_o. \quad (3.4)$$

Por otro lado, observemos que $\Gamma(w, \cdot) \in E_\Gamma$ para todo $w \in \Omega$, esto implica que el conjunto $E_o \subset E_\Gamma$, además Γ es núcleo reproductivo del conjunto E_Γ , pues

$$\langle \varphi(f_n), \Gamma(w, \cdot) \rangle_\Gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, \Gamma(w, \cdot) \rangle_o = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(w) = \varphi(f_n)(w).$$

Ahora tomemos $\varphi(f_n) \in E_\Gamma$, entonces para cada m la sucesión $\{f_n - f_m\}_n$ es de Cauchy en E_o y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) - f_m(\omega) = \varphi(f_n)(\omega) - f_m(\omega) = \varphi(f_n - f_m)(\omega),$$

de donde por (3.4)

$$\|\varphi(f_n) - f_m\|_\Gamma = \|\varphi(f_n - f_m)\|_\Gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f_m\|_o \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Es decir $f_m \rightarrow \varphi(f_n)$ y E_o es denso en E_Γ .

Tomemos ahora (f_n) sucesión de Cauchy en E_o , veamos que esta sucesión converge a un elemento de E_Γ . Definamos $F : \Omega \rightarrow \mathcal{A}$ como

$$F(\cdot) = \varphi(f_n)(\cdot),$$

de esta manera $F \in E_\Gamma$, y

$$\|F - f_m\|_\Gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f_m\|_o \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0,$$

se sigue que $f_n \rightarrow F$, luego por el Lemma (2.12) resulta la completitud de E_Γ . $\square$

2. Funciones definidas positivas en grupos abelianos localmente compactos

En lo que sigue salvo que se indique lo contrario E denota un $\mathcal{A}$ -módulo de Hilbert y G un grupo abeliano localmente compacto.

Para un subconjunto M de E , $\text{lin}_{\mathcal{A}}(M)$ denotará el submódulo generado por M , es decir,

$$\text{lin}_{\mathcal{A}}(M) = \{a_1 m_1 + \cdots + a_n m_n : a_i \in \mathcal{A}, m_i \in M, n \in \mathbb{N}\}.$$

DEFINICIÓN 3.5. Una función $U : G \rightarrow B(E)$

(a) Se dice una *representación unitaria* de G en E si

- (i) $U(s)$ es un operador unitario para todo $s \in G$.
- (ii) $U(st) = U(s)U(t)$ para todos $s, t \in G$.
- (iii) $U(e) = I$, el operador identidad.

Es usual escribir U_s , en lugar de $U(s)$, y referirse a $(U_s)_{s \in G}$ como la representación unitaria.

(b) La representación es *continua* si para cada $x \in E$ la función $s \rightarrow U_s x$ es continua, es decir, si $s_n \rightarrow s$ en G implica $\|U_{s_n} x - U_s x\|_E \rightarrow 0$.

(c) Un vector $x_o \in E$ se dice *cíclico* para una representación (U_s) si

$$\overline{\text{lin}_{\mathcal{A}}\{U_s(x_o) : s \in G\}} = E.$$

DEFINICIÓN 3.6. Una función $\Upsilon : G \rightarrow \mathcal{A}$ se llama *definida positiva* si

$$\sum_{i,j} a_i a_j^* \Upsilon(s_i s_j^{-1}) \geq 0,$$

para todo número natural n , $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$, $s_1, \dots, s_n \in G$.

EJEMPLO 3.7. Sea (U_s) una representación unitaria de G sobre E . Para todo $x \in E$ la función

$$f_x(s) = \langle x, U_s x \rangle_E, s \in G$$

es definida positiva. En efecto

$$\begin{aligned}
 \sum_{i,j=1}^n a_i a_j^* f_x(s_i^{-1} s_j) &= \sum_{i,j=1}^n a_i a_j^* \langle x, U_{s_j^{-1} s_i} x \rangle_E \\
 &= \sum_{i,j=1}^n a_i a_j^* \langle x, U_{s_j}^* U_{s_i} x \rangle_E \\
 &= \left\langle \sum_{i=1}^n a_i U_{s_i} x, \sum_{i=1}^n a_i U_{s_i} x \right\rangle_E \geq 0.
 \end{aligned}$$

PROPOSICIÓN 3.8. Sea $\Upsilon : G \rightarrow \mathcal{A}$ una función definida positiva. Entonces

- (i) $\|\Upsilon(s)\|_{\mathcal{A}} \leq \|\Upsilon(e)\|_{\mathcal{A}}$, para todo $s \in G$;
- (ii) $\|\Upsilon(s) - \Upsilon(t)\|_{\mathcal{A}}^2 \leq 2\|\Upsilon(e) - \Upsilon(t^{-1}s)\|_{\mathcal{A}}\|\Upsilon(e)\|_{\mathcal{A}}$, para todo $s, t \in G$;
- (iii) Υ es continua si y sólo si es continua en $s = e$.

DEMOSTRACIÓN.

Para $s, t \in G$ sea

$$\Gamma(s, t) = \Upsilon(t^{-1}s),$$

entonces Γ es un núcleo definido positivo, sea E el módulo de Hilbert que admite a Γ como núcleo reproductivo, entonces para todo $s \in G$

$$\Upsilon(s) = \Gamma(s, e) = \langle \Gamma(s, \cdot), \Gamma(e, \cdot) \rangle_E.$$

Como $\Gamma(s, s) = \Upsilon(s^{-1}s) = \Upsilon(e)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
 \|\Upsilon(s)\|_{\mathcal{A}} &= \|\Gamma(s, e)\|_{\mathcal{A}} \\
 &\leq \|\langle \Gamma(s, \cdot), \Gamma(s, \cdot) \rangle_{\mathcal{A}}\|_{\mathcal{A}}^{1/2} \|\langle \Gamma(e, \cdot), \Gamma(e, \cdot) \rangle_{\mathcal{A}}\|_{\mathcal{A}}^{1/2} \\
 &= \|\Gamma(s, s)\|_{\mathcal{A}}^{1/2} \|\Gamma(e, e)\|_{\mathcal{A}}^{1/2} \\
 &= \|\Upsilon(e)\|_{\mathcal{A}}.
 \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
 \|\Upsilon(s) - \Upsilon(t)\|_{\mathcal{A}}^2 &= \|\langle \Gamma(s, \cdot) - \Gamma(t, \cdot), \Gamma(e, \cdot) \rangle_E\|_{\mathcal{A}}^2 \\
 &\leq \|2\Upsilon(e) - \Gamma(t, s) - \Gamma(s, t)\|_{\mathcal{A}} \|\Upsilon(e)\|_{\mathcal{A}} \\
 &\leq 2\|\Upsilon(e) - \Gamma(s, t)\|_{\mathcal{A}} \|\Upsilon(e)\|_{\mathcal{A}} \\
 &= 2\|\Upsilon(e) - \Upsilon(t^{-1}s)\|_{\mathcal{A}} \|\Upsilon(e)\|_{\mathcal{A}}.
 \end{aligned}$$

De esto es inmediato que si Υ es continua en e , entonces Υ es continua. $\square$

PROPOSICIÓN 3.9. *Sea $\Upsilon : G \rightarrow \mathcal{A}$ una función definida positiva, entonces existe un módulo de Hilbert E , una representación unitaria (U_s) de G sobre E , y un vector cíclico $x_o \in E$ tal que*

$$\Upsilon(s) = \langle U_s x_o, x_o \rangle_E$$

para todo $s \in G$. Además Υ es continua si y sólo si (U_s) es continua.

DEMOSTRACIÓN.

Sean $\bar{\Gamma}(s, t) = \Upsilon(st^{-1})$ y E su módulo de Hilbert asociado. Consideremos E_o el conjunto de funciones de la forma

$$f(\cdot) = \sum_{i=1}^m a_i \bar{\Gamma}(s_i, \cdot),$$

para cada $s \in G$, definamos $U_s : E_o \rightarrow E_o$ por

$$U_s \left(\sum_{i=1}^m \bar{\Gamma}(s_i, \cdot) \right) = \sum_{i=1}^m \bar{\Gamma}(ss_i, \cdot).$$

Claramente se tiene que U_s es un operador lineal sobreyectivo. Además

$$\begin{aligned} \langle U_s(f), U_s(f) \rangle_o &= \left\langle \sum_{i=1}^m a_i \bar{\Gamma}(ss_i, \cdot), \sum_{j=1}^m a_j \bar{\Gamma}(ss_j, \cdot) \right\rangle_o \\ &= \sum_{i,j} a_i a_j^* \bar{\Gamma}(ss_i, ss_j) \\ &= \sum_{i,j} a_i a_j^* \bar{\Gamma}(s_i, s_j) = \langle f, f \rangle_o. \end{aligned}$$

De donde U_s es unitario.

Como E_o es denso en E , para cada $s \in G$ podemos extender U_s a todo E . Si seguimos llamando U_s a dicha extensión, se sigue que (U_s) es una representación unitaria de G sobre E .

Sea $x_o = \bar{\Gamma}(e, \cdot)$, entonces $x_o \in E$, y para $s \in G$

$$\Upsilon(s) = \langle \bar{\Gamma}(s, \cdot), \bar{\Gamma}(e, \cdot) \rangle = \langle U_s(x_o), x_o \rangle,$$

de nuevo como E_o es denso en E se tiene

$$\overline{\text{lin}_{\mathcal{A}}\{U_s(x_o) : s \in G\}} = \overline{\text{lin}_{\mathcal{A}}\{\bar{\Gamma}(s, \cdot) : s \in G\}} = \bar{E}_o = E.$$

Por lo tanto x_o es vector cíclico para la representación (U_s) .

Veamos que la continuidad de Υ implica la continuidad de la representación (U_s) . Para todo $x \in E$ se cumple

$$\|U_s x - U_{s'} x\| = 2\langle x, x \rangle - \langle x, U_{s' s^{-1}} x \rangle - \langle U_{s' s^{-1}} x, x \rangle,$$

así pues basta probar que (U_s) es débilmente continua. Sea $x \in E$, tal que

$$x = \sum_{k=0}^n \lambda_k U_{\gamma_k} x_o,$$

entonces

$$\|\langle U_s x, x \rangle - \langle U_{s'} x, x \rangle\| \leq \sum_{k,j=1}^n \lambda_k \lambda_j \|\langle U_s x_o, x_o \rangle - \langle U_{s'} x_o, x_o \rangle\| \rightarrow 0,$$

cuando $s \rightarrow s'$, esto es suficiente para probar que (U_s) es debilmente continua ya que x_o es cíclico. $\square$

3. Algunos hechos sobre algebras de Von Neumann.

En esta sección se exponen de manera introductoria algunas pocas propiedades sobre álgebras de Von Neumann, para ver las demostraciones de estos enunciados ver [36].

DEFINICIÓN 3.10. Se dice de $\mathcal{A}$ es un álgebra de *Von Neumann* si $\mathcal{A}$ es el dual de algún espacio de Banach, es decir, $\mathcal{A} = \mathcal{F}^*$ para algún espacio de Banach $\mathcal{F}$.

Sakai demuestra en [37] que si existe tal $\mathcal{F}$ es único salvo isomorfismos. Dicho espacio es llamado *predual* de $\mathcal{A}$, usualmente se denota por $\mathcal{A}_*$.

Se dice que una función $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ es *normal* cuando

$$f\left(\sup_{\alpha \in \Delta} a_\alpha\right) = \sup_{\alpha \in \Delta} f(a_\alpha),$$

para toda red creciente $(a_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ de elementos de $\mathcal{A}$.

Se tiene que

$$\mathcal{A}_* = \{f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}, \text{ tales que } f \text{ es normal}\}.$$

Si denotamos por $\mathcal{A}_*^+$ la colección de funcionales positivos de $\mathcal{A}_*$, es decir,

$$\mathcal{A}_*^+ = \{f \in \mathcal{A}_* : f(a) \geq 0 \text{ siempre que } a \geq 0\},$$

tenemos la siguiente caracterización

$$\mathcal{A}_* = \text{lin}_{\mathbb{C}}\{f : f \in \mathcal{A}_*^+\}.$$

El ejemplo clásico en el caso no conmutativo, y de hecho, el más importante son los espacios $L(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert. De hecho se puede dar una definición de álgebra de Von Neumann en relación a $L(\mathcal{H})$.

En adelante salvo se indique lo contrario $\mathcal{A}$ siempre será un álgebra de Von Neumann conmutativa con unidad.

4. Topología σ -débil en álgebra de Von Neumann y topología gramiana en $B(E)$.

En vista de que el predual de $\mathcal{A}$ es un subconjunto de funcionales lineales, dicho conjunto induce una topología en $\mathcal{A}$, tal topología se llama *topología σ -débil*, y la denotaremos por $\sigma(\mathcal{A}, \mathcal{A}_*)$.

Por otro lado, sean $\rho \in \mathcal{A}_*^+$ y $x, y \in E$, para $T \in B_{\mathcal{A}}(E)$ se define la seminorma

$$\mathcal{N}_{x,y}^{\rho}(T) = |\rho(\langle Tx, y \rangle_E)|.$$

Se define la *topología gramiana* en $B_{\mathcal{A}}(E)$ como la topología generada por la familia de seminormas

$$\{\mathcal{N}_{x,y}^{\rho}(\cdot) : x, y \in E, \rho \in \mathcal{A}_*^+\},$$

esta topología la denotaremos por τ_G .

Sean (T_n) sucesión en $B_{\mathcal{A}}(E)$ y $T \in B_{\mathcal{A}}(E)$, entonces $T_n \rightarrow T$ respecto a la topología τ_G , si para todo $x, y \in E$ y $\rho \in \mathcal{A}_*^+$

$$|\rho(\langle (T_n - T)x, y \rangle_E)| \rightarrow 0.$$

Esta topología nos permite definir un sentido de continuidad para funciones $f : G \rightarrow B_{\mathcal{A}}(E)$, más precisamente, diremos que f es τ_G -continua, si $g_n \rightarrow g$ en G implica $f_{s_n} \rightarrow f_s$ en τ_G .

DEFINICIÓN 3.11. Dada una función μ definida sobre $\mathbb{B}(\widehat{G})$ a valores en un espacio vectorial topológico (X, τ) , diremos que μ es una *medida τ -contablemente* aditiva si satisface cada una de las siguientes condiciones

- (a) $\mu(\emptyset) = 0$.
- (b) μ es aditiva, es decir, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, para A, B borelianos disjuntos.
- (c) $\sum_{k=1}^{+\infty} \mu(B_k)$ converge a $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k)$ en la topología τ , para toda sucesión de borelianos disjuntos.

5. Representación integral de funciones definidas positivas a valores en un álgebra de Von Neumann.

En el artículo de Kakihara se encuentra el siguiente resultado [22, pag. 295].

TEOREMA 3.12. Sean $\rho \in \mathcal{A}_*^+$, $(U_s)_{s \in G}$ una representación unitaria τ_G -continua de G sobre E . Entonces existe un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_\rho$, una representación unitaria $(U_{\rho,s})_{s \in G}$ débilmente continua de G sobre $\mathcal{H}_\rho$, y una medida espectral P_ρ definida $\mathbb{B}(\widehat{G})$ tal que

$$U_{\rho,s} = \int_{\widehat{G}} \overline{(s, \gamma)} dP_\rho(\gamma), \quad (3.5)$$

donde la igualdad anterior se debe interpretar de la siguiente manera

$$\langle U_{\rho,s}(h_1), h_2 \rangle_{\mathcal{H}_\rho} = \int_{\widehat{G}} \overline{(s, \gamma)} d\langle P_\rho(\gamma)h_1, h_2 \rangle_{\mathcal{H}_\rho}, \quad h_1, h_2 \in \mathcal{H}_\rho.$$

DEMOSTRACIÓN.

Para $x, y \in E$ definimos el producto

$$\langle x, y \rangle_\rho = \rho(\langle x, y \rangle_E).$$

Sean

$$N_\rho = \{x \in E : \langle x, x \rangle_\rho = 0\},$$

$$E_\rho = E/N_\rho.$$

Como es usual E_ρ es un espacio pre-Hilbert con el producto interno

$$\langle x + N_\rho, y + N_\rho \rangle_{E_\rho} = \langle x, y \rangle_\rho.$$

Tomemos $\mathcal{H}_\rho$ como el espacio de Hilbert obtenido de la completación de E_ρ respecto a este último producto interno.

Para $s \in G$ definamos $U_{\rho,s} : E_\rho \rightarrow E_\rho$ por

$$U_{\rho,s}(x + N_\rho) = U_s(x) + N_\rho.$$

Como U_s es sobreyectiva entonces $U_{\rho,s}$ también lo es.

Además

$$\begin{aligned}
\langle U_{\rho,s}(x + N_\rho), U_{\rho,s}(y + N_\rho) \rangle_{E_\rho} &= \langle U_s(x) + N_\rho, U_s(y) + N_\rho \rangle_{E_\rho} \\
&= \rho(\langle U_s(x), U_s(y) \rangle_E) \\
&= \rho(\langle x, y \rangle_E) \\
&= \langle x, y \rangle_\rho = \langle x + N_\rho, y + N_\rho \rangle_{E_\rho}
\end{aligned}$$

De donde $(U_{\rho,s})$ es representación unitaria. Como E_ρ es un subconjunto denso de $\mathcal{H}_\rho$ (identificando E_ρ con un subconjunto denso de $\mathcal{H}_\rho$) entonces podemos extender $U_{\rho,s}$ a todo H_ρ , tal extensión la seguiremos denotando por $U_{\rho,s}$.

Por otra parte afirmamos que la representación $(U_{\rho,s})$ es débilmente continua. En efecto, tomando en cuenta que los productos $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_\rho}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E_\rho}$ coinciden en E_ρ , si $s_n \rightarrow s$, entonces para todo $x, y \in E$ tenemos

$$\begin{aligned}
|\langle (U_{\rho,s_n} - U_{\rho,s})(x + N_\rho), y + N_\rho \rangle_{E_\rho}| &= |\langle (U_{s_n} - U_s)x + N_\rho, y + N_\rho \rangle_{E_\rho}| \\
&= |\langle (U_{s_n} - U_s)x, y \rangle_\rho| \\
&= |\rho(\langle U_{s_n}x - U_sx, y \rangle_E)| \rightarrow 0
\end{aligned}$$

cuando n tiende al infinito, ya que (U_s) es τ_G -continua. Así, por el teorema de Stone existe una medida espectral P_ρ en $\mathbb{B}(\widehat{G})$ tal que

$$U_{\rho,s} = \int_{\widehat{G}} \overline{(s, \gamma)} dP_\rho(\gamma).$$

□

La demostración del siguiente resultado puede verse en [22, pag. 295] y se basa en el uso de un subespacio denso en $L^1(\widehat{G}, m)$ donde m es una medida regular, finita y positiva en $\widehat{G}$ que se construye convenientemente.

LEMA 3.13. Para $x, y \in E$ y $B \in \mathbb{B}(\widehat{G})$ fijos, definimos $\Delta(\rho) : \mathcal{A}_*^+ \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$\Delta(\rho) = \langle P_\rho(B)(x + N_\rho), y + N_\rho \rangle_{\mathcal{H}_\rho},$$

entonces Δ puede ser extendido de forma única a un funcional lineal y acotado en todo $\mathcal{A}_*$, más precisamente existe un único elemento $P_{x,y}(B) \in \mathcal{A}$ tal que

$$\Delta(\rho) = \rho(P_{x,y}(B)), \quad \rho \in \mathcal{A}_*.$$

En particular,

$$\rho(P_{x,y}(B)) = \langle P_\rho(B)(x + N_\rho), y + N_\rho \rangle_{\mathcal{H}_\rho}, \quad \rho \in \mathcal{A}_*^+.$$

Sea $\rho \in \mathcal{A}_*^+$, como $P_\rho : \mathbb{B}(\widehat{G}) \rightarrow B(\mathcal{H}_\rho)$, es una medida espectral, para todo $h, k \in \mathcal{H}_\rho$ la función $\mu_{h,k} : \mathbb{B}(\widehat{G}) \rightarrow \mathbb{C}$, dada por

$$\mu_{h,k}(B) = \langle P_\rho(B)h, k \rangle_{\mathcal{H}_\rho},$$

es una medida compleja regular. En particular si $x, y \in E$, entonces $x + N_\rho, y + N_\rho \in \mathcal{H}_\rho$ y

$$\mu_{x,y}(B) = \langle P_\rho(B)(x + N_\rho), y + N_\rho \rangle_{\mathcal{H}_\rho},$$

es una medida compleja regular, así por definición de $P_{x,y}(B)$ tenemos

$$\rho(P_{x,y}(B)) = \langle P_\rho(B)(x + N_\rho), y + N_\rho \rangle_{\mathcal{H}_\rho} = \mu_{x,y}(B),$$

esto nos dice que $\rho P_{x,y}(\cdot)$ es una medida compleja regular para todo $x, y \in E, \rho \in \mathcal{A}_*^+$.

En general si $\rho \in \mathcal{A}_*$ es arbitrario, existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, y $\rho_1, \dots, \rho_n \in \mathcal{A}_*^+$ tales que

$$\rho = \lambda_1 \rho_1 + \dots + \lambda_n \rho_n.$$

Entonces

$$\rho(P_{x,y}(B)) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \rho_k(P_{x,y}(B)),$$

ya que $\rho_k(P(\cdot))$ es medida compleja regular lo mismo vale para $\rho(P_{x,y}(\cdot))$. Hemos probado el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 3.14. *Para cada $x, y \in E$ fijos, la función $B \rightarrow P_{x,y}(B)$ definida sobre $\mathbb{B}(\widehat{G})$ a valores en $\mathcal{A}$, es una medida contablemente $\sigma(\mathcal{A}, \mathcal{A}_*)$ -aditiva. Además para cada $x, y \in E$ y $\rho \in \mathcal{A}_*$, $\rho P_{x,y}(\cdot)$ es una medida compleja regular.*

LEMA 3.15. *Sean $\rho \in \mathcal{A}_*^+$, $(U_s)_{s \in G}$ una representación unitaria τ_G -continua de G sobre E . Entonces*

(i) Para cada $x, y \in E$ se cumple

$$\langle U_s x, y \rangle_E = \int_{\widehat{G}} \overline{(s, \gamma)} dP_{x,y}(\gamma), \quad (3.6)$$

para todo $s \in G$.

- (ii) Para $x, y, z \in E$ y $a \in \mathcal{A}$, se tiene $P_{ax+zy}(\cdot) = aP_{x,y}(\cdot) + P_{z,y}(\cdot)$ y $P_{x,y}(\cdot) = P_{y,x}(\cdot)^*$.
- (iii) Para cada $B \in \mathbb{B}(\widehat{G})$, $y \in E$ fijos, la función $x \rightarrow P_{x,y}(B)$ definida de E a valores en $\mathcal{A}$ es un funcional lineal y acotado, es decir pertenece a E^* .

DEMOSTRACIÓN.

(i) Debemos probar que para todo $\rho \in \mathcal{A}_*$ y para todo $s \in G$

$$\rho(\langle U_s(x), y \rangle_E) = \rho \left(\int_{\widehat{G}} \overline{(s, \gamma)} dP_{x,y}(\gamma) \right).$$

En primer lugar probaremos el resultado para el caso en que $\rho \in \mathcal{A}_*^+$. En ese caso

$$\begin{aligned} \rho(\langle U_s(x), y \rangle_E) &= \langle U_s(x) + N_\rho, y + N_\rho \rangle_{\mathcal{H}_\rho} \\ &= \langle U_{\rho,s}(x + N_\rho), y + N_\rho \rangle_{\mathcal{H}_\rho} \\ &= \int_{\widehat{G}} \overline{(s, \gamma)} d\langle P_\rho(\gamma)(x + N_\rho), y + N_\rho \rangle_{\mathcal{H}_\rho} \\ &= \int_{\widehat{G}} \overline{(s, \gamma)} d(\rho(P_{x,y}(\gamma))) \\ &= \rho \left(\int_{\widehat{G}} \overline{(s, \gamma)} dP_{x,y}(\gamma) \right). \end{aligned}$$

Con esto se ha obtenido el resultado para funcionales en $\mathcal{A}_*^+$.

Sea $\rho \in \mathcal{A}_*$ arbitrario, sean $\rho_1, \dots, \rho_n \in \mathcal{A}_*^+$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ escalares tales que

$$\rho = \sum_{k=1}^n \lambda_k \rho_k,$$

entonces para cada $1 \leq k \leq n$, tenemos

$$U_{\rho_k, s} = \int_{\widehat{G}} \overline{(s, \gamma)} dP_{\rho_k}(\gamma)$$

Aplicando el resultado obtenido para funcionales en $\mathcal{A}_*^+$, tenemos

$$\begin{aligned}
\rho(\langle U_s x, y \rangle_E) &= \sum_{k=1}^n \lambda_k \rho_k(\langle U_s x, y \rangle_E) \\
&= \sum_{k=1}^n \lambda_k \rho_k \left(\int_{\hat{G}} \overline{(s, \gamma)} dP_{x,y}(\gamma) \right) \\
&= \sum_{k=1}^n \lambda_k \left(\int_{\hat{G}} \overline{(s, \gamma)} d(\rho_k P_{x,y}(\gamma)) \right) \\
&= \int_{\hat{G}} \overline{(s, \gamma)} d \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \rho_k(P_{x,y}(\gamma)) \right) = \rho \left(\int_{\hat{G}} \overline{(s, \gamma)} dP_{x,y}(\gamma) \right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\langle U_s(x), y \rangle_E = \int_{\hat{G}} \overline{(s, \gamma)} dP_{x,y}(\gamma), \quad s \in G.$$

(ii) Veamos la linealidad. Sean $x, z \in E$, $a \in \mathcal{A}$, entonces para $\rho \in \mathcal{A}_*$, por la parte anterior

$$\begin{aligned}
\int_{\hat{G}} \overline{(s, \gamma)} dP_{ax,y}(\gamma) &= \langle U_s(ax), y \rangle_E \\
&= a \langle U_s x, y \rangle_E \\
&= \int_{\hat{G}} \overline{(s, \gamma)} d(aP_{x,y}(\gamma)),
\end{aligned}$$

aplicando ρ a ambos lados se obtiene

$$\int_{\hat{G}} \overline{(s, \gamma)} d(\rho(P_{ax,y}(\gamma))) = \int_{\hat{G}} \overline{(s, \gamma)} d(\rho(aP_{x,y}(\gamma))).$$

Como $\rho(P_{ax,y}(\cdot))$ y $\rho(aP_{x,y}(\cdot))$ son medidas regulares entonces

$$\rho(P_{ax,y}(\cdot)) = \rho(aP_{x,y}(\cdot)),$$

como ρ es arbitrario, entonces $P_{ax,y}(\cdot) = aP_{x,y}(\cdot)$.

Con un razonamiento análogo se prueba que $P_{x+z,y}(\cdot) = P_{x,y}(\cdot) + P_{z,y}(\cdot)$, esto hace uso de la regularidad de las medidas $\rho(P_{x,y}(\cdot) + \rho(P_{z,y}(\cdot)))$, $\rho(P_{z,y}(\cdot))$ y de la identidad

$$\int_{\hat{G}} \overline{(s, \gamma)} d(\rho(P_{x,y}(\gamma)) + \rho(P_{z,y}(\gamma))) = \int_{\hat{G}} \overline{(s, \gamma)} d(\rho(P_{x+z,y}(\gamma))).$$

Veamos la igualdad $P_{x,y}(\cdot) = P_{y,x}(\cdot)^*$, tomemos $\rho \in \mathcal{A}_*^+$, como ρ es un funcional lineal positivo se cumple que $\rho(P_{x,y}(B)^*) = \overline{\rho(P_{x,y}(B))}$, usando este hecho y que $P_\rho(B)$ es autoadjunto

tenemos

$$\begin{aligned}
\rho(P_{x,y}(B)^*) &= \overline{\rho(P_{x,y}(B))} = \langle y + N_\rho, P_\rho(B)(x + N_\rho) \rangle_{\mathcal{H}_\rho} \\
&= \langle P_\rho(B)(y + N_\rho), x + N_\rho \rangle_{\mathcal{H}_\rho} \\
&= \rho(P_{y,x}(B)).
\end{aligned}$$

Con un razonamiento similar a lo anterior se verifica que esta igualdad se cumple en todo $\mathcal{A}_*$, esto unido a la regularidad de las medidas nos dice que $P_{x,y}(\cdot)^* = P_{y,x}(\cdot)$.

(iii) La parte (ii) nos dice que $P_{\cdot,y}(B)$ es lineal, veamos que es acotada, notemos primero lo siguiente

$$\begin{aligned}
\|x + N_\rho\|_{\mathcal{H}_\rho} &= \|\langle x, x \rangle_\rho\|_{\mathcal{A}}^{1/2} \\
&= \|\rho(\langle x, x \rangle)\|_{\mathcal{A}}^{1/2} \\
&\leq \|\rho\|^{1/2} \|\langle x, x \rangle_E\|_{\mathcal{A}}^{1/2} = \|\rho\|^{1/2} \|x\|_E.
\end{aligned}$$

Usando esto se obtiene

$$\begin{aligned}
|\rho(P_{x,y}(B))| &= |\langle P_\rho(B)(x + N_\rho), y + N_\rho \rangle_{\mathcal{H}_\rho}| \\
&\leq \|P_\rho(B)\| \|x + N_\rho\|_{\mathcal{H}_\rho} \|y + N_\rho\|_{\mathcal{H}_\rho} \\
&\leq \|\rho\| \|x\| \|y\|,
\end{aligned}$$

por lo tanto $\|P_{x,y}(B)\| \leq \|x\| \|y\|$, es decir, $P_{\cdot,y}(B)$ es funcional lineal acotado independiente de la escogencia de B . $\square$

DEFINICIÓN 3.16. Una función $\mu : \mathbb{B}(\widehat{G}) \rightarrow B^*(E)$ es una *medida espectral gramiana* si se cumple

- (a) Para todo $B \in \mathbb{B}(\widehat{G})$, $\mu(B)$ es proyección ortogonal, esto es, $\mu(B) = \mu(B)^2 = \mu(B)^*$.
- (b) Para cada $\rho \in \mathcal{A}_*^+$, y $x, y \in E$ la función $\mu_{x,y}^\rho : \mathbb{B}(\widehat{G}) \rightarrow \mathbb{C}$, dada por

$$\mu_{x,y}^\rho(B) = \rho(\langle \mu(B)x, y \rangle_E).$$

es una medida compleja regular.

TEOREMA 3.17. Sean E un módulo de Hilbert autodual, $s \rightarrow U_s$ un representación unitaria de G sobre E , τ_G -continua. Entonces existe una medida gramiana P definida sobre $\mathbb{B}(\widehat{G})$ a valores operadores tal que

$$U_s = \int_{\widehat{G}} \overline{(s, \gamma)} dP(\gamma), s \in G. \quad (3.7)$$

donde la integral es en la topología gramiana, es decir,

$$\langle U_s x, y \rangle_E = \int_{\widehat{G}} \overline{(s, \gamma)} d\langle P(\gamma)x, y \rangle_E, s \in G, x, y \in E.$$

DEMOSTRACIÓN.

La demostración se realiza en varios pasos.

Paso 1: Construcción de la medida $P(\cdot)$.

Fijemos $B \in \mathbb{B}(\widehat{G})$, entonces por Lema (3.15) para cada $y \in E$ $P_{(\cdot), y}(B) \in E^*$, por lo tanto existe un único $z = z(y, B) \in E$ tal que

$$P_{x, y}(B) = \langle x, z \rangle_E, x \in E.$$

Así pues a cada $B \in \mathbb{B}(\widehat{G})$ le podemos asociar la función $P(B) : E \rightarrow E$ dada por

$$P(B)y = z. \quad (3.8)$$

Esto nos permite escribir

$$P_{x, y}(B) = \langle x, P(B)y \rangle_E. \quad (3.9)$$

La linealidad de $P(B)$ es consecuencia inmediata de la linealidad de $P_{(\cdot), y}(B)$, supongamos que $P(B)$ no es acotado, entonces existe $x_o \in E$ tal que $\|x_o\|_E < 1$ tal que

$$\|P(B)x_o\|_E > M,$$

para todo número real positivo. Si tomamos $z_o = P(B)x_o$ entonces

$$\|P_{z_o, x_o}(B)\|_{\mathcal{A}}^2 = \|P(B)x_o\|_E > M,$$

de donde $P_{(\cdot), x_o}(B)$ sería no acotado, por lo tanto $P(B)$ es un operador lineal y acotado.

Paso 2: $P(\cdot) : \mathbb{B}(\widehat{G}) \rightarrow B(E)$ es una medida σ -aditiva en respecto a la topología τ_G .

Sean $\rho \in \mathcal{A}_*^+$, $x, y \in E$ y $\{B_n\}$ una sucesión de conjuntos medibles disjuntos, entonces

$$\begin{aligned} \left| \rho \left\langle P \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \right) x - \sum_{k=1}^n P(B_k)x, y \right\rangle_E \right| &= \left| \rho \left\langle P \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \right) x, y \right\rangle_E - \sum_{k=1}^n \rho \langle P(B_k)x, y \rangle_E \right| \\ &= \left| \rho P_{x,y} \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \right) - \sum_{k=1}^n \rho P_{x,y}(B_k) \right| \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

ya que $\rho P_{x,y}(\cdot)$ es una medida compleja σ -aditiva, por lo tanto $P(\cdot)$ es σ -aditiva respecto a τ_G .

Paso 3: $P(\cdot)$ es medida espectral Gramiana.

Sean $x, y \in E$ y $B \in \mathbb{B}(\widehat{G})$, por definición de $P_{x,y}(\cdot)$ y por el Lema 3.15

$$\langle P(B)x, y \rangle_E = P_{x,y}(B) = P_{y,x}(B)^* = \langle P(B)y, x \rangle_E = \langle x, P(B)y \rangle_E,$$

así que $P(B)$ es autoadjunto.

Sea $\rho \in \mathcal{A}_*^+$, como $P_\rho(B)$ es autoadjunto entonces

$$\begin{aligned} \langle x + N_\rho, P(B)(y + N_\rho) \rangle_{\mathcal{H}_\rho} &= \langle x, P(B)y \rangle_\rho \\ &= \rho(P_{x,y}(B)) \\ &= \langle x + N_\rho, P_\rho(y + N_\rho) \rangle_{\mathcal{H}_\rho}, \end{aligned}$$

de donde $P(B)y + N_\rho = P_\rho(y + N_\rho)$. Aplicando esta identidad dos veces y usando que $P_\rho(B) = P_\rho(B)^2$, se obtiene

$$P(B)y + N_\rho = P_\rho(B)^2(y + N_\rho) = P_\rho(B)(P(B)y + N_\rho) = P^2(B)y + N_\rho,$$

esto implica

$$\begin{aligned} \rho(\langle x, P(B)y \rangle_E) &= \langle x + N_\rho, P(B)y + N_\rho \rangle_{\mathcal{H}_\rho} \\ &= \langle x + N_\rho, P(B)^2y + N_\rho \rangle_{\mathcal{H}_\rho} \\ &= \langle x, P(B)^2y \rangle_\rho = \rho(\langle x, P(B)^2y \rangle_E), \end{aligned}$$

como ρ es arbitrario, se sigue que $\langle x, P(B)y \rangle_E = \langle x, P(B)^2y \rangle_E$, de donde $P^2(B) = P(B)$.

Por otro lado $\rho(\langle P(\cdot)x, y \rangle_E)$ es una medida regular compleja ya que

$$\rho(\langle P(\cdot)x, y \rangle_E) = \rho(\langle x, P(\cdot)y \rangle_E) = \rho(P_{x,y}(\cdot)), \quad (3.10)$$

y $\rho(P_{x,y}(\cdot))$ es una medida regular compleja.

Paso 4: $P(\cdot)$ satisface la representación integral.

Esto sigue directamente de la identidad

$$P_{x,y}(B) = P_{y,x}(B)^* = \langle y, P(B)x \rangle_E^* = \langle P(B)x, y \rangle_E, \quad (3.11)$$

de donde

$$\langle U_s x, y \rangle_E = \int_{\widehat{G}} \overline{(s, \gamma)} dP_{x,y}(\gamma) = \int_{\widehat{G}} \overline{\langle s, \gamma \rangle} d\langle P(\gamma)x, y \rangle_E, \quad (3.12)$$

□

5.1. Teorema de Kakihara.

En esta sección se usará la topología σ -débil, que hemos denotado por $\sigma(\mathcal{A}, \mathcal{A}_*)$ (ver 4).

DEFINICIÓN 3.18. Sea ξ una medida sobre $\mathbb{B}(\widehat{G})$ a valores en $\mathcal{A}$ y $\sigma(\mathcal{A}, \mathcal{A}_*)$ -aditiva, diremos que ξ es *positiva* y *regular* si cumple las siguientes condiciones

- (a) $\xi(B)$ es un elemento positivo de $\mathcal{A}$ para todo $B \in \mathbb{B}(\widehat{G})$.
- (b) $\rho\xi(\cdot)$ es una medida compleja regular para todo $\rho \in \mathcal{A}_*^+$.

Nótese que, ambas condiciones implican que $\rho(\xi(\cdot))$ es medida a valores reales positiva y regular, para todo ρ elemento positivo del predual. Denotaremos por $\mathcal{M}_*(\widehat{G}, \mathcal{A})^+$ al conjunto de las medidas positivas y regulares, es decir,

$$\mathcal{M}_*(\widehat{G}, \mathcal{A})^+ = \{ \xi : \mathbb{B}(\widehat{G}) \rightarrow \mathcal{A}, \text{ tales que } \xi \text{ es regular y positiva} \}. \quad (3.13)$$

PROPOSICIÓN 3.19. Sea $\xi \in \mathcal{M}_*(\widehat{G}, \mathcal{A})^+$, entonces la función $\Upsilon : G \rightarrow \mathcal{A}$ dada por

$$\Upsilon(s) = \int_{\widehat{G}} \overline{(s, \gamma)} d\xi(\gamma), \quad s \in G. \quad (3.14)$$

Es definida positiva y $\sigma(\mathcal{A}, \mathcal{A}_*)$ -continua.

DEMOSTRACIÓN.

Sean $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$ y $s_1, \dots, s_n \in G$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n a_i a_j^* \Upsilon(s_i s_j^{-1}) &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\widehat{G}} \overline{(s_i s_j^{-1}, \gamma)} a_i a_j^* d\xi(\gamma) \\ &= \int_{\widehat{G}} \left(\sum_{i=1}^n (s_i, \gamma) a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n (s_i, \gamma) a_i \right)^* d\xi(\gamma) \geq 0. \end{aligned}$$

Sea $\rho \in \mathcal{A}_*^+$, la $\sigma(\mathcal{A}, \mathcal{A}_*)$ -continuidad de la función es consecuencia inmediata de la identidad

$$\rho(\Upsilon(s)) = \int_{\widehat{G}} \overline{(s, \gamma)} d(\rho(\xi(\gamma))),$$

y del teorema de Bochner aplicado a la medida regular $\rho(\xi(\cdot))$, que toma valores complejos, y la función $\rho(\Upsilon(\cdot))$. $\square$

TEOREMA 3.20 (Kakihara). *Sean $\Upsilon : G \rightarrow \mathcal{A}$ una función definida positiva y $\sigma(\mathcal{A}, \mathcal{A}_*)$ -continua entonces, existe una única medida $\xi \in \mathcal{M}_*^+(\widehat{G}, \mathcal{A})$ tal que*

$$\Upsilon(s) = \int_{\widehat{G}} \overline{(s, \gamma)} d\xi(\gamma). \quad (3.15)$$

DEMOSTRACIÓN.

Por la Proposición 3.9 existen un módulo de Hilbert E_Υ , una representación unitaria $s \rightarrow \Theta_s$, de G sobre E_Υ y un vector cíclico $x_o \in E_\Upsilon$ tal que

$$\Upsilon(s) = \langle \Theta_s x_o, x_o \rangle_{E_\Upsilon}, s \in G.$$

Como Υ es $\sigma(\mathcal{A}, \mathcal{A}_*)$ -continua, entonces $s \rightarrow \Theta_s$ es τ_G -continua, por el Teorema 2.28, esta representación puede ser extendida de manera única a una representación unitaria τ_G -continua $s \rightarrow U_s$ de G sobre el E_Υ^* , como E_Υ^* es modulo de Hilbert autodual por el Teorema 3.17 existe una medida espectral gramiana P sobre $\mathbb{B}(\widehat{G})$ tal que

$$U_s = \int_{\widehat{G}} \overline{(s, \gamma)} dP(\gamma), s \in G.$$

Definamos $\xi : \mathbb{B}(\widehat{G}) \rightarrow \mathcal{A}$, por

$$\xi(B) = \langle P(B)x_o, x_o \rangle_{E_\Upsilon^*}.$$

Sean $B \in \mathbb{B}(\widehat{G})$, $\rho \in \mathcal{A}_*^+$, como $P(\cdot)$ es una medida espectral tenemos

$$\xi(B) = \langle P(B)x_o, x_o \rangle_{E_\Upsilon^*} = \langle P(B)x_o, P(B)x_o \rangle_{E_\Upsilon^*} \geq 0,$$

es decir, $\xi(B)$ es un elemento positivo en el álgebra, por otra parte

$$\rho(\xi(B)) = \rho(\langle P(B)x_o, x_o \rangle_{E_\Upsilon^*}),$$

de donde $\rho\xi(\cdot)$ es una medida regular, por lo tanto $\xi \in \mathcal{M}_*^+(\widehat{G}, \mathcal{A})$. Por último haciendo la identificación de E con $\widehat{E}$, se obtiene

$$\begin{aligned}\Upsilon(s) &= \langle U_s x_o, x_o \rangle_{E_\Upsilon^*} \\ &= \int_G \overline{(s, \gamma)} d\langle P(\gamma)x_o, x_o \rangle_{E_\Upsilon^*} = \int_{\widehat{G}} \overline{(s, \gamma)} d\xi(\gamma).\end{aligned}$$

Para ver la unicidad, supongamos que existe otra medida $\mu \in \mathcal{M}_*^+(\widehat{G}, \mathcal{A})$ tal que

$$\Upsilon(s) = \int_{\widehat{G}} \overline{(s, \gamma)} d\mu(\gamma).$$

Entonces para $\rho \in \mathcal{A}_*^+$

$$\int_{\widehat{G}} \overline{(s, \gamma)} d(\rho\mu(\gamma)) = \int_{\widehat{G}} \overline{(s, \gamma)} d(\rho\xi(\gamma)),$$

como $\rho\xi(\cdot), \rho\mu(\cdot)$ son medidas complejas regulares entonces $\rho\xi(\cdot) = \rho\mu(\cdot)$, y esto es suficiente para probar que $\xi(\cdot) = \mu(\cdot)$. $\square$

OBSERVACIÓN 3.21. La medida ξ del teorema previo satisface la condición de que $a\xi(\cdot)$ es regular para todo $a \in \mathcal{A}$, lo cual es consecuencia de la identidad

$$\rho(a\xi(\cdot)) = \rho(\langle P(\cdot)(ax_o), x_o \rangle_E),$$

y de que P es medida espectral gramiana. Esta propiedad jugará un papel muy importante en el próximo capítulo.

Funciones definidas positivas a valores operadores sobre un módulo de Hilbert autodual

En este capítulo se define la noción de función definida positiva definida sobre un grupo abeliano localmente compacto a valores operadores en un $\mathcal{A}$ -módulo de Hilbert autodual, a partir del teorema de Kakihara [22] se da una representación integral de tipo Bochner para este tipo de funciones, dicha representación es análoga a la obtenida por Falb en [18], la cual corresponde al caso en el que las funciones toman valores operadores sobre un espacio de Hilbert.

1. Representación integral de funciones definidas positivas a valores operadores sobre un módulo de Hilbert autodual.

A lo largo de este capítulo E es un módulo de Hilbert autodual. Sea T un operador lineal y acotado en E , sabemos por la Proposición 2.26 que T es positivo en $B_{\mathcal{A}}^*(E)$ si

$$\langle Tx, x \rangle_E \geq 0,$$

para todo $x \in E$.

Sea Υ un función definida sobre G a valores en $B_{\mathcal{A}}(E)$, para cada $x \in E$ definamos la función $\Upsilon_x : G \rightarrow \mathcal{A}$ dada por

$$\Upsilon_x(s) = \langle \Upsilon(s)x, x \rangle_E, s \in G. \tag{4.1}$$

Supongamos que Υ_x es definida positiva, entonces

$$\sum_{i,j} a_i a_j^* \Upsilon_x(s_i s_j^{-1}) \geq 0,$$

para cualesquiera $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$ y $s_1, \dots, s_n \in G$. Pero

$$\sum_{i,j} a_i a_j^* \Upsilon_x(s_i s_j^{-1}) = \left\langle \sum_{i,j} a_i a_j^* \Upsilon(s_i s_j^{-1})x, x \right\rangle_E.$$

Por lo tanto Υ_x es definida positiva para todo $x \in E$ si, y sólo si, el operador

$$T = \sum_{i,j} a_i a_j^* \Upsilon(s_i s_j^{-1}),$$

es positivo, para cada $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$ y $s_1, \dots, s_n \in G$.

Estas observaciones motivan la siguiente definición.

DEFINICIÓN 4.1. Sea $\Upsilon : G \rightarrow B_{\mathcal{A}}(E)$ una función, diremos que Υ es *definida positiva* si para cada $x \in E$ la función

$$\Upsilon_x(s) = \langle \Upsilon(s)x, x \rangle_E,$$

es definida positiva.

LEMA 4.2. Sea $B : E \times E \rightarrow \mathcal{A}$, una forma sesquilineal acotada, entonces existe un único operador $T \in B_{\mathcal{A}}^*(E)$ tal que

- (a) $B(x, y) = \langle Tx, y \rangle_E$.
- (b) $\|B\| = \|T\|$.

DEMOSTRACIÓN.

Fijemos $x \in E$, es claro $B(x, \cdot)^*$ es lineal y acotado es decir, $B(x, \cdot)^* \in E^{*\mathcal{A}}$, como E es autodual existe un único $z = z(x) \in E$ que satisface

$$B(x, y)^* = \langle y, z \rangle_E,$$

para todo $y \in E$, de donde

$$B(x, y) = \langle z, y \rangle_E, y \in E.$$

Definamos $T : E \rightarrow E$ por

$$Tx = z.$$

Entonces B se escribe como

$$B(x, y) = \langle Tx, y \rangle_E.$$

La linealidad de T es consecuencia de la linealidad de B en la primera variable, ahora la igualdad

$$\langle Tx, y \rangle_E = B(x, y) = B^*(y, x) = \langle Ty, x \rangle_E^* = \langle x, Ty \rangle_E,$$

válida para todo $x, y \in E$, implica que T es autoadjunto. Por otra parte, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz (2.3)

$$\|B\| = \sup_{x,y \neq 0} \frac{\|B(x,y)\|_{\mathcal{A}}}{\|x\|_E \|y\|_E} \leq \sup_{x,y \neq 0} \frac{\|T\| \|x\|_E \|y\|_E}{\|x\|_E \|y\|_E} = \|T\|.$$

Por definición

$$\|B\| = \sup_{x \neq 0, y \neq 0} \frac{\|B(x,y)\|_{\mathcal{A}}}{\|x\|_E \|y\|_E} \geq \sup_{x \neq 0, Tx \neq 0} \frac{\|\langle Tx, Tx \rangle_E\|_{\mathcal{A}}}{\|x\|_E \|Tx\|_E} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_E}{\|x\|_E} = \|T\|.$$

Por lo tanto $T \in B_{\mathcal{A}}^*(E)$ y $\|B\| = \|T\|$. □

LEMA 4.3. Si $\Upsilon : G \rightarrow B_{\mathcal{A}}(E)$ es definida positiva y τ_G -continua entonces la función

$$\Upsilon_x(s) = \langle \Upsilon(s)x, x \rangle_E,$$

es definida positiva y $\sigma(\mathcal{A}, \mathcal{A}_*)$ -continua, para cada $x \in E$.

DEMOSTRACIÓN.

Sean $\rho \in \mathcal{A}_*^+$, $x, y \in E$ y (s_n) sucesión de elementos de G tal que $s_n \rightarrow s$. Por hipótesis

$$\rho \langle_E \Upsilon(s_n)x, y \rangle_E \rightarrow \rho \langle \Upsilon(s)x, y \rangle_E,$$

En particular cuando $x = y$ tenemos que

$$\rho \Upsilon_x(s_n) = \rho \langle \Upsilon(s_n)x, x \rangle_E \rightarrow \rho \langle \Upsilon(s)x, x \rangle_E = \rho \Upsilon_x(s).$$

Esto es suficiente para probar que Υ_x es $\sigma(\mathcal{A}, \mathcal{A}_*)$ -continua. Además, para cada $x \in E$ la función Υ_x es definida positiva por la Definición 4.1. □

DEFINICIÓN 4.4. Sea $\Sigma : \mathbb{B}(\widehat{G}) \rightarrow B_{\mathcal{A}}^*(E)$ una medida contablemente aditiva en la topología τ_G , diremos que Σ es *medida regular positiva* si cumple las siguientes condiciones

- (a) $\Sigma(B)$ es un operador positivo para todo $B \in \mathbb{B}(\widehat{G})$.
- (b) $\rho \langle \Sigma(\cdot)x, y \rangle_E$ es una medida compleja regular para todo $\rho \in \mathcal{A}_*^+$.

PROPOSICIÓN 4.5. Sea Σ una medida definida sobre los borelianos de $\widehat{G}$ a valores en $B_{\mathcal{A}}^*(E)$ regular y positiva, entonces la función

$$\Upsilon(s) = \int_{\widehat{G}} \overline{(s, \gamma)} d\Sigma(\gamma), s \in G.$$

es definida positiva y τ_G -continua.

DEMOSTRACIÓN.

Sean $x \in E$, $a_1, \dots, a_n \in A$ y $s_1, \dots, s_n \in G$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n a_i a_j^* \Upsilon_x(s_i s_j^{-1}) &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\widehat{G}} \overline{(s_i s_j^{-1}, \gamma)} a_i a_j^* d\langle \Sigma(\gamma)x, x \rangle_E \\ &= \int_{\widehat{G}} \left(\sum_{i=1}^n (s_i, \gamma) a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n (s_i, \gamma) a_i \right)^* d\langle \Sigma(\gamma)x, x \rangle_E \geq 0, \end{aligned}$$

de donde Υ es definida positiva.

Para probar la continuidad basta notar que

$$\rho\langle \Upsilon(s)x, x \rangle_E = \int_{\widehat{G}} \overline{(s, \gamma)} d(\rho\langle \Sigma(\gamma)x, x \rangle_E), \rho \in \mathcal{A}_*^+, s \in G,$$

y usar que $\rho\langle \Sigma(\cdot)x, x \rangle$ es medida regular positiva junto con la Proposición 3.19. $\square$

TEOREMA 4.6. *Sea $\Upsilon : G \rightarrow B_{\mathcal{A}}(E)$ una función τ_G -continua y definida positiva, entonces existe una única medida positiva y regular $\Sigma : \mathbb{B}(\widehat{G}) \rightarrow B_{\mathcal{A}}^*(E)$ tal que*

$$\Upsilon(s) = \int_{\widehat{G}} \overline{(s, \gamma)} d\Sigma(\gamma), \quad s \in G. \quad (4.2)$$

Donde esta última integral debe entenderse en el sentido débil, es decir,

$$\langle \Upsilon(s)x, y \rangle_E = \int_{\widehat{G}} \overline{(s, \gamma)} d\langle \Sigma(\gamma)x, y \rangle_E, \quad s \in G, x, y \in E.$$

DEMOSTRACIÓN.

Sea $x \in E$, y consideremos la función Υ_x , por hipótesis $\Upsilon_x : G \rightarrow \mathcal{A}$ y por el Lema 4.3 es definida positiva y τ_G -continua, de donde por el teorema de Kakihara 3.20 existe una única medida $\xi_x \in \mathcal{M}_*^+(\widehat{G}, \mathcal{A})$ tal que

$$\langle \Upsilon(s)x, x \rangle_E = \int_{\widehat{G}} \overline{(s, \gamma)} d\xi_x(\gamma), \quad s \in G. \quad (4.3)$$

Para cada boreliano Δ de $\widehat{G}$, definamos

$$B_{\Delta} : E \times E \rightarrow \mathcal{A},$$

por

$$B_{\Delta}(x, y) = \xi_{\frac{x+y}{2}}(\Delta) - \xi_{\frac{x-y}{2}}(\Delta) + i\xi_{\frac{x+iy}{2}}(\Delta) - i\xi_{\frac{x-iy}{2}}(\Delta) = \sum_{k=0}^3 i^k \xi_{\frac{x+i^k y}{2}}(\Delta). \quad (4.4)$$

Por otro lado para $x, y \in E$, definamos $\mu_{x,y} : \mathbb{B}(\widehat{G}) \rightarrow \mathcal{A}$ como la medida inducida por $B_\Delta(x, y)$ cuando variamos Δ en los borelianos de $\widehat{G}$, es decir

$$\mu_{x,y}(\Delta) = B_\Delta(x, y). \quad (4.5)$$

La regularidad de ξ_x para todo $x \in E$ junto con la Observación 3.21, implican la regularidad de $a\mu_{x,y}$ para todo $a \in \mathcal{A}$.

Veamos que $B_\Delta(\cdot, \cdot)$ es una forma sesquilineal. En efecto, para cada $s \in G$ fijo la aplicación $(x, y) \rightarrow \langle \Upsilon(s)x, y \rangle_E$ es una forma sesquilineal, entonces por la identidad de polarización (2.1)

$$\langle \Upsilon(s)x, y \rangle_E = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \langle \Upsilon(s)(x + i^k y), x + i^k y \rangle_E,$$

para todo $x, y \in E$.

Combinando esto último con (4.3), se obtiene

$$\begin{aligned} \langle \Upsilon(s)x, y \rangle_E &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \langle \Upsilon(s)(x + i^k y), x + i^k y \rangle_E \\ &= \sum_{k=0}^3 i^k \int_{\widehat{G}} \overline{(s, \gamma)} d\xi_{\frac{x+i^k y}{2}}(\gamma) \\ &= \int_{\widehat{G}} \overline{(s, \gamma)} d\mu_{x,y}(\gamma), \end{aligned}$$

válido para todo $x, y \in E, s \in G$.

De esta identidad y la linealidad del producto interno resulta

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{G}} \overline{(s, \gamma)} d\mu_{ax+y,z}(\gamma) &= \int_{\widehat{G}} \overline{(s, \gamma)} d\mu_{x,z}(\gamma) + \int_{\widehat{G}} \overline{(s, \gamma)} d\mu_{y,z}(\gamma) \\ &= \int_{\widehat{G}} \overline{(s, \gamma)} d(a\mu_{x,z} + \mu_{y,z})(\gamma). \end{aligned}$$

de donde

$$\int_{\widehat{G}} \overline{(s, \gamma)} d(\rho(\mu_{ax+y,z}(\gamma))) = \int_{\widehat{G}} \overline{(s, \gamma)} d(\rho(a\mu_{x,z}(\gamma) + \mu_{y,z}(\gamma))),$$

para todo $\rho \in \mathcal{A}_*^+$. De la regularidad de las medidas $\mu_{x+z,y}, a\mu_{x,z} + \mu_{y,z}$, se deduce que

$$\mu_{ax+z,y} = a\mu_{x,z} + \mu_{y,z},$$

y por lo tanto $B_\Delta(\cdot, \cdot)$ es lineal en la primera componente para todo $\Delta \in \mathbb{B}(\widehat{G})$.

Para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ y $x \in E$ se cumple

$$\langle \Upsilon(s)(\lambda x), \lambda x \rangle_E = |\lambda|^2 \langle \Upsilon(s)x, x \rangle_E.$$

De donde

$$\int_{\widehat{G}} \overline{(s, \gamma)} d\xi_{\lambda x}(\gamma) = \int_{\widehat{G}} \overline{(s, \gamma)} d(|\lambda|^2 \xi_x(\gamma)).$$

Como $|\lambda|^2 \xi_x$ es una medida regular positiva a valores en $\mathcal{A}$, la unicidad de la medida $\xi_{\lambda x}$ implica que

$$\xi_{\lambda x}(\cdot) = |\lambda|^2 \xi_x(\cdot).$$

Usando este hecho, para todo $\Delta \in \mathbb{B}(\widehat{G})$ resulta

- (a) $\xi_0(\Delta) = 0$.
- (b) $\xi_{\frac{x-y}{2}}(\Delta) = \xi_{-(\frac{y-x}{2})}(\Delta) = \xi_{\frac{y-x}{2}}(\Delta)$.
- (c) $\xi_{\frac{x-iy}{2}}(\Delta) = \xi_{-i(\frac{y+ix}{2})}(\Delta) = \xi_{\frac{y+ix}{2}}(\Delta)$.
- (d) $\xi_{\frac{x+iy}{2}}(\Delta) = \xi_{i(\frac{y-ix}{2})}(\Delta) = \xi_{\frac{y-ix}{2}}(\Delta)$.

De donde

$$\begin{aligned} B_{\Delta}(x, y)^* &= (\xi_{\frac{x+y}{2}}(\Delta) - \xi_{\frac{x-y}{2}}(\Delta) + i\xi_{\frac{x+iy}{2}}(\Delta) - i\xi_{\frac{x-iy}{2}}(\Delta))^* \\ &= \xi_{\frac{x+y}{2}}(\Delta) - \xi_{\frac{x-y}{2}}(\Delta) - i\xi_{\frac{x+iy}{2}}(\Delta) + i\xi_{\frac{x-iy}{2}}(\Delta) \\ &= \xi_{\frac{y+x}{2}}(\Delta) - \xi_{\frac{y-x}{2}}(\Delta) + i\xi_{\frac{y+ix}{2}}(\Delta) - i\xi_{\frac{y-ix}{2}}(\Delta) \\ &= B_{\Delta}(y, x). \end{aligned}$$

Veamos ahora B_{Δ} es acotado. Como B_{Δ} es forma sesquilineal satisface

$$B_{\Delta}(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^4 i^k B(x + i^k y, x + i^k y),$$

de manera que, basta con probar que B_{Δ} es continua en la diagonal. De la definición de B_{Δ} se tiene

$$\begin{aligned} B_{\Delta}(x, x) &= \xi_x(\Delta) - \xi_0(\Delta) + i\xi_{\frac{x+ix}{2}}(\Delta) - i\xi_{\frac{x-ix}{2}}(\Delta) \\ &= \xi_x(\Delta) + \frac{i}{2}\xi_x(\Delta) - \frac{i}{2}\xi_x(\Delta) \\ &= \xi_x(\Delta). \end{aligned}$$

Así que

$$\|B_{\Delta}(x, x)\|_{\mathcal{A}} = \|\xi_x(\Delta)\|_{\mathcal{A}}.$$

Por otra parte, como ξ_x es medida positiva y aditiva entonces

$$\xi_x(\widehat{G}) - \xi_x(\Delta) = \xi_x(\widehat{G} \setminus \Delta) \geq 0,$$

por la Proposición 1.16, tenemos

$$\|\xi_x(\Delta)\|_{\mathcal{A}} \leq \|\xi_x(\widehat{G})\|_{\mathcal{A}},$$

de donde

$$\begin{aligned} \|B_{\Delta}(x, x)\|_{\mathcal{A}} &= \|\xi_x(\Delta)\|_{\mathcal{A}} \\ &\leq \|\xi_x(\widehat{G})\|_{\mathcal{A}} \\ &= \left\| \int_{\widehat{G}} \overline{(e, \gamma)} d\xi_x(\gamma) \right\|_{\mathcal{A}} \\ &= \|\langle \Upsilon(e)x, x \rangle_E\|_{\mathcal{A}} \leq \|\Upsilon(e)\| \|x\|_E^2. \end{aligned}$$

Esta identidad implica que B_{Δ} es acotado, más aún es acotado independientemente de la escogencia de Δ .

Por el Lema 4.2 a cada Boreliano Δ le corresponde un único operador $T_{\Delta} \in B_{\mathcal{A}}^*(E)$ tal que

$$B_{\Delta}(x, y) = \langle T_{\Delta}x, y \rangle_E, x, y \in E.$$

Estas observaciones implican que la función $\Sigma : B(\widehat{G}) \rightarrow B_{\mathcal{A}}^*(E)$ dada por

$$\Sigma(\Delta) = T_{\Delta},$$

está bien definida, y satisface

$$\langle \Sigma(\Delta)x, y \rangle_E = \langle T_{\Delta}x, y \rangle_E = B_{\Delta}(x, y) = \mu_{x,y}(\Delta). \quad (4.6)$$

Además para cada $\rho \in \mathcal{A}_*^+$ tenemos

$$\rho(\langle \Sigma(\Delta)x, y \rangle_E) = \rho(\mu_{x,y}(\Delta))$$

De esta igualdad se deduce que $\Sigma(\cdot)$ es una medida regular y positiva en el sentido de la topología gramiana, ya que $\mu_{x,y}(\cdot)$ una medida regular y positiva en el sentido de la topología $\sigma(\mathcal{A}, \mathcal{A}_*^+)$. Adicionalmente (4.6) implica que

$$\begin{aligned} \langle \Upsilon(s)x, y \rangle_E &= \int_{\widehat{G}} \overline{(s, \gamma)} d\mu_{x,y}(\gamma) \\ &= \int_{\widehat{G}} \overline{(s, \gamma)} d(\langle \Sigma(\gamma)x, y \rangle_E), \end{aligned}$$

para todo $s \in G$ y $x, y \in E$. Por lo tanto

$$\Upsilon(s) = \int_{\hat{G}} \overline{(s, \gamma)} d\Sigma(\gamma), s \in G.$$

□

Bibliografía

- [1] N. AKHIEZER AND I. GLAZMAN. *Theory of linear operators in Hilbert space*. Transl. from the Russian (Two volumes bound as one). Repr. of the 1961 and 1963 transl. New York, NY: Dover Publications. xiv, 147, iv, 1993.
- [2] N. ARONSZAJN. *Theory of reproducing kernels*. Trans. Am. Math. Soc. 68, 337-404 (1950).
- [3] W. ARVESON. *Notes on Measure and Integration in Locally Compact Spaces*. Unpublished lecture notes, available from <http://math.berkeley.edu/~arveson/Dvi/rieszMarkov.pdf>.
- [4] W. ARVESON. *A Short Course On Spectral Theory*. Springer Graduate Texts in Mathematics volume 209, published 6 November, 2001.
- [5] R. G. BARTLE. A general bilinear vector integral. *Studia Math.* 15 (1956), 337-352.
- [6] R. BRUZUAL, M. DOMÍNGUEZ. *Equivalence between the dilation and lifting properties of an ordered group through multiplicative families of isometries. A version of the commutant lifting theorem on some lexicographic groups*. *Integral Equations Oper. Theory* 40 (2001) 1-15.
- [7] R. BRUZUAL AND M. DOMÍNGUEZ. *Dilatación, extensión y representación de formas definidas positivas*. Publicaciones del Postgrado en Matemática de la Facultad de Ciencias de la UCV, 30 Aniversario (2006).
- [8] H. BREZIS. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Series Universitext, Springer Verlag 2010.
- [9] M. COTLAR, R. BRUZUAL, P. ALEGRÍA, M. DOMÍNGUEZ, J. GIMÉNEZ Y S. MARCANTOGNINI. *Extensión y representación de formas invariantes en la teoría de interpolación, predicción y dilatación*. Tercera Escuela Venezolana de Matemáticas, (1990).
- [10] I. DOBRAKOV. *On integration in Banach spaces I*. *Czech. Math. J.* 20 (1970), 511-536.
- [11] I. DOBRAKOV. *On integration in Banach spaces II*. *Czech. Math. J.* 20 (1970), 681-695.
- [12] N. DUNFORD AND J. SCHWARTZ. *Linear Operators, volume I*, Interscience, New York (1958).
- [13] K. DAVIDSON. *C*-algebras by Example*. Fields Institute Monographs, Amer. Math. Soc. (1996).
- [14] J. DIESTEL AND J.J. UHL, JR. *Vector Measures*. Amer. Math. Soc. Surveys 15, Providence, R. I., 1977.
- [15] J. DIXMIER. *C*-algebras*. Translated by Francis Jellet. North-Holland Mathematical Library. Vol. 15. Amsterdam - New York - Oxford: North-Holland Publishing Company. XIII, (1977).
- [16] M. DOMÍNGUEZ. *Interpolation and prediction problems for connected compact abelian groups*. *Integral Equations Operator Theory*, 40, 212-230 (2001).
- [17] R. DOUGLAS. *Banach algebra techniques in operator theory*. Academic press (1972).

- [18] P. FALB. *On a theorem of Bochner*. Publications mathématiques de L'I.H.É.S, tome 36(1969), p. 56-67. Citado en página(s) 1, 50
- [19] S. ITOH. *Reproducing kernels in modules over C^* -algebras and their applications*. Bull. Kyushu Inst. Tech. (Math. Natur. Sci.) No.37.1990. pp.1-20.
- [20] V.F.R. JONES. *Von Neuman Algebras*. Unpublished lecture notes available from <http://math.berkeley.edu/~vfr/MATH20909/VonNeumann2009.pdf>.
- [21] R. V. KADISON, J. R. RINGROSE. *Fundamentals of the theory of operator algebras*. Vol. I: Elementary theory. 2nd printing with correct. 2nd printing with correct. Graduate Studies in Mathematics. 15. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS). xv, (1997).
- [22] Y. KAKIHARA. *On a Hilbert module over an operator algebra and its application to harmonic analysis*. Kodai Math. J. 6, 289-300 (1983). Citado en página(s) 2, 30, 39, 40, 50
- [23] I. KAPLANSKY. *Modules over operator algebras*. Am. J. Math. 75, 839-858 (1953). Citado en página(s) 1
- [24] E.C. LANCE. *Hilbert C^* -modules a toolkit for operator algebraist*. Cambridge University Press (1995). Citado en página(s) 2, 13, 14, 15
- [25] A. V. LÓPEZ, A. E. PEDRO. *Un curso de análisis funcional*. España, editorial AVL, 1997.
- [26] V.M. MANUILOV. *Adjointability of operators on Hilbert C^* -modules*. Acta Math. Univ. Comen., New Ser. 65, No.2, 161-169 (1996).
- [27] V.M. MANUILOV, E.V. TROITSKY. *Hilbert C^* and W^* -modules and their morphisms*. J. Math. Sci., New York 98, No.2, 137-201 (2000). Citado en página(s) 2
- [28] V. M. MANUILOV, E. V.TROITSKY. *Hilbert C^* -modules*. Transl. Math. Monographs 226. Amer. Math. Soc. Providence, 2005. Citado en página(s) 13
- [29] G.J. MURPHY. *C^* -Algebras and operator theory*, Academic Press, New York, 1990. Citado en página(s) 8
- [30] M.A. NAIMARK. *Normed Algebras*. Wolters-Noordhoff Publishing. Groningen, The Netherlands 1972.
- [31] M. NAKAMURA, H. UMEGAKI. A remark on theorems of Stone and Bochner. Proc. Japan Acad. 27, 506-507 (1951).
- [32] W.L PASCHKE. *Inner product modules over B^* -algebras*. Trans. Amer. Math. Soc. 182 (1973), 26-39. Citado en página(s) 29
- [33] W. RUDIN. *Fourier analysis on groups*. Interscience, 1962. Citado en página(s) 1
- [34] W. RUDIN. *Real and complex analysis*. Mc Graw-Hill, 1966.
- [35] Z. SASVÁRI. *Positive definite and definitizable functions*. Akademie Verlag, 1994. Citado en página(s) 12
- [36] S. SAKAI. *C^* -algebras and W^* -algebras*. Springer Verlag, Berlin,1971. Citado en página(s) 37
- [37] S. SAKAI. *A characterization of W^* -algebras*. Pacific. J. Math. 6,763-773. 1956. Citado en página(s) 37

- [38] V. S. SUNDER. *Functional Analysis Spectral Theory*. Birkhäuser advanced texts, Birkhäuser Berlin: 1998.
- [39] V.S. SUNDER. *Von Neumann Algebras*. Un published lecture notes available from <http://www.imsc.res.in/~sunder/atvn.pdf>.
- [40] F. H. SZAFRANIEC. *Murphy's positive definite kernels and Hilbert C^* -modules reorganized*. Edinburg Mathematical Society, arxiv: 0906.540 V1 [math.OH] 30 Jun 2009.
- [41] B. SZ.-NAGY, C. FOIAS. *Harmonic analysis of operators on Hilbert space*. North Holland Publishing Co. (1970).
- [42] A. WEIL. *L'integration dans les groupes topologiques et ses applications*. Gauthiers-Villars, Paris, 1938. Citado en página(s) 1
- [43] C. ZWARICH. *Von Neumann algebras for abstract harmonic analysis*. Master Thesis, University of Waterloo, Ontario, Canada, 2008.